### 2.2.4. Теория двойственности

Рассмотрим две тесно связанные ЗЛП.

|  |  |
| --- | --- |
| Задача 1 | Задача 2 |
| при ограничениях | при ограничениях |

Эти задачи называются **симметричными двойственными задачами**. Отметим следующие особенности, связывающие эти задачи:

1. Одна из задач является задачей максимизации, а другая – минимизации.
2. В задаче максимизации все неравенства – ≤, а в задаче минимизации – ≥.
3. Число неизвестных одной задачи равно числу неравенств другой.
4. Матрицы коэффициентов при неизвестных в неравенствах обеих задач являются взаимно транспонированными.
5. Свободные члены неравенств одной из задач равны коэффициентам при соответствующих неизвестных в выражении целевой функции другой задачи.

Дадим экономическую интерпретацию паре симметричных двойственных задач. Рассмотрим задачу об использовании сырья.

Пусть имеется *m* видов сырья, запасы которых равны *b*1, *b*2, … , *b*m. Из этого сырья производят *n* видов продукции. Расходы сырья *i*-го вида на производство единицы продукции *j*-го вида равны *a*ij. Прибыль от продажи единицы продукции *j*-го вида равна *c*j. Найти такой план выпуска продукции, чтобы суммарная прибыль была максимальной. Математической моделью этой задачи является задача 1, где *x*1, *x*2, … , *x*n – количество единиц продукции соответствующего вида.

Дадим теперь экономическую интерпретацию двойственной задачи. Поставим целью назначить «справедливые» продажные цены на все имеющиеся виды сырья. Пусть *y*i – цена единицы сырья *i*-го вида. Потребуем, чтобы продажная цена сырья, необходимого для производства продукции определенного вида, была не меньше выручки, которую можно получить при реализации этой продукции, и рассмотрим задачу минимизации стоимости всего сырья. Математической моделью такой задачи является задача 2.

В матричном виде задачи 1 и 2 запишутся следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
| Задача 1 | Задача 2 |
| *f*(*x*) = (*c*, *x*) → max  при ограничениях    где *с*, *x*∈**R**n, *b, y*∈**R**m. | g(y) = (*b*, *y*) → min  при ограничениях |

Сформулируем основные теоремы о двойственных задачах.

**Теорема 2.5.** *Значение целевой функции задачи максимизации для любого ее плана не превосходит значения целевой функции двойственной к ней задачи минимизации для любого ее плана, т. е. имеет место неравенство:*

*f*(*x*) ≤ *g*(*y*), (2.6)

называемое **основным неравенством двойственности.**

**Теорема 2.6.** *(***достаточное условие оптимальности***). Если для некоторых планов двойственных задач значения целевых функций равны, то эти планы являются оптимальными.*

**Теорема 2.7.** *(***основная теорема двойственности***). Если ЗЛП имеет конечный оптимум, то двойственная к ней также имеет конечный оптимум, и оптимальные значения целевых функций совпадают. Если целевая функция одной из двойственных задач не ограничена, то условия другой задачи противоречивы.*

**Теорема 2.8.** *(***о дополняющей нежесткости***). Для того чтобы допустимые решения  и  двойственных задач являлись оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:*

 (2.7)

 (2.8)

Условия (2.7) и (2.8) позволяют, зная оптимальное решение одной из двойственных задач, найти оптимальное решение другой задачи. Рассмотрим экономическую интерпретацию соотношений (2.7) и (2.8). Соотношения (2.7) означают, что если  то  т. е. если *i*-й ресурс недефицитен, то его продажная цена должна быть равна нулю. Аналогично, соотношение (2.8) означает, что если выручка  от продажи сырья, необходимого для производства единицы продукции *j*-го вида, больше прибыли *c*j от продажи этой продукции, то не имеет смысла производить эту продукцию ().

Эта интерпретация позволяет дать ответ на вопрос о целесообразности включения в план нового вида продукции. Пусть новый (*n*+ 1)-й вид продукции характеризуется коэффициентами *ai,n*+1 затрат *i*-го ресурса (*i* = ) и коэффициентом удельной прибыли *cn*+1. Включение этого вида продукции в оптимальный план задачи на получение максимума прибыли целесообразно, если прибыль, недополученная из-за отвлечения дефицитных ресурсов, т. е.  покрывается полученной прибылью *cn*+1. Таким образом, если , то включение в план этого вида продукции выгодно, если же Δ > 0, то невыгодно.

**Теорема 2.9.** *Ценности ресурсов прямой ЗЛП представляет собой значения переменных  в оптимальном решении двойственной задачи, т. е. .*

Действительно, если *x*\* и *y*\* – оптимальные решения соответственно прямой и двойственной ЗЛП, то по основной теореме двойственности  и .

Теоремы 2.7, 2.8 и 2.9 называют соответственно первой, второй и третьей теоремами двойственности. Если решать исходную ЗЛП симплекс-методом, то ее нужно привести к ОЗЛП, вводя в каждое ограничение дополнительную переменную. Таким образом, мы получаем соответствие между дополнительными переменными *xn*+*i* прямой задачи и переменными *yi* двойственной задачи (). Из теоремы 2.9 и полученной ранее интерпретации индексной строки оптимальной симплекс-таблицы получаем следующий результат.

**Теорема 2.10**. *Компоненты оптимального решения двойственной ЗЛП равны соответствующим элементам индексной строки оптимальной симплекс-таблицы прямой задачи, отвечающим дополнительным переменным.*

Таким образом, решая симплекс-методом прямую ЗЛП, мы одновременно получаем и решение двойственной задачи.

**Пример 2.11.** ЗЛП, двойственная к модели примера 2.1 имеет следующий вид:

*g*(*y*1, *y*2, *y*3, *y*4) = 6*y*1 + 8*y*2 + *y*3 + 2*y*4 → min,

при ограничениях



Если известно решение исходной задачи (найденное, например, графическим методом)  то, записывая соотношения (2.7) и (2.8), имеем:





откуда находим 

Заметим, что для оптимальных решений  и  имеет место равенство , которое соответствует теореме 2.7, а компоненты решения  совпадают с найденными ранее ценностями ресурсов, что соответствует теореме 2.9. Решение  можно было найти и из оптимальной симплекс-таблицы прямой задачи (см. пример 2.5) в соответствии с теоремой 2.10.

Рассмотрим теперь **несимметричные двойственные задачи**. Если в прямой задаче какое-либо ограничение записано в виде равенства, то соответствующая переменная неограничена в знаке. Действительно, если, например, имеется уравнение

*a*11*x*1 + *a*12*x*2 + … + *a*1n*x*n = *b*1,

то, записывая его в виде двух неравенств, получим следующие записи симметричных двойственных задач:

|  |  |
| --- | --- |
| Задача 1 | Задача 2 |
|  |  |

Если теперь ввести переменную  то она будет неограничена в знаке, и мы получим запись двойственных задач в несимметричной форме

|  |  |
| --- | --- |
| Задача 1 | Задача 2 |
|  |  |

Если исходная задача – ОЗЛП, то двойственные задачи записываются в матричном виде следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
| Прямая задача | Двойственная задача |
|  |  |

Теоремы 2.5–2.8 остаются справедливыми и для несимметричных двойственных задач.