

4. Метод искусственного базиса

В задаче линейного программирования, представленной в канонической форме, исходная базисная точка не всегда является очевидной. В этом случае применять алгоритм базового симплексного метода нельзя. Для решения задачи следует пользоваться *методом искусственного базиса*.

Пусть задача линейного программирования задана в каноническом виде (2.1)-(2.3). Введем новые (*искусственные*) переменные u_i в ограничения задачи так, чтобы в результате появилась возможность выписать исходную базисную точку:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + u_i = b_i, (b_i \geq 0), \quad i = 1, \dots, m,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad u_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Составим новую (*искусственную*) μ -задачу

$$\mu(u) = \sum_{i=1}^m u_i \rightarrow \min,$$
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + u_i = b_i, (b_i \geq 0), \quad i = 1, \dots, m,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad u_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Так как в этой задаче имеется исходная базисная точка Q , то задача может быть решена базовым симплексным методом. Пусть получено решение $(x_1^0, \dots, x_n^0, u_1^0, \dots, u_m^0)$ со значением целевой функции $\mu^0 = \sum_{i=1}^m u_i^0$, тогда справедливо следующее утверждение: *если при решении μ -задачи получено оптимальное значение целевой функции $\mu^0 = 0$, то точка (x_1^0, \dots, x_n^0) является базисной в исходной задаче. Если $\mu^0 > 0$, то допустимое множество исходной задачи пусто.*

Таким образом, метод искусственного базиса заключается в следующем: сначала составляется и решается μ -задача, а затем базовым симплексным методом решается исходная задача.

Пример 4.1. Для изготовления различных изделий A , B и C предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия A , B и C , а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в табл. 4.1.

Изделия A , C могут производиться в любых соотношениях, а изделий B требуется произвести не менее 10 штук, но производство ограничено выделенным предприятию количеством сырья каждого вида.

Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

Таблица 4.1

Вид сырья	Нормы затрат сырья на одно изделие, кг			Общее количество сырья, кг
	A	B	C	
I	20	30	30	1200
II	1	1	1	42
III	2	5	1	90
Цена одного изделия, р.	4	2	5	

Решение. Составим математическую модель задачи. Пусть x_1 - количество выпускаемых изделий A, x_2 - количество выпускаемых изделий B, x_3 - количество выпускаемых изделий C. Поскольку имеются ограничения на выделенный предприятию фонд сырья каждого вида и количество выпускаемых изделий B, переменные x_1 , x_2 , x_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 + 30x_3 \leq 1200, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 42, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 90, \\ x_2 \geq 10. \end{cases}$$

Общая стоимость произведенной предприятием продукции при условии выпуска x_1 изделий A, x_2 изделий B, x_3 изделий C составляет

$$Z(x) = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3.$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1 , x_2 , x_3 могут принимать только неотрицательные значения:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений системы неравенств требуется найти такое, при котором функция $Z(x)$ принимает максимальное значение.

Запишем эту задачу в канонической форме. Для этого введем дополнительные переменные v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , в результате чего ограничения запишутся в виде системы уравнений, и получим задачу линейного программирования

$$Z(x) = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 + 30x_3 + v_1 = 1200, \\ x_1 + x_2 + x_3 + v_2 = 42, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + v_3 = 90, \\ x_2 - v_4 = 10. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0, v_4 \geq 0.$$

Так как исходная базисная точка не видна, то следует применить метод искусственного базиса. Составим новую μ -задачу, введя искусственную переменную u_1 :

$$\mu(u_1) = u_1 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 + 30x_3 + v_1 = 1200, \\ x_1 + x_2 + x_3 + v_2 = 42, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + v_3 = 90, \\ x_2 - v_4 + u_1 = 10, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0, v_4 \geq 0, u_1 \geq 0.$$

Обеспечим нужное направление оптимизации целевой функции, умножив исходную целевую функцию на -1, получим

$$\tilde{\mu}(u_1) = -u_1 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 + 30x_3 + v_1 = 1200, \\ x_1 + x_2 + x_3 + v_2 = 42, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + v_3 = 90, \\ x_2 - v_4 + u_1 = 10, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, v_3 \geq 0, v_4 \geq 0, u_1 \geq 0.$$

Составим симплексную табл. 4.2 для $\tilde{\mu}$ -задачи и решим ее, используя алгоритм базового симплексного метода.

Таблица 4.2

B	C _B	X _B	0	0	0	0	0	0	0	-1	θ
			A ₁	A ₂	A ₃	v ₁	v ₂	v ₃	v ₄	u ₁	
v ₁	0	1200	20	30	30	1	0	0	0	0	40
v ₂	0	42	1	1	1	0	1	0	0	0	42
v ₃	0	90	2	5	1	0	0	1	0	0	18
u ₁	-1	10	0	(1)	0	0	0	0	-1	1	10
Δ _j			0	-1	0	0	0	0	1	0	
v ₁	0	900	20	0	30	1	0	0	30	-30	
v ₂	0	32	1	0	1	0	1	0	1	-1	
v ₃	0	40	2	0	1	0	0	1	5	-5	
x ₂	0	10	0	1	0	0	0	0	-1	1	
Δ _j			0	0	0	0	0	0	0	1	

Все полученные оценки Δ_j неотрицательны, следовательно, полученное решение $x_B = (0, 10, 0, 900, 32, 40, 0, 0)$ является оптимальным. Вычислим оптимальное значение целевой функции $\mu = -\bar{\mu} = 0$, следовательно, точка (v_1, v_2, v_3, x_2) является базисной в исходной задаче. Теперь исходную задачу можно решить, применив алгоритм базового симплексного метода. Для этого построим симплексную табл. 4.3 для исходной задачи. Первый блок табл. 4.3 – это последний блок табл. 4.2, из которого следует исключить последний столбец u_1 и изменить строку со значениями коэффициентов целевой функции.

Так как все оценки Δ_j неотрицательны, то полученная базисная точка является оптимальной. Таким образом, искомое оптимальное решение $x^* = (6, 10, 26)$ со значением целевой функции $Z_{\max} = Z(6, 10, 26) = 174$. Следовательно, оптимальный план выпуска изделий следующий: 6 изделий A , 10 изделий B и 26 изделий C , при этом стоимость производимой продукции будет равна 174 р.

Таблица 4.3

B	C_B	X_B	4	2	5	0	0	0	0	θ	$x_B = (0, 10, 0, 900, 32, 40, 0);$ $Z(x_B) = 20$
			A_1	A_2	A_3	v_1	v_2	v_3	v_4		
v_1	0	900	20	0	(30)	1	0	0	30	30	
v_2	0	32	1	0	1	0	1	0	1	32	
v_3	0	40	2	0	1	0	0	1	5	40	
x_2	2	10	0	1	0	0	0	0	-1	-	$x_B = (0, 10, 30, 0, 2, 10, 0);$ $Z(x_B) = 170$
Δ_j			-4	0	-5	0	0	0	-2		
x_3	5	30	2/3	0	1	1/30	0	0	1	45	
v_2	0	2	(1/3)	0	0	-1/30	1	0	0	6	
v_3	0	10	4/3	0	0	-1/30	0	1	4	7,5	
x_2	2	10	0	1	0	0	0	0	-1	-	$x_B = (6, 10, 26, 0, 0, 2, 0);$ $Z(x_B) = 174$
Δ_j			-2/3	0	0	1/6	0	0	3		
x_3	5	26	0	0	1	1/10	-2	0	1		
x_1	4	6	1	0	0	-1/10	3	0	0		
v_3	0	2	0	0	0	1/10	-4	1	4		
x_2	2	10	0	1	0	0	0	0	-1		
Δ_j			0	0	0	1/10	2	0	3		

Задание 4. Решить задачу линейного программирования методом искусственного базиса, предварительно приведя ее к каноническому виду.

1. Предприятие выпускает три вида продукции и использует три типа оборудования: токарное, фрезерное, шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в табл. 10.2. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида.

Таблица 10.2

Тип оборудования	Затраты времени, станко-ч, на единицу продукции вида			Общий фонд рабочего времени, станко-ч
	1	2	3	
Токарное	1	3	4	350
Фрезерное	10	5	5	400
Шлифовальное	4	6	2	520
Прибыль, р.	2	4	5	

Определите такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной, если изделий типа 1 требуется не менее 20.

2. Для грузовых перевозок создается автоколонна. На приобретение машин выделяется 600 тыс. р. Можно заказать машины трех марок – А, Б и В, характеризующиеся данными, приведенными в табл.10.3.

