Задача 5.1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*. Необходимо

а) написать уравнения сторон треугольника;

б) написать уравнение высоты треугольника проведенной из вершины *C* к стороне *AB*;

в) написать уравнение внутренней биссектрисы угла *BAC* треугольника;

г) написать уравнение медианы треугольника, проведенной из вершины *B* к стороне *AC*;

д) найти углы треугольника и установить его вид (прямоугольный, остроугольный, тупоугольный);

е) найти длины сторон треугольника и определить его тип (разносторонний, равнобедренный, равносторонний);

ж) найти координаты центра тяжести (точка пересечения медиан) и координаты ортоцентра (точка пересечения высот) треугольника;

з) найти расстояние от точки пересечения серединных перпендикуляров треугольника до его вершин и расстояние от точки пересечения биссектрис треугольника до его сторон.

К пунктам а) – г), ж) решения сделать рисунки в системе координат. На рисунках обозначить соответствующие пунктам задачи линии и точки.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $A(3;4),\ B(2;-1),\ C(-5;0)$;
2) $A(-4;-5),\ B(3;3),\ C(5;-2)$;
3) $A(-3;3),\ B(4;-1),\ C(-2;-4)$;
4) $A(3;-2),\ B(-5;-4),\ C(-1;6)$;
5) $A(2;5),\ B(-3;4),\ C(-2;-3)$;
6) $A(-3;-4),\ B(-6;7),\ C(-1;1)$;
7) $A(4;-5),\ B(2;2),\ C(7;4)$;
8) $A(-3;4),\ B(-2;-1),\ C(7;1)$;
9) $A(4;-5),\ B(-3;3),\ C(-5;-2)$;
10) $A(3;5),\ B(-4;-3),\ C(2;-4)$;

11) $A(-3;2), B(-2;-5), C(6;-1)$;
12) $A(6;-4), B(-3;-7), C(-1;2)$;
13) $A(-2;-1), B(7;3), C(4;-3)$;
14) $A(3;4), B(6;2), C(1;1)$;
15) $A(-4;-5), B(-2;2), C(2;-2)$;
16) $A(3;-4), B(2;1), C(-1;-3)$;
17) $A(-4;5), B(3;-3), C(5;2)$;
18) $A(-6;-4), B(3;-7), C(1;2)$;
19) $A(3;2), B(2;-5), C(-6;-1)$;
20) $A(2;1), B(-7;3), C(-4;-3)$;
21) $A(-3;-2), B(5;-4), C(1;6)$;
22) $A(-2;5), B(3;4), C(4;-4)$;
23) $A(-3;-5), B(4;2), C(-2;4)$;
24) $A(3;2), B(-5;4), C(-1;-6)$;
25) $A(2;-5), B(-3;-4), C(2;4)$;
26) $A(-3;-2), B(-2;5), C(6;1)$;
27) $A(-6;4), B(3;7), C(1;-2)$;
28) $A(2;1), B(-7;-3), C(-4;3)$;
29) $A(-3;4), B(-6;-7), C(1;-1)$;
30) $A(4;5), B(2;-2), C(7;-4)$.

Пример 5.1

Даны координаты вершин треугольника *ABC*: $A(4;3), B(-2;1), C(3;-4)$. Необходимо а) написать уравнения сторон треугольника; б) написать уравнение высоты треугольника проведенной из вершины *C* к стороне *AB*; в) написать уравнение внутренней биссектрисы угла *BAC* треугольника; г) написать уравнение медианы треугольника, проведенной из вершины *B* к стороне *AC*; д) найти углы треугольника и установить его вид (прямоугольный, остроугольный, тупоугольный); е) найти длины сторон треугольника и определить его тип (разносторонний, равнобедренный, равносторонний); ж) найти координаты центра тяжести (точка пересечения медиан) и координаты ортоцентра (точка пересечения высот) треугольника; з) найти расстояние от точки пересечения серединных перпендикуляров треугольника до его вершин и расстояние от точки пересечения биссектрис треугольника до его сторон.

Решение

а) Для каждой стороны треугольника известны координаты двух точек, которые лежат на искомых линиях, значит уравнения сторон треугольника – уравнения прямых, проходящих через две заданные точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \tag{5.1}$$

где $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ соответствующие координаты точек.

Таким образом, подставляя в формулу (5.1) координаты соответствующих прямым точек получаем

$$AB:\quad \frac{x-4}{-2-4}=\frac{y-3}{1-3},\ AC:\quad \frac{x-4}{3-4}=\frac{y-3}{-4-3},\ BC:\quad \frac{x+2}{3+2}=\frac{y-1}{-4-1},$$

откуда после преобразований записываем уравнения сторон

$$AB:\quad x-3y+5=0,\quad AC:\quad 7x-y-25=0,\quad BC:\quad x+y+1=0.$$

На рис. 5 изобразим соответствующие сторонам треугольника ABC прямые.

Ответ: $AB:\quad x-3y+5=0$, $AC:\quad 7x-y-25=0$, $BC:\quad x+y+1=0$.

