

1. Найдите все значения a , при которых система уравнений имеет ровно два различных решения:

$$\begin{cases} (x + y^2 - 1)(y - \sqrt{6}|x|) = 0 \\ 2ay + x = 1 + a^2 \end{cases}$$

2. Найдите все значения c , при каждом из которых множество точек плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2 - 16x + 10y + 65}{x^2 + y^2 - 14x + 12y + 79} \leq 0 \\ (x - c)(y + c) = 0 \end{cases},$$

является отрезком.

3. Найдите все положительные a , при которых уравнение

$$\frac{2\pi a + \arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x) - ax}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = 0$$

имеет ровно три различных решения, принадлежащих множеству $(-\infty; 7\pi]$.

4. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 4, точки E и F — середины рёбер AB и $B_1 C$ соответственно, а точка P расположена на ребре DC так, что $CP = 3PD$. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости $EF P$.

5. Точка P — середина ребра AD прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с отношением рёбер $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 1$. Найдите угол между прямой PC_1 и плоскостью CDA_1 .

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковая грань — равносторонний треугольник со стороной 2. Точка Q — центр грани SCD . Найдите расстояние и угол между прямыми BC и AQ .

7. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 6 млн рублей?

8. У Робинзона есть два участка, каждый площадью 10 соток. На каждом участке можно выращивать батат и кукурузу, участки можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность батата на первом участке составляет 150 кг/сотка, а на втором — 120 кг/сотка. Урожайность кукурузы на первом участке составляет 120 кг/сотка, а на втором — 150 кг/сотка. Робинзон может обменивать батат в соотношении 0,5 кг свинины за 1 кг батата, а кукурузу — в соотношении 0,3 кг свинины за 1 кг кукурузы. Какое наибольшее количество свинины может получить Робинзон, занимаясь только выращиванием батата и кукурузы?

9. Последовательность a_1, a_2, \dots, a_6 состоит из чисел множества $\{0, 1, \dots, 9\}$. Пусть A_k — среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k -го. Известно, что $A_1 = 1$, $A_2 = 2$.

- а) Приведите пример такой последовательности, для которой $A_3 = 1,6$.
- б) Существует ли такая последовательность, для которой $A_3 = 3$?
- в) Найдите наибольшее возможное значение A_3 .

10. В каждой клетке квадратной таблицы 6×6 стоит натуральное число, не превосходящее 6. Аня в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Боря в каждой строке находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел.

- а) Может ли сумма у Ани получиться в два раза больше, чем сумма у Бори?
- б) Может ли сумма у Ани получиться в шесть раз больше, чем сумма у Бори?
- в) В какое наибольшее число раз сумма у Ани может быть больше, чем сумма у Бори?