Таблица 10.3

Марка автомашин	Стоимость машины, тыс. р.	Расход ГСМ на машину за сутки, л	Количество водителей, обслуживающих машину за сутки	Производительность машины за сутки, т/км
А	10	1	1	2100
Б	20	2	3	3600
В	23	1	3	3780

Количество машин марки В должно быть не меньше 10. Общее число водителей в автоколонне должно быть не больше 44 человек. Запас ГСМ на базе не превышает 150 л. Сколько автомашин каждой марки следует заказать, чтобы автоколонна имела максимально возможную производительность, т/км, в расчете на одни сутки?

3. Предприятие выпускает три вида продукции. Затраты времени на изготовление единицы продукции, электроэнергия и запас имеющегося сырья приведены в табл. 10.4. В ней же указана прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной, если изделий типа 1 требуется не менее 875.

Таблица 10.4

Виды ресурсов	Нормы расхода ресурсов на производство единицы продукции вида			Запас ресурсов
	1	2	3	
Фонд времени, ч	2	2	1	2000
Электроэнергия, кВт·ч	3	4	4	6000
Сырье, т	2	6	5	3000
Прибыль от реализации единицы продукции, р.	80	45	50	

4. Производство трех видов продукции состоит из трех операций. Затраты времени на единицу продукции в ходе каждой операции, прибыль от реализации единицы продукции, фонд времени на каждую операцию даны в табл.10.5.

Таблица 10.5

Вид продукции	Затраты времени на единицу продукции в ходе каждой операции, мин			Прибыль, р.
	I	II	III	
A	10	2	4	2
B	5	1	6	4
B	5	1	8	3
Фонд времени, мин	5000	2000	720	

Сколько продукции каждого вида должно произвести предприятие, чтобы получить максимум прибыли, если продукции вида B должно быть не менее 10 единиц?

5. Цех выпускает три вида изделий. Суточный запас ресурсов, их расход на одно изделие и отпускные цены на одно изделие указаны в табл. 10.6.

Таблица 10.6

Виды ресурсов	Расход ресурсов на производство одного изделия вида			Суточный запас ресурсов
	I	II	III	
Оборудование, шт.-ч	4	4	2	780
Сырье, т	2	3	6	780
Электроэнергия, кВт-ч	1	4	3	840
Отпускная цена, р.	8	7	6	

Требуется спланировать суточный выпуск продукции так, чтобы валовой выпуск продукции в денежном выражении был наибольшим, причем изделий вида II требуется выпустить не менее 70.

6. Металлургический цех выпускает три вида проката. Прибыль от тонны произведенной продукции каждого вида составляет 30, 40 и 20 тыс. р. соответственно. Цех располагает необходимым оборудованием, фонд рабочего времени которого и расход на тонну каждого вида проката, ч, приведены в табл. 10.7.

Таблица 10.7

Тип оборудования	Затраты времени, станко-ч, на единицу продукции вида			Общий фонд времени, станко-ч
	1	2	3	
Отжигательные печи	3	1	0	2520
Травильный агрегат	1	1	1	4640
Прокатный стан	1	2	1	4000

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, если нужно произвести не менее 3000 т проката III.

7. Предприятие выпускает три вида продукции на трех станках. Затраты времени на производство одного изделия и прибыль от реализации единицы продукции приведены в табл. 10.8.

Таблица 10.8

Станки	Затраты времени на одно изделие, мин			Общий фонд времени, мин
	1	2	3	
I	2	3	3	12000
II	1	1	1	4200
III	2	3	0	9000
Прибыль, р.	4	6	6	

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, если требуется произвести не менее 1000 шт. продукции вида 3?

8. Фабрика выпускает ткани трех артикулов. Объем ресурсов и расход каждого вида ресурсов на производство единицы ткани даны в табл. 10.9.

Таблица 10.9

Виды ресурсов	Расход ресурсов на производство единицы ткани вида			Объем ресурсов
	I	II	III	
Оборудование, шт.-ч	3	4	2	750
Сырье, т	2	3	4	780
Электроэнергия, кВт-ч	1	4	5	860
Отпускная цена, р.	8	7	6	

Сколько единиц ткани каждого артикула должна выпустить фабрика, чтобы получить максимальную прибыль, если нужно произвести не менее 90 единиц ткани I артикула?

9. Цех выпускает три вида деталей, которые изготавливают на трех станках. На рис.10.1 изображена технологическая схема изготовления детали каждого вида с указанием времени, мин, ее обработки на станках.

Задан суточный ресурс рабочего времени каждого станка: 690 мин для станка 1, 450 мин для станка 2, 300 мин для станка 3. Стоимость детали вида 1, 2 и 3 составляет 3, 1 и 2 р. соответственно. Требуется составить суточный план производства деталей с целью максимизации стоимости выпущенной продукции, если должно быть выпущено не менее 30 деталей вида 3?

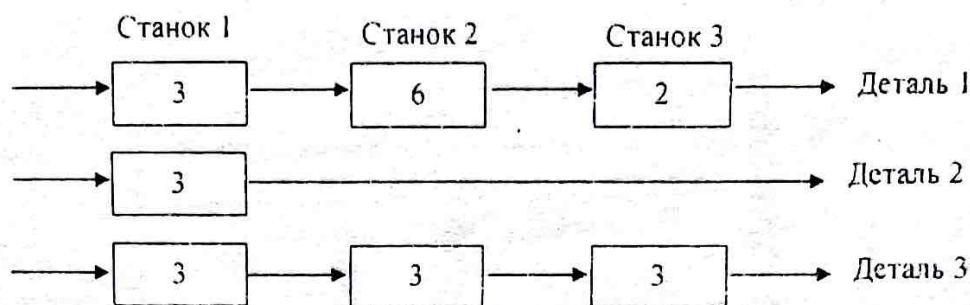


Рис. 10.1

10. Нефтеперерабатывающий завод производит бензин, керосин и соляровое масло. В табл. 10.10 приведены данные, показывающие затраты на производство 1 т каждой продукции (сырье, электроэнергия, загрузка оборудования), а также объемы ресурсов, имеющиеся на заводе.

Таблица 10.10

Виды ресурсов	Расход ресурсов на производство 1 т			Объем ресурсов
	Бензин	Керосин	Соляровое масло	
Загрузка оборудования, маш.-ч	10	5	5	800
Сырье, т	1	3	2	1350
Электроэнергия, кВт-т	4	6	2	520
Стоимость 1 т готового продукта, тыс. р.	1	4	3	

Требуется составить суточный план выпуска продукции с целью максимизации прибыли, если требуется выпустить не менее 20 т бензина.

11. Для строительства домов выбрано три типовых проекта. В табл. 10.11 даны длительность закладки фундамента, строительства остальной части и отделочных работ, а также жилая площадь здания и общая продолжительность работ.

Таблица 10.11

Вид работы	Длительность работ на типовых проектах			Общая продолжительность работ, ч
	I	II	III	
Закладка фундамента, ч	30	20	10	15000
Остальная часть, ч	20	20	10	3000
Отделочные работы, ч	30	40	30	3000
Жилая площадь, м ²	90	50	50	

Составить план строительства, максимизирующий ввод жилой площади при условии, что должно быть построено не менее ~~150~~ ⁵⁰ зданий по второму проекту.

12. Прядильная фабрика для производства трех видов пряжи использует три вида сырья: чистую шерсть, капрон и акрил. Объем ресурсов и расход каждого вида ресурсов на производство 1 т пряжи даны в табл. 10.12. Требуется составить годовой план производства пряжи с целью максимизации суммарной прибыли, причем пряжи третьего вида должно быть выпущено не менее 50 т.

Таблица 10.12

Виды ресурсов	Расход ресурсов на производство 1 т изделия вида			Объем ресурсов
	I	II	III	
Оборудования, шт.-ч	2	2	4	600
Сырье, т	1	3	2	400
Электроэнергия, кВт-т	1	4	2	850
Отпускная цена, тыс. р. за 1 т	3	5	1	

13. Предприятие выпускает три вида продукции на трех станках. Затраты времени на производство 1 т изделия, мощности станков и прибыль от реализации 1 т продукции задаются табл. 10.13.

Таблица 10.13

Тип станка	Затраты времени на одно изделие, ч			Общий фонд времени, ч
	1	2	3	
I	3	1	0	250
II	1	3	1	500
III	1	2	1	400
Прибыль, у.е.	3	4	2	

Сколько изделий каждого вида должно произвести предприятие, чтобы получить максимум прибыли, если требуется не менее 10 т продукции вида 3?

14. Автомобильный завод выпускает машины трех типов А, Б, В. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из цехов приведены в табл. 10.14. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из цехов.

