## 2.1. Моделирование в экономике

**Модель** – это объект (подобранный или специально созданный), который имеет с исследуемым объектом (оригиналом) общие свойства, интересующие исследователя. При построении модели исследователь выявляет существенные факторы, определяющие исследуемый объект или явление и отбрасывает детали, несущественные для решения поставленной проблемы. Модель проще, доступнее оригинала, и в процессе исследования заменяет оригинал. Метод исследования, основанный на использовании моделей, называется **моделированием**. Необходимость моделирования обусловлена сложностью или невозможностью непосредственного изучения реального объекта или процесса.  
В естественных науках одним из основных методов исследования является эксперимент.   
В экономике же эксперименты невозможны (либо обходятся очень дорого, если оказываются неудачными). Поэтому моделирование в экономике является важным и широко распространенным методом исследования.

Модели бывают натуральные и знаковые. **Натуральная модель** – это реальный (физический, биологический, химический и др.) объект. **Знаковая модель** состоит из абстрактных элементов – схем, графиков, формул, программ и т. п. **Математическая модель** является разновидностью знаковой модели и представлена математическими символами (функциями, уравнениями, неравенствами и т. п.). Возможности математического моделирования существенно расширились с появлением компьютеров. **Компьютерную модель** можно выделить как еще одну разновидность знаковой модели, которая записывается на языке программирования компьютера и составляется обычно на основе математической модели.

Рассмотрим общую схему математического моделирования, состоящую из четырех этапов.

**Первый этап** состоит в построении математической модели. Для этого следует выделить основные свойства (характеристики) исследуемого объекта и сформулировать законы (соотношения), которым они подчиняются. Этот этап завершается записью в математических терминах соотношений между характеристиками объекта.

**Второй этап** состоит в исследовании математической задачи, полученной на первом этапе. На этом этапе важную роль играет математический аппарат и вычислительная техника. Этот этап включает разработку алгоритмов численного решения задачи и подготовку компьютерных программ.

**Третий этап** состоит в проверке **адекватности модели**, т. е. соответствии модели моделируемому объекту или процессу. При моделировании имеется в виду не просто адекватность, но соответствие по тем свойствам, которые считаются существенными для исследования. Проверка адекватности математических моделей в экономике является серьезной проблемой, тем более, что ее осложняет трудность измерения экономических величин. Однако без такой проверки применение результатов моделирования в управленческих решениях может не только не оказаться полезным, но и принести существенный вред. Этот этап включает в себя подготовку исходной информации, что является в экономических задачах, как правило, наиболее трудоемким этапом моделирования, а также численное решение задачи на компьютере.

**Четвертый этап** – последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и модернизация модели.

Таким образом, математическое моделирование представляет собой циклический процесс: за первым четырехэтапным циклом может последовать второй, третий и т. д. При этом знания об исследуемом объекте уточняются, расширяются, а построенная модель совершенствуется.

Под **экономико-математическим моделированием** понимается математическое моделирование социально-экономических систем и процессов. Соответственно, **экономико-математические модели** есть продукт первого этапа математического моделирования, а **экономико-математические методы** – продукт второго этапа.

Рассмотрим теперь классификацию экономико-математических моделей. Хотя единой системы классификации не существует, можно выделить несколько групп в зависимости от признака классификации.

По **степени агрегирования объектов** моделирования различают модели **макроэкономические** и **микроэкономические**. К первым относят модели функционирования экономики в целом, а ко вторым – модели функционирования предприятий и фирм.

По **учету** **фактора времени** модели делятся на **статические** и **динамические**.   
В статических моделях все зависимости относятся к одному моменту времени. Динамические модели описывают экономическую систему в развитии.

По **учету фактора неопределенности** различают модели **детерминированные** и **стохастические**. В детерминированных моделях результат на выходе однозначно определяется необходимыми данными, а в стохастических – зависит от случайных факторов.

