Задача 4.1. Даны векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и вектор $\vec{a}$. Доказать, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{a}$ в этом базисе

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\vec{e}_1=(5;4;1)$, $\vec{e}_2=(-3;5;2)$, $\vec{e}_3=(2;-1;3)$, $\vec{a}=(7;23;4)$;
2) $\vec{e}_1=(2;-1;4)$, $\vec{e}_2=(-3;0;-2)$, $\vec{e}_3=(4;5;-3)$, $\vec{a}=(0;11;-14)$;
3) $\vec{e}_1=(-1;1;2)$, $\vec{e}_2=(2;-3;-5)$, $\vec{e}_3=(-6;3;-1)$, $\vec{a}=(28;-19;-7)$;
4) $\vec{e}_1=(1;3;4)$, $\vec{e}_2=(-2;5;0)$, $\vec{e}_3=(3;-2;-4)$, $\vec{a}=(13;-5;-4)$;
5) $\vec{e}_1=(1;-1;1)$, $\vec{e}_2=(-5;-3;1)$, $\vec{e}_3=(2;-1;0)$, $\vec{a}=(-15;-10;5)$;
6) $\vec{e}_1=(3;1;2)$, $\vec{e}_2=(-7;-2;-4)$, $\vec{e}_3=(-4;0;3)$, $\vec{a}=(16;6;15)$;
7) $\vec{e}_1=(-3;0;1)$, $\vec{e}_2=(2;7;-3)$, $\vec{e}_3=(-4;3;5)$, $\vec{a}=(-16;33;13)$;
8) $\vec{e}_1=(5;1;2)$, $\vec{e}_2=(-2;1;-3)$, $\vec{e}_3=(4;-3;5)$, $\vec{a}=(15;-15;24)$;
9) $\vec{e}_1=(0;2;-3)$, $\vec{e}_2=(4;-3;-2)$, $\vec{e}_3=(-5;-4;0)$, $\vec{a}=(-19;-5;-4)$;
10) $\vec{e}_1=(3;-1;2)$, $\vec{e}_2=(-2;3;1)$, $\vec{e}_3=(4;-5;-3)$, $\vec{a}=(-3;2;-3)$;
11) $\vec{e}_1=(5;3;1)$, $\vec{e}_2=(-1;2;-3)$, $\vec{e}_3=(3;-4;2)$, $\vec{a}=(-9;34;-20)$;
12) $\vec{e}_1=(3;1;-3)$, $\vec{e}_2=(-2;4;1)$, $\vec{e}_3=(1;-2;5)$, $\vec{a}=(1;12;-20)$;
13) $\vec{e}_1=(6;1;-3)$, $\vec{e}_2=(3;2;1)$, $\vec{e}_3=(-1;-3;4)$, $\vec{a}=(15;6;-17)$;
14) $\vec{e}_1=(4;2;3)$, $\vec{e}_2=(-3;1;-8)$, $\vec{e}_3=(2;-4;5)$, $\vec{a}=(-12;14;-31)$;
15) $\vec{e}_1=(-2;1;3)$, $\vec{e}_2=(3;-6;2)$, $\vec{e}_3=(-5;-3;-1)$, $\vec{a}=(31;-6;22)$;
16) $\vec{e}_1=(1;3;6)$, $\vec{e}_2=(-3;4;-5)$, $\vec{e}_3=(1;-7;2)$, $\vec{a}=(-2;17;5)$;
17) $\vec{e}_1=(7;2;1)$, $\vec{e}_2=(5;1;-2)$, $\vec{e}_3=(-3;4;5)$, $\vec{a}=(26;11;1)$;
18) $\vec{e}_1=(3;5;4)$, $\vec{e}_2=(-2;7;-5)$, $\vec{e}_3=(6;-2;1)$, $\vec{a}=(6;-9;22)$;
19) $\vec{e}_1=(5;3;2)$, $\vec{e}_2=(2;-5;1)$, $\vec{e}_3=(-7;4;-3)$, $\vec{a}=(36;1;15)$;
20) $\vec{e}_1=(11;1;2)$, $\vec{e}_2=(-3;3;4)$, $\vec{e}_3=(-4;-2;7)$, $\vec{a}=(-5;11;-15)$;