Определить, сколько машин каждого типа должен производить завод для получения максимальной прибыли, если прибыль от выпуска машины типа А – 3 тыс. р., типа Б – 1 тыс. р., типа В – 8 тыс. р.

*машины
изделия
в любых
требуется* А, С могут производиться
в любых соотношениях, а машина В
не менее 10 штук.

Таблица 10.14

Наименование цеха	Количество часов для производства одной машины, ч			Фонд рабочего времени, ч
	А	Б	В	
Кузовной	5	1	1	200
Двигательный	1	4	5	500
Сборочный	4	2	2	700

15. Фабрика выпускает три типа изделий (табл. 10.15). Составить ежедневный план выпуска изделий, дающий максимальную прибыль, такой, чтобы изделия первого типа было выпущено не менее 300 единиц.

Таблица 10.15

Вид операции	Затраты времени на одно изделие			Фонд рабочего времени, ч
	1	2	3	
Обработка на станке, ч	3	1	0	2520
Штамповка, ч	1	1	1	4640
Окраска, ч	1	2	1	4000
Прибыль от одного изделия, р.	20	40	20	

16. Эффективность возделывания пшеницы, ячменя и картофеля характеризуется следующими показателями (табл. 10.16):

Таблица 10.16

Показатели	Пшеница	Ячмень	Картофель	Объем ресурсов
Урожайность, ц/га	20	30	30	1200
Затраты труда, чел.-дн./ц	1	1	1	42
Затраты топлива, л/ц	2	5	1	90
Закупочная цена 1 ц, р.	4	2	5	

Определить сочетание посевов пшеницы, ячменя и картофеля для получения максимальной выручки, если ячменя требуется сдать не менее 10 ц.

17. На швейной фабрике для изготовления трех видов изделий может быть использована ткань трех артикулов (табл. 10.17). Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной, причем изделий вида 3 должно быть выпущено не менее 30 единиц.

Таблица 10.17

Артикул ткани	Норма расхода ткани на одно изделие, м			Общее количество ткани, м
	1	2	3	
I	1	0	3	180
II	1	3	2	210
III	2	0	4	800
Цена одного изделия, р.	7	5	6	

18. Предприятие имеет возможность реализовать не более трех технологических процессов одновременно для производства своего продукта. Расходы, связанные с реализацией каждого технологического процесса, определяются трудозатратами, чел.-нед., а также количествами материалов М и N, кг, потребляемыми в течение недели (табл. 10.18). Определите, при каких объемах производства продукта предприятие получит максимальную прибыль. Объем производства первого технологического процесса должен быть не менее 5 кг.

Таблица 10.18

Параметр	Норма расхода на 1 кг			Имеется в наличии
	1	2	3	
Трудозатраты, чел.-нед.	1	1	1	15
Количество материала, кг:				
М	7	5	3	120
N	3	5	10	100
Прибыль, у.е. за 1 кг	3	5	6	

19. Для изготовления обуви трех моделей на фабрике используется два сорта кожи. Затраты труда и материалы на изготовления каждой пары обуви, а также прибыль от реализации одной пары обуви приведены в табл.10.19.

Таблица 10.19

Ресурсы	Тип модели			Запас ресурсов
	1	2	3	
Рабочее время, ч	2	2	2	1100
Кожа I сорта, м ²	2	1	0	500
Кожа II сорта, м ²	0	1	4	1200
Прибыль, у.е.	3	20	10	

Составить план выпуска обуви по ассортименту, максимизирующему прибыль при условии, что обуви модели 1 требуется не менее 150 пар.

20. Металлургический цех выпускает три вида проката. Прибыль от 1 т произведенной продукции каждого вида составляет 30, 40 и 20 тыс. р. соответственно. Цех располагает необходимым оборудованием, фонд рабочего времени которого и расход на 1 т каждого вида проката даны в табл. 10.20.

Таблица 10.20

Тип оборудования	Затраты времени, станко-ч. на единицу продукции вида			Общий фонд времени, станко-ч
	1	2	3	
Отжигательные печи	4	2	0	2900
Травильный агрегат	8	8	10	20000
Прокатный стан	6	2	10	12000

Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль, если нужно произвести не менее 70 тонн проката III.

21. Цех выпускает три вида изделий. Суточный запас ресурсов, их расход на 1 т изделие и отпускные цены на одно изделие указаны в табл. 10.21. Спланировать суточный выпуск продукции так, чтобы валовой выпуск продукции в денежном выражении был наибольшим, причем изделий вида II требуется выпустить не менее 70 т.

Таблица 10.21

Ресурсы	Вид изделия			Суточный запас ресурсов
	I	II	III	
Оборудование, шт.-ч	1	2	3	320
Сырье, т	4	3	4	450
Электроэнергия, кВт-т	6	5	2	300
Отпускная цена, у.е.	8	5	6	

22. Цех выпускает три вида деталей, которые изготавливают на трех станках. На рис. 10.2 изображена технологическая схема изготовления детали каждого вида с указанием времени ее обработки на станках.

Задан суточный ресурс рабочего времени каждого станка: 480 мин для станка 1, 260 мин для станка 2, 600 мин для станка 3. Стоимость деталей вида 1, 2 и 3 составляет 3, 1 и 2 руб. соответственно. Требуется составить суточный план производства деталей с целью максимизации стоимости выпущенной продукции, если деталей вида 3 должно быть выпущено не менее 10 единиц?

6. Транспортная задача

В общем виде транспортная задача формулируется следующим образом: в m пунктах производства A_1, A_2, \dots, A_m имеется однородный груз в количествах соответственно a_1, a_2, \dots, a_m . Этот груз необходимо доставить в n пунктов назначения B_1, B_2, \dots, B_n в количествах соответственно b_1, b_2, \dots, b_n . Стоимость перевозки 1 ед. груза из пункта A_i в пункт B_j равна c_{ij} . Требуется составить план перевозок, позволяющий вывезти все грузы, полностью удовлетворить потребителей и имеющий минимальную стоимость.

В зависимости от соотношения между суммарными запасами груза и суммарными потребностями в нем транспортные задачи могут быть *закрытыми* и *открытыми*.

Если сумма запасов груза равна суммарной потребности в нем, то есть

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \text{ (условие баланса),}$$

то транспортная задача называется *закрытой*; если условие баланса не выполнено, транспортная задача называется *открытой*.

Математическая постановка транспортной задачи имеет вид

$$Z(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (6.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad a_i > 0, \quad (6.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad b_j > 0, \quad (6.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.4)$$

где x_{ij} - это количество груза, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j .

Задача (6.1)-(6.4) является задачей линейного программирования, записанной в канонической форме. Любая допустимая точка задачи может быть записана в виде матрицы

$$X = (x_{ij}) = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Условие разрешимости транспортной задачи. Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно выполнение условия баланса

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Если выполнено условие баланса, то транспортная задача может быть решена симплексным методом, однако наличие большого числа переменных и

ограничений делает вычисления громоздкими, поэтому для решения этого класса задач разработан специальный метод, состоящий из тех же этапов, что и симплексный метод, а именно:

- *нахождение исходной базисной точки;*
- *проверка этой точки на оптимальность;*
- *переход от одной базисной точки к другой.*

Замечание. Можно показать, что число независимых уравнений системы (6.2)-(6.3) равно $m+n-1$. Отсюда следует, что любая допустимая базисная точка транспортной задачи содержит не более $m+n-1$ положительных координат, причем невырожденная базисная точка содержит ровно $m+n-1$ положительных координат.

Решение закрытой транспортной задачи

Условия задачи и ее исходную базисную точку внесем в *распределительную таблицу*, в первом столбце которой запишем наименования пунктов производства с имеющимся на каждом из них количеством груза, а в первой строке — наименования пунктов назначения с необходимым каждому из них количеством груза. Клетки, в которые поместим количество перевозимого груза, называются *занятыми*, им соответствуют базисные переменные базисной точки. Остальные клетки — *незанятые*, или *пустые*, им соответствуют свободные переменные. В верхнем правом углу каждой клетки будем записывать стоимость перевозки.

Существует несколько способов нахождения исходной базисной точки. Рассмотрим один из них — *метод минимального элемента*. Согласно этому методу рассматриваются все стоимости c_{ij} перевозок, из них выбирают наименьшую и в соответствующую клетку вписывают максимально возможную перевозку. Если $a_i < b_j$, то это будет перевозка $x_{ij} = a_i$; если $a_i > b_j$, то это будет перевозка $x_{ij} = b_j$. В первом случае весь груз из пункта A_i вывозится в пункт B_j , будем говорить, что пункт A_i исчерпан, поэтому все оставшиеся перевозки из пункта A_i будут равны нулю, то есть $x_{i1} = 0, \dots, x_{ij-1} = 0, x_{ij+1} = 0, \dots, x_{im} = 0$, соответствующие клетки прочеркиваем. В втором случае перевозка x_{ij} полностью удовлетворит потребность пункта B_j , будем говорить, что пункт B_j насыщен, поэтому $x_{1j} = 0, \dots, x_{i-1,j} = 0, x_{i+1,j} = 0, \dots, x_{mj} = 0$, соответствующие клетки прочеркиваем. Таким образом заполняются i -я строка и j -й столбец. Процесс распределения продолжают до тех пор, пока все грузы поставщиков не будут вывезены, а потребности потребителей не будут удовлетворены.