б) Пусть CH – высота, проведенная из вершины C к стороне AB. Поскольку CH проходит через точку C перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$, то составим уравнение прямой по следующей формуле

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, \tag{5.2}$$

где $(a; b)$ – координаты вектора перпендикулярного искомой прямой, $(x_0; y_0)$ – координаты точки, принадлежащей этой прямой. Найдем координаты вектора, перпендикулярного прямой CH, и подставим в формулу (5.2)

$$\overrightarrow{AB}(-6;-2) \perp CH,\ C(3;-4) \in CH,$$

$$CH:\quad -6(x-3) - 2(y+4) = 0,$$

$$3(x-3) + (y+4) = 0,$$

$$3x + y - 5 = 0.$$

На рис. 6 изобразим треугольник и найденную высоту.

Ответ: $CH:\quad 3x + y - 5 = 0$.

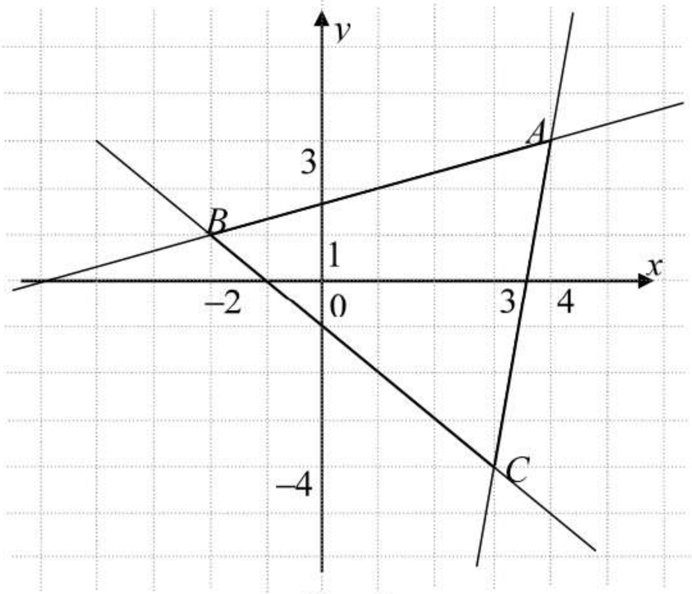

Рис. 5

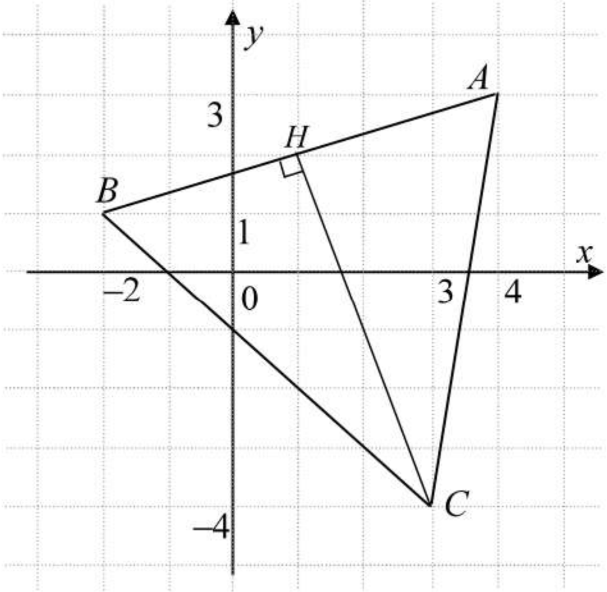

Рис. 6

в) Обозначим AK – внутреннюю биссектрису угла BAC треугольника ABC. По свойству биссектрисы угла треугольника: точка K делит сторону BC заданного треугольника соответственно в отношении $BA : AC$, т.е

$$\frac{BK}{KC} = \frac{BA}{AC}. \tag{5.3}$$

Найдем длины отрезков BA и AC как длины векторов соответственно $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{BA}(6;2) \Rightarrow BA = \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10},$$

$$\overrightarrow{AC}(-1;-7) \Rightarrow AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = 5\sqrt{2},$$

следовательно, по формуле (5.3)

$$\frac{BK}{KC}=\frac{2\sqrt{10}}{5\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}\sqrt{2}}{\sqrt{5^2}\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Для нахождения координат $(x_K; y_K)$ точки K воспользуемся формулами

$$x_K=\frac{x_B+\lambda\cdot x_C}{1+\lambda},\ y_K=\frac{y_B+\lambda\cdot y_C}{1+\lambda},\tag{5.4}$$

где $(x_B; y_B)$ и $(x_C; y_C)$ – координаты соответственно точек B и C, $\lambda=\frac{2}{\sqrt{5}}$, т.е. подставив их в выражения (5.4) получим координаты точки K

$$x_K=\frac{-2+\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 3}{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{-2\sqrt{5}+6}{\sqrt{5}+2},\ y_K=\frac{1+\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot(-4)}{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}-8}{\sqrt{5}+2},$$

