Задача 3.1. Вычислить определитель
а) разложив его по элементам *i*-й строки;
б) разложив его по элементам *j*-го столбца;

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$, $i=2$, $j=3$;

2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \end{vmatrix}$, $i=3$, $j=1$;

3) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $i=3$, $j=2$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 10 & -1 & 5 \\ 3 & -15 & -6 & 13 \end{vmatrix}$, $i=2$, $j=4$;

5) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $i=4$, $j=2$;

6) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$, $i=4$, $j=3$;

7) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 5 \end{vmatrix}$, $i=3$, $j=1$;

8) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$, $i=1$, $j=4$;

9) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$, $i=2$, $j=2$;

10) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$, $i=4$, $j=3$;

11) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, i=2, j=1;

12) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & 8 \end{vmatrix}$, i=3, j=3;

13) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$, i=3, j=4;

14) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$, i=1, j=2;

15) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, i=2, j=1;

16) $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, i=3, j=2;

17) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, i=4, j=3;

18) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, i=2, j=2;

19) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{vmatrix}$, i=3, j=3;

20) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$, i=1, j=2;

21) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, i=3, j=2;

22) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, i=4, j=4;

23) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, i=2, j=3;

24) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 10 & -15 \\ -2 & 7 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & 5 & 13 \end{vmatrix}$, i=1, j=1;

25) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, i=4, j=1;

26) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, i=3, j=3;

27) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, i=2, j=1;

28) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$, i=3, j=4;

29) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$, i=1, j=4; 30) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, i=4, j=2.

Пример 3.1

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **а) разложив его по элементам первой строки; б) разложив его по элементам третьего столбца; в) получив предварительно нули в первой строке.**

Решение

а) Поскольку определитель равен сумме произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения, то мы можем разложить данный определитель по первой строке следующим образом

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot A_{11} - 1 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{14}. \qquad (3.1)$$

Вычислим отдельно алгебраические дополнения A_{11}, A_{12}, A_{14} используя правило треугольников, т.к. каждое из них представляет собой определитель третьего порядка. Можно не вычислять значение A_{13}, т.к. выражение $0 \cdot A_{13}$ принимает значение 0 при любом значении A_{13}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) -$$

$$- 0 \cdot 5 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 3 = 60 + 0 + 1 - 0 + 8 - 3 = 66;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 5 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 -$$

$$- 0 \cdot 5 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \cdot 3) = -(15 + 0 - 2 - 0 + 2 - 0) = -15;$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 5 \cdot 2 -$$

$$- 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 5 \cdot (-1) - 4 \cdot 0 \cdot 2) = -(2 + 0 + 40 - 2 + 5 - 0) = -45.$$

Подставив найденные значения в выражение (3.1), получим

$$\Delta = 3 \cdot 66 - 1 \cdot (-15) + 0 + 1 \cdot (-45) = 198 + 15 - 45 = 168.$$

Ответ: 168.

б) Определитель равен сумме произведений элементов любого столбца на их алгебраические дополнения, значит можно разложить данный определитель по третьему столбцу

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{23} + 5 \cdot A_{33} + 2 \cdot A_{43}. \tag{3.2}$$

Вычислим отдельно алгебраические дополнения A_{23}, A_{33}, A_{43} (не вычисляем значение A_{13}, т.к. $0 \cdot A_{13} = 0$)

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(9 + 0 + 2 - 2 - 3 - 0) = -6;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 36 - 1 + 0 - 8 - 0 + 3 = 30;$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-12 + 1 + 0 - 0 - 0 - 1) = 12.$$

Подставив найденные значения в выражение (3.2), получим

$$\Delta = 0 + 1 \cdot (-6) + 5 \cdot 30 + 2 \cdot 12 = 0 - 6 + 150 + 24 = 168.$$

Ответ: 168.

в) Значение определителя не измениться, если к элементам одного столбца (строки) прибавить элементы другого столбца (строки), умноженные на одно и тоже число, отличное от нуля. Используя данное свойство определителя, преобразуем его к виду, когда он содержит первую строку с максимальным количеством нулей

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 3\text{ столбец} + 2\text{ столбец} \\ 3\text{ столбец} \cdot (-3) + 1\text{ столбец} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -1 \\ -7 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

После преобразований, вычислим определитель, разложив его на сумму произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения (аналогично пункту **а)**)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -1 \\ -7 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{14} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -7 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(0 + 6 - 140 - 0 - 10 - 24) = 168.$$

Ответ: 168.