Замечание. Если наименьшей стоимости c_{ij} перевозки соответствуют строка и столбец с $a_i = b_j$, то перевозка будет равна $x_{ij} = a_i = b_j$. В этом случае пункт A_i будет исчерпан, а пункт B_j — насыщен, но прочеркиваем мы либо

i -ю строку, и тогда в j -м столбце ставим нулевую поставку 0^* , либо j -й столбец, и тогда в i -й строке ставим нулевую поставку 0^* .

Пример 6.1. На складах A_1, A_2, A_3 имеются запасы продукции в количестве 90, 400, 110 т соответственно. Потребители B_1, B_2, B_3 должны получить эту продукцию в количестве 140, 300, 160 т соответственно. Найти такой вариант прикрепления поставщиков к потребителям, при котором сумма затрат на перевозки была бы минимальной. Расходы по перевозке одной тонны продукции заданы матрицей, у.е.,

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1. Нахождение исходной базисной точки

Сначала проверим, является ли данная транспортная задача закрытой. Для этого необходимо проверить условие баланса:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 90 + 400 + 110 = 600, \quad \sum_{j=1}^3 b_j = 140 + 300 + 160 = 600, \\ 600=600.$$

Следовательно, данная транспортная задача является закрытой. Найдем исходную базисную точку по методу минимального элемента. Исходная таблица транспортной задачи имеет следующий вид (табл. 6.1):

Таблица 6.1

$a_i \backslash b_j$		B_1	B_2	B_3
		140	300	160
A_1	90	2	5	2
A_2	400	4	1	5
A_3	110	3	6	8
		50	60	

Число занятых клеток в табл. 6.1 равно 5, $m+n-1=3+3-1=5$, то есть условие невырожденности исходной базисной точки выполнено. Получили исходную базисную точку, которую можно записать в виде матрицы

$$X^1 = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \\ 50 & 0 & 60 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозки при исходной базисной точке составляет $Z(X^1) = 90 \cdot 2 + 300 \cdot 1 + 100 \cdot 5 + 50 \cdot 3 + 60 \cdot 8 = 1610$ у.е.

2. Проверка базисной точки на оптимальность

Найденная исходная базисная точка проверяется на оптимальность методом потенциалов по следующему критерию: если базисная точка транспортной задачи является оптимальной, то соответствующая ей система $m+n$ действительных чисел u_i и v_j удовлетворяет условиям $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток и $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ для свободных клеток.

Числа u_i и v_j называют потенциалами. В распределительную таблицу добавляют строку v_j и столбец u_i . Потенциалы u_i и v_j находят, составляя систему из уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$, справедливых для занятых клеток. Так как занятых клеток $m+n-1$, то уравнений $m+n-1$, а переменных $m+n$. Поэтому система имеет бесчисленное множество решений. Требуется найти любое частное решение, поэтому обычно полагают $u_1 = 0$, а все остальные потенциалы определяются однозначно.

Обозначим $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Эту величину называют оценкой свободных клеток. Если все оценки свободных клеток $\Delta_{ij} \leq 0$, то базисная точка является оптимальной. Если хотя бы одна из оценок $\Delta_{ij} > 0$, то базисная точка не является оптимальной и ее можно улучшить, перейдя к другой базисной точке.

Проверим найденную исходную базисную точку на оптимальность. Составим уравнения $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток:

$$u_1 + v_1 = 2, u_2 + v_2 = 1, u_2 + v_3 = 5,$$

$$u_3 + v_1 = 3, u_3 + v_3 = 8.$$

Положим $u_1 = 0$. Тогда $v_1 = 2$, $u_3 = 1$, $v_3 = 7$, $u_2 = -2$, $v_2 = 3$. Найденные значения потенциалов добавляем в распределительную табл. 6.2.

Таблица 6.2

$a_i \backslash b_j$		B_1	B_2	B_2	
		140	300	160	
A_1	90	2 90	5 —	2 +	$u_1 = 0$
A_2	400	4	1 300	5 100	$u_2 = -2$
A_3	110	3 50	6	8 60	$u_3 = 1$
		$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 7$	

Вычисляем оценки Δ_{ij} для свободных клеток:

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 5 = -2 < 0,$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 7 - 2 = 5 > 0.$$

Цикл строится след. образом: просмотрев все строки таблицы и вычеркивая те строки, в которых не более одной занятой клетки.

Наличие положительной оценки свободной клетки Δ_{13} свидетельствует о том, что исходная базисная точка не является оптимальной и для уменьшения значения целевой функции требуется перейти к другой базисной точке.

3. Переход от одной базисной точки к другой базисной точке

Пусть для клетки (i_0, j_0) оценка $\Delta_{i_0 j_0}$ строго положительна, тогда переменную $x_{i_0 j_0}$ требуется ввести в число базисных. Для этого перевозку $x_{i_0 j_0}$, которая до этого была нулевой, нужно сделать ненулевой. Для этого нужно перераспределить грузы, перемещая их из занятых клеток в свободные. Свободная клетка становится занятой, одна из ранее занятых клеток – свободной.

Для свободной клетки с $\Delta_{i_0 j_0} > 0$ строится цикл (замкнутая ломаная), все вершины которого, кроме одной, находятся в занятых клетках; углы прямые, число вершин четное; цикл начинается и заканчивается в клетке (i_0, j_0) . ✓

Далее вершины, входящие в цикл, последовательно отмечаются знаками “+” и “-”, начиная со знака “+” в клетке (i_0, j_0) . Среди вершин цикла со знаком “-” находят ту, в которой перевозка минимальна, присваивают θ найденное значение перевозки. В клетку (i_0, j_0) вписывают значение θ , а во всех остальных вершинах, входящих в цикл, меняют значения, уменьшая их на величину θ , если вершина помечена знаком “-”, и увеличивая их на величину θ , если вершина помечена знаком “+”.

Замечание. Если оказалось, что минимальной перевозкой обладают две вершины цикла со знаком “-”, то θ присваивают минимальное значение перевозок. При изменении значений перевозок у вершин цикла, помеченных знаком “-”, после вычитания величины θ один из нулей оставляют и помечают его 0*.

Рассмотрим переход от одной базисной точки к другой на данном примере. Строим цикл для клетки $(1, 3)$, имеющей положительную оценку (табл. 6.2). У вершин цикла расставляем знаки “+” и “-”. Вычисляем значение $\theta = \min\{60, 90\} = 60$, помещаем его в клетку $(1, 3)$ и изменяем значения в остальных клетках цикла. Получаем табл. 6.3.

Новая базисная точка имеет вид

$$X^2 = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 0 & 300 & 100 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подсчитаем стоимость перевозок на полученной точке: $Z(X^2) = 30 \cdot 2 + 60 \cdot 2 + 300 \cdot 1 + 100 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1310$ у.е. Как видим, новая базисная точка лучше исходной. Проверим полученную точку на оптимальность. Для этого найдем потенциалы и оценки свободных клеток. Вычисляем оценки свободных клеток:

$$\Delta_{12} = -1 < 0, \Delta_{21} = 1 > 0.$$

Затем вычеркиваем те ²³ столбцы, в которых содержится не более одного элемента. Затем снова просматриваем строки и т.д. Оставшиеся элементы образ. базиса.

Таблица 6.3

$a_i \backslash b_j$		B_1	B_2	B_2	
		140	300	160	
A_1	90	2 30	5	2 60	$u_1 = 0$
A_2	400	4 θ	1 300	5 100	$u_2 = 3$
A_3	110	3 110	6	8	$u_3 = 2$
		$v_1 = 2$	$v_2 = -2$	$v_3 = 2$	

Строим цикл для клетки с положительной оценкой $\Delta_{21} = 1$ (табл. 6.3), вычисляем значение $\theta = \min\{30, 100\} = 30$, помещаем его в клетку (2, 1) и изменяем значения в остальных клетках цикла. Получаем табл. 6.4.