По **конкретному назначению** можно выделить **балансовые** модели, **эконометрические**, **оптимизационные**, **имитационные**, модели **массового обслуживания** и др. Балансовые модели выражают требование соответствия наличия ресурсов и их использования. Эконометрические модели предназначены для оценки параметров зависимостей между экономическими переменными на основе имеющейся статистической информации. Оптимизационные модели предназначены для выбора наилучшего варианта производства (распределения, потребления и т. п.) из множества допустимых вариантов. Имитационные модели служат для машинной имитации систем или процессов. Модели массового обслуживания предназначены для анализа показателей эффективности систем массового обслуживания.

Экономико-математические модели могут также классифицироваться по используемому **математическому аппарату** (экономико-математическим методам).  
По этому признаку выделяют модели **линейного** и **нелинейного программирования**, **целочисленного программирования**, **динамического программирования**, модели **теории игр**, модели **теории массового обслуживания**, модели **сетевого планирования** **и управления**, модели **оптимального управления**, **корреляционно-регрессионные** модели и т. д.

## 2.2. Линейное программирование

### 2.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим несколько примеров задач линейного программирования (ЗЛП).

**Задача о пищевом рационе (задача о диете, задача о смесях)**.

Ферма производит откорм скота с коммерческой целью. Пусть имеются четыре вида продуктов: *Р*1, *Р*2, *Р*3, *Р*4 со стоимостью *с*1, *с*2, *с*3, *с*4 соответственно. Из этих продуктов требуется составить пищевой рацион, который должен содержать: белков – не менее *b*1 единиц, углеводов – не менее *b*2 единиц, жиров – не менее *b*3 единиц. Для продуктов *Р*1, *Р*2, *Р*3, *Р*4 содержание белков, углеводов и жиров (в единицах на единицу продукта) известно и задано таблицей.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Продукт | Элементы | | |
| Белки | Углеводы | Жиры |
| *Р*1  *Р*2  *Р*3  *Р*4 | *a*11  *a*21  *a*31  *a*41 | *a*12  *a*22  *a*32  *a*42 | *a*13  *a*23  *a*33  *a*43 |

Требуется составить такой пищевой рацион, чтобы условия по белкам, углеводам и жирам были выполнены и стоимость была минимальна.

Составим математическую модель этой задачи. Пусть *x*1, *x*2, *x*3, *x*4 – количества продуктов *Р*1, *Р*2, *Р*3, *Р*4 соответственно, входящих в рацион. Целевая функция (стоимость рациона) будет иметь вид:

.

Ограничительные условия по белкам, углеводам и жирам приводят к следующим неравенствам:

 (2.1)

Таким образом, задача сводится к следующей: найти такие неотрицательные значения переменных *x*1, *x*2, *x*3, *x*4, чтобы они удовлетворяли неравенствам (2.1) и обращали в минимум целевую функцию:

.

**Задача об использовании сырья (задача планирования производства)**.

Из сырья двух видов 1 и 2, запасы которого ограничены и составляют *b*1 и *b*2 единиц соответственно, изготавливается продукция трех видов. Затраты сырья на производство продукции задаются следующей таблицей.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вид сырья | Затраты сырья на 1 ед. продукции вида | | |
| 1 | 2 | 3 |
| 1  2 | *a*11  *a2*1 | *a*12  *a*22 | *a*13  *a*23 |

Прибыль от производства единицы продукции *j*-го вида составляет *cj* рублей  
(*j* = 1,2,3). Требуется найти такой план выпуска продукции, при котором сырье не будет перерасходовано, а суммарная прибыль окажется максимальной.