Задача 3.2. Выполнив действия над матрицами, найти матрицу *K*. Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $K = 3A^T B - 2CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & -7 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

2) $K = 4AB + 6C^T D$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 6 & -7 \end{pmatrix};$$

3) $K = 2AB - 4CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

4) $K = 4AB + 6CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

5) $K = 5A^T B + 2CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

6) $K = 5A^T B - 2CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & -7 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & -7 \end{pmatrix};$$

7) $K = 4AB - 3CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$

8) $K = 4A^T B - 5CD$,

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ -4 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

9) $K = 3AB - 4CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix};$$

10) $K = -6AB - 3CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$

11) $K = 5AB - 3CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

12) $K = 5AB - 2C^T D$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix};$$

13) $K = 6AB - 3CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

14) $K = 5A^T B - 6CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

15) $K = AB - 4CD^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

16) $K = 2A^T B - 3CD$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

17) $K = AB - 5CD$,

$$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ -3 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 1 & 4\\ 1 & 3 & -4 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 3\\ 2 & 0\\ 4 & -6\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 2\\ -5 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

18) $K = 4AB - 5CD^T$,

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & -5 & 0\\ 4 & 0 & 5 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix};$$

19) $K = -6AB - 3CD$,

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\\ 5 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 6 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix};$$

20) $K = 4A^T B - 5CD$,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 0 & 4\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & 0 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -3 & 1\end{pmatrix};$$

21) $K = 5AB - 4C^T D$,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & -7\\ 2 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 4 & 5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 5 & 1\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 3 & 0\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix};$$

22) $K = 4AB - 3CD^T$,

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4 & 0\\ 1 & -2 & 5 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\ -2 & 3 & 3\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 5\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix};$$

23) $K = 4AB - 6CD^T$,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 6 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & -2 & 0\end{pmatrix};$$

24) $K = 3A^T B - 5CD$,

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ -4 & 5 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 0\\ -4 & 1 & 0 & -3\\ 1 & 5 & 2 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -5\\ 0 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 5\\ 2 & -4 & 1 & 0\end{pmatrix};$$

25) $K=-6AB+2CD^T$,

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-4&0\\5&1&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&2&-1\\0&1&6\\2&0&3\\5&1&4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&5&3\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3&1&-2\\0&2&5\\1&-3&0\end{pmatrix};$$

26) $K=5AB-3CD$,

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\\1&0\\0&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&3&2&6\\1&0&4&1&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&2&0\\-3&0&2\\1&5&0\\-1&3&6\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3&4&0&1&2\\0&3&1&1&4\\2&5&3&0&0\end{pmatrix};$$

27) $K=4AB-6CD$,

$$A=\begin{pmatrix}4&2&2\\0&-1&1\\2&0&3\\4&-3&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&-4&1&4\\1&3&4&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&3\\-5&3\\2&0\\1&6\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-2&1&1&2\\5&2&3&-1\end{pmatrix};$$

28) $K=7AB-3CD^T$,

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\-2&4&6&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&2&3\\3&-1&0\\1&0&1\\2&-4&5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&0&3\\-5&1&2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&4&-5\\0&1&2\\3&0&1\end{pmatrix};$$

29) $K=5A^TB-6CD$,

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&4\\2&1&0\\0&-1&-4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&1&-3\\2&-1&1&0\\1&0&3&2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&3\\-5&0\\1&3\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\-1&5&1&0\end{pmatrix};$$

30) $K=3AB-5CD^T$,

$$A=\begin{pmatrix}1&3&0&-2\\-2&0&4&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&3&-5\\1&0&4\\2&1&0\\-3&2&-7\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5&-4&1\\2&1&3\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0&4&1\\2&3&0\\5&0&2\end{pmatrix}.$$

Пример 3.2

Выполнив действия над матрицами, найти матрицу $K=-4AB+3CD^T$,

$$A=\begin{pmatrix}2&3&2&0\\1&-2&6&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\0&1&4\\1&2&3\\2&1&4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&1&-3\\-2&4&0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3&1&-2\\0&5&-1\\1&4&0\end{pmatrix};$$

Решение

Выполним вычисление по действиям, в соответствии с порядком и правилами действий над матрицами.