Таблица 6.4

$a_i \backslash b_j$		B_1	B_2	B_2	
		140	300	160	
A_1	90	2	5	2	$u_1 = 0$
A_2	400	4 30	1 300	5 70	$u_2 = 3$
A_3	110	3 110	6	8	$u_3 = 2$
		$v_1 = 2$	$v_2 = -2$	$v_3 = 2$	

Новая базисная точка имеет вид

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим полученную точку на оптимальность. Для этого найдем потенциалы и оценки свободных клеток. Вычисляем оценки свободных клеток:

$$\Delta_{11} = -1 < 0, \Delta_{12} = -7 < 0, \Delta_{32} = -6 < 0, \Delta_{33} = -4 < 0.$$

Все оценки свободных клеток отрицательны, следовательно, найденная точка является оптимальной. Вычислим стоимость транспортных расходов (значение целевой функции на оптимальной точке):

$$Z(X^3) = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1280 \text{ y.e.}$$

Задание 5. Решить транспортную задачу.

1. Для строительства трех объектов используется кирпич, изготавливаемый на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготавливать 100, 150, 50 усл. ед. кирпича. Ежедневные потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов соответственно равны 75, 80, 60, 85 усл. ед. Известны тарифы перевозок 1 усл. ед. кирпича с каждого из заводов к каждому из строящихся объектов:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок кирпича к строящимся объектам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

2. На трех складах оптовой базы A_1, A_2, A_3 сосредоточен сахарный песок, который необходимо распределить между магазинами B_1, B_2, B_3, B_4 . Стоимость перевозок единицы продукции дана в табл. 10.24.

Таблица 10.24

Мебельные фабрики	Магазины				Производительность фабрик, шт./мес.
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	2	135
A_2	5	1	4	3	90
A_3	3	2	6	2	125
Потребности магазинов, шт./мес.	45	45	100	160	

Составить оптимальный план перевозок сахара и вычислить минимальную стоимость перевозок.

3. На трех хлебокомбинатах ежедневно производится 110, 190, 90 т муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых равны соответственно 80, 60, 170, 80 т. Тарифы перевозок 1 т муки с хлебокомбинатов к каждому хлебозаводу задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план доставки муки, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

4. Три мебельные фабрики A_1, A_2, A_3 производят кухни, которые отправляются в магазины B_1, B_2, B_3, B_4 . Стоимость перевозок единицы продукции задана в табл. 10.25.

Таблица 10.25

Мебельные фабрики	Магазины				Производительность фабрик, шт./мес.
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	3	1	80
A_2	6	3	5	6	100
A_3	3	2	6	3	70
Потребности магазинов, шт./мес.	80	50	50	70	

Составить оптимальный план перевозок мебели и вычислить минимальную стоимость перевозок.

5. В трех хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125, 140 т бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180, 110, 80, 70 т. Стоимости перевозок 1 т бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

6. Три завода A_1, A_2, A_3 производят однородную продукцию, которая отправляется в магазины B_1, B_2, B_3, B_4 . Стоимость перевозок единицы продукции задана в табл. 10.26.

Таблица 10.26

Заводы	Пункты назначения				Производительность завода, шт.
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	3	4	160
A_2	3	2	5	5	140
A_3	1	6	3	2	60
Потребности магазинов, шт.	80	100	95	85	

Составить оптимальный план перевозок продукции и вычислить минимальную стоимость перевозок.

7. На трех железнодорожных станциях A_1, A_2, A_3 скопилось 120, 110, 130 незагруженных вагонов. Эти вагоны необходимо перегнать на железнодорожные станции B_1, B_2, B_3, B_4 . На каждой из этих станций потребность в вагонах соответственно равна 80, 120, 100, 60. Тарифы перегонки одного вагона определяются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перегонок вагонов, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

8. Мясокомбинат имеет в своем составе три завода, на каждом из которых может изготавливаться один сорт колбасы. Мощности каждого заводов соответственно 400, 1200, 500 т/сут. Ежедневные потребности четырех магазинов, в которые поставляется этот сорт колбасы, составляют соответственно 100, 550, 490, 960 т/сут. Стоимость перевозок 1 т продукции задана матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 7 & 11 & 4 \\ 6 & 4 & 12 & 8 \\ 7 & 11 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Составить оптимальный план перевозок продукции и вычислить минимальную стоимость перевозок.

9. Для обслуживания двух авиалиний требуются самолеты трех типов. Потребности каждой авиалинии в самолетах каждого типа и количество самолетов, а также эксплуатационные затраты на самолет по каждой авиалинии даны в табл. 10.27.

Таблица 10.27

Тип самолета	Авиалинии		Количество самолетов, шт.
	1	2	
I	4	5	50
II	2	3	20
III	8	1	30
Потребности авиалинии, шт.	60	40	

Распределить самолеты по авиалиниям так, чтобы сумма эксплуатационных расходов было минимальна.

10. В стране имеется четыре завода, производящие мобильные телефоны в объеме соответственно 127, 215, 45, 133 тыс. шт. в год. Продукция заводов поставляется в четыре специализированных магазина, потребности которых соответственно 185, 74, 146, 115 тыс. шт. в год. Стоимость перевозки 1 тысячи единиц продукции задана матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 2 \\ 14 & 10 & 10 & 21 \end{pmatrix}.$$

Составить оптимальный план перевозок продукции и вычислить минимальную стоимость перевозок.

11. Имеется четыре цементных завода, поставляющие свою продукцию на четыре строительных объекта. Производительность каждого завода и потребности строительных объектов, а также стоимость доставки одной тонны цемента на каждый объект указаны в табл. 10.28.

Таблица 10.28

Цементный завод	Строительный объект				Производительность заводов, т/мес.
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	7	1	4	2	133
A ₂	2	15	4	3	94
A ₃	7	10	5	8	100
A ₄	2	4	11	10	53
Потребности магазинов, т/мес.	100	25	215	40	

Составить такой план перевозок цемента, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

12. Для строительства трех объектов используется строительный песок, добываемый на трех карьерах. Ежедневно каждый из карьеров может добывать 125, 145, 25 т песка. Ежедневные потребности в песке на каждом из строящихся объектов соответственно равны 115, 65, 75, 40 т. Известны тарифы перевозок 1 т песка с каждого из карьеров к каждому из строящихся объектов:

$$C = \begin{pmatrix} 21 & 14 & 27 & 15 \\ 7 & 20 & 13 & 11 \\ 10 & 11 & 14 & 12 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок песка к строящимся объектам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

13. На трех складах оптовой базы A_1, A_2, A_3 сосредоточена гречневая крупа, которую необходимо распределить между магазинами B_1, B_2, B_3, B_4 . Стоимость перевозок единицы продукции задана в табл. 10.29.

Таблица 10.29

Мебельные фабрики	Магазины				Производительность фабрик, кг/мес.
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	2	1	1	100
A_2	3	7	5	5	110
A_3	6	5	4	4	90
Потребности магазинов, кг/мес.	25	135	40 30	100 110	

Составить оптимальный план перевозок крупы и вычислить минимальную стоимость перевозок.

14. На трех молочных комбинатах ежедневно производится 110, 110, 100 л молока соответственно. Это молоко потребляется четырьмя оптовыми базами, ежедневные потребности которых равны соответственно 97, 134, 66, 23 л. Тарифы перевозок 1 л молока с каждого молочного комбината к каждой оптовой базе задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 & 4 \\ 15 & 14 & 13 & 10 \\ 7 & 11 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план доставки молока, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

15. Три ткацкие фабрики A_1, A_2, A_3 производят ситец, который отправляется на фабрики пошива одежды B_1, B_2, B_3, B_4 . Стоимость перевозок 1 рулона ткани задана в табл. 10.30.

Составить оптимальный план перевозки ситца и вычислить минимальную стоимость перевозок.

Таблица 10.30

Ткацкие фабрики	Фабрики пошива одежды				Производительность фабрик, рулонов/мес.
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	21	14	27	15	125
A_2	7	20	13	11	145
A_3	10	11	14	12	25
Потребности фабрики пошива, рулонов/мес.	115	65	75	40	

16. В трех хранилищах горючего ежедневно хранится 120, 97, 69 т солярки. Эту солярку ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 69, 82, 70, 65 т. Стоимости перевозок 1 т солярки с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 7 & 3 \\ 10 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок солярки, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

17. Три завода A_1, A_2, A_3 производят однородную продукцию, которая отправляется в пункты назначения B_1, B_2, B_3, B_4 . Стоимость перевозок единицы продукции дана в табл. 10.31.

Таблица 10.31

Заводы	Пункты назначения				Производительность завода, шт.
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	15	7	1	4	850
A_2	6	4	12	8	1200
A_3	7	11	5	10	950
Потребности пунктов назначения, шт.	1000	550	490	960	

Составить оптимальный план перевозок продукции и вычислить минимальную стоимость перевозок.