Обозначим *x*1, *x*2, *x*3 соответственно количество производимой продукции 1-го, 2-го и  
3-го видов. Тогда математическая модель задачи имеет вид:





**Задача об использовании мощностей (задача о загрузке оборудования)**.

Ткацкая фабрика располагает двумя видами станков: *N*1 станков типа 1 и *N*2 станков типа 2. Станки могут производить три вида тканей: *Т*1, *Т*2, *Т*3, но с разной производительностью. Станок типа *i* производит в месяц *aij* метров ткани вида *Tj*. Каждый метр ткани вида *Tj* приносит прибыль *с*j (j = 1,2,3). Согласно плану, фабрика должна производить в месяц не менее *bj* метров ткани *Tj*. Кроме того, все станки должны быть загружены. Требуется так распределить загрузку станков, чтобы суммарная месячная прибыль была максимальной.

Пусть *xij* – количество станков типа *i* (*i* = 1, 2), занятых производством ткани  
*Tj* (*j* = 1, 2, 3). Тогда должны выполняться следующие ограничения:



Целевой функцией, очевидно, является получаемая прибыль, т. е. 

Как видно из рассмотренных примеров, все эти задачи сходны между собой. Отличие состоит лишь в том, что в одних задачах требуется обратить линейную функцию в максимум, а в других в минимум; в одних ограничения – только неравенства, а в других – равенства и неравенства. Бывают задачи, где все ограничения – равенства. Эти различия несущественны, т. к., как будет показано позднее, от ограничений-неравенств легко переходить к равенствам и обратно.

**Общая задача линейного программирования** состоит в нахождении экстремума (максимума или минимума) линейной целевой функции



при ограничениях

 (2.2)

где *aij*, *bi*, *cj* (, ) – заданные постоянные величины. Среди ограничений могут одновременно встречаться знаки ≤, =, ≥.

**Определение** **2.1.** *Вектор , удовлетворяющий системе ограничений (2.2), называется* **допустимым решением** *или* **планом** **ЗЛП**. *Множество всех планов называется* **допустимой областью** *или* **областью допустимых решений**. *План, который доставляет максимум (минимум), целевой функции называется* **оптимальным планом** *или* **оптимальным решением ЗЛП**. *Таким образом,* **решить ЗЛП** – *значит найти ее оптимальный план.*

Общая ЗЛП может быть приведена к единому стандартному виду, в котором целевая функция должна быть максимизирована, а все ограничения должны быть записаны в виде равенств с неотрицательными переменными:



при ограничениях

 ,

, ,

где , .

Эта стандартная форма называется **основной задачей линейного программирования** **(ОЗЛП)**. Запишем ее в матричном виде



при ограничениях *Ax = b, x ≥* 0*.*

Здесь

, , , ,

*T* означает транспонирование, т. е. *сT* – вектор-строка, . *A, b, c* предполагаются известными, причем *b ≥* 0.

Привести общую ЗЛП к основной очень просто, используя следующие очевидные правила.

1. Минимизация целевой функции *f* равносильна максимизации функции *g = –f*.
2. Ограничение в виде неравенства  равносильно уравнению  при условии, что дополнительная переменная . Аналогично,  
3. Если на некоторую переменную *xj* не накладывается условие неотрицательности, то делают замену переменной , , .

### 2.2.2. Графический метод решения

Графический метод может быть применен, если модель содержит только две переменные. В случае трех переменных этот метод становится менее наглядным, а при большем числе переменных – невозможным. Рассмотрим этот метод на примере конкретной задачи.

**Пример 2.1.** Предприятие изготовляет два вида красок: 1 и 2. Для их производства используются два исходных продукта – А и В. Расходы исходных продуктов и максимальные суточные запасы указаны в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Исходный продукт | Расход исходных продуктов на 1 т краски | | Суточный запас, т |
| 1 | 2 |
| А  В | 1  2 | 2  1 | 6  8 |

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на 2-ю краску не превышает спроса на первую краску более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на 2-ю краску никогда не превышает 2 т в сутки. Цены 1 т красок равны: 3 у. е. для 1-й краски и 2 у. е. для 2-й краски. Какое количество краски каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

**Решение**. Пусть *x*1, *x*2 – количества 1-й и 2-й краски соответственно (в тоннах), производимых предприятием. Тогда доход от реализации *f*(*x*1*,x*2)*=*3*x*1*+*2*x*2.