Вычислим произведение $A \cdot B$ (каждый элемент i-й строки ($i = 1,2$) матрицы A умножаем на соответствующие элементы j-го столбца ($j = 1,2,3$) матрицы B, полученные произведения складываем)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot3+3\cdot0-2\cdot1+0\cdot2 & -2\cdot2+3\cdot1-2\cdot2+0\cdot1 & -2\cdot1+3\cdot4-2\cdot3+0\cdot4 \\ 1\cdot3-2\cdot0+6\cdot1+1\cdot2 & -1\cdot2-2\cdot1+6\cdot2+1\cdot1 & -1\cdot1-2\cdot4+6\cdot3+1\cdot4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6+0-2+0 & -4+3-4+0 & -2+12-6+0 \\ 3-0+6+2 & -2-2+12+1 & -1-8+18+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 4 \\ 11 & 9 & 13 \end{pmatrix}.$$

Найдем значение выражения $C \cdot D^T$

$$C \cdot D^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot3+1\cdot1-3\cdot(-2) & 2\cdot0+1\cdot5-3\cdot(-1) & 2\cdot1+1\cdot4-3\cdot0 \\ -2\cdot3+4\cdot1+0\cdot(-2) & -2\cdot0+4\cdot5+0\cdot(-1) & -2\cdot1+4\cdot4+0\cdot0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6+1+6 & 0+5+3 & 2+4-0 \\ -6+4+0 & 0+20+0 & -2+16+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 6 \\ -2 & 20 & 14 \end{pmatrix}.$$

Умножим каждый элемент матрицы $A \cdot B$ на (-4)

$$-4AB = -4 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 & 4 \\ 11 & 9 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cdot4 & -4\cdot(-5) & -4\cdot4 \\ -4\cdot11 & -4\cdot9 & -4\cdot13 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 20 & -16 \\ -44 & -36 & -52 \end{pmatrix},$$

каждый элемент матрицы $C \cdot D^T$ на 3

$$3CD^T = 3 \cdot \begin{pmatrix} 13 & 8 & 6 \\ -2 & 20 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot13 & 3\cdot8 & 3\cdot6 \\ 3\cdot(-2) & 3\cdot20 & 3\cdot14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 24 & 18 \\ -6 & 60 & 42 \end{pmatrix}.$$

Полученные матрицы сложим и найдем матрицу K

$$K = \begin{pmatrix} -16 & 20 & -16 \\ -44 & -36 & -52 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 39 & 24 & 18 \\ -6 & 60 & 42 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -16+39 & 20+24 & -16+18 \\ -44-6 & -36+60 & -52+42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 44 & 2 \\ -50 & 24 & -10 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $K = \begin{pmatrix} 23 & 44 & 2 \\ -50 & 24 & -10 \end{pmatrix}.$

Задача 3.3. Исследовать систему линейных уравнений на совместность, определить количество решений и в случае совместности системы решить ее

а) матричным методом (методом обратной матрицы);

б) по формулам Крамера.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\begin{cases} 2x+6y+5z=3, \\ 5x+3y-2z=-7, \\ 7x+4y-3z=-10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+2y+z=-1, \\ -3x+4y-2z=-7, \\ 2x+3y-4z=-1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+5y-4z=1, \\ 4x+5y-2z=1, \\ x-6y-4z=11; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x-4y+5z=-4, \\ -x+4y-3z=0, \\ 7x+3y-4z=-6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x+5y-z=13, \\ 3x+y-6z=2, \\ 10x-3y-4z=10; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+4y-5z=1, \\ 3x-5y+7z=-9, \\ x+6y-5z=5; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x-3y+z=-2, \\ -8x+4y-2z=-4, \\ 2x+7y-z=9; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x+3y-z=1, \\ x+6y-5z=-4, \\ 2x-7y-4z=-2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x+5y-8z=11, \\ 4x+y-2z=6, \\ x-2y-3z=-3; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x+2y-z=0, \\ -3x+y+5z=6, \\ 2x-4y-4z=-6; \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x+y-5z=0, \\ 8x-4y-5z=7, \\ 2x-3y-4z=-3; \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x+7y+4z=-1, \\ 4x+5y-2z=1, \\ x-4y-5z=10; \end{cases}$

13) $\begin{cases} x-2y+z=2, \\ 3x+y-2z=8, \\ 2x-3y-4z=-1; \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2x-y+z=1, \\ 3x-4y+5z=0, \\ 2x-5y+4z=-4; \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x+5y-4z=3, \\ 4x-5y-2z=-3, \\ x+3y-4z=0; \end{cases}$