18. На трех железнодорожных станциях A_1, A_2, A_3 скопилось 130, 100, 170 незагруженных вагонов. Эти вагоны необходимо перегнать на железнодорожные станции B_1, B_2, B_3, B_4 . На каждой из этих станций потребность в вагонах

соответственно равна 150, 120, 80, 50 шт. Тарифы перегонки одного вагона определяются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 12 & 7 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перегонок вагонов, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

19. Три различных предприятия выпускают однородную продукцию. Мощность каждого предприятия соответственно равна 30, 40, 53 усл. ед. Ежедневные потребности четырех магазинов, в которые поставляется эта продукция, составляют соответственно 22, 35, 25, 41 усл. ед./сут. Стоимость перевозок 1 усл. ед. продукции задана матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 23 & 27 & 16 & 18 \\ 12 & 17 & 20 & 51 \\ 22 & 28 & 12 & 32 \end{pmatrix}.$$

Составить оптимальный план перевозок продукции и вычислить минимальную стоимость перевозок.

20. Завод имеет три цеха A_1, A_2, A_3 и четыре склада B_1, B_2, B_3, B_4 . Цех A_1 производит 30, цех A_2 – 40, A_3 – 20 тысяч изделий. Пропускная способность склада: B_1 – 15, B_2 – 30, B_3 – 25, B_4 – 20 тысяч изделий. Стоимость перевозок из цехов в склады, р., одной тысячи изделий задана матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Составить оптимальный план перевозок продукции и вычислить минимальную стоимость перевозок.

21. Имеется три специализированные мастерские по ремонту двигателей. Их производственные мощности 230, 190, 210 ремонтов в год. В четырех районах, обслуживаемых этими мастерскими, потребность в ремонте равна соответственно 180, 150, 120, 180 двигателей в год. Затраты, р., на перевозку одного двигателя из районов в мастерские заданы матрицей

8. Задача дискретного программирования. Элементы динамического программирования

Математическая постановка задачи дискретного программирования:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min), \quad (8.1)$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (\geq, =) b_1, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (\geq, =) b_2, \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (\geq, =) b_m, \end{cases} \quad (8.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (8.3)$$

$$x_j - \text{целые числа}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.4)$$

Отметим, что общая постановка задачи дискретного программирования отличается от общей постановки задачи нелинейного программирования наличием дополнительного ограничения (8.4), которое называется *требованием целочисленности* решения задачи.

Если задача (8.1)-(8.3) является задачей линейного программирования, то задача (8.1)-(8.4) называется *целочисленной задачей линейного программирования* и имеет вид

$$Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min),$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, (b_i \geq 0), \quad i = 1, \dots, m.$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_j - \text{целые числа}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Отметим, что условие целочисленности оказывается весьма существенным, так как делает невозможным использование симплексного метода для решения задачи. С другой стороны, задачи дискретного программирования широко распространены в экономике, например, к ним относятся следующие задачи:

- *задача планирования штучного производства* (изготовление станков, машин, компьютеров и т.д.);
- *задача распределения ограниченных ресурсов* (некоторые ресурсы могут использоваться лишь в количествах, кратных соответствующим единицам измерения: самолеты, грузовики и т.д.);
- *задача о загрузке самолета (задача о ранце)*. Такая задача возникает при выборе набора предметов максимальной стоимости для погрузки в некоторую тару (например, грузовой отсек самолета) при ограничениях на объем или грузоподъемность.

Одним из методов, позволяющих решать задачи дискретного программирования, является *метод динамического программирования*. Но для того чтобы можно было применить метод динамического программирования для решения задачи, требуется, чтобы исходная задача обладала определенными свойствами.

Динамическое программирование – метод оптимизации, приспособленный к операциям, в которых процесс может быть разбит на отдельные шаги (этапы). Такие операции называются *многошаговыми*.

Дадим общее описание модели динамического программирования. Рассматривается управляемый объект, который под влиянием управления переходит из начального состояния P_n в конечное состояние P_0 . Предположим, что процесс управления объектом можно разбить на n шагов. Пусть $P_{n-1}, P_{n-2}, \dots, P_0$ – состояния объекта после первого, второго и n шага. Схематически это изображено на рис. 8.1.

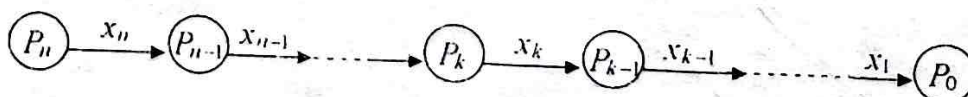


Рис. 8.1

Последовательное преобразование объекта (по шагам) достигается с помощью решений (управлений) x_1, x_2, \dots, x_n , принимаемых на каждом шаге. Отметим, что x_k – решение (управление), принятое на k -м шаге, оно переводит объект из состояния P_k в состояние P_{k+1} .

Будем предполагать, что состояние объекта в конце каждого шага зависит только от его состояния в начале шага и от решения, принимаемого на этом шаге. Такое свойство называют *отсутствием последствия*. Обозначим эту зависимость:

$$P_{k+1} = T(P_k, x_k).$$

Кроме того, будем считать, что решение, принимаемое на каждом шаге, зависит только от состояния управляемого объекта на данном шаге.

Варьируя управление, получаем различную *эффективность процесса*. Здесь под эффективностью понимается некоторая оценка результата процесса. Она может представлять собой показатель объекта, который требуется максимизировать или минимизировать (например, прибыль, производительность, затраты, себестоимость и т.д.). Количественно эффективность будем оценивать целевой функцией $G(x)$. В задаче пошаговой оптимизации целевая функция должна быть *аддитивной*, то есть

$$G(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x_i).$$

Задачу пошаговой оптимизации можно сформулировать так: определить совокупность решений x_1, x_2, \dots, x_n , переводящих объект из начального состояния в конечное состояние и максимизирующих или минимизирующих функцию $G(x)$. Управление, при котором достигается максимум (минимум) целевой функции, называется *оптимальным* и обозначается $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

В основе метода динамического программирования лежит *принцип оптимальности*, сформулированный Беллманом: *каково бы ни было состояние объекта в начале каждого шага, управление на этом шаге нужно выбирать так, чтобы в совокупности с оптимальным продолжением на последующих шагах получить оптимальный результат на всех шагах, включая данный*.

Запишем принцип оптимальности математически:

$$f_k(P_k) = \max_{x_k} \{g_k(x_k) + f_{k+1}(T(P_k, x_k))\},$$

где $g_k(x_k)$ – значение целевой функции, полученное в результате решения, принятого на k -м шаге; $f_k(P_k)$ – оптимальное значение целевой функции в задаче с k переменными; $f_{k+1}(T(P_k, x_k))$ – оптимальное значение целевой функции

в задаче с $k-1$ переменной. Данное уравнение называется *рекуррентным уравнением Беллмана* или *основным функциональным уравнением динамического программирования*.

Задачу нахождения максимума целевой функции можно решать как задачу о максимуме функции от многих переменных. Сформулированный принцип оптимальности позволяет решать задачу поэтапно, что приводит к задаче максимизации нескольких функций, каждая из которых зависит от меньшего числа переменных. Идея постепенной оптимизации и составляет суть динамического программирования. Однако на каждом шаге оптимизация ведется с учетом всех последствий управления в будущем. Исключение составляет лишь последний шаг, так как после него других шагов нет. Оптимально спланировав этот шаг, можно пристраивать к нему предпоследний, к предпоследнему – предыдущий и т.д. Таким образом, процесс динамического программирования разворачивается от конца к началу (поэтому на рис. 8.1 используется обратная нумерация). Для того чтобы спланировать последний шаг, нужно сделать различные предположения о том, чем закончился предпоследний шаг, и для каждого из них найти управление с максимальным значением целевой функции на последнем шаге. Решив эту задачу, мы получим *условно-оптимальное управление* на последнем шаге, то есть то управление, которое следует применить, если предпоследний шаг закончился тем или иным образом. Теперь можно оптимизировать управление на предпоследнем шаге и т.д.

Если найдены условно-оптимальные управления на каждом шаге, легко определить оптимальное управление. Действительно, начальное состояние объекта известно. К нему применим условно-оптимальное управление. В результате объект перейдет в новое состояние, для которого мы тоже знаем условно-оптимальное управление, и т.д. Находим оптимальное управление процессом x_1, x_2, \dots, x_n , приводящее к максимальному значению целевой функции.

