Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Электроэнергетика и электротехника»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

по выполнению практических работ

по дисциплине

**Б.1.2.4 «Численные методы решения задач»**

направления подготовки

13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»

профиль1 «Электроснабжение»;

профиль 2 «Автоматизированные электротехнологические установки и системы»

*заочной формы обучения*

«Электронное издание локального распространения»

Саратов 2022

**ВВЕДЕНИЕ**

Настоящие методические указания предназначаются для выполнения практических работ по дисциплине «**Численные методы решения задач**».

**Дидактические цели практических занятий**: формирование умений (аналитических, проектировочных, конструктивных), необходимых для изучения последующих дисциплин (модулей) и для будущей профессиональной деятельности.

**Формируемые умения и навыки** (деятельность студента):

- пользоваться современными программными продуктами;

- работать с нормативными документами, справочниками;

- решать различного рода задачи с использованием современного прикладного компьютерного математического обеспечения.

Наряду с формированием умений и навыков в процессе практических занятий обобщаются, систематизируются, углубляются и конкретизируются теоретические знания, вырабатывается способность и готовность использовать теоретические знания на практике.

**1. ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № ПР | Наименование практической работы | Кол-во  часов |
| 1 | Решение уравнений методом половинного деления с заданной точностью. Решение уравнений методом простой итерации с заданной точностью  Решение уравнений методом хорд с заданной точностью  Решение уравнений методом Ньютона с заданной точностью. Решение уравнений видоизменённым методом Ньютона с заданной точностью.  Решение уравнения комбинированным методом с заданной точностью | 2 |
| 2 | Приближение функции методом наименьших квадратов  Приближение функции с помощью интерполяционного многочлена Ньютона  Приближение функции с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа | 2 |
|  |  | 4 |

**2. ПРАВИЛА ТЕХНИКИ БЕЗОПАСНОСТИ**

Компьютерное оборудование, использующиеся в учебном процессе, в некоторых случаях может стать источником опасности поражения электрическим током. Известно, что тело человека обладает электропроводностью и при соприкосновении с двумя неизолированными элементами (шнурами питания с поврежденной изоляцией), находящимися под напряжением, они становится звеном электрической цепи. Возникший вследствие этого в теле человека электрический ток может вызвать ожог кожи или нанести тяжелые поражения нервной, дыхательной и сердечной системам человека. Поэтому при выполнении практических работ студенты должны помнить о возможности поражения электрическим током и соблюдать правила техники безопасности работы с компьютерной и копировально-множительной техникой.

**3. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Численные методы решения задач оптимизации. Учебное пособие (книга) [Электронный ресурс] / А.Н. Кошев, В.В. Кузина Пензенский гос. ун-т арх. и стр-ва, 2012. -137с. – Режим доступа: https://www.iprbookshop.ru/75303.html . – ЭБС «IPRbooks».

2. Коломоец, А. А. Численные методы и комплексы программ [Текст]: учеб. пособие по курсу "Математическое моделирование" для студ. всех спец. / А. А. Ко-ломоец, М. А. Дергачева; М-во образования и науки Рос. Федерации, Саратовский гос. техн. ун-т. - Саратов: СГТУ, 2011. - 64 с. – Экземпляров всего: 3. Имеется элек-тронный аналог печатного издания.

3. Коломоец, А. А. Численные методы и комплексы программ [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А. А. Коломоец, М. А. Дергачева; М-во образования и науки Рос. Федерации, Саратовский гос. техн. ун-т. – Электрон. текстовые дан. – Саратов: СГТУ, 2011. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: 128 МБ ОЗУ ; 4х CD-ROM дисковод; Microsoft Office 2003 и выше; ПК Pentium III или выше. - Загл. с экрана. – б. ц. Электронный аналог печатного издания. Диск помещен в контейнер 14х12 см. Режим доступа: http://lib.sstu.ru/books/zak 52\_11.pdf.

4. Численные методы в примерах и задачах: учеб. пособие / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. – 2-е изд., стереотип. – М.: Высшая школа, 2006. – 480 с. - Экземпляров всего: 9.

5. Ращиков, В.И. Численные методы решения физических задач: учеб. пособие / В. И. Ращиков, А. С. Рошаль. - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2005. – 208 с. - Экземп-ляров всего: 13

6. Численные методы при моделировании технологических машин и оборудо-вания : учебное пособие [Электронный ресурс]/ Г. В. Алексеев, Б. А. Вороненко, М. В. Гончаров, И. И. Холявин. — Саратов : Вузовское образование, 2014. — 203 c. —Режим доступа: https://www.iprbookshop.ru/26229.html .– ЭБС «IPRbooks».

**4. ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТОВ**

Каждый студент должен самостоятельно обработать данные измерений и подготовить отчет о проделанной работе.

В отчете на титульном листе указывается название учебного заведения, номер и наименование лабораторной работы, фамилия и инициалы студента, выполнившего работу, а также фамилия, инициалы и должность преподавателя, проверяющего лабораторную работу.

Пример оформления титульного листа показан в Приложении А.

**Отчет должен содержать следующие разделы**:

1. Цель практической работы.

2. Краткое изложение общих сведений, необходимых для решения поставленных задач.

3. Исходные данные для расчетов (по варианту).

4. Таблицы результатов проведенных расчетов (по необходимости в рамках задания).

5. Формулы, по которым определялись расчетные данные.

6. Графики (диаграммы) результатов или исследуемых функций.

7. Выводы и обоснования по проделанной работе.

8. Ответы на контрольные вопросы.

9. Отчет подписывается студентом, указывается дата оформления отчета.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1*а*

Тема «РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ХОРД С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ»

**1. Цель работы**

Цель практической работы заключается в углублении изучения численных методов решения поставленных задач, а также в овладении расчетными навыками.

**2. Общие сведения**

В наиболее часто встречающихся задачах, таких как :

- распределение температуры и массы внутри твердых тел и в неподвижных жидкостях (газах);

- распределение температуры и массы в движущейся жидкости (газе);

- распространение теплоты и распределение температуры при фазовых переходах.

- распространение теплоты и распределение температуры при фазовых переходах.

- расчет нагрева электроэнергетического и электротехнического оборудования;

- определение времени нагрева;

- определение тепловых потерь;

- расчет процессов сушки и т.д. применяются численные методы для решения несложных задач, а именно: решение нелинейных уравнений, систем линейных и нелинейных уравнений, задач интерполирования и нахождения интегралов, решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка.

Эти методы применяются для расчетов электрических (магнитных) цепей и распределения потенциалов в проводнике, тепловых (массовых) потерь и распределения теплоты (массы) в различных средах.

**Метод половинного деления** является самым простым и надежным способом решения нелинейного уравнения. Пусть из предварительного анализа известно, что корень уравнения находится на отрезке , т. е. , так, что . Пусть функция  непрерывна на отрезке  и принимает на концах отрезка значения разных знаков, т.е. .

Разделим отрезок  пополам. Получим точку . Вычислим значение функции в этой точке: . Если , то  – искомый корень, и задача решена. Если , то  – число определённого знака:  либо . Тогда либо на концах отрезка , либо на концах отрезка  значения функции  имеют разные знаки. Обозначим такой отрезок . Очевидно, что  и длина отрезка  в два раза меньше, чем длина отрезка . Поступим аналогично с отрезком . В результате получим либо корень , либо новый отрезок  и т. д. (рис. 2.1).