16) $\begin{cases} x+2y+6z=-3, \\ 4x+3y-2z=9, \\ 2x-3y+4z=-5; \end{cases}$

17) $\begin{cases} -2x+4y-z=1, \\ 3x+5y-5z=3, \\ 2x-7y+4z=-1; \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x+7y-4z=2, \\ 4x+3y-6z=6, \\ x-5y-4z=-1; \end{cases}$

19) $\begin{cases} x+2y+4z=-7, \\ 3x-4y+2z=-1, \\ 2x+3y+z=-6; \end{cases}$

20) $\begin{cases} 2x+y-z=-3, \\ 3x+4y-5z=8, \\ 2x-3y+5z=3; \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2x-7y-4z=9, \\ 4x-5y+3z=-2, \\ x+6y-4z=-3; \end{cases}$

22) $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ -3x+5y-z=-1, \\ 2x+3y-z=7; \end{cases}$

23) $\begin{cases} 2x+7y-5z=4, \\ 3x+y-5z=-1, \\ 2x-8y-4z=-10; \end{cases}$

24) $\begin{cases} 2x-5y+4z=-1, \\ 4x+5y-2z=3, \\ x-6y-4z=-10; \end{cases}$

25) $\begin{cases} x+2y+z=0, \\ 5x-4y+2z=11, \\ 2x+3y-4z=-5; \end{cases}$

26) $\begin{cases} 2x-y-8z=0, \\ 3x+5y-3z=13, \\ 2x+7y-4z=16; \end{cases}$

27) $\begin{cases} 2x+7y-4z=5, \\ 4x-5y-3z=-4, \\ x+5y-4z=2; \end{cases}$

28) $\begin{cases} x+7y+z=-2, \\ -4x+5y-2z=6, \\ 2x+6y-4z=2; \end{cases}$

29) $\begin{cases} 4x+y-z=4, \\ 3x+y-5z=-1, \\ 2x-7y+4z=-1; \end{cases}$

30) $\begin{cases} 2x+7y-4z=7, \\ 4x+y-2z=7, \\ x-2y-4z=4. \end{cases}$

Пример 3.3

Исследовать систему линейных уравнений на совместность, определить количество решений и в случае совместности системы решить ее

а) матричным методом (методом обратной матрицы);

б) по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=3, \\ -x-y+2z=-3, \\ 3x+y+z=2; \end{cases}$$

Решение

По теореме Кронекера – Капелли система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрица этой системы.

Введем обозначения: A – основная матрица системы, $A|B$ – расширенная матрица системы, тогда

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ A|B=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Поскольку ранг матрицы системы равен числу ненулевых строк данной матрицы, если она приведена к ступенчатому виду, и элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, то приведем матрицы A и $A|B$ к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований

$$A|B=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]\sim\begin{bmatrix} \text{1 строка и 2 строка} \\ \text{поменяем местами} \end{bmatrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} \text{1 стр.}\cdot 2+\text{2 стр.} \\ \text{1 стр.}\cdot 3+\text{3 стр.} \end{bmatrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 7 & -7 \end{array}\right]\sim\begin{bmatrix} \text{2 стр.}\cdot 2+ \\ +\text{3 стр.} \end{bmatrix}\sim\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 13 \end{matrix}}^{A} & \begin{matrix} -3 \\ -3 \\ -13 \end{matrix} \end{array}\right]}_{A|B}.$$

Таким образом, $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} A|B=3$, следовательно, система совместна. Кроме того, ранг матриц совпадает с количеством переменных, поэтому система имеет единственное решение.

а) Для решения системы матричным методом запишем ее в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

или

$$A \cdot X = B,$$

где A – основная матрица системы, B – матрица-столбец свободных коэффициентов, X – матрица-столбец неизвестных.

Вычислим определитель матрицы коэффициентов

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 18 - 3 - 4 + 3 = 13.$$

Поскольку $|A| = 13 \neq 0$, то матрица A не вырождена, значит существует обратная матрица, и решение системы можно найти по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B, \tag{3.3}$$

где A^{-1} – обратная матрица для матрицы A.