Таким образом, при оптимизации управления многошаговый процесс происходит дважды:

- 1) от конца к началу, в результате чего находят условно-оптимальные управления на каждом шаге;
- 2) от начала к концу, в результате чего определяют оптимальные шаговые управления.

Пример 8.1. (*Задача распределения средств между предприятиями*). Совет директоров рассматривает предложения по наращиванию производственных мощностей для увеличения выпуска однородной продукции на четырех предприятиях, принадлежащих фирме. С этой целью выделяются средства в объеме 80 млн р. Варианты вложений кратны 20 млн р. (0; 20; 40; 60; 80). Прирост выпуска продукции зависит от выделенной суммы. Эти значения заданы табл. 8.1. Найти распределение средств между предприятиями, обеспечивающее максимальный прирост выпуска продукции, при условии, что в одно предприятие можно инвестировать не более одного раза.

Таблица 8.1

Возможные вложения	Прирост выпуска продукции $g_k(x_k)$, млн р.			
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3	Предприятие 4
0	0	0	0	0
20	8	10 (9)	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37

Эту задачу можно записать в математической форме

$$g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(x_3) + g_4(x_4) \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 80, \\ x_k = \{0; 20; 40; 60; 80\}, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

где x_k – количество средств, выделяемых каждому предприятию, а $g_k(x_k)$ – ожидаемый прирост продукции от выделенных средств, млн р.

Решение. Разбиваем процесс решения на четыре этапа (по количеству предприятий). Начальное состояние объекта – 80 млн р., конечное состояние – 0 млн р. (т.к. все средства вложены). Состояние P_k – это имеющиеся на k -м этапе средства, x_k – возможные инвестиции в k -е предприятие, очевидно, что $0 \leq x_k \leq P_k$.

I этап. Обсуждаются инвестиции в первое предприятие. Возможные значения переменной состояния P_1 – 0; 20; 40; 60; 80. Поскольку в задаче с одной переменной выбор отсутствует, вкладываемая сумма x_1 будет равна сумме выделенных средств, и оптимальные значения целевой функции будут равны $f_1(P_1) = g_1(x_1)$. Таким образом,

$$f_1(0) = 0, \quad f_1(20) = 8, \quad f_1(40) = 16, \quad f_1(60) = 25, \quad f_1(80) = 36.$$

II этап. Выделенную сумму 80 млн р. распределяем между первым и вторым предприятиями. Рекуррентное уравнение при этом имеет вид

$$f_2(P_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq P_2} \{g_2(x_2) + f_1(P_2 - x_2)\}.$$

Поиск ведется по переменной x_2 , которая в зависимости от числа P_2 может принимать значения 0; 20; 40; 60; P_2 . Таким образом,

$$f_2(0) = \max_{x_2=0} \{g_2(0) + f_1(0 - x_2)\} = 0 \text{ при } x_2 = 0;$$

$$f_2(20) = \max_{x_2=0, 20} \{g_2(x_2) + f_1(20 - x_2)\} = \max\{g_2(0) + f_1(20), g_2(20) + f_1(0)\} = \\ = \max\{0 + 8, 10 + 0\} = 10 \text{ при } x_2 = 20;$$

$$f_2(40) = \max_{x_2=0, 20, 40} \{g_2(x_2) + f_1(40 - x_2)\} = \max\{g_2(0) + f_1(40), g_2(20) + f_1(20), \\ g_2(40) + f_1(0)\} = \max\{0 + 16, 8 + 10, 20 + 0\} = 20 \text{ при } x_2 = 40;$$

$$f_2(60) = \max_{x_2 \in \{0, 20, 40, 60\}} \{g_2(x_2) + f_1(60 - x_2)\} = \max\{g_2(0) + f_1(60), g_2(20) + f_1(40), g_2(40) + f_1(20), g_2(60) + f_1(0)\} = \max\{0 + 25, 16 + 10, 8 + 20, 28 + 0\} = 28 \text{ при } x_2 = 60;$$

$$f_2(80) = \max_{x_2 \in \{0, 20, 40, 60, 80\}} \{g_2(x_2) + f_1(80 - x_2)\} = \max\{g_2(0) + f_1(80), g_2(20) + f_1(60), g_2(40) + f_1(40), g_2(60) + f_1(20), g_2(80) + f_1(0)\} =$$

$$= \max\{0 + 36, 10 + 25, 20 + 16, 28 + 8, 40 + 0\} = 40 \text{ при } x_2 = 80.$$

III этап. Решается задача распределения средств между тремя предприятиями. Рекуррентное уравнение при этом имеет вид

$$f_3(P_3) = \max\{g_3(x_3) + f_2(P_3 - x_3)\}.$$

Поиск ведется по переменной x_3 , которая в зависимости от числа P_3 может принимать значения 0; 20; 40; 60; P_3 . Таким образом,

$$f_3(0) = \max_{x_3=0} \{g_3(0) + f_2(0 - x_3)\} = 0 \text{ при } x_3 = 0;$$

$$f_3(20) = \max_{x_3 \in \{0, 20\}} \{g_3(x_3) + f_2(20 - x_3)\} = \max\{g_3(0) + f_2(20), g_3(20) + f_2(0)\} =$$

$$= \max\{0 + 10, 12 + 0\} = 12 \text{ при } x_3 = 20;$$

$$f_3(40) = \max_{x_3 \in \{0, 20, 40\}} \{g_3(x_3) + f_2(40 - x_3)\} = \max\{g_3(0) + f_2(40), g_3(20) + f_2(20), g_3(40) + f_2(0)\} =$$

$$\max\{0 + 20, 12 + 10, 21 + 0\} = 21 \text{ при } x_3 = 20; \quad (x_3 = 40)$$

$$f_3(60) = \max_{x_3 \in \{0, 20, 40, 60\}} \{g_3(x_3) + f_2(60 - x_3)\} = \max\{g_3(0) + f_2(60), g_3(20) + f_2(40), g_3(40) + f_2(20), g_3(60) + f_2(0)\} =$$

$$\max\{0 + 28, 12 + 20, 21 + 10, 27 + 0\} = 32 \text{ при } x_3 = 20;$$

$$f_3(80) = \max_{x_3 \in \{0, 20, 40, 60, 80\}} \{g_3(x_3) + f_2(80 - x_3)\} = \max\{g_3(0) + f_2(80), g_3(20) + f_2(60), g_3(40) + f_2(40), g_3(60) + f_2(20), g_3(80) + f_2(0)\} =$$

$$= \max\{0 + 40, 12 + 28, 21 + 20, 27 + 10, 38 + 0\} = 41 \text{ при } x_3 = 40.$$

IV этап. На данном этапе решается исходная задача распределения суммы в 80 млн р. между четырьмя предприятиями на основе рекуррентного уравнения вида

$$f_4(80) = \max_{x_4 \in \{0, 20, 40, 60, 80\}} \{g_4(x_4) + f_3(80 - x_4)\} = \max\{g_4(0) + f_3(80), g_4(20) + f_3(60), g_4(40) + f_3(40), g_4(60) + f_3(20), g_4(80) + f_3(0)\} =$$

$$= \max\{0 + 41, 11 + 32, 23 + 21, 30 + 12, 37 + 0\} = 41 \text{ при } x_4 = 40.$$

Итак, получен максимальный ожидаемый прирост выпуска продукции, равный 41 млн р.

Далее следует определить, при каких вариантах вложений получен этот результат. С этой целью необходимо пройти от четвертого этапа к первому и проследить, как получено максимальное значение целевой функции.

На четвертом этапе получен максимальный вариант при $x_4 = 40$. Фиксируем это значение переменной. Замечаем, что $44 = 23 + 21$, где $21 = f_3(40)$. Этот результат получен на третьем этапе при $x_3 = 20$. Фиксируем это значение переменной. Замечаем, что $f_3(40) = 12 + 9$, где $9 = f_2(20)$. Этот результат получен при $x_2 = 20$. Аналогично получаем, что $x_1 = 0$.

Таким образом, инвестиции целесообразно выделять второму, третьему и четвертому предприятиям в количестве соответственно 20; 20; 40 млн р. Оптимальный прирост в этом случае составит 44 млн р.

$x_2 = 40$ не подходит, т.е. всего 80 млн р.

$x_1 = 0, x_2 = 20, x_3 = 40, x_4 = 40$ не подходит, т.к. сумма = 80 млн р.

Задание 6. Методом динамического программирования решить задачу распределения ресурсов между предприятиями. 40 млн р. необходимо распределить между четырьмя предприятиями так, чтобы получить максимальный прирост выпуска продукции. Доходности от вложений $g_i(x_i)$ заданы табл. 10.34, а вложения кратны 8 млн р.