21) $\vec{e}_1 = (9; 5; 3)$, $\vec{e}_2 = (-3; 2; 1)$, $\vec{e}_3 = (4; -7; 4)$, $\vec{a} = (-10; -13; 8)$;
22) $\vec{e}_1 = (7; 2; 1)$, $\vec{e}_2 = (3; -5; 6)$, $\vec{e}_3 = (-6; 4; 5)$, $\vec{a} = (-4; 11; 20)$;
23) $\vec{e}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{e}_2 = (-5; 3; -1)$, $\vec{e}_3 = (-6; 4; 5)$, $\vec{a} = (-4; 11; 20)$;
24) $\vec{e}_1 = (-2; 5; 1)$, $\vec{e}_2 = (3; 2; -7)$, $\vec{e}_3 = (4; -3; 2)$, $\vec{a} = (-4; 22; -13)$;
25) $\vec{e}_1 = (3; 1; 2)$, $\vec{e}_2 = (-4; 3; -1)$, $\vec{e}_3 = (2; 3; 4)$, $\vec{a} = (14; 14; 20)$;
26) $\vec{e}_1 = (3; -1; 2)$, $\vec{e}_2 = (-2; 4; 1)$, $\vec{e}_3 = (4; -5; -1)$, $\vec{a} = (-5; 11; 1)$;
27) $\vec{e}_1 = (4; 5; 1)$, $\vec{e}_2 = (1; 3; 1)$, $\vec{e}_3 = (-3; -6; 7)$, $\vec{a} = (19; 33; 0)$;
28) $\vec{e}_1 = (1; -3; 1)$, $\vec{e}_2 = (-2; -4; 3)$, $\vec{e}_3 = (0; -2; 3)$, $\vec{a} = (-8; -10; 13)$;
29) $\vec{e}_1 = (5; 7; -2)$, $\vec{e}_2 = (-3; 1; 3)$, $\vec{e}_3 = (1; -4; 6)$, $\vec{a} = (14; 9; -1)$;
30) $\vec{e}_1 = (-1; 4; 3)$, $\vec{e}_2 = (3; 2; -4)$, $\vec{e}_3 = (-2; -7; 1)$, $\vec{a} = (6; 20; -3)$.

Пример 4.1

Даны векторы $\vec{e}_1 = (2; -1; 3)$, $\vec{e}_2 = (3; -1; 1)$, $\vec{e}_3 = (-1; 2; 1)$ и вектор $\vec{a} = (3; -3; 2)$. Доказать, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{a}$ в этом базисе

Решение

Базисом в трехмерном векторном пространстве называется совокупность трех линейно независимых векторов, поэтому для доказательства того, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образуют базис, необходимо доказать, что они линейно независимы.

Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ линейно зависимы, если существуют такие числа α, β, γ, не равные одновременно нулю, что

$$\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = \vec{0}. \tag{4.1}$$

В противном случае векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ линейно независимы.

Записывая в выражение (4.1) координаты $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ в виде вектор-столбцов, получим

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача доказательства линейной независимости сводится к решению системы

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta - \gamma = 0, \\ -\alpha - \beta + 2\gamma = 0, \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Жордана – Гаусса

$$A|B=\left[\begin{array}{ccc|c}2&3&-1&0\\-1&-1&2&0\\3&\langle 1\rangle&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}-7&0&-4&0\\2&0&3&0\\3&1&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}-7&0&-4&0\\\langle 1\rangle&0&1,5&0\\3&1&1&0\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}0&0&6,5&0\\1&0&1,5&0\\0&1&-3,5&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}0&0&\langle 1\rangle&0\\1&0&1,5&0\\0&1&-3,5&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}\gamma=0,\\\alpha=0,\\\beta=0.\end{cases}$$

Итак, для данных векторов условие (4.1) выполняется только при $\alpha=\beta=\gamma=0$, следовательно, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ линейно независимые, т.е. они образуют базис в трехмерном векторном пространстве.