Обратную матрицу найдем по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

Подставив найденные значения алгебраических дополнений элементов матрицы A в формулу (3.4), получим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & 5 \\ 7 & 5 & -3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу неизвестных по формуле (3.3)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & 5 \\ 7 & 5 & -3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -9+12+10 \\ 21-15-6 \\ 6-21+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$.

Ответ: $(1;0;1)$.

б) Ранее было определено, что система имеет единственное решение, следовательно, возможно решение по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \tag{3.5}$$

где Δ – определитель матрицы системы, Δ_x, Δ_y и Δ_z – определители, полученные из определителя основной матрицы заменой соответственно первого, второго и третьего столбца на столбец свободных коэффициентов.

Вычислим значения выражений необходимые для формул (3.5)

$$\Delta = 13 \text{ (вычислено выше)},$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 3 + 12 - 2 - 6 + 9 = 13,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 18 - 9 - 8 + 3 = 0,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 3 - 27 + 9 + 6 + 6 = -13.$$

Найдем значения переменных, подставив полученные значения в формулы (3.5)

$$x = \frac{13}{13} = 1,\ y = \frac{0}{13} = 0,\ z = \frac{-13}{13} = -1.$$

Ответ: $(1;0;1)$.

Задача 3.4. Решить систему линейных уравнений методом Жордана – Гаусса. Найти общее решение системы

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 2, \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_4 - x_5 = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = -1, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 = -4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 + 5x_5 = 3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 4; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 5; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -2, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 = -3; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 3; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1; \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 3; \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 6x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

14) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 7x_5 = 2, \\ x_1 - 3x_2 - 8x_3 + 9x_4 - 3x_5 = 0; \end{cases}$

15) $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 2, \\ x_1 - 13x_2 - 3x_3 + x_5 = 4; \end{cases}$

16) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = -2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 2x_5 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 = 1; \end{cases}$

17) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 + 13x_4 = 6, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 6x_4 = -2; \end{cases}$

18) $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + 5x_3 + 2x_2 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -4, \\ 4x_1 - 7x_2 + 9x_3 + x_5 = 5; \end{cases}$

19) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_4 = -10, \\ 3x_1 + x_2 - 9x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0; \end{cases}$

20) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_5 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 3x_5 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases}$

21) $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 7x_5 = -8, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 1; \end{cases}$

22) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 9, \\ 3x_1 + 8x_2 - 4x_3 + x_4 = 6, \\ -4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3; \end{cases}$

23) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 5, \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \end{cases}$

24) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 4; \end{cases}$

25) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 4; \end{cases}$

26) $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 + x_5 = -2, \\ x_1 + 8x_2 - 6x_3 - x_4 = -3; \end{cases}$

27) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 - 3x_5 = 4, \\ 6x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \end{cases}$

28) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 6x_4 = -1; \end{cases}$

29) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 3x_4 + x_5 = 11, \\ x_1 - 9x_2 + 11x_3 - 5x_4 = -10, \\ 7x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_5 = 1; \end{cases}$

30) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 12, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Пример 3.4

Решить систему линейных уравнений методом Жордана – Гаусса. Найти
а) общее решение системы и выполнить проверку;
б) частное решение системы;
в) базисное решение системы.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 2, \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$$

Решение

а) Составим расширенную матрицу системы

$$A|B = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right].$$

С помощью элементарных преобразований будем выполнять следующие операции: в строке выберем элемент – разрешающий элемент, в столбце, соответствующем выбранному элементу получим нули, далее будем повторять аналогичные действия (выбирать элементы необходимо в разных строках) до тех пор, пока разрешающие элементы не будут выбраны во всех строках

$$A|B = \left[\begin{array}{ccccc|c} \langle 1 \rangle & 3 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{l} 1\ \text{строка} \cdot (-2) + 2\ \text{строка} \\ 1\ \text{строка} \cdot 1 + 3\ \text{строка} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 4 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[3\ \text{строка} \cdot (-1)\right] \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccccc|c}1&3&-1&2&1&-1\\0&-7&4&-2&-4&4\\0&-7&\langle 1\rangle&-3&0&-2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{l}3\text{ строка}\cdot(-4)+2\text{ строка}\\3\text{ строка}\cdot 1+1\text{ строка}\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-4&0&-1&1&-3\\0&21&0&11&-4&12\\0&-7&1&-3&0&-2\end{array}\right]\sim\left[2\text{ строка}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-4&0&-1&1&-3\\0&-21/4&0&-11/4&\langle 1\rangle&-3\\0&-7&1&-3&0&-2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccccc|c}1&5/4&0&7/4&0&0\\0&-21/4&0&-11/4&1&-3\\0&-7&1&-3&0&-2\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{l}2\text{ строка и 3 строка}\\\text{поменяем местами}\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccccc|c}1&5/4&0&7/4&0&0\\0&-7&1&-3&0&-2\\0&-21/4&0&-11/4&1&-3\end{array}\right].$$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A|B = 3$, значит, система совместна. Кроме того, ранг матриц меньше количества переменных, поэтому система имеет бесконечно много решений. Исходная система эквивалентна следующей системе уравнений, которую записываем на основе последней матрицы