Таблица 10.34

$x_i \backslash g_i(x_i)$	$g_1(x_1)$	$g_2(x_2)$	$g_3(x_3)$	$g_4(x_4)$
8	A	28	35	27
16	57	B	67	73
24	120	122	C	125
32	150	146	144	D
40	180	175	180	178

Значения A, B, C, D даны в табл. 10.35.

Таблица 10.35

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	40	42	39	41	46	45	38	47	50	48
B	61	65	59	68	64	66	62	63	67	60
C	119	123	124	126	118	122	125	120	128	130
D	176	175	181	174	178	177	173	180	182	179
Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	41	42	39	41	48	45	38	47	51	48
B	61	64	59	68	64	66	65	62	67	62
C	115	123	122	126	118	120	125	120	128	130
D	176	175	181	175	178	177	173	180	182	179
Вариант	21	22	23	24						
A	40	48	37	41						
B	61	65	59	62						
C	115	123	125	126						
D	176	175	181	174						

Игрой называют формализованную модель конфликтной ситуации. Игра ведется по определенным правилам, кроме того, игра происходит многократно, и игроки меняют свое поведение в процессе игры. Игра называется *парной*, если в ней участвуют только две стороны. Если в парной игре выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, то такая игра называется *игрой с нулевой суммой*. *Стратегией* называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом ходе в зависимости от сложившейся ситуации. Задача игрока состоит в выборе стратегии, приводящей к наибольшему выигрышу, в предположении, что второй игрок (противник) также выбирает наилучший для себя способ.

Пусть игрок A имеет m стратегий A_1, A_2, \dots, A_m , а игрок B — n стратегий B_1, B_2, \dots, B_n . Такая игра называется игрой $m \times n$. Обозначим через a_{ij} выигрыш (проигрыш, если $a_{ij} < 0$) игрока A , если он использует стратегию A_i , а игрок B пользуется стратегией B_j . Тогда матрица

$$\begin{matrix} & B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (9.1)$$

называется *платежной матрицей* или *матрицей игры*. Каждая строка этой матрицы соответствует некоторой стратегии игрока A , а каждый столбец — некоторой стратегии игрока B .

Решением игры называется такая пара стратегий игроков A и B , называемых *оптимальными стратегиями*, что если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому невыгодно отклоняться от своей оптимальной стратегии.

Число $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$ называется *нижней ценой игры*, а соответствующая ему стратегия A_{i_0} называется *максиминной*. Эта величина — гарантированный выигрыш игрока A , какую бы стратегию ни выбрал игрок B . Число

$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$ называется *верхней ценой игры*, а соответствующая ему стратегия B_j называется *минимаксной*. Она гарантирует игроку B , что его проигрыш будет не более величины β . Отметим, что в любой матричной игре справедливо неравенство $\alpha \leq \beta$.

Если нижняя цена игры совпадает с верхней, то есть $\alpha = \beta$, то элемент a_{ij_0} платежной матрицы, стоящий на пересечении строки, в которой достигается нижняя цена игры α , и столбца, в котором достигается верхняя цена игры β , называется *седловой точкой*. В таком случае про игру говорят, что она имеет седловую точку, а число $v = \alpha = \beta$ называют *ценой игры*.

Для игры с седловой точкой оптимальными являются максиминная стратегия для игрока A и минимаксная стратегия для игрока B . Это означает, что если игрок A придерживается максиминной стратегии, то игроку B невыгодно отклоняться от минимаксной стратегии, наоборот, если B придерживается минимаксной стратегии, то A невыгодно отклоняться от максиминной стратегии.

Предположим, что игрок A применяет стратегии A_i с заданными частотами (вероятностями):

Игрок A	A_1	A_2	...	A_m
Частота P	p_1	p_2	...	p_m

Так как стратегии A_i представляют собой полную группу несовместных событий, то $\sum_{i=1}^m p_i = 1$.

Аналогично игрок B применяет стратегию B_j с частотой q_j , причем $\sum_{j=1}^n q_j = 1$:

Игрок B	B_1	B_2	...	B_n
Частота Q	q_1	q_2	...	q_n

Наборы чисел (p_1, p_2, \dots, p_m) и (q_1, q_2, \dots, q_n) называются *смешанными стратегиями*. В частном случае, если все числа p_i равны нулю, кроме одного, равного единице, это означает, что игрок A постоянно придерживается одной стратегии. Такая стратегия называется *чистой* (аналогично для игрока B).

Таким образом, игра с седловой точкой имеет решение в чистых стратегиях, игра без седловой точки не имеет решений в чистых стратегиях, но имеет решение в смешанных стратегиях. Однако при использовании смешанных стратегий игра становится случайной. Случайной становится и величина выигрыша игрока A (или, что то же самое, проигрыша игрока B), поэтому можно говорить лишь о среднем значении выигрыша.

Выигрышем игрока A называется математическое ожидание выигрыша при заданных вероятностях смешанных стратегий. *Ценой игры* называется вы-

игрыш, получаемый при оптимальных смешанных стратегиях $p^*=(p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*)$ и $q^*=(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$: $v^* = \sum_{i,j} a_{ij} p_i^* q_j^*$.

Основная теорема теории игр: всякая конечная матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях. Для решения игры в смешанных стратегиях используется следующая теорема: для того чтобы стратегии $p^*=(p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*)$ и $q^*=(q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ были оптимальными в игре с матрицей (9.1) и ценой игры v^* , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^* \geq v^*, \quad j = 1, \dots, n. \quad (9.2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* \leq v^*, \quad i = 1, \dots, m. \quad (9.3)$$

Эта теорема позволяет свести нахождение оптимальных стратегий для матричной игры к решению некоторой задачи линейного программирования.

Пример 9.1. Предприятие может выпускать три вида продукции A_1, A_2, A_3 , получая прибыль, зависящую от спроса на эту продукцию. Спрос, в свою очередь, может принимать одно из четырех состояний B_1, B_2, B_3, B_4 . В матрице элементы a_{ij} характеризуют прибыль, которую получает предприятие при выпуске продукции A_i и состоянии спроса B_j .

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	3	5	2
A_2	5	6	5	3
A_3	2	0	7	4

Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, считая состояние спроса полностью неопределенным, гарантируя при этом среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса.

Решение. Исследуем игру и исключим в платежной матрице заведомо невыгодные и дублирующие стратегии. Вторая строка доминирует над первой, так как все ее элементы не меньше элементов первой строки соответственно, поэтому стратегия A_1 заведомо менее выгодна, чем A_2 . В результате получаем матрицу

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_2	5	6	5	3
A_3	2	0	7	4

В этой матрице третий столбец доминирует над первым, и поскольку столбцы характеризуют стратегии игрока B , стремящегося уменьшить выигрыш игрока A , то эта стратегия заведомо невыгодна. После его исключения получаем

Для отыскания решения воспользуемся теорией двойственности. На основании первой теоремы двойственности

$$f_{\min}^* = g_{\max}^* = \frac{7}{24},$$

на основании второй теоремы двойственности для вектора y^* , являющегося решением двойственной задачи, должны выполняться равенства

$$y_1^* (1 - 5x_1 - 2x_2) = 0,$$

$$y_2^* (1 - 6x_1) = 0,$$

$$y_3^* (1 - 3x_1 - 4x_2) = 0.$$

Подставляя координаты вектора $x^* = (\frac{1}{6}, \frac{1}{8})$, получаем

$$y_1^* (1 - \frac{5}{6} - \frac{2}{8}) = 0, \quad y_1^* (-\frac{1}{12}) = 0, \text{ отсюда } y_1^* = 0,$$

$$y_2^* (1 - \frac{6}{6}) = 0, \quad y_2^* \cdot 0 = 0, \text{ отсюда } y_2^* \text{ может быть отличен от нуля,}$$

$$y_3^* (1 - \frac{3}{6} - \frac{4}{8}) = 0, \quad y_3^* \cdot 0 = 0, \text{ отсюда } y_3^* \text{ может быть отличен от нуля.}$$

Так как обе неизвестные исходной задачи оказались положительными, то в соответствующих ограничениях двойственной задачи должны стоять знаки равенств. Таким образом, подставляя $y_1 = 0$, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 6y_2 + 3y_3 = 1, \\ 4y_3 = 1, \end{cases}$$

откуда $y_2^* = \frac{1}{24}$, $y_3^* = \frac{1}{4}$. Таким образом, оптимальная точка двойственной за-

дачи $y^* = (0, \frac{1}{24}, \frac{1}{4})$ со значением целевой функции $g_{\max}^* = \frac{7}{24}$.

Следовательно, оптимальной смешанной стратегией игрока B является набор $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (0, \frac{1}{7}, 0, \frac{6}{7})$.