1 2 3 4 5 6 *x*1

8

7

6

5

4

3

2

1

(5)

6

E

D

C

B

A

(1)

(2)

(3)

(4)

(6)

*x*2

Рис. 2.1

Согласно условиям задачи, должны выполняться следующие ограничения:

 

Изобразим на координатной плоскости область допустимых решений. Множество решений каждого из неравенств есть полуплоскость, на которую указывает стрелка (рис. 2.1). Граница полуплоскости (прямая) задается соответствующим уравнением (когда знак неравенства заменяется знаком равенства). Полученная таким образом допустимая область – многоугольник OABCDE. Необходимо среди точек этого многоугольника найти точку, в которой целевая функция *f* принимает максимальное значение.

0

*x*1

*x*2

E

D

C

B

A

Рис. 2.2

Рассмотрим так называемую **линию уровня** функции *f*, т. е. линию, вдоль которой эта функция принимает одно и то же фиксированное значение *с*, т. е. *f*(*x*1*,x*2)*=c*. В данном случае линия уровня  есть прямая. При различных уровнях *с* линии уровня параллельны. На рис. 2.2 изображены три линии уровня. Одна из них проходит через начало координат и соответствует значению *с* = 0. Как известно из аналитической геометрии, вектор нормали  показывает направление возрастания уровня. Следовательно, оптимальное решение достигается в точке B (это точка допустимой области, соответствующая максимальному значению *с*). Точка В есть точка пересечения прямых (1) и (2) и поэтому ее координаты определяются из решения системы уравнений



Решая систему, находим , . Оптимальный доход при этом составит

 (у. е.).

Рассмотрим еще несколько примеров, в которых возникают **особые случаи решения ЗЛП**. При этом мы не будем приводить конкретную задачу, а сразу будем рассматривать математическую модель.

**Пример 2.2.** (Бесконечное множество решений). Максимизировать  при ограничениях

 

5

4

3

2

1

1 2 3 4 5 *x*1

O

A

C

*x*2

B

(3)

(1)

(2)

(4)



Рис. 2.3

Как видно из рис. 2.3, линии уровня  параллельны прямой (2), имеющей уравнение . Следовательно, задача имеет бесконечное множество оптимальных решений. Такими решениями являются координаты любой из точек отрезка АВ. Целевая функция имеет в каждой точке этого отрезка одно и то же (максимальное) значение, равное 12. Такие решения называются **альтернативными оптимальными решениями**. Информация о наличии альтернативных оптимумов оказывается очень полезной при решении практических задач, т. к. лицо, принимающее решение, получает возможность выбора альтернативного варианта, наиболее отвечающего сложившейся ситуации, и при этом не нужно исследовать изменения целевой функции.

**Пример 2.3.** (Неограниченная целевая функция). 



2

1

3

2

1

*x*2

(3)

(2)

(4)

O

(1)

*x*1

8

7

6

5

4

3

2

1



Рис. 2.4

Из рис. 2.4 видно, что задача не имеет оптимального решения, т. к. допустимая область не ограничена в направлении возрастания целевой функции. Характеризуя такую ситуацию, говорят, что и допустимая область, и оптимальное значение целевой функции не ограничены. **Неограниченность решения ЗЛП** свидетельствует о том, что разработанная модель недостаточно точна. Отметим наиболее типичные возможные ошибки:

* не учтено одно или несколько ограничений;
* неточно оценены параметры (постоянные), фигурирующие в некоторых ограничениях.

**Пример 2.4.** (Отсутствие допустимых решений). 

 

10

10

3

5

*x*1

*x*2

(3)

(2)

(4)

0

(1)

Рис. 2.5

Задача не имеет решения, т. к. множество планов этой задачи пусто (система ограничений несовместна).

С практической точки зрения **отсутствие допустимых решений** следует рассматривать как свидетельство того, что модель построена некорректно, т. к. введенные ограничения оказались противоречивыми.