$$\begin{cases}x_1+\dfrac{5}{4}x_2+\dfrac{7}{4}x_4=0,\\-7x_2+x_3-3x_4=-2,\\-\dfrac{21}{4}x_2-\dfrac{11}{4}x_4+x_5=-3,\end{cases}$$

x_1, x_3, x_5 – базисные переменные, x_2, x_4 – свободные переменные.

Выразим из каждого уравнения базисные переменные через свободные

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{5}{4}x_2-\dfrac{7}{4}x_4,\\x_3=7x_2+3x_4-2,\\x_5=\dfrac{21}{4}x_2+\dfrac{11}{4}x_4-3,\end{cases}$$

Свободные переменные принимают произвольные значения, а значения базисных переменных вычисляются в соответствии с полученными выражениями.

Пусть $x_2=a$, $x_4=b$, тогда получим общее решение системы

$$X=\left(-\frac{5}{4}a-\frac{7}{4}b;\,a;\,7a+3b-2;\,b;\,\frac{21}{4}a+\frac{11}{4}b-3\right),\ a\in R,\ b\in R.$$

Для проверки подставим найденное решение в исходную систему

$$\begin{cases} -\dfrac{5}{4}a-\dfrac{7}{4}b+3a-(7a+3b-2)+2b+\dfrac{21}{4}a+\dfrac{11}{4}b-3=-1, \\ 2\cdot\left(-\dfrac{5}{4}a-\dfrac{7}{4}b\right)-a+2\cdot(7a+3b-2)+3b-2\cdot\left(\dfrac{21}{4}a+\dfrac{11}{4}b-3\right)=2, \\ -\left(-\dfrac{5}{4}a-\dfrac{7}{4}b\right)+4a+b-\left(\dfrac{21}{4}a+\dfrac{11}{4}b-3\right)=3. \end{cases}$$

Упростив каждое уравнение в системе, получим

$$\begin{cases} -1=-1, \\ 2=2, \\ 3=3. \end{cases}$$

Все равенства верные, значит, решение системы найдено верно.

Ответ: $X=\left(-\dfrac{5}{4}a-\dfrac{7}{4}b;\, a;\, 7a+3b-2;\, b;\, \dfrac{21}{4}a+\dfrac{11}{4}b-3\right),\, a\in R,\, b\in R$.

б) Для нахождения частного решения необходимо свободным переменным придать какие–либо значения. Положив, $x_2=a=1$, $x_4=b=-1$, получим частное решение системы

$$X_{\text{част}}=\left(\frac{1}{2};\, 1;\, 2;\, -1;\, -\frac{1}{2}\right).$$

Ответ: $X_{\text{част}}=\left(\dfrac{1}{2};\, 1;\, 2;\, -1;\, -\dfrac{1}{2}\right)$.

в) Для нахождения базисного решения необходимо свободным переменным придать значение ноль. Положив, $x_2=a=0$, $x_4=b=0$, получим базисное решение системы

$$X_{\text{базисное}}=(0;\, 0;\, -2;\, 0;\, -3).$$

Ответ: $X_{\text{базисное}}=(0;\, 0;\, -2;\, 0;\, -3)$.