таким образом, уравнение внутренней биссектрисы угла BAC треугольника ABC составим как уравнение прямой, проходящей через точки $A(4;3)$ и $K\left(\frac{-2\sqrt{5}+6}{\sqrt{5}+2};\frac{\sqrt{5}-8}{\sqrt{5}+2}\right)$ по формуле (5.1)

$$AK:\quad \frac{x-4}{\frac{-2\sqrt{5}+6}{\sqrt{5}+2}-4}=\frac{y-3}{\frac{\sqrt{5}-8}{\sqrt{5}+2}-3},$$

$$\frac{x-4}{-2\sqrt{5}+6-4\sqrt{5}-8}=\frac{y-3}{\sqrt{5}-8-3\sqrt{5}-6},$$

$$\frac{x-4}{-6\sqrt{5}-2}=\frac{y-3}{-2\sqrt{5}-14},$$

после преобразований получим

$$(\sqrt{5}+7)x-(3\sqrt{5}+1)y+5\sqrt{5}-25=0.$$

Ответ: $AK: (\sqrt{5}+7)x-(3\sqrt{5}+1)y+5\sqrt{5}-25=0$ (рис. 7).

г) медиана BB_1 треугольника ABC делит сторону AC на две равные части, т.е. точка B_1 является серединой отрезка AC. Исходя из этого, можно найти координаты $(x_{B_1}; y_{B_1})$ точки B_1

$$x_{B_1}=\frac{x_A+x_C}{2},\ y_{B_1}=\frac{y_A+y_C}{2},\tag{5.5}$$

где $(x_A; y_A)$ и $(x_C; y_C)$ – координаты соответственно точек A и C, подставив которые в формулы (5.5) получим

$$x_{B_1} = \frac{4+3}{2} = 3{,}5;\ y_{B_1} = \frac{3+(-4)}{2} = -0{,}5.$$

Уравнение медианы BB_1 треугольника ABC составим как уравнение прямой, проходящей через точки $B(-2;1)$ и $B_1(3{,}5;-0{,}5)$ по формуле (5.1)

$$BB_1:\quad \frac{x-(-2)}{3{,}5-(-2)} = \frac{y-1}{-0{,}5-1},$$
$$3x+11y-5=0.$$

Ответ: $BB_1: 3x+11y-5=0$ (рис. 8).

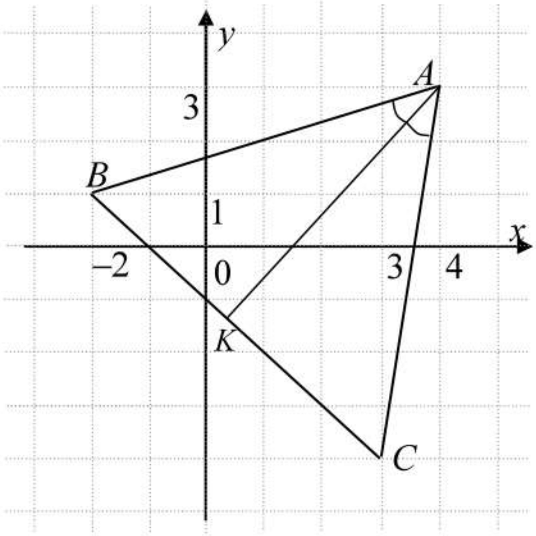

Рис. 7

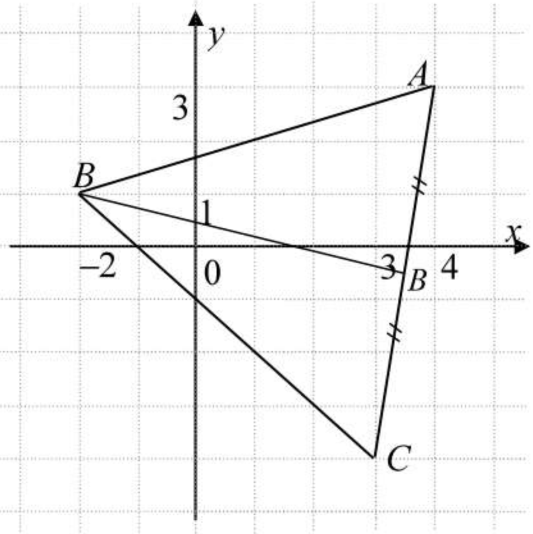

Рис. 8

д) Углы треугольника ABC найдем как углы между векторами, исходящими из соответствующих вершин данного треугольника, т.е

$$\angle ABC = \angle\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right),\ \angle BAC = \angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right),\ \angle ACB = \angle\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right).$$

Углы между векторами вычислим по формуле (4.4), для которой потребуются скалярные произведения векторов $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

Найдем координаты и модули векторов, необходимых для вычисления углов

$$\overrightarrow{BA}(6;2),\ \left|\overrightarrow{BA}\right| = 2\sqrt{10},\ \overrightarrow{BC}(5,-5),\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = 5\sqrt{2};$$
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA},\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|,\ \overrightarrow{AC}(-1,-7),\ \left|\overrightarrow{AC}\right| = 5\sqrt{2};$$
$$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC},\ \left|\overrightarrow{CA}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|,\ \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC},\ \left|\overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|.$$

Подставляя найденные данные в формулу (4.4), получим

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{6\cdot 5 + 2\cdot(-5)}{2\sqrt{10}\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{-6\cdot(-1) - 2\cdot(-7)}{2\sqrt{10}\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1\cdot(-5)+7\cdot 5}{5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}}=\frac{3}{5},$$

таким образом, $\cos\angle ABC=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\angle BAC=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\angle ACB=\dfrac{3}{5}$.