После того как оптимальное решение получено, представляет интерес **анализ модели на чувствительность.** Для формулировки основных задач такого анализа введем необходимые определения.

**Определение** **2.2**. *Ограничение называется* **связывающим**, *если соответствующая ему прямая проходит через оптимальную точку, в противном случае* – **несвязывающим**. *Ресурс, соответствующий связывающему ограничению, называется* **дефицитным**, *а соответствующий несвязывающему ограничению –* **недефицитным**. *Ресурс называется* **избыточным**, *если исключение соответствующего ему ограничения не изменяет не только оптимального решения (как в случае недефицитного ресурса), но и допустимой области.*

Рассмотрим основные задачи анализа модели на чувствительность и проиллюстрируем их на примере 1.

1. *Каково предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее улучшить найденное оптимальное решение?*

В примере 1 связывающими являются ограничения (1) и (2). Им соответствуют запасы исходных продуктов (ресурсов) А и В, которые, следовательно, являются дефицитными.

O

*x*1

*x*2

E

D

C

B

A

F

Ресурс А=6т

Ресурс А=7т

(3)

(5)

(4)

(1)

(6)

(2)

Рис. 2.6

Из рис. 2.6 видно, что при увеличении запаса ресурса А прямая (1) перемещается параллельно вверх, постепенно стягивая в точку треугольник BCF. При этом точка оптимума движется от B к F и увеличивается значение целевой функции. При запасе ресурса А = 7 т областью допустимых решений является многоугольник OAFDE, ограничения (2) и (4) становятся связывающими. Дальнейшее увеличение запаса ресурса А делает его избыточным.

На рис. 2.7 аналогично можно проследить увеличение запаса ресурса В.

O

*x*1

*x*2

8

7

6

5

4

3

2

1

E

D

C

B

A

Ресурс B=12 т.

Ресурс B=8 т.

K

(2)

(6)

(1)

(4)

(3)

(5)

Рис. 2.7

1. *Каково предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, не изменяющее найденного ранее оптимального значения целевой функции?*

Из рис. 2.6 видно, что прямую (4) можно опускать до пересечения с точкой оптимума В без изменения оптимального решения, т. е. спрос на краску 2 может быть снижен до 1⅓ без изменения оптимума. Аналогично, прямую (3) можно двигать вниз пока она не достигнет точки В. При этом правая часть ограничения (3) станет равной . Результаты анализа представим в табл. 2.1.

Таблица 2.1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ресурс | Статус ресурса | Максимальное изменение запаса ресурсов | Максимальное изменение целевой функции |
| 1 | Дефицитный | 7 – 6 = 1 | 13 – 12⅔ = ⅓ |
| 2 | Дефицитный | 12 – 8 = 4 | 18 – 12⅔ = 5⅓ |
| 3 | Недефицитный | – 2 – 1 = – 3 | 0 |
| 4 | Недефицитный | 1⅓ – 2 = – ⅔ | 0 |

1. *Увеличение объема какого из ресурсов наиболее выгодно?*

Для ответа на этот вопрос вводится понятие **ценности *уi* дополнительной единицы   
*i*-го ресурса:**

,

где  − максимальное приращение оптимального значения целевой функции,  максимально допустимый прирост *i*-го ресурса.

Ценности ресурсов в экономике называют также **теневыми ценами** или **скрытыми ценами,** или **объективно обусловленными оценками**. Заметим, что их нельзя отождествлять с действительными ценами, по которым возможна закупка соответствующих ресурсов. Здесь имеется в виду некоторая мера, характеризующая ценность ресурса только относительного полученного оптимального решения.

Из таблицы 2.1 получаем: *у*1 = , *у*2 =  = , *у*3 = 0, *у*4 = 0. Таким образом, более выгодным является увеличение ресурса В.