Задача 3.7. Предприятие выпускает три вида изделий с использованием четырех типов сырья. Нормы затрат сырья на каждое изделие определены матрицей затрат *A*, себестоимость единицы сырья отражена в матрице *C*. Найти общие затраты на сырье при плане выпуска продукции, указанном в матрице *B*.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам с 1 по 15:

1) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 23 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$;

2) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 20 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 7 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$;

3) $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 23 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 6 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$;

4) $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & 2 \\ 7 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 32 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$;

5) $A=\begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 25 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 8 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$;

6) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 27 \\ 13 \\ 6 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 9 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$;

7) $A=\begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 17 \\ 15 \\ 13 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$;

8) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 22 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$;

9) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 & 0 \\ 9 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 18 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

10) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 19 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 & 4 \end{bmatrix}$;

11) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

12) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 13 \\ 24 \\ 14 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 8 & 4 \end{bmatrix}$;

13) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 16 \\ 21 \\ 15 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 & 4 \end{bmatrix}$;

14) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 15 \\ 25 \\ 5 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$;

15) $A=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 8 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 13 \\ 23 \\ 11 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 4 \end{bmatrix}$;

Предприятие выпускает три вида изделий с использованием четырех типов сырья. Нормы затрат сырья на каждое изделие определены матрицей затрат *A*, стоимость доставки единицы сырья каждого типа отражена в матрице *D*. Найти общие затраты на транспортировку сырья при плане выпуска продукции, указанном в матрице *B*.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам с 16 по 30:

16) $A=\begin{bmatrix}5&1&8&2\\4&0&4&3\\7&5&1&4\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}20\\11\\14\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}6&5&1&4\end{bmatrix}$;

17) $A=\begin{bmatrix}4&1&7&2\\4&2&3&3\\6&5&1&4\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}20\\12\\13\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}6&4&1&3\end{bmatrix}$;

18) $A=\begin{bmatrix}5&3&8&1\\5&0&4&8\\7&6&2&5\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}21\\11\\15\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}7&5&2&4\end{bmatrix}$;

19) $A=\begin{bmatrix}7&1&2&2\\4&7&8&3\\0&5&1&4\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}22\\10\\14\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}1&3&1&4\end{bmatrix}$;

20) $A=\begin{bmatrix}5&6&8&1\\6&0&4&2\\7&3&1&8\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}10\\11\\24\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}6&5&5&7\end{bmatrix}$;

21) $A=\begin{bmatrix}9&1&0&2\\4&2&4&3\\1&5&5&4\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}19\\13\\14\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}2&8&1&4\end{bmatrix}$;

22) $A=\begin{bmatrix}5&2&8&1\\9&0&5&3\\7&7&1&6\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}25\\9\\10\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}5&4&1&3\end{bmatrix}$;

23) $A=\begin{bmatrix}4&1&2&2\\3&0&7&3\\7&5&1&1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}19\\12\\17\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}4&5&1&3\end{bmatrix}$;

24) $A=\begin{bmatrix}2&1&7&2\\4&2&4&9\\0&5&1&4\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}14\\18\\20\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}4&5&9&4\end{bmatrix}$;

25) $A=\begin{bmatrix}5&3&8&5\\3&0&6&3\\7&5&1&4\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}8\\21\\14\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}6&7&1&2\end{bmatrix}$;

26) $A=\begin{bmatrix}7&1&8&2\\4&3&4&5\\2&4&1&5\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}10\\17\\9\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}5&7&8&4\end{bmatrix}$;

27) $A=\begin{bmatrix}5&7&0&2\\4&3&4&3\\7&5&2&4\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}19\\11\\9\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}3&5&2&7\end{bmatrix}$;

28) $A=\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 8 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 25 \\ 11 \\ 16 \end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$;

29) $A=\begin{bmatrix} 5 & 5 & 8 & 2 \\ 7 & 9 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$;

30) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 22 \\ 11 \\ 13 \end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix} 8 & 4 & 9 & 4 \end{bmatrix}$;

Пример 3.7

Предприятие выпускает три вида изделий с использованием четырех типов сырья. Нормы затрат сырья на каждое изделие определены матрицей затрат $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$**, себестоимость единицы сырья отражена в матрице** $C=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$**. Найти общие затраты на сырье при плане выпуска продукции, указанном в матрице** $B=\begin{bmatrix} 21 \\ 12 \\ 31 \end{bmatrix}$.

Решение

Найдем затраты каждого вида сырья на выпуск всей запланированной продукции

$$A^T B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 21 \\ 12 \\ 31 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 42+36+0 \\ 84+24+93 \\ 126+24+31 \\ 42+36+124 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 78 \\ 201 \\ 181 \\ 202 \end{bmatrix}.$$

Вычислим общие затраты на все сырье

$$C\cdot\left(A^T B\right)=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 78 \\ 201 \\ 181 \\ 202 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 312+402+181+606 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1501 \end{bmatrix}.$$

Ответ: общие затраты на сырье составят 1501 ден.ед.