Любой вектор данного пространства можно представить и притом единственным способом в виде линейной комбинации векторов базиса

$$x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3=\vec{a}, \tag{4.2}$$

где $(x;\, y;\, z)$ – координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, которые и требуется найти.

Записав координаты $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{a}$ в виде вектор–столбцов в выражении (4.2), составим систему

$$\begin{cases}2x+3y-z=3,\\-x-y+2z=-3,\\3x+y+z=2.\end{cases}$$

Данную систему решаем одним из известных способов (по формулам Крамера, матричным методом или методом Жордана – Гаусса) и получаем

$$x=1,\quad y=0,\quad z=-1.$$

Ответ: $\vec{a}\,(1;\,0;\,-1)_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$.

Задача 4.2. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти а) единичный вектор $\vec{a}_0$; б) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; в) проекцию вектора $\vec{b}$ на ось вектора $\vec{a}$; г) координаты вектора $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\vec{a}=(-3;\,1;\,4)$, $\vec{b}=(1;\,2;\,-2)$, $m=3$, $n=-2$;

2) $\vec{a}=(3;\,-1;\,2)$, $\vec{b}=(-1;\,1;\,-2)$, $m=-4$, $n=0,5$;

3) $\vec{a}=(1;\,-1;\,4)$, $\vec{b}=(2;\,1;\,3)$, $m=-1$, $n=2$;

4) $\vec{a}=(-4;\,1;\,2)$, $\vec{b}=(-1;\,3;\,1)$, $m=-2$, $n=3$;

5) $\vec{a}=(-2;\,-1;\,-4)$, $\vec{b}=(1;\,5;\,-2)$, $m=-3$, $n=-1$;

6) $\vec{a}=(1;\,2;\,2)$, $\vec{b}=(-4;\,1;\,6)$, $m=2$, $n=3$;

7) $\vec{a}=(-6;-3;2)$, $\vec{b}=(3;2;-6)$, $m=-1$, $n=4$;

8) $\vec{a}=(2;1;-2)$, $\vec{b}=(-1;0;-2)$, $m=4$, $n=2$;

9) $\vec{a}=(-2;1;-2)$, $\vec{b}=(12;5;0)$, $m=3$, $n=-3$;

10) $\vec{a}=(8;7;-4)$, $\vec{b}=(2;-1;2)$, $m=-3$, $n=1$;

11) $\vec{a}=(3;0;4)$, $\vec{b}=(2;1;-2)$, $m=-2$, $n=5$;

12) $\vec{a}=(1;-1;6)$, $\vec{b}=(-6;3;2)$, $m=-1$, $n=-5$;

13) $\vec{a}=(8;15;0)$, $\vec{b}=(-2;2;-1)$, $m=-4$, $n=3$;

14) $\vec{a}=(4;19;-2)$, $\vec{b}=(2;-1;-2)$, $m=-1$, $n=5$;

15) $\vec{a}=(6;-3;-2)$, $\vec{b}=(2;-5;2)$, $m=-2$, $n=3$;

16) $\vec{a}=(3;6;-2)$, $\vec{b}=(-2;-1;2)$, $m=-3$, $n=-2$;

17) $\vec{a}=(5;7;-4)$, $\vec{b}=(4;3;0)$, $m=4$, $n=6$;

18) $\vec{a}=(1;-2;-2)$, $\vec{b}=(3;5;2)$, $m=-3$, $n=-6$;

19) $\vec{a}=(2;-2;-1)$, $\vec{b}=(2;1;-2)$, $m=-4$, $n=2$;

20) $\vec{a}=(10;-4;-7)$, $\vec{b}=(2;1;-2)$, $m=-1$, $n=7$;

21) $\vec{a}=(-2;-6;-3)$, $\vec{b}=(2;-4;-7)$, $m=7$, $n=3$;

22) $\vec{a}=(0;7;-24)$, $\vec{b}=(2;-12;1)$, $m=5$, $n=-7$;

23) $\vec{a}=(4;3;-13)$, $\vec{b}=(5;0;7)$, $m=-3$, $n=8$;