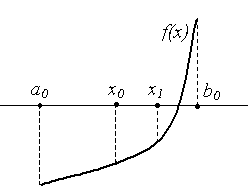


Рисунок 2.1– Вычисление значения функции методом деления пополам

Середина -го отрезка . Очевидно, что длина отрезка  будет равна , а так как , то

. (2.1)

***Критерий окончания.*** Из соотношения (1) следует, что при заданной точности приближения ** вычисления заканчиваются, когда будет выполнено неравенство или неравенство . Таким образом, количество итераций можно определить заранее. За приближенное значение корня берется величина .

**Метод простой итерации.** Пусть уравнение  можно заменить эквивалентным ему уравнением

*.* (2.2)

Выберем каким-либо образом начальное приближение . Вычислим значение функции  при  и найдем уточненное значение . Подставим теперь в уравнение (1) и получим новое приближение  и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность приближений к корню:

. (2.3)

Формула (2.3) является **расчетной формулой** метода простой итерации.

Если последовательность  сходится при , т. е. существует

 (2.4)

и функция  непрерывна, то, переходя к пределу в (2.3) и учитывая (2.4), получим: .

Таким образом, , следовательно,  – корень уравнения (2.2).

***Сходимость метода.*** Сходимость метода простой итерации устанавливает следующая теорема.

***Теорема.*** Пусть функция  определена и дифференцируема на отрезке , причем все ее зна­чения . Тогда, если выполняется условие  при :

1) процесс итерации  сходится независимо от начального значения ;

2) предельное значение  является единственным корнем уравнения  на отрезке .

***Доказательство.*** Так как  и , то можно записать



.

По теореме о среднем (она утверждает, что если производная функции  непрерывна на некотором интервале, то тангенс угла наклона хорды, проведенной между точками  и , (т.е.  равен производной функции в некоторой промежуточной точке, лежащей между  и ) частное в последнем выражении будет равно , где  – некоторая промежуточная точка в интервале поиска корня. Следовательно, .

Если ввести обозначение  для всего интервала поиска, то предыдущее равенство может быть переписано в виде: 

Аналогично . Тогда для  будет справедливо неравенство:  и т. д. Продолжая эти выкладки дальше, в результате получаем , где  – натуральное число. Таким образом, чтобы метод сходился, необходимо выполнение неравенства: .

Отсюда следует, что должно быть меньше единицы. В свою очередь, для всех остальных значений  меньших , можно записать: . Число  определим из соотношения . Тогда справедливо неравенство (вывод см. ниже): . Если поставить условие, что истинное значение корня  должно отличаться от приближенного значения на величину , т.е. , то приближения  надо вычислять до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

 или  и тогда .

Вывод неравенства.Рассмотрим два последовательных приближения:  и . Отсюда .

Используя теорему о среднем, получим:

,

тогда на основании условия  можно записать:

.

С другой стороны, пусть . Очевидно, что . Отсюда, учитывая, что , получим

,

где .

Тогда  или .

Используя предыдущую формулу, можно получить расчет погрешности метода:

. (2.5)

Перейдём к пределу в равенстве (2.3), в силу непрерывности функции  получим , то есть  – корень уравнения (2.2). Других корней на  нет, так как если , то , тогда , где . Равенство нулю будет достигнуто, если . То есть  – корень единственный. ***Теорема доказана.***

***Критерий окончания.*** Из оценки (2.5) следует, что вычисления надо продолжать до выполнения неравенство . Если же , то оценка упрощается: .

**Решение Методом хорд**.

Рассмотрим одну из модификаций метода Ньютона. Пусть известно, что простой корень  уравнения  находится на отрезке , то есть . И предположим, что  при  (если это не так, то будем рассматривать уравнение ). Заменим кривую  хордой .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| а) | б) |
| Рисунок 2.2 – Решение методом хорд | |

Возможны два случая: 1)  (рис. 2.2а); 2) (рис. 2.2б).

В первом случае конец неподвижен и последовательные приближения: 

 (9)

образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность, причем .

Во втором случае неподвижен конец , а последовательные приближения: 

 (10)

образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность, причем  Итак, в результате получаем следующее:

***Выбор начального условия:***

1. Рассматриваем только случай  (иначе ).

2. Начальное приближение x0 выбираем из условия  

Неподвижен тот конец, для которого знак функции совпадает со знаком ее второй производной.

***Критерий окончания.*** Критерий окончания итераций метода хорд такой же, как и для метода Ньютона. При заданной точности  вычисления нужно вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство .

**3. Методика выполнения заданий**

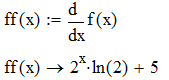
Расчеты и последовательность расположения блоков вводимой информации в среде Mathcad 14.0 M011 рассматриваются ниже в примерах выполнения заданий.

**Пример.** Решить уравнение методом половинного деления и хорд с точностью 0,00001

Исходная функция:



Производная исходной функции:

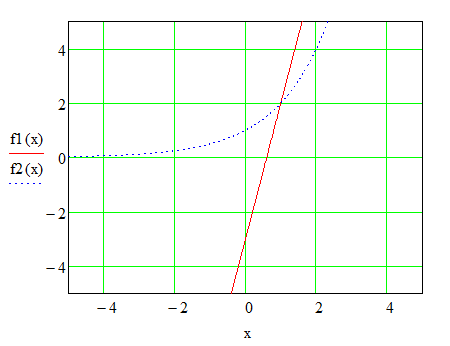


Точность решения задачи:



Локализация корней:

 – разделение исходной функции на две простых

 Рисунок 3.1 – График функций f1(x) и f2(x)

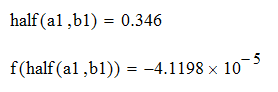
Отрезок:



Метод половинного деления:



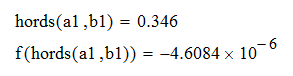
Корень и его проверка:



Метод хорд:



Первый корень и его проверка:



**Данное уравнение имеет корень х = 0,346.**

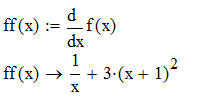
**Пример.** Метод итераций:

Решить уравнение с точностью 0,00001

Исходная функция:



Производная исходной функции:



Точность решения задачи:



Начальное приближение:

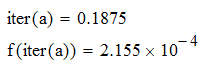


Приведение функции к виду, пригодному для метода итерации:





Корень уравнения и его проверка:



**Данное уравнение имеет один корень, х = 0,1875**

**4. Порядок выполнения заданий по практической работе**

1. По своему варианту, из табл.4.1 получить данные для расчетов.
2. Провести расчеты в программной среде Mathcad 14.0 M011 в той последовательности, как было указано в предыдущем разделе (в примере).
3. Полученные результаты расчетов свести в общий итоговый отчет, выполненный на формате А4.

Таблица 4.1 – Исходные данные для расчета

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1. Решить уравнение методом половинного деления и хорд с точностью .** | | | | | | |
| **1** |  | | | **11** | |  |
| **2** |  | | | **12** | |  |
| **3** |  | | | **13** | |  |
| **4** |  | | | **14** | |  |
| **5** |  | | | **15** | |  |
| **6** |  | | | **16** | |  |
| **7** |  | | | **17** | |  |
| **8** |  | | | **18** | |  |
| **9** |  | | | **19** | |  |
| **10** |  | | | **20** | |  |
| **2. Решить уравнение методом итерации с точностью .** | | | | | | |
| **1** | |  | **11** | |  | |
| **2** | |  | **12** | |  | |
| **3** | |  | **13** | |  | |
| **4** | |  | **14** | |  | |
| **5** | |  | **15** | |  | |
| **6** | |  | **16** | |  | |
| **7** | |  | **17** | |  | |
| **8** | |  | **18** | |  | |
| **9** | |  | **19** | |  | |
| **10** | |  | **20** | |  | |

**5. Содержание отчета**

1. Титульный лист (указать № и название работы).