Поскольку значения косинусов всех найденных углов положительны, то треугольник ABC является остроугольным.

Ответ: треугольник ABC остроугольный, $\cos\angle ABC=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\angle BAC=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\angle ACB=\dfrac{3}{5}$.

е) Длины сторон треугольника уже были найдены в предыдущем пункте как длины соответствующих векторов, т.е.

$$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\sqrt{10},\ AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=5\sqrt{2},\ BC=\left|\overrightarrow{BC}\right|=5\sqrt{2}.$$

Стороны AC и BC треугольника ABC равны, значит треугольник является равнобедренным с основанием AB.

Ответ: треугольник ABC равнобедренный с основанием AB, $AB=2\sqrt{10}$, $AC=BC=5\sqrt{2}$.

ж) Пусть M – центр тяжести треугольника ABC, тогда координаты $(x_M;y_M)$ точки M можно найти, по формулам (5.6)

$$x_M=\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\ y_M=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}, \tag{5.6}$$

где $(x_A;y_A)$, $(x_B;y_B)$ и $(x_C;y_C)$ – координаты соответственно точек A, B и C, следовательно,

$$x_M=\frac{4+(-2)+3}{3}=\frac{5}{3},\ y_M=\frac{3+1+(-4)}{3}=0\quad M\left(\frac{5}{3};0\right).$$

Пусть R – ортоцентр треугольника ABC. Найдем координаты точки R как координаты точки пересечения высот треугольника. Уравнение высоты CH было найдено в пункте **б)**. Найдем уравнение высоты AH_1:

$$\overrightarrow{BC}(5;-5)\perp AH_1,\ A(4;3)\in AH_1,$$
$$AH_1:\quad 5(x-4)-5(y-3)=0,$$
$$x-y-1=0.$$

Поскольку $R=CH\cap AH_1$, то решение системы

$$\begin{cases}x-y-1=0,\\ 3x+y-5=0\end{cases}$$

является координатами точки R, откуда находим $R(1{,}5;\,0{,}5)$.

Ответ: $M\left(\dfrac{5}{3};0\right)$ – центр тяжести, $R\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ – ортоцентр треугольника ABC (рис. 9).

з) Расстояние d_1 от точки пересечения серединных перпендикуляров треугольника ABC до каждой из его вершин одинаково, т.к. точка пересечения серединных перпендикуляров – центр окружности описанной около данного треугольника, а d_1 – радиус этой окружности, тогда

$$d_1 = R = \frac{abc}{4S_{\Delta ABC}}, \qquad (5.7)$$

где $S_{\Delta ABC}$ – площадь треугольника ABC; a, b, c – длины его сторон.

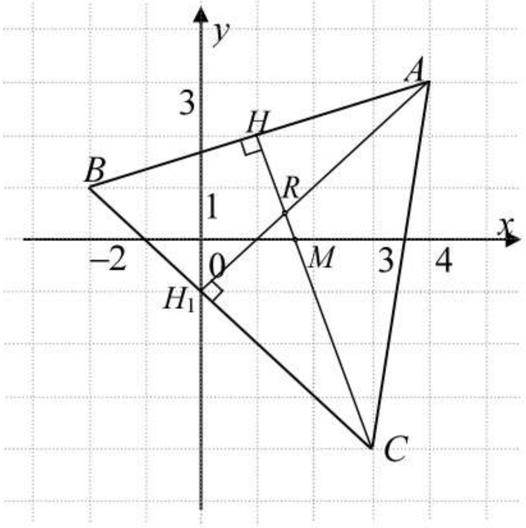

Рис. 9

Найдем площадь треугольника, используя формулы (5.8)

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot CH,\ CH = \rho(C,\ AB) = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad (5.8)$$

где $ax + by + c = 0$ – уравнение прямой AB, $(x_C;\, y_C)$ – координаты точки C, $c(C,\ AB)$ – расстояние от точки C до прямой AB.

В предыдущих пунктах было найдено

$$AB:\ x - 3y + 5 = 0,\ C(3;-4),\ AB = 2\sqrt{10},\ AC = 5\sqrt{2},\ BC = 5\sqrt{2}.$$

Подставив эти данные в формулы (5.8), получим

$$CH = \frac{|3 - 3\cdot(-4) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{20}{\sqrt{10}},\ S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\frac{20}{\sqrt{10}} = 20,$$

Следовательно, по формуле (5.7)

$$d_1 = \frac{2\sqrt{10}\cdot 5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}}{4\cdot 20} = \frac{5\sqrt{10}}{4}.$$

Расстояние d_2 от точки пересечения биссектрис треугольника ABC до каждой из его стороны одинаково, т.к. точка пересечения биссектрис – центр окружности вписанной в данный треугольник, а d_2 – радиус этой окружности, тогда

$$d_2 = r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{a+b+c}, \qquad (5.9)$$

где $S_{\Delta ABC}$ – площадь треугольника ABC; a, b, c – длины его сторон.