24) $\vec{a}=(4;0;-3)$, $\vec{b}=(5;-13;0)$, $m=-8$, $n=-2$;

25) $\vec{a}=(7;0;12)$, $\vec{b}=(3;-2;8)$, $m=-2$, $n=10$;

26) $\vec{a}=(9;13;0)$, $\vec{b}=(-1;1;4)$, $m=-4$, $n=8$;

27) $\vec{a}=(10;7;4)$, $\vec{b}=(-1;2;-8)$, $m=-7$, $n=4$;

28) $\vec{a}=(-2;8;3)$, $\vec{b}=(0;12;-7)$, $m=9$, $n=-6$;

29) $\vec{a}=(-7;-1;4)$, $\vec{b}=(-1;3;2)$, $m=5$, $n=-9$;

30) $\vec{a}=(4;-1;-7)$, $\vec{b}=(11;-3;0)$, $m=-2$, $n=-5$.

Пример 4.2

Даны векторы $\vec{a}=(-2;1;0)$ и $\vec{b}=(-1;2;7)$. Найти а) единичный вектор $\vec{a}_0$; б) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; в) проекцию вектора $\vec{b}$ на ось вектора $\vec{a}$; г) координаты вектора $\vec{c}=-2\vec{a}+6\vec{b}$.

Решение

а) Если задан вектор $\vec{a}\left(a_1, a_2, a_3\right)$, то соответствующий ему единичный вектор имеет координаты

$$\vec{a}_0\left(\frac{a_1}{\left|\vec{a}\right|}, \frac{a_2}{\left|\vec{a}\right|}, \frac{a_3}{\left|\vec{a}\right|}\right), \tag{4.3}$$

где $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ – модуль вектора $\vec{a}\left(a_1, a_2, a_3\right)$.

Найдем модуль вектора $\vec{a} = (-2; 1; 0)$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}.$$

Тогда, подставляя координаты и модуль вектора $\vec{a}$ в формулу (4.3), получим

$$\vec{a}_0\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 0\right).$$

Ответ: $\vec{a}_0\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 0\right)$.

б) Угол φ между двумя векторами можно вычислить по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}, \tag{4.4}$$

где $\vec{a}\cdot\vec{b}$ – скалярное произведение данных векторов, $\left|\vec{a}\right|$ и $\left|\vec{b}\right|$ – их модули.

Координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ даны, поэтому сразу подставим их в формулу (4.4.) и определим косинус искомого угла

$$\cos\varphi = \frac{-2\cdot(-1) + 1\cdot 2 + 0\cdot 7}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2}\cdot\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 7^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{54}} = \frac{4}{3\sqrt{30}},$$

откуда получаем

$$\varphi = \arccos\frac{4}{3\sqrt{30}}.$$

Ответ: $\arccos\frac{4}{3\sqrt{30}}$.

в) По рис. 4 определяем, что

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right|\cos\varphi \text{ или } \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|}.$$

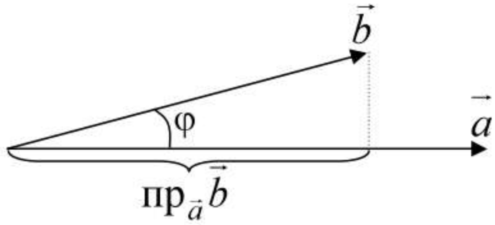

Рис. 4

В предыдущем пункте было найдено

$\left|\vec{b}\right| = 3\sqrt{6}$, $\cos\varphi = \frac{4}{3\sqrt{30}}$, следовательно,

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = 3\sqrt{6}\cdot\frac{4}{3\sqrt{30}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

г) Найдем координаты вектора $\vec{c}$ в соответствии с правилами сложения и умножения вектора на число и порядком арифметических действий

$$\vec{c} = -2\vec{a} + 6\vec{b} = -2\cdot(-2;1;0) + 6\cdot(-1;2;7) =$$
$$= (4;-2;0) + (-6;12;42) = (-2;10;42).$$

Ответ: $(-2;10;42)$.