2. Цель работы.

3. Задание (вариант, вопросы, другое – по решению преподавателя).

4. Результаты расчетов разместить и оформить в Microsoft Office Профессиональный плюс 2007 в редакторе Microsoft Word, весь отчет по практической работе должен быть выполнен на формате А4.

5. Вывод по практической работе (что изучено, установлено, рассчитано, получено и т.п.).

**6. Контрольные вопросы**

1. Какие достоинства и недостатки метода половинного деления?
2. В чем заключается особенность метода хорд?
3. В чем заключается критерий окончания метода простой итерации?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1*б*

Тема «РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НЬЮТОНА С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДОИЗМЕНЁННЫМ МЕТОДОМ НЬЮТОНА С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОМБИНИРОВАННЫМ МЕТОДОМ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ»

**1. Цель работы**

Цель практической работы заключается в углублении изучения численных методов решения поставленных задач, а также в овладении расчетными навыками.

**2. Общие сведения**

В наиболее часто встречающихся задачах, таких как :

- распределение температуры и массы внутри твердых тел и в неподвижных жидкостях (газах);

- распределение температуры и массы в движущейся жидкости (газе);

- распространение теплоты и распределение температуры при фазовых переходах.

- распространение теплоты и распределение температуры при фазовых переходах.

- расчет нагрева электроэнергетического и электротехнического оборудования;

- определение времени нагрева;

- определение тепловых потерь;

- расчет процессов сушки и т.д. применяются численные методы для решения несложных задач, а именно: решение нелинейных уравнений, систем линейных и нелинейных уравнений, задач интерполирования и нахождения интегралов, решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка.

Эти методы применяются для расчетов электрических (магнитных) цепей и распределения потенциалов в проводнике, тепловых (массовых) потерь и распределения теплоты (массы) в различных средах.

**Метод Ньютона (метод касательных)**.

Метод Ньютона является наиболее эффективным методом решения нелинейных уравнений. Пусть корень , т. е. . Предполагаем, что функция  непрерывна на отрезке  и дважды непрерывно дифференцируема на интервале . Положим *.* Проведем касательную к графику функции  в точке  (рис. 2.1).

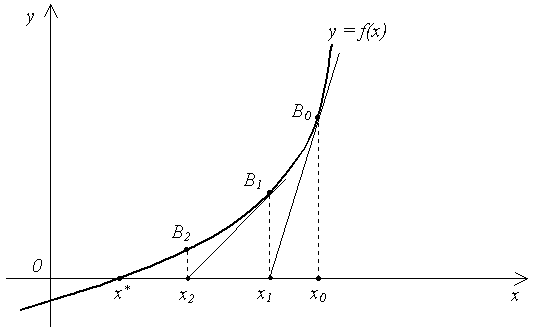


Рисунок 2.1 – Метод касательных

Уравнение касательной будет иметь вид: .

Первое пересечение получим, взяв абсциссу точки пересечения этой касательной с осью , т. е. положив : .

Аналогично поступим с точкой , затем с точкой  и т. д., в результате получим последовательность приближений , причем

. (2.1)

Формула (2.1) является **расчетной формулой метода Ньютона**.

Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай метода простых итераций, для которого .

***Сходимость метода****.* Сходимость метода Ньютона устанавливает следующая теорема.

***Теорема*.**Пусть  – простой корень уравнения  и в некоторой окрестности этого корня функция дважды непрерывно дифференцируема. Тогда найдется такая малая  – окрестность корня , что при произвольном выборе начального приближения из этой окрестности итерационная последовательность, определенная по формуле (6) не выходит за пределы этой окрестности и справедлива оценка:

, (2.2)

где .

Сходимость метода Ньютона зависит от того, насколько близко к корню выбрано начальное приближение.

**Выбор начального приближения.** Пусть  – отрезок, содержащий корень. Если в качестве начального приближения выбрать тот из концов отрезка, для которого , то итерации (2.1) сходятся, причем монотонно. Рис. 2.1 соответствует случаю, когда в качестве начального приближения был выбран правый конец отрезка:  (Здесь ).

***Погрешность метода.*** Оценка (2.2) неудобна для практического использования. На практике пользуются следующие оценки погрешности:

. (2.3)

***Критерий окончания.*** Оценка (2.3) позволяет сформулировать следующий критерий окончания итераций метода Ньютона. При заданной точности  вычисления нужно вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

.

**Видоизмененный метод Ньютона.**

Если производная  мало изменяется на отрезке , то в расчетной формуле метода можно положить: . Отсюда для корня  уравнения  получаем последовательные приближения

.

Геометрически этот способ означает, что касательные заменяются прямыми, параллельными касательной к кривой , в ее фиксированной точке . Этот способ избавляет от необходимости вычислять каждый раз значения производной, поэтому эта формула полезна, если  сложна.

**Комбинированный метод**.

Пусть , а  и  сохраняют постоянные знаки на отрезке . Соединяя методы хорд и касательных, получаем метод на каждом этапе, которого находим значения по недостатку и значения по избытку точного корня  уравнения . Пусть  – последовательные приближения метода хорд,  – последовательные приближения метода касательных. Пошаговая иллюстрация представлена на рис. 2.2.

Возможны 4 случая:

1) ,

2) ,

3) ,

4) , которые можно свести к первому случаю.

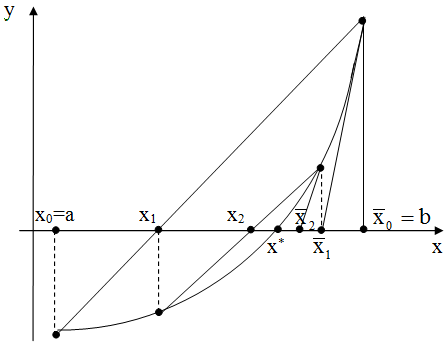


Рисунок 2.2– Пояснение к комбинированному методу

.

. .

Очевидно, что  и .

По окончании процесса за значение корня  лучше всего взять среднее арифметическое полученных значений: .

**3. Методика выполнения заданий**

Расчеты и последовательность расположения блоков вводимой информации в среде Mathcad 14.0 M011 рассматриваются ниже в примерах выполнения заданий.

**Пример.**

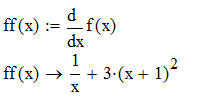
Метод Ньютона.

Решить уравнение с точностью 0,00001

Исходная функция:



Производная исходной функции:



Точность решения задачи:



Начальное приближение:





Корень уравнения и его проверка:



**Данное уравнение имеет один корень, х = 0,1874**

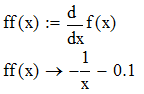
Метод касательных и видоизмененный метод Ньютона

Решить уравнение с точностью 0,00001

Исходная функция:



Производная исходной функции:



Точность решения задачи:

Локализация корней

-разделение исходной функции на 2 простых

Отрезок, в котором находится корень уравнения:



Метод касательных (Ньютона):



Корень уравнения и его проверка:



**Данное уравнение имеет один корень, х =4,6441**

Видоизмененный метод Ньютона:



Корень уравнения и его проверка:



Данное уравнение имеет один корень х = 4,6441, оба метода дают одинаковый результат, значит решение верно.

**4. Порядок выполнения заданий по практической работе**

1. По своему варианту, из табл.4.1 получить данные для расчетов.
2. Провести расчеты в программной среде Mathcad 14.0 M011 в той последовательности, как было указано в предыдущем разделе (в примере).
3. Полученные результаты расчетов свести в общий итоговый отчет, выполненный на формате А4.