Все данные для вычислений найдены выше, следовательно, по формуле (5.9)

$$d_2 = \frac{2 \cdot 20}{2\sqrt{10} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{10} + 5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{10}}{1 + \sqrt{5}}.$$

Ответ: $d_1 = \frac{5\sqrt{10}}{4}$ – расстояние от точки пересечения серединных перпендикуляров треугольника до его вершин, $d_2 = \frac{2\sqrt{10}}{1+\sqrt{5}}$ – расстояние от точки пересечения биссектрис треугольника до его сторон.

Задача 5.2. Фиксированные издержки на предприятии при выпуске некоторой продукции составляют F руб. в месяц, переменные издержки – V_0 руб. за единицу продукции, при этом выручка составляет R_0 руб. за единицу изготовленной продукции. Составить функцию прибыли $P(q)$ (q – количество произведенной продукции); построить ее график и определить точку безубыточности.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $F = 10\,000, \quad V_0 = 35, \quad R_0 = 50$;
2) $F = 4000, \quad V_0 = 5, \quad R_0 = 15$;
3) $F = 12\,000, \quad V_0 = 30, \quad R_0 = 55$;
4) $F = 7000, \quad V_0 = 20, \quad R_0 = 30$;
5) $F = 1000, \quad V_0 = 5, \quad R_0 = 15$;
6) $F = 11\,500, \quad V_0 = 45, \quad R_0 = 55$;
7) $F = 3000, \quad V_0 = 5, \quad R_0 = 10$;
8) $F = 7500, \quad V_0 = 30, \quad R_0 = 45$;
9) $F = 16\,000, \quad V_0 = 50, \quad R_0 = 65$;
10) $F = 13\,000, \quad V_0 = 40, \quad R_0 = 50$;
11) $F = 11\,000, \quad V_0 = 30, \quad R_0 = 45$;
12) $F = 13\,500, \quad V_0 = 25, \quad R_0 = 30$;
13) $F = 4000, \quad V_0 = 10, \quad R_0 = 20$;
14) $F = 6500, \quad V_0 = 20, \quad R_0 = 25$;
15) $F = 10\,500, \quad V_0 = 40, \quad R_0 = 60$;
16) $F = 2000, \quad V_0 = 5, \quad R_0 = 10$;
17) $F = 15\,000, \quad V_0 = 50, \quad R_0 = 60$;
18) $F = 18\,000, \quad V_0 = 70, \quad R_0 = 90$;
19) $F = 9000, \quad V_0 = 30, \quad R_0 = 55$;
20) $F = 9500, \quad V_0 = 25, \quad R_0 = 35$;
21) $F = 6000, \quad V_0 = 15, \quad R_0 = 25$;
22) $F = 18\,500, \quad V_0 = 65, \quad R_0 = 75$;
23) $F = 8500, \quad V_0 = 25, \quad R_0 = 40$;
24) $F = 2500, \quad V_0 = 15, \quad R_0 = 20$;
25) $F = 8000, \quad V_0 = 30, \quad R_0 = 45$;
26) $F = 19\,500, \quad V_0 = 65, \quad R_0 = 85$;
27) $F = 5000, \quad V_0 = 15, \quad R_0 = 25$;
28) $F = 14\,000, \quad V_0 = 45, \quad R_0 = 50$;
29) $F = 19\,000, \quad V_0 = 70, \quad R_0 = 75$;
30) $F = 1500, \quad V_0 = 5, \quad R_0 = 25$.

Пример 5.2

Фиксированные издержки на предприятии при выпуске некоторой продукции составляют $F = 1500$ руб. в месяц, переменные издержки – $V_0 = 12$ руб. за единицу продукции, при этом выручка составляет $R_0 = 22$ руб. за

единицу изготовленной продукции. Составить функцию прибыли $P(q)$ (q – количество произведенной продукции); построить ее график и определить точку безубыточности.

Решение

Вычислим совокупные издержки на производстве при выпуске q единиц некоторой продукции

$$C(q) = F + V_0 q \quad \Rightarrow \quad C(q) = 1500 + 12q.$$

Если будет продано q единиц продукции, то совокупный доход составит

$$R(q) = R_0 q \quad \Rightarrow \quad R(q) = 22q.$$

Исходя из полученных функций совокупного дохода и совокупных издержек, найдем функцию прибыли

$$P(q) = R(q) - C(q),$$
$$P(q) = 22q - (1500 + 12q),$$
$$P(q) = 10q - 1500.$$

Точка безубыточности – точка, в которой прибыль равна нулю, или точка, в которой совокупные издержки равны совокупному доходу

$$C(q) = R(q) \quad \Rightarrow \quad 1500 + 12q = 22q,$$

откуда находим

$$q = 150 \text{ – точка безубыточности.}$$

Для построения графика (рис. 10) функции прибыли найдем еще одну точку

$$q = 300, \quad P(300) = 1500.$$

Ответ: функция прибыли $P(q) = 10q - 1500$, точка безубыточности $q = 150$.