Задача 4.3. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Необходимо

а) найти векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и вычислить его модуль;

б) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и определить, будут ли векторы компланарны;

в) определить, будут ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ортогональны.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{j} + 4\vec{k}$, $c = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$;

2) $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}$, $c = -1{,}5\vec{i} - 2\vec{j} - 0{,}5\vec{k}$;

3) $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} + 3\vec{j}$, $c = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$;

4) $\vec{a} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = -7\vec{i} + 2\vec{k}$, $c = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$;

5) $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 10\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$, $c = \vec{i} + 5\vec{k}$;

6) $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $c = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$;

7) $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $c = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$;

8) $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}$, $c = -12\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}$;

9) $\vec{a} = -\vec{i} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $c = -2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$;

10) $\vec{a} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + -8\vec{k}$, $c = 9\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}$;

11) $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $c = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$;

12) $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$, $c = 6\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}$;

13) $\vec{a} = 7\vec{i} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -5\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $c = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$;

14) $\vec{a} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$, $c = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$;

15) $\vec{a} = -3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $c = 6\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$;

16) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 8\vec{j}$, $c = 8\vec{i} + 12\vec{j} - 8\vec{k}$;

17) $\vec{a} = -9\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $c = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$;

18) $\vec{a} = 3\vec{i} - 15\vec{j} + 21\vec{k}$, $\vec{b} = 9\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $c = \vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}$;

19) $\vec{a}=5\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$, $c=7\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$;

20) $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=-9\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$, $c=-5\vec{i}+10\vec{j}-20\vec{k}$;

21) $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-6\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-7\vec{j}+5\vec{k}$, $c=3\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$;

22) $\vec{a}=\vec{i}-11\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=7\vec{i}-4\vec{j}-5\vec{k}$, $c=5\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$;

23) $\vec{a}=4\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-5\vec{j}+7\vec{k}$, $c=-2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$;

24) $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k}$, $c=6\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$;

25) $\vec{a}=-3\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}-22\vec{k}$, $c=3\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}$;

26) $\vec{a}=-3\vec{i}+2\vec{j}+7\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+6\vec{k}$, $c=6\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$;

27) $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$, $c=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$;

28) $\vec{a}=5\vec{i}-\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}-5\vec{j}-4\vec{k}$, $c=2\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}$;

29) $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{b}=-9\vec{i}+4\vec{k}$, $c=3\vec{i}-6\vec{j}+9\vec{k}$;

30) $\vec{a}=5\vec{i}-6\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+8\vec{j}-6\vec{k}$, $c=3\vec{j}+4\vec{k}$;

Пример 4.3

Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}$ и $c=5\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$. Необходимо а) найти векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и вычислить его модуль; б) вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и определить, будут ли векторы компланарны; в) определить, будут ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ортогональны.

Решение

а) Векторным произведением двух векторов является вектор, найдем его координаты

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & -7\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -7\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=\vec{i}+13\vec{j}+2\vec{k}$$

и модуль

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{1+169+4}=\sqrt{174}.$$

Ответ: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}+13\vec{j}+2\vec{k}$, $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{174}$.

б) Смешанным произведением трех векторов является число, которое можно вычислить как определитель, составленный из координат данных векторов

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -7\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix}=2-2+0+5-28-0=-23.$$

Если смешанное произведение векторов равно нулю, то эти векторы компланарны, т.к. $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=-23\neq 0$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не являются компланарными.

Ответ: $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=-23$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – не компланарны.

в) Координаты векторов пропорциональны тогда и только тогда, когда векторы являются коллинеарными. Проверим пропорциональность координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$

$$\frac{2}{5}\neq\frac{0}{2}\neq\frac{-1}{1},$$

поскольку равенства не верны, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны.

Скалярное произведение векторов равно нулю тогда и только тогда, когда вектора являются ортогональными. Вычислим скалярное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot 5+1\cdot 2-7\cdot 1=5+2-7=0,$$

т.к. $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$, то вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ортогональны.

Ответ: $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны; $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ортогональны.