Таблица 4.1 – Исходные данные для расчета

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Решить уравнение методом Ньютона и касательных с точностью .** | | | | | | | |
| **1** | |  | | **11** | |  | |
| **2** | |  | | **12** | |  | |
| **3** | |  | | **13** | |  | |
| **4** | |  | | **14** | |  | |
| **5** | |  | | **15** | |  | |
| **6** | |  | | **16** | |  | |
| **7** | |  | | **17** | |  | |
| **8** | |  | | **18** | |  | |
| **9** | |  | | **19** | |  | |
| **10** | |  | | **20** | |  | |
| **Решить уравнение видоизменённым методом Ньютона и комбинированным методом с точностью .** | | | | | | | |
| **1** |  | | **11** | |  | |
| **2** |  | | **12** | |  | |
| **3** |  | | **13** | |  | |
| **4** |  | | **14** | |  | |
| **5** |  | | **15** | |  | |
| **6** |  | | **16** | |  | |
| **7** |  | | **17** | |  | |
| **8** |  | | **18** | |  | |
| **9** |  | | **19** | |  | |
| **10** |  | | **20** | |  | |

**5. Содержание отчета**

1. Титульный лист (указать № и название работы).

2. Цель работы.

3. Задание (вариант, вопросы, другое – по решению преподавателя).

4. Результаты расчетов разместить и оформить в Microsoft Office Профессиональный плюс 2007 в редакторе Microsoft Word, весь отчет по практической работе должен быть выполнен на формате А4.

5. Вывод по практической работе (что изучено, установлено, рассчитано, получено и т.п.).

**6. Контрольные вопросы**

1. Какие достоинства и недостатки метода касательных?
2. В чем заключается особенность видоизмененного метода Ньютона?
3. Какие 4 случая возможны, при решении уравнений комбинированным методом?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Тема «РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НЬЮТОНА С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ»

**1. Цель работы**

Цель практической работы заключается в углублении изучения численных методов решения поставленных задач, а также в овладении расчетными навыками.

**2. Общие сведения**

В наиболее часто встречающихся задачах, таких как :

- распределение температуры и массы внутри твердых тел и в неподвижных жидкостях (газах);

- распределение температуры и массы в движущейся жидкости (газе);

- распространение теплоты и распределение температуры при фазовых переходах.

- распространение теплоты и распределение температуры при фазовых переходах.

- расчет нагрева электроэнергетического и электротехнического оборудования;

- определение времени нагрева;

- определение тепловых потерь;

- расчет процессов сушки и т.д. применяются численные методы для решения несложных задач, а именно: решение нелинейных уравнений, систем линейных и нелинейных уравнений, задач интерполирования и нахождения интегралов, решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка.

Эти методы применяются для расчетов электрических (магнитных) цепей и распределения потенциалов в проводнике, тепловых (массовых) потерь и распределения теплоты (массы) в различных средах.

**Метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений.**

В основе метода Ньютона для системы уравнений лежит использование разложения функций  в ряд Тейлора, причем члены, содержащие вторые производные (и производ­ные более высоких порядков), отбрасываются. Пусть приближенные значения неизвестных системы (например, полученные на предыдущей итерации) равны соответственно . Задача состоит в нахождении приращений (поправок) к этим значениям , благодаря которым решение исходной системы запишется в виде:

.

Проведем разложение левых частей уравнений исходной системы в ряд Тэйлора, ограничиваясь лишь линейными членами относительно приращений:



Поскольку левые части этих выражений должны обращаться в нуль, то можно приравнять к нулю и правые части:



в матричном виде: 

Значения  и их производные вычисляются при  .

Определителем последней системы является **якобиан:**

.

Для существования единственного решения системы якобиан должен быть отличным от нуля на каждой итерации.

Таким образом, итерационный процесс решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона состоит в определении приращений   к значениям неизвестных на каждой итерации. Счет прекращается, если все приращения становятся малыми по абсолютной величине:

.

В методе Ньютона также важен удачный выбор начального приближения для обеспечения хорошей сходимости. Сходимость ухудшается с увеличением числа уравнений системы. Итак, за ***расчетную формулу*** примем

 или .

**Сходимость метода. Теорема.** Пусть в некоторой окрестности решения  системы нелинейных уравнений функции  дважды непрерывно дифференцируемы и определитель матрицы Якоби не равен нулю. Тогда найдется такая малая  – окрестность решения , что при произвольном выборе начального приближения из этой окрестности, итерационная последовательность метода Ньютона не выходит за пределы окрестности и справедлива оценка: ,  – метод сходится с квадратичной скоростью.

В качестве примера можно рассмотреть использование метода Ньютона для решения системы двух уравнений: , где  и  – непрерывно дифференцируемые функции. Пусть начальные значения неизвестных равны . После разложения исходной системы в ряд Тэйлора можно получить:



Предположим, что якобиан системы при  и  отличен от нуля:

.

Тогда значения  и  можно найти, используя матричный способ следующим образом:

.

Вычислив значения  и  можно найти  и  следующим образом:

.

Величины, стоящие в правой части, вычисляются при  и .

**Критерий окончания.** Будем считать, что заданная точность достигнута, если  или .

**3. Методика выполнения заданий**

Расчеты и последовательность расположения блоков вводимой информации в среде Mathcad 14.0 M011 рассматриваются ниже в примерах выполнения заданий.

**Пример.**

Решить систему нелинейных уравнений методом Ньютона с точностью 0.00001

Номер начального индекса в массивах:



Исходные функции из системы уравнений:





Частные производные исходных функций:





Точность решения задачи:



Алгоритм, реализующий метод Ньютона:



Решение системы уравнений и его проверка:







**По результатам проверки получены исходные уравнения, значит, система уравнений имеет верное решение.**

**4. Порядок выполнения заданий по практической работе**

1. По своему варианту, из табл.4.1 получить данные для расчетов.
2. Провести расчеты в программной среде Mathcad 14.0 M011 в той последовательности, как было указано в предыдущем разделе (в примере).
3. Полученные результаты расчетов свести в общий итоговый отчет, выполненный на формате А4.

Таблица 4.1 – Исходные данные для расчета

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Решить систему методом Ньютона с точностью .** | | | |
| **1** |  | **2** |  |
| **3** |  | **4** |  |
| **5** |  | **6** |  |
| **7** |  | **8** |  |
| **9** |  | **10** |  |
| **11** |  | **12** |  |
| **13** |  | **14** |  |
| **15** |  | **16** |  |
| **17** |  | **18** |  |
| **19** |  | **20** |  |

**5. Содержание отчета**

1. Титульный лист (указать № и название работы).

2. Цель работы.

3. Задание (вариант, вопросы, другое – по решению преподавателя).

4. Результаты расчетов разместить и оформить в Microsoft Office Профессиональный плюс 2007 в редакторе Microsoft Word, весь отчет по практической работе должен быть выполнен на формате А4.

5. Вывод по практической работе (что изучено, установлено, рассчитано, получено и т.п.).

**6. Контрольные вопросы**

1. Что лежит в основе метода Ньютона для решения системы уравнений?
2. При разложение левых частей уравнений исходной системы в ряд Тэйлора чем ограничиваемся?
3. Что будет последним определителем в системе уравнений? Какое должно выполняться условие, при котором система уравнений будет иметь единственное решение?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2*а*

Тема «ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МНОГОЧЛЕНА НЬЮТОНА»

**1. Цель работы**

Цель практической работы заключается в углублении изучения численных методов решения поставленных задач, а также в овладении расчетными навыками.