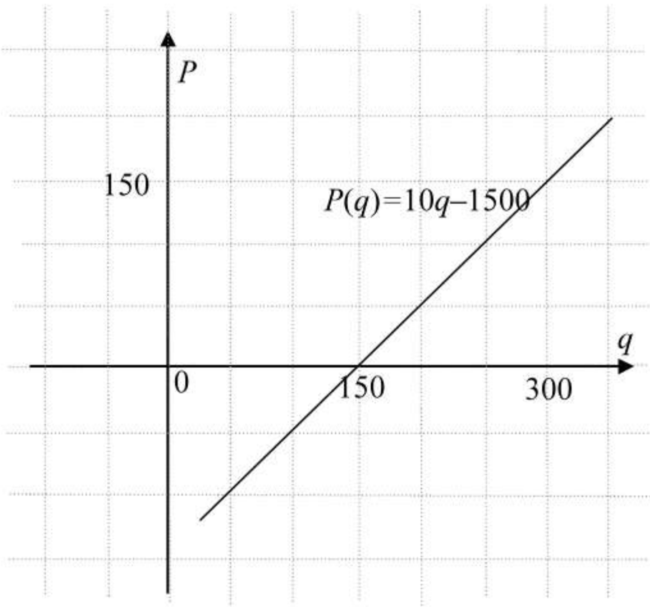

Рис. 10

Задача 5.3. Законы спроса и предложения на некоторый товар соответственно определяются уравнениями $p=p_D(q)$, $p=p_S(q)$, где p – цена на товар, q – количество товара. Предполагается, что спрос определяется только ценой товара на рынке p_C, а предложение – только ценой p_S, получаемой поставщиками. Необходимо

а) определить точку рыночного равновесия;

б) точку равновесия после введения налога, равного t. Определить увеличение цены и уменьшение равновесного объема продаж;

в) найти субсидию s, которая приведет к увеличению объема продаж на q_0 ед. относительно изначального (определенного в пункте а));

г) найти новую точку равновесия и доход правительства при введении налога, пропорционального цене и равного N%;

д) определить, сколько денег будет израсходовано правительством на скупку излишка при установлении минимальной цены, равной p_0.

К каждому пункту решения сделать рисунок в системе координат. На рисунке обозначить соответствующие пункту задачи линии и точки.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) $p_D=-2q+10,\quad p_S=q+4,\quad t=2,\quad q_0=2,\quad N=10,\quad p_0=8;$

2) $p_D=-3q+13,\quad p_S=q+1,\quad t=3,\quad q_0=1,\quad N=25,\quad p_0=9;$

3) $p_D=-q+7,\quad p_S=q+1,\quad t=1,\quad q_0=2,\quad N=15,\quad p_0=6;$

4) $p_D=-2q+12,\quad p_S=2q+4,\quad t=2,\quad q_0=3,\quad N=20,\quad p_0=10;$

5) $p_D=-3q+17,\quad p_S=2q+2,\quad t=3,\quad q_0=1,\quad N=25,\quad p_0=8;$

6) $p_D=-3q+9,\quad p_S=2q+4,\quad t=1,\quad q_0=1,\quad N=15,\quad p_0=7;$

7) $p_D=-2q+10,\quad p_S=q+1,\quad t=1,\quad q_0=1,\quad N=10,\quad p_0=8;$

8) $p_D=-q+15,\quad p_S=2q+3,\quad t=2,\quad q_0=7,\quad N=5,\quad p_0=5;$

9) $p_D=-2q+12,\quad p_S=3q+2,\quad t=3,\quad q_0=2,\quad N=20,\quad p_0=3;$

10) $p_D=-3q+18,\quad p_S=2q+3,\quad t=1,\quad q_0=2,\quad N=15,\quad p_0=7;$

11) $p_D=-q+13,\quad p_S=4q+3,\quad t=1,\quad q_0=6,\quad N=30,\quad p_0=9;$

12) $p_D=-q+15,\quad p_S=2q+6,\quad t=1,\quad q_0=3,\quad N=20,\quad p_0=5;$

13) $p_D=-q+12,\quad p_S=q+8,\quad t=2,\quad q_0=5,\quad N=5,\quad p_0=6;$

14) $p_D=-3q+18,\quad p_S=q+2,\quad t=3,\quad q_0=1,\quad N=10,\quad p_0=9;$

15) $p_D=-q+6,\quad p_S=q+2,\quad t=2,\quad q_0=2,\quad N=15,\quad p_0=5;$

16) $p_D=-q+7,\quad p_S=2q+1,\quad t=1,\quad q_0=2,\quad N=20,\quad p_0=7;$

17) $p_D=-4q+17,\quad p_S=q+2,\quad t=3,\quad q_0=1,\quad N=15,\quad p_0=6;$

18) $p_D=-q+8,\quad p_S=2q+2,\quad t=1,\quad q_0=1,\quad N=30,\quad p_0=4;$

19) $p_D=-2q+17,\quad p_S=2q+1,\quad t=3,\quad q_0=3,\quad N=5,\quad p_0=8;$

20) $p_D = -4q + 20, \quad p_S = 4q + 4, \quad t = 3, \quad q_0 = 2, \quad N = 15, \quad p_0 = 3;$