1. *Каков диапазон изменения того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменения оптимального решения? На сколько следует изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы сделать некоторый недефицитный ресурс дефицитным и, наоборот, дефицитный ресурс сделать недефицитным?*

Обозначим *c*1 и *c*2 цены на краски 1 и 2 соответственно. Из рис. 2.8 видно, что при увеличении *c*1 или уменьшении *c*2 прямая  (линия уровня целевой функции) вращается по часовой стрелке, а при уменьшении c1 и увеличении *c*2 – против. Это легко проследить на соответствующем повороте вектора нормали к этой прямой, имеющего, как известно, координаты (*c*1, *c*2). Если меняются оба коэффициента *c*1 и *c*2 одновременно, то поворот линии уровня определится отношением *c*1/*c*2. Точка В будет оставаться оптимальной при условии, что наклон прямой  будет находиться в пределах, определенных прямыми (1) и (2), т. е. .

увеличение 

уменьшение 

*c*1*x*1 + *c*2*x*2 = *c*

*x*1

0

A

C

D

E

B

*x*2

(5)

(3)

(4)

(1)

(6)

(2)

Рис. 2.8

При  получим альтернативный оптимум с отрезком ВС в качестве множества оптимальных точек. Аналогично при  имеем альтернативный оптимум – отрезок АВ.

При  оптимум перемещается в точку А и ресурс 1 перестает быть дефицитным. При  оптимум перемещается в точку С и становится дефицитным ресурс 4, а ресурс 2 перестает быть таковым.

### 2.2.3. Симплекс-метод

Наиболее популярным универсальным алгебраическим методом решения ЗЛП является **симплекс-метод**, разработанный американским ученым Дж. Данцигом в 1949 г. [[1]](#footnote-1)

Для того чтобы понять суть этого метода, рассмотрим сначала его геометрическую интерпретацию. Напомним определение выпуклого множества, играющего важную роль в линейном программировании.

**Определение 2.3.** *Множество точек называется* **выпуклым**, *если оно вместе с любыми двумя своими точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки.*

Согласно этому определению, фигуры а и б на рис. 2.9 являются выпуклыми, а фигуры в и г – не являются таковыми.

А

В

А

В

а

б

в

г

Рис. 2.9

Как легко видеть, пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Как мы видели в п. 2.2, в случае двух переменных множество решений линейного неравенства (уравнения) представляет собой полуплоскость (прямую).

Пересечение этих полуплоскостей (и прямых, если в системе ограничений есть уравнения) представляет собой допустимую область. Если она не пуста, то является выпуклым множеством и называется **многоугольником решений**. Это может быть точка, отрезок, луч, многоугольник или неограниченная многоугольная область.

В случае трех переменных допустимая область ЗЛП есть пересечение полупространств и, возможно, плоскостей, и называется **многогранником решений**. Множество точек, в которых целевая функция принимает фиксированное значение, образует поверхность уровня, которая в данном случае является плоскостью. Следовательно, если решение существует, то точкой оптимума является одна из вершин многогранника решений (или вся грань – в случае альтернативного оптимума).

Аналогично, при *n* > 3 каждое неравенство *аi*1*x*1 *+ аi*2*x*2 *+ …+ аinxn* ≤ *bi*, *i* = , определяет полупространство *n-*мерного пространства (в случае уравнения – гиперплоскость). Их пересечение также называют многогранником решений, и оно является выпуклым множеством.

Геометрическая интерпретация симплекс-метода состоит в следующем:

1. Выбирается произвольная вершина многогранника решений. Соответствующее ей допустимое решение, необязательно оптимальное, называется начальным опорным решением.
2. От исходной вершины осуществляется переход к смежной вершине с лучшим значением целевой функции. Полученное решение проверяется на оптимальность с помощью критерия оптимальности. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение, либо будет установлено его отсутствие (неограниченность целевой функции на множестве планов).

1. Существуют и другие универсальные методы решения ЗЛП. Например, *метод разрешающих множителей*, разработанный советским математиком Л. В. Канторовичем в 1939 г. [↑](#footnote-ref-1)