**2. Общие сведения**

В наиболее часто встречающихся задачах, таких как :

- распределение температуры и массы внутри твердых тел и в неподвижных жидкостях (газах);

- распределение температуры и массы в движущейся жидкости (газе);

- распространение теплоты и распределение температуры при фазовых переходах.

- распространение теплоты и распределение температуры при фазовых переходах.

- расчет нагрева электроэнергетического и электротехнического оборудования;

- определение времени нагрева;

- определение тепловых потерь;

- расчет процессов сушки и т.д. применяются численные методы для решения несложных задач, а именно: решение нелинейных уравнений, систем линейных и нелинейных уравнений, задач интерполирования и нахождения интегралов, решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка.

Эти методы применяются для расчетов электрических (магнитных) цепей и распределения потенциалов в проводнике, тепловых (массовых) потерь и распределения теплоты (массы) в различных средах.

**Приближение функции методом наименьших квадратов.**

В инженерной деятельности часто возникает необходимость описать в виде функциональной зависимости связь между величинами, заданными таблично или в виде набора точек с координатами , где  – общее количество точек. Как правило, эти табличные данные получены экспериментально и имеют погрешности.

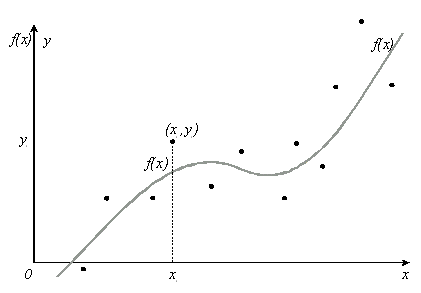


Рисунок 2.1–Пояснения к методу наименьших квадратов

При аппроксимации желательно получить относительно простую функциональную зависимость (например, многочлен), которая позволила бы «сгладить» экспериментальные погрешности, вычислить значения функции в точках, не содержащихся в исходной таблице.

Эта функциональная зависимость должна с достаточной точностью соответствовать исходной табличной зависимости. В качестве критерия точности чаще всего используют критерий**наименьших квадратов,** т.е. определяют такую функциональную зависимость , при которой  обращается в минимум. Погрешность приближения оценивается величиной . В качестве функциональной зависимости рассмотрим многочлен . Формула минимизируемой функции примет вид

. (2.1)

Условия минимума  можно записать, приравнивая нулю частные производные  по всем переменным, .

Получим систему уравнений

 или

(2.2)

, .

Эту систему уравнений перепишем в следующем виде:

, .

Введем обозначения: . Последняя система может быть записана так: , .

Её можно переписать в развернутом виде:

. (2.3)

Матричная запись системы имеет следующий вид: . Для определения коэффициентов , и, следовательно, искомого многочлена, необходимо вычислить суммы  и решить последнюю систему уравнений. Матрица  этой системы является симметричной и положительно определенной.

Погрешность приближения в соответствии с исходной формулой составит

. (2.4)

Рассмотрим частные случаи  и .

***Линейная аппроксимация*** *.*

.

; 

, .

Отсюда система для нахождения коэффициентов  имеет вид:

.

Её можно решить методом Крамера.

***Квадратичная аппроксимация*** *.*

.

.

.

, .

Или в развёрнутом виде



Решение системы уравнений (2.3)  находится по правилу Крамера.

**Приближение функции с помощью интерполяционного многочлена Ньютона.**

Построение интерполяционных многочленов.

Пусть на отрезке  в некоторой последовательности  узлов  задана функция  своими значениями , где . Задача алгебраического интерполирования состоит в построении многочлена  степени , удовлетворяющего условию интерполирования: .

Известно, что существует единственный полином степени не выше , принимающий в исходных точках заданные значения. Коэффициенты  полинома  можно определить из системы уравнений:

 (2.5)

Определитель этой системы есть определитель Вандермонда, и, следовательно, система имеет единственное решение.

**Многочлен Ньютона с конечными разностями**

Рассмотрим случай равноотстоящих узлов интерполяции, т. е.  – называется шагом.

Введем понятие конечных разностей. Пусть известны значения функции в узлах . Составим разности значений функции:



Эти разности называются разностями первого порядка.

Можно составить разности второго порядка:

.

Аналогично составляются разности k-го порядка:

.

Выразим конечные разности непосредственно через значение функции:



Таким образом, для любого k можно записать:



Запишем эту формулу для значений разности в узле :

.

Используя конечные разности, можно определить

.

Перейдем к построению интерполяционного многочлена Ньютона. Этот многочлен будем искать в виде



.

График многочлена должен проходить через заданные узлы, то есть . Используем эти условия для нахождения коэффициентов многочлена:



Найдем отсюда коэффициенты :



Таким образом, для любого -го коэффициента формула примет вид

.

Подставляя эти формулы в выражение многочлена Ньютона, получим его следующий вид:



Полученную формулу можно записать в другом виде. Для этого введем переменную .

В этом случае 

С учетом этих соотношений формулу многочлена Ньютона можно записать в виде

.

Полученное выражение может аппроксимировать данную функцию  на всем отрезке изменения аргумента . Однако более целесообразно (с точки зрения повышения точности расчетов и уменьшения числа слагаемых в полученой формуле) ограничиться случаем , то есть использовать эту формулу для всех . Для других случаев вместо  принять , если  при . В этом случае интерполяционный многочлен можно записать в виде



Полученная формула называется первым интерполяционным многочленом Ньютона для интерполяции вперед. Эту интерполяционную формулу обычно используют для вычисления значений функции в точках левой половины рассматриваемого отрезка. Это объясняется следующим: разности  вычисляются через значения функции , причем . Из-за этого при больших значениях  мы не можем вычислить высших порядков .

Для правой половины рассматриваемого отрезка разности лучше вычислять справа налево. В этом случае , то есть , и интерполяционный многочлен Ньютона можно получить в виде:

.

Полученная формула называется вторым интерполяционным многочленом назад.

Оценим погрешности формул Ньютона вперед и назад:

 где  и

 где .

Формулы приближенного дифференцирования основаны на первой интерполяционной формуле Ньютона. Интерполяционный многочлен Ньютона имеет вид

,

где 

Производя перемножение биномов, получим



так как , то



.

Аналогично можно вычислять производные функции любого порядка.

В некоторых случаях требуется находить производные функций  в основных табличных точках . Так как табличное значение можно считать за начальное, то положив , имеем

,

Для производной многочлена Ньютона первого порядка погрешность может быть вычислена по формуле

 ,

где  – число конечных разностей в многочлене Ньютона.

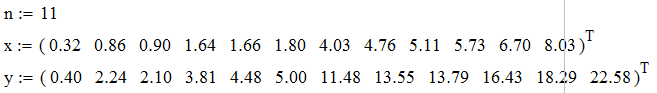
**3. Методика выполнения заданий**

Расчеты и последовательность расположения блоков вводимой информации в среде Mathcad 14.0 M011 рассматриваются ниже в примерах выполнения заданий.

**Пример 1.**

По данным значениям х и у найти прямую и параболу методом наименьших квадратов. Найти погрешность. Построить графики.