21) $p_D = -q + 10, \quad p_S = 3q + 2, \quad t = 2, \quad q_0 = 5, \quad N = 10, \quad p_0 = 7;$

22) $p_D = -2q + 19, \quad p_S = q + 1, \quad t = 4, \quad q_0 = 2, \quad N = 30, \quad p_0 = 10;$

23) $p_D = -q + 13, \quad p_S = 3q + 1, \quad t = 1, \quad q_0 = 6, \quad N = 10, \quad p_0 = 6;$

24) $p_D = -q + 14, \quad p_S = 2q + 5, \quad t = 3, \quad q_0 = 6, \quad N = 25, \quad p_0 = 5;$

25) $p_D = -q + 15, \quad p_S = 3q + 7, \quad t = 2, \quad q_0 = 5, \quad N = 5, \quad p_0 = 4;$

26) $p_D = -2q + 19, \quad p_S = 3q + 4, \quad t = 3, \quad q_0 = 3, \quad N = 25, \quad p_0 = 5;$

27) $p_D = -2q + 18, \quad p_S = q + 6, \quad t = 4, \quad q_0 = 2, \quad N = 5, \quad p_0 = 6;$

28) $p_D = -q + 9, \quad p_S = q + 1, \quad t = 1, \quad q_0 = 3, \quad N = 10, \quad p_0 = 7;$

29) $p_D = -q + 9, \quad p_S = 2q + 3, \quad t = 2, \quad q_0 = 4, \quad N = 25, \quad p_0 = 3;$

30) $p_D = -2q + 11, \quad p_S = q + 2, \quad t = 3, \quad q_0 = 1, \quad N = 30, \quad p_0 = 4.$

Пример 5.3

Законы спроса и предложения на некоторый товар соответственно определяются уравнениями $p_D = -2q + 9$**,** $p_S = q + 3$**, где *p* – цена на товар, *q* – количество товара. Предполагается, что спрос определяется только ценой товара на рынке p_C, а предложение – только ценой p_S, получаемой поставщиками. Необходимо**

а) определить точку рыночного равновесия;

б) точку равновесия после введения налога $t = 1$**. Определить увеличение цены и уменьшение равновесного объема продаж;**

в) найти субсидию *s*, которая приведет к увеличению объема продаж на $q_0 = 2$ **ед. относительно изначального (определенного в пункте а));**

г) найти новую точку равновесия и доход правительства при введении налога, пропорционального цене и равного $N = 15\%$**;**

д) определить, сколько денег будет израсходовано правительством на скупку излишка при установлении минимальной цены, $p_0 = 6$**.**

Решение

а) Находим точку рыночного равновесия из условия $p_D = p_S$ (рис. 11):

$$-2q + 9 = q + 3,$$
$$-3q = -6,$$
$$q = 2; \; p = 5.$$

Ответ: $M(2;5)$ – точка рыночного равновесия.

б) Если введен налог $t = 1$, то система уравнений для определения точки равновесия примет вид

$$D: \quad p_C = -2q + 9,$$
$$S: \quad p_S = q + 3,$$

$$p_C = p_S + 1.$$

Используя соотношение между ценой на рынке p_C и ценой p_S, получаемой поставщиками, имеем следующие выражения для определения точки рыночного равновесия

$$-2q + 9 = q + 4,$$
$$p_C = q + 4.$$

Откуда находим новую точку рыночного равновесия

$$M'\left(\frac{5}{3}; \frac{17}{3}\right) \text{ (рис. 12).}$$

Следовательно, после введения налога равновесная цена увеличилась на $\frac{17}{3} - 5 = \frac{2}{3}$ ден. ед., а равновесный объем уменьшился на $2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$ ед.

Ответ: $M'\left(\frac{5}{3}; \frac{17}{3}\right)$ – точка равновесия после введения налога $t = 1$, равновесная цена увеличилась на $\frac{2}{3}$ ден. ед., равновесный объем уменьшился на $\frac{1}{3}$ ед.

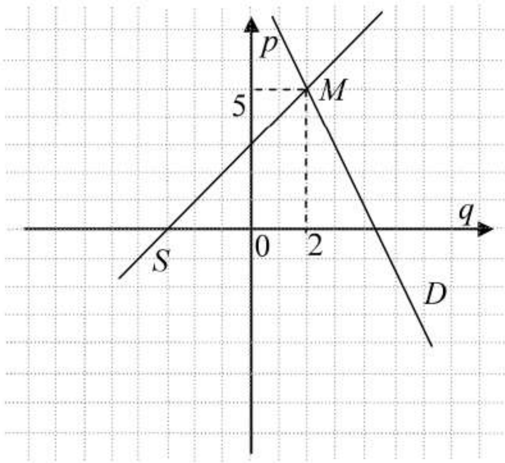

Рис. 11

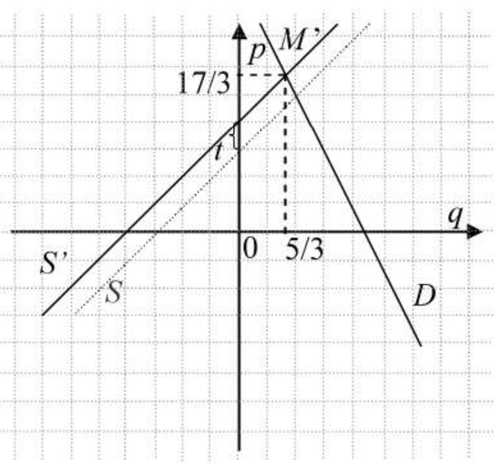

Рис. 12

в) Если предоставляется субсидия, то система для определения точки равновесия имеет вид