Задача 3.8. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Расходы каждого типа сырья по видам продукции и запасы сырья на предприятии даны в таблице. Определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	1	5	2	910
II	3	2	3	870
III	2	1	4	740

2)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	2	4	1	830
II	4	3	4	1230
III	1	2	3	690

3)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	1	4	2	890
II	3	2	3	830
III	2	1	2	510

4)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	1	3	770
II	2	2	3	780
III	3	1	2	650

5)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	1	5	2	410
II	3	2	3	630
III	2	1	4	550

6)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	4	2	1	780
II	1	2	2	550
III	3	3	4	1090

7)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	1	4	2	380
II	3	2	3	630
III	2	1	2	410

8)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	2	3	5	1040
II	3	2	1	650
III	1	1	3	500

9)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	4	1	5	980
II	2	4	3	990
III	3	5	2	1130

10)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	4	2	1	610
II	1	2	2	320
III	3	3	4	730

11)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	2	4	970
II	1	5	1	810
III	4	3	2	1000

12)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	4	1	5	860
II	2	4	3	570
III	3	5	2	650

13)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	1	4	2	790
II	3	2	3	870
III	2	1	2	540

14)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	2	3	5	1030
II	3	2	1	620
III	1	1	3	510

15)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	1	3	600
II	2	2	3	510
III	3	1	2	530

16)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	4	2	1	750
II	1	2	2	540
III	3	3	4	1050

17)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	2	2	770
II	1	3	1	570
III	4	3	2	1000

18)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	2	4	700
II	1	5	1	340
III	4	3	2	710

19)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	5	3	3	1210
II	1	1	2	430
III	3	4	3	1110

20)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	2	3	5	1080
II	3	2	1	670
III	1	1	3	530

21)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	4	1	5	1060
II	2	4	3	1000
III	3	5	2	1130

22)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	2	4	1	800
II	4	3	4	1200
III	1	2	3	650

23)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	5	3	3	900
II	1	1	2	290
III	3	4	3	690

24)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	1	5	2	930
II	3	2	3	830
III	2	1	4	690

25)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	2	2	560
II	1	3	1	280
III	4	3	2	710

26)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	2	4	920
II	1	5	1	840
III	4	3	2	970

27)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	5	3	3	1160
II	1	1	2	410
III	3	4	3	1090

28)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	2	4	1	810
II	4	3	4	1150
III	1	2	3	630

29)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	2	2	740
II	1	3	1	580
III	4	3	2	970

30)

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	3	1	3	750
II	2	2	3	760
III	3	1	2	650

Пример 3.8

Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Расходы каждого типа сырья по видам продукции и запасы сырья на предприятии даны в таблице

Тип сырья	Расход сырья по видам продукции, вес.ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
I	2	1	1	550
II	3	2	1	850
III	1	1	3	750

Определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Решение

Объем выпуска продукции – количество изделий каждого вида, которое может выпускать предприятие при заданных запасах сырья, если даны расходы каждого типа по видам продукции.

Исходя из этого, обозначим x_1 – количество производимых изделий первого вида, x_2 – количество производимых изделий второго вида, x_3 – количество производимых изделий третьего вида.

В соответствии с введенными обозначениями и данными о расходе и запасам сырья по видам изделий составим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 550, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 850, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 750. \end{cases}$$

Значения переменных x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие этой системе, и будут определять объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья. Решим систему методом Жордана – Гаусса

$$A|B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 550 \\ 3 & 2 & 1 & 850 \\ \langle 1 \rangle & 1 & 3 & 750 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -5 & -950 \\ 0 & -1 & -8 & -1400 \\ 1 & 1 & 3 & 750 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \langle 1 \rangle & 5 & 950 \\ 0 & -1 & -8 & -1400 \\ 1 & 1 & 3 & 750 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & 950 \\ 0 & 0 & -3 & -450 \\ 1 & 0 & -2 & -200 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & 950 \\ 0 & 0 & \langle 1 \rangle & 150 \\ 1 & 0 & -2 & -200 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \\ 1 & 0 & 0 & 100 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 200, \\ x_3 = 150, \\ x_1 = 100. \end{cases}$$

Ответ: при заданных запасах сырья возможно производить 100 изделий первого вида, 200 изделий второго вида, 150 изделий третьего вида.