Исходный набор экспериментальных точек:



Степень полинома (примем базис аппроксимации в виде степенных полиномов):



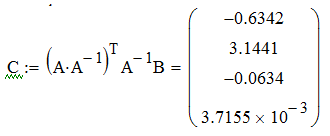












Создадим функцию «Poly»для вывода графика полинома:



Диапазон точек для графика функции



Величина погрешности:





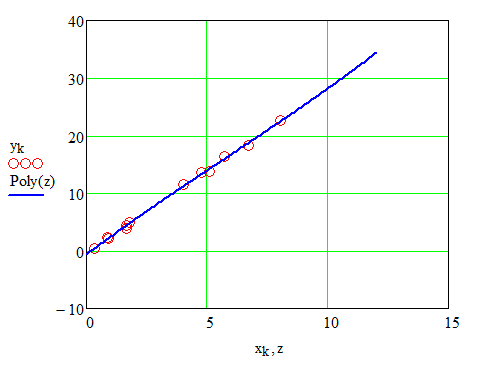


Рисунок 2.1 – График массива исходных данных и полученного полинома

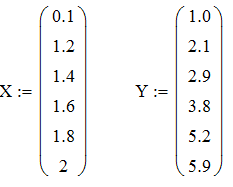
На графике красными кругами показаны исходные данные, синим цветом - график полинома. **Видно, что графики достаточно хорошо отражают исходные данные.**

**Пример 2**. Заданы значения функции в узлах. Найти значения функции в заданных точках с помощью интерполяционных формул Ньютона

Номер начального индекса в массивах:



Исходные данные - координаты N точек {X[i],Y[i]}, по которым будем строить полином Ньютона:



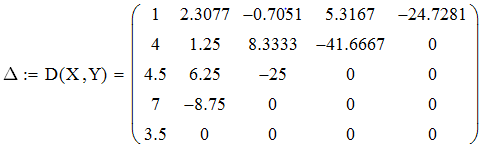




Полином Ньютона (построение с помощью алгоритма)

1. Матрица разделённых разностей размерности (N-1)\*(N-1):





2. Подпрограмма для вычисления полинома Ньютона в заданной точке:



Значения, которые требовалось получить:



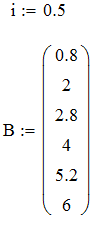
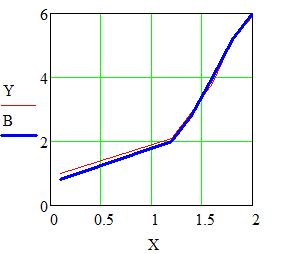
 

Рисунок 3.2 – График полинома Ньютона

**Из графика, построенного по значениям полинома Ньютона видно, что он практически полностью совпадает с исходным.**

**4. Порядок выполнения заданий по практической работе**

1. По своему варианту, из таблиц (1 –20) и табл. 21 получить данные для расчетов.
2. Провести расчеты в программной среде Mathcad 14.0 M011 в той последовательности, как было указано в предыдущем разделе (в примере).
3. Полученные результаты расчетов свести в общий итоговый отчет, выполненный на формате А4.

**Исходные данные.**

По заданным значениям  и  найти прямую  и параболу  **методом наименьших квадратов.** Найти погрешность. Построить прямую и кривую в той же системе координат, где нанесены данные точки.

Документ11

Документ12

Документ12

Документ13

**№15**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **N** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **X** | 3 | 2 | 5 | 1 | 0 | 2,5 | 4 | 3,3 | 2,8 |
| **Y** | 0 | 0,12 | 0,14 | 0,16 | 0,18 | 0,2 | 0,22 | 0,24 | 0,26 |

**№16**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **N** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **X** | 0 | 0,12 | 0,14 | 0,16 | 0,18 | 0,2 | 0,22 | 0,24 | 0,26 | 0,28 |
| **Y** | -1 | 0 | 2 | 1,1 | 1,3 | -0,5 | -0,3 | 0,5 | 0,7 | 1,5 |

**№17**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **N** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **X** | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 |
| **Y** | 3 | 2 | 5 | 1 | 0 | 2,5 | 4 | 3,3 | 2,8 |

**№18**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **N** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **X** | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 |
| **Y** | -5 | -3,5 | -5,3 | -4 | -6 | -3,8 | -4,3 | -5,1 | -4,8 |

**№19**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **N** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **X** | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| **Y** | 0 | 1 | -1 | 2 | 0,5 | -0,15 | -0,06 | 0,18 | 0,15 | 0,2 |

**№20**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **N** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **X** | 0 | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 |
| **Y** | 23 | 21 | 24 | 22 | 20 | 25 | 24 | 26 | 24 |

Заданы значения функции  в узлах , получающиеся делением отрезка  на 5 частей. Найти значения функции  при  и  **с помощью интерполяционных формул Ньютона.**

Таблица 21 – Значения функции  в узлах 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
| 0,1 | 1,0 | 1,1 | 0,9 | 0,9 | 0,8 | 1,1 | 1,0 | 1,2 | 1,2 | 1,1 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 1,1 | 3,5 | 0,2 | 2,1 | 0,3 | 1,5 | 0,6 |
| 1,2 | 2,1 | 2,2 | 2,0 | 1,9 | 2,0 | 2,2 | 2,1 | 1,8 | 2,0 | 1,9 | 2,0 | 2,2 | 1,8 | 2,2 | 4,1 | 0,7 | 3,3 | 0,4 | 4,5 | 0,8 |
| 1,4 | 2,9 | 3,2 | 3,0 | 3,2 | 2,9 | 3,2 | 3,1 | 3,2 | 3,0 | 3,2 | 2,8 | 2,9 | 2,9 | 3,0 | 5,3 | 0,8 | 4,5 | 0,5 | 6,2 | 0,9 |
| 1,6 | 3,8 | 4,2 | 3,8 | 3,8 | 4,2 | 4,2 | 3,8 | 4,1 | 3,8 | 3,8 | 4,0 | 4,0 | 4,0 | 4,1 | 6,8 | 0,9 | 5,7 | 0,6 | 7,8 | 1,4 |
| 1,8 | 5,2 | 5,2 | 5,1 | 5,1 | 5,2 | 5,1 | 5,2 | 5,2 | 5,0 | 4,9 | 5,2 | 5,2 | 4,9 | 4,9 | 7,2 | 1,0 | 6,9 | 1,2 | 8,4 | 1,6 |
| 2,0 | 5,9 | 6,0 | 5,8 | 6,1 | 5,8 | 5,9 | 6,2 | 6,1 | 6,1 | 5,8 | 6,0 | 5,8 | 6,1 | 5,9 | 8,4 | 1,3 | 8,1 | 1,5 | 9,9 | 2,3 |

**5. Содержание отчета**

1. Титульный лист (указать № и название работы).

2. Цель работы.

3. Задание (вариант, вопросы, другое – по решению преподавателя).

4. Результаты расчетов разместить и оформить в Microsoft Office Профессиональный плюс 2007 в редакторе Microsoft Word, весь отчет по практической работе должен быть выполнен на формате А4.

5. Вывод по практической работе (что изучено, установлено, рассчитано, получено и т.п.).

**6. Контрольные вопросы**

1. На чем основываются формулы приближенного дифференцирования?
2. Что обычно используют для вычисления значений функции, в точках левой половины рассматриваемого отрезка?
3. Каким случаем следует ограничиться с точки зрения повышения точности расчетов и уменьшения числа слагаемых в полученной формуле при приближении функции с помощью интерполяционного многочлена Ньютона?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2*б*

Тема «ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МНОГОЧЛЕНА ЛАГРАНЖА»

**1. Цель работы**

Цель практической работы заключается в углублении изучения численных методов решения поставленных задач, а также в овладении расчетными навыками.

**2. Общие сведения**

В наиболее часто встречающихся задачах, таких как :

- распределение температуры и массы внутри твердых тел и в неподвижных жидкостях (газах);

- распределение температуры и массы в движущейся жидкости (газе);

- распространение теплоты и распределение температуры при фазовых переходах.