$$D: \quad p_C = -2q + 9,$$
$$S: \quad p_S = q + 3,$$
$$p_C = p_S - s.$$

Новый объем продаж равен $2 + 2 = 4$ единицы, подставляем $q = 4$ в систему, находим

$$p_C = 1; \quad p_S = 7; \quad s = 7 - 1 = 6.$$

Ответ: субсидия, которая приведет к увеличению объема продаж на 2 ед. относительно изначального, должна быть равна 6 ден. ед. (рис. 13).

г) Если налог составляет 15%, то вся рыночная цена составляет 115%, из них 100% получают поставщики товара, 15% – государство. Итак, поставщики получают

$$p_S = \frac{100}{115} p_C = \frac{20}{23} p_C.$$

Таким образом, система для определения новой точки рыночного равновесия имеет вид

$$\begin{cases} p_C = -2q + 9, \\ \dfrac{20}{23} p_C = q + 3. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим новую точку рыночного равновесия

$$M''\left(\frac{37}{21}; \frac{115}{21}\right),$$

при этом доход правительства R будет равен

$$R = \left(1 - \frac{20}{23}\right) \cdot \frac{37}{21} \cdot \frac{115}{21} = \frac{185}{147} = 1\frac{38}{147}.$$

На рис. 14 доход правительства соответствует площади заштрихованного прямоугольника.

Ответ: $M''\left(\frac{37}{21}; \frac{115}{21}\right)$ – точка равновесия, $R = 1\frac{38}{147}$ ден. ед. – доход правительства при введении налога, пропорционального цене и равного 15%.

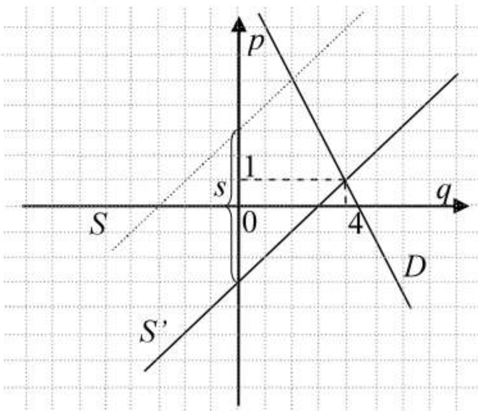

Рис. 13

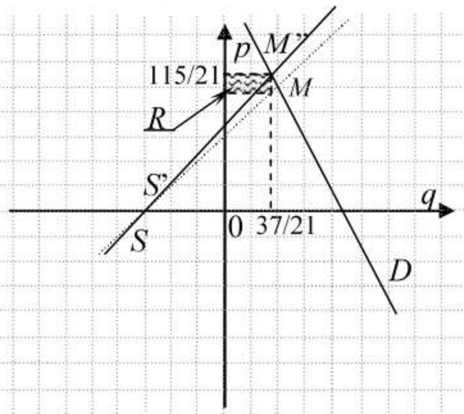

Рис. 14

д) Если установлена минимальная цена, то из уравнений спроса и предложения можно найти объемы спроса и предложения, соответствующие данной цене. Если минимальная цена выше равновесной цены, то объем предложения превышает объем спроса, тогда разницу между ними скупает правительство.

При $p_0 = 6$ находим

$$q_D = \frac{-p_0 + 9}{2} = \frac{-6 + 9}{2} = 1{,}5$$

$$q_S = p_0 - 3 = 6 - 3 = 3.$$

Таким образом, затраты правительства составят

$$(q_S - q_D) \cdot p_0 = (3 - 1{,}5) \cdot 6 = 9.$$

На рис. 15 затраты правительства соответствуют площади заштрихованного прямоугольника.

Ответ: правительством будет израсходовано 9 ден. ед. на скупку излишка при установлении минимальной цены, равной 6.

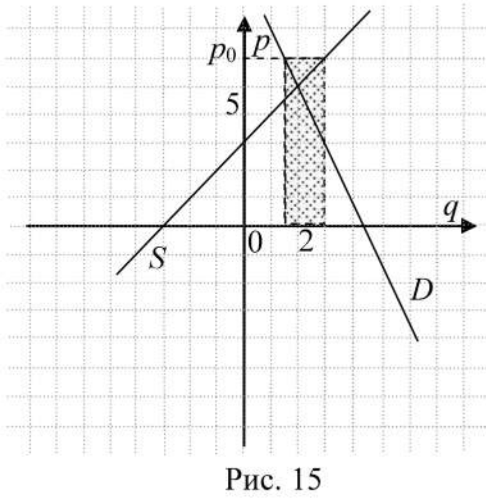

Рис. 15