- распространение теплоты и распределение температуры при фазовых переходах.

- расчет нагрева электроэнергетического и электротехнического оборудования;

- определение времени нагрева;

- определение тепловых потерь;

- расчет процессов сушки и т.д. применяются численные методы для решения несложных задач, а именно: решение нелинейных уравнений, систем линейных и нелинейных уравнений, задач интерполирования и нахождения интегралов, решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка.

Эти методы применяются для расчетов электрических (магнитных) цепей и распределения потенциалов в проводнике, тепловых (массовых) потерь и распределения теплоты (массы) в различных средах.

**Интерполяционный многочлен Лагранжа.**

*Интерполяция* – это вычисление значений y(x) во всей области определения аргумента по заданному дискретному множеству точек, т.е. переход от дискретной функции к непрерывной. Иными словами – это способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений. Основное условие интерполяции – равенство функций интерполяционного полинома в узлах интерполяции. Существуют следующие виды интерполяции: интерполяция, аппроксимация, экстраполяция (см. рис. 2.1).

*Аппроксимация* – приближение кривой, не обязательно проходящей через данные точки, но удовлетворяющей некоторому заданному свойству относительно этих точек.

*Экстраполяция* – приблизительное построение (продолжение) кривой, расчет недостающего уровня (участка) находящегося в конце или в начале рассматриваемого ряда значений точек функции. Если отыскивается начало ряда рассматриваемой функции, то это ретроспективная экстраполяция (обращаемся в прошлое функции), если отыскивается уровень конца ряда, то это будет проспективная экстраполяция.

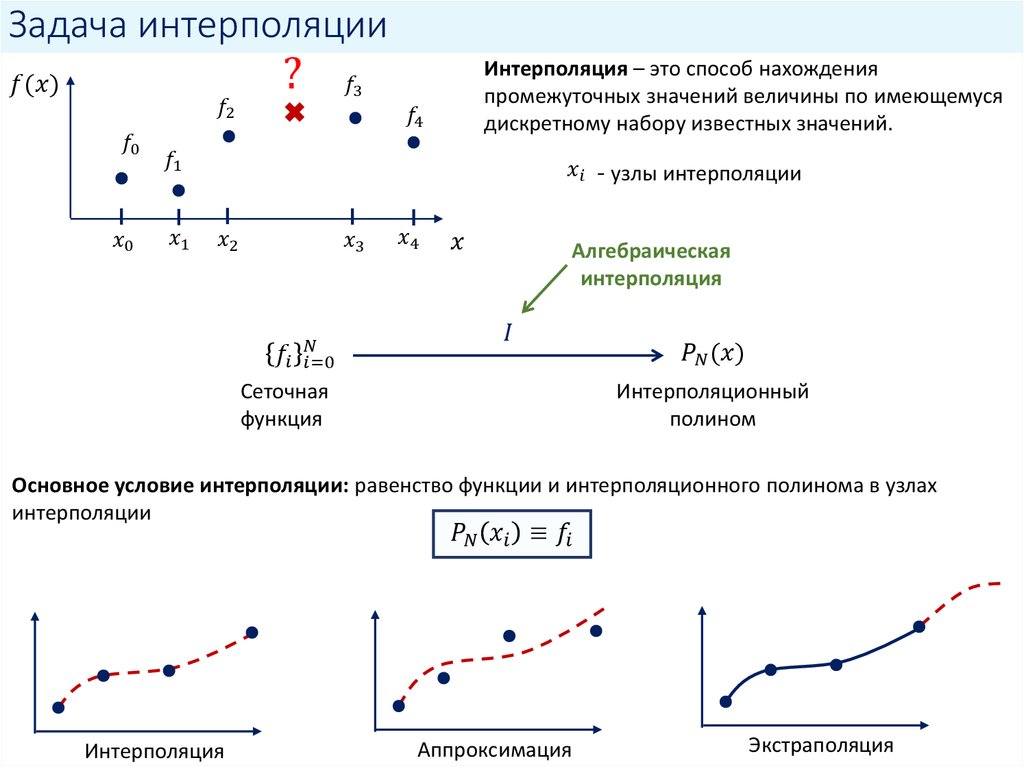


Рисунок 2.1 – Виды интерполяций

Найдем многочлен в виде линейной комбинации множеств степени :

. (2.1)

При этом поставим условие, чтобы каждый многочлен   во всех узлах интерполяции, за исключением одного , где он равен 1. Этим условиям отвечает многочлен вида

.

Действительно, . При  числитель выражения равен 0. По аналогии получим:

,

.

Подставив эти формулы в исходный многочлен, получим:

. (2.2)

Эта формула называется интерполяционным многочленом Лагранжа.

Если функция  непрерывно дифференцируема до -го порядка включительно, то остаточный член интерполяционного многочлена в форме Лагранжа имеет вид

, (2.3)

где  – внутренняя точка минимального отрезка, содержащего узлы интерполирования  и точку .

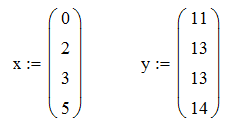
**3. Методика выполнения заданий**

Расчеты и последовательность расположения блоков вводимой информации в среде Mathcad 14.0 M011 рассматриваются ниже в примере выполнения задания.

**Пример.**

Заданы значения функции в узлах. Найти значения функции в заданных точках с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа

Векторы исходных данных:



Количество экспериментальных данных (счет от нуля):



Коэффициенты полинома Лагранжа (находятся аналитически):









Полином Лагранжа для четырех точек:



Аргумент для графика:





Рисунок 3.1 – График исходной функции и полинома

Здесь красный – исходная функция, синий – полином для 4х точек.

**Из графика видно, как полином Лагранжа отражает исходные данные (по крайним точкам исходной функции точки совпадают).**

**4. Порядок выполнения заданий по практической работе**

1. По своему варианту, из табл.4.1 получить данные для расчетов.
2. Провести расчеты в программной среде Mathcad 14.0 M011 в той последовательности, как было указано в предыдущем разделе (в примере).
3. Полученные результаты расчетов свести в общий итоговый отчет, выполненный на формате А4.

**Исходные данные.**

**Заданы значения  функции  в точках . Найти значение функции  при . Задачу решить с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа.**

Таблица 4.1 – Исходные данные

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1** | | | **2** | | **3** | | **4** | | **5** | | **6** | | **7** | |
|  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 11 | | 0 | 11 | 0 | 11 | 0 | 11 | 0 | 11 | 0 | 11 | 0 | 11 |
| 2 | 13 | | 1 | 12 | 2 | 12 | 2 | 12 | 1 | 12 | 2 | 12 | 2 | 10 |
| 3 | 13 | | 3 | 13 | 4 | 12 | 3 | 14 | 3 | 13 | 4 | 11 | 3 | 10 |
| 5 | 14 | | 5 | 14 | 5 | 13 | 5 | 15 | 5 | 14 | 5 | 10 | 5 | 12 |
|  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
|  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
|  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
| **8** | | | **9** | | **10** | | **11** | | **12** | | **13** | | **14** | |
|  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 11 | | 0 | 11 | 0 | 11 | 0 | 11 | 0 | 11 | 0 | 11 | 0 | 11 |
| 1 | 12 | | 2 | 12 | 2 | 13 | 2 | 13 | 1 | 12 | 2 | 12 | 2 | 12 |
| 3 | 13 | | 4 | 13 | 3 | 14 | 3 | 13 | 3 | 13 | 5 | 12 | 3 | 14 |
| 5 | 11 | | 5 | 14 | 5 | 12 | 5 | 14 | 6 | 14 | 7 | 13 | 5 | 15 |
|  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
| **15** | | | **16** | | **17** | | **18** | | **19** | | **20** | | **21** | |
|  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | | 1 | 0 | 2 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| 1 | | 2 | 5 | 4 | 3 | 4 | 2 | 1 | 8 | 2 | 5 | 6 | 18 | 21 |
| 4 | | 3 | 7 | 3 | 7 | 12 | 3 | 3 | 14 | 4 | 15 | 3 | 36 | 32 |
| 6 | | 1 | 9 | 5 | 11 | 14 | 5 | 5 | 18 | 5 | 20 | 5 | 48 | 54 |
|  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |

**5. Содержание отчета**

1. Титульный лист (указать № и название работы).

2. Цель работы.

3. Задание (вариант, вопросы, другое – по решению преподавателя).

4. Результаты расчетов разместить и оформить в Microsoft Office Профессиональный плюс 2007 в редакторе Microsoft Word, весь отчет по практической работе должен быть выполнен на формате А4.

5. Вывод по практической работе (что изучено, установлено, рассчитано, получено и т.п.).

**6. Контрольные вопросы**

1. Дайте определение интерполяции. Какие виды интерполяций применяются?
2. Какое нужно соблюдать условие, чтобы найти многочлен в виде линейной комбинации множеств степени ?
3. Где на практике применяются численные методы решения задач? Приведите примеры.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2*в*

Тема «РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ СКОРЕЙШЕГО СПУСКА»

**1. Цель работы**

Цель практической работы заключается в углублении изучения численных методов решения поставленных задач, а также в овладении расчетными навыками.

**2. Общие сведения**

В наиболее часто встречающихся задачах, таких как :

- распределение температуры и массы внутри твердых тел и в неподвижных жидкостях (газах);

- распределение температуры и массы в движущейся жидкости (газе);

- распространение теплоты и распределение температуры при фазовых переходах.

- распространение теплоты и распределение температуры при фазовых переходах.

- расчет нагрева электроэнергетического и электротехнического оборудования;

- определение времени нагрева;

- определение тепловых потерь;

- расчет процессов сушки и т.д. применяются численные методы для решения несложных задач, а именно: решение нелинейных уравнений, систем линейных и нелинейных уравнений, задач интерполирования и нахождения интегралов, решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка.

Эти методы применяются для расчетов электрических (магнитных) цепей и распределения потенциалов в проводнике, тепловых (массовых) потерь и распределения теплоты (массы) в различных средах.

**Метод скорейшего спуска**.

Сущность метода скорейшего спуска заключается в том, что искомое решение системы  рассматривается как минимум некоторой функции  в -мерном пространстве , и этот минимум ищется в направлении, противоположном направлению градиента функции , то есть в направлении скорейшего убывания этой функции. Фунция  связана с функциями  исходной системы соотношениями:

. (2.1)

Пусть точка  является начальным приближением к искомому решению. Через эту точку проводится поверхность уровня , а также нормаль к данной поверхности, которая указывает направление скорейшего убывания функции . Точка, в которой нормаль касается новой поверхности уровня , будет следующим приближением к исходному решению. Нормаль, проведенная к этой поверхности через точку , даёт возможность дойти до точки , в которой нормаль касается какой-то другой поверхности , и т. д.

Так как  , где  то последовательность точек , , … приведет к минимальному значению функции , т. е. к искомому решению исходной системы.

Последовательные приближения определяются из матричного равенства , где через  обозначен вектор в -мерном пространстве, указывающий координаты точки , т. е. значение -го приближения;  – параметр, характеризующий изменение функции  вдоль соответствующей нормали,  – градиент функции  в точке .

В общем случае параметр  может быть найден из уравнения:

, (2.2)

где  – скалярная функция, определяющая изменение функции . При этом берется наименьший положительный корень уравнения (2.2).

Если считают  малой величиной и не учитывают членов, содержащих  во второй и высших степенях, то приближенно искомое решение можно найти из матричных равенств , , , где

,

,

.

Важным достоинством метода скорейшего спуска является его неизбежная сходимость. Поэтому его рекомендуется применять для уточнения решения в тех случаях, когда другие итерационные методы расходятся.

**3. Методика выполнения заданий**

Расчеты и последовательность расположения блоков вводимой информации в среде Mathcad 14.0 M011 рассматриваются ниже в примерах выполнения заданий.

**Пример.**

Решить систему линейных уравнений методом наискорейшего спуска

Исходная система уравнений:





Точность решения задачи:



Начальный шаг:



Начальное приближение (подбирается опытным путем):









Исходная функция, включающая оба уравнения:



Частные производные по «Х» и по «У»:





Решение данной системы классическим методом:









Функция наискорейшего спуска:

Начальные присвоения

m n - частные производные, умноженные на шаг

х у - текущие координаты

х0 у0 - координаты на предыдущем шаге

z - условие минимума (дбравным нулю)

q - счетчик итераций

цикл пока z больше заданной точности

Если значение функции на новом шаге меньше чем на предыдущем, то переприсвоить значения координат, если больше - уменьшить шаг (на 0,005 - этот параметр подбирается опытным путем)

присвоение новых значений частных производных

остановить вычисления если сделано более 1000 итераций, чтобы не зависла программа

Алгоритм выдает значения переменных:







Значение функции при полученных переменных (должен быть равным нулю):



**Проверка полученного решения (результат совпадает):**





**Полученное решение совпадает с одним из решений системы классическим методом.**

**4. Порядок выполнения заданий по практической работе**

1. По своему варианту, из табл.4.1 получить данные для расчетов.
2. Провести расчеты в программной среде Mathcad 14.0 M011 в той последовательности, как было указано в предыдущем разделе (в примере).
3. Полученные результаты расчетов свести в общий итоговый отчет, выполненный на формате А4.

Таблица 4.1 – Исходные данные

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № вар. | **Решить системы нелинейных уравнений методом скорейшего спуска.** | |
| **1** |  |  |
| **2** |  |  |
| **3** |  |  |
| **4** |  |  |
| **5** |  |  |
| **6** |  |  |
| **7** |  |  |
| **8** |  |  |
| **9** |  |  |
| **10** |  |  |
| **11** |  |  |
| **12** |  |  |
| **13** |  |  |
| **14** |  |  |
| **15** |  |  |
| **16** |  |  |
| **17** |  |  |
| **18** |  |  |
| **19** |  |  |
| **20** |  |  |

**5. Содержание отчета**

1. Титульный лист (указать № и название работы).

2. Цель работы.

3. Задание (вариант, вопросы, другое – по решению преподавателя).

4. Результаты расчетов разместить и оформить в Microsoft Office Профессиональный плюс 2007 в редакторе Microsoft Word, весь отчет по практической работе должен быть выполнен на формате А4.

5. Вывод по практической работе (что изучено, установлено, рассчитано, получено и т.п.).

**6. Контрольные вопросы**

1. Что является важным достоинством метода скорейшего спуска?
2. В чем заключается сущность метода скорейшего спуска ?
3. Если значение функции на новом шаге меньше чем на предыдущем или больше, то что следует сделать в обоих случаях?

Приложение А

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Электроэнергетика и электротехника»

Дисциплина «Численные методы решения задач»

Отчет по практической работе №\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(название практической работы)

Выполнил:

студент группы\_\_\_\_\_\_\_

Иванов П.Н.

(дата)

Проверил:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

подпись И.О. Фамилия преподавателя

(дата)

Саратов 202\_