

## 9. Элементы теории игр

*Игрой* называют формализованную модель конфликтной ситуации. Игра ведется по определенным правилам, кроме того, игра происходит многократно, и игроки меняют свое поведение в процессе игры. Игра называется *парной*, если в ней участвуют только две стороны. Если в парной игре выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, то такая игра называется *игрой с нулевой суммой*. *Стратегией* называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом ходе в зависимости от сложившейся ситуации. Задача игрока состоит в выборе стратегии, приводящей к наибольшему выигрышу, в предположении, что второй игрок (противник) также выбирает наилучший для себя способ.

Пусть игрок  $A$  имеет  $m$  стратегий  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , а игрок  $B$  —  $n$  стратегий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Такая игра называется игрой  $m \times n$ . Обозначим через  $a_{ij}$  выигрыш (проигрыш, если  $a_{ij} < 0$ ) игрока  $A$ , если он использует стратегию  $A_i$ , а игрок  $B$  пользуется стратегией  $B_j$ . Тогда матрица

$$\begin{matrix} & B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (9.1)$$

называется *платежной матрицей* или *матрицей игры*. Каждая строка этой матрицы соответствует некоторой стратегии игрока  $A$ , а каждый столбец — некоторой стратегии игрока  $B$ .

*Решением игры* называется такая пара стратегий игроков  $A$  и  $B$ , называемых *оптимальными стратегиями*, что если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому невыгодно отклоняться от своей оптимальной стратегии.

Число  $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$  называется *нижней ценой игры*, а соответствующая ему стратегия  $A_{i_0}$  называется *максиминной*. Эта величина — гарантированный выигрыш игрока  $A$ , какую бы стратегию ни выбрал игрок  $B$ . Число

$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$  называется *верхней ценой игры*, а соответствующая ему стратегия  $B_j$  называется *минимаксной*. Она гарантирует игроку  $B$ , что его проигрыш будет не более величины  $\beta$ . Отметим, что в любой матричной игре справедливо неравенство  $\alpha \leq \beta$ .

Если нижняя цена игры совпадает с верхней, то есть  $\alpha = \beta$ , то элемент  $a_{ij_0}$  платежной матрицы, стоящий на пересечении строки, в которой достигается нижняя цена игры  $\alpha$ , и столбца, в котором достигается верхняя цена игры  $\beta$ , называется *седловой точкой*. В таком случае про игру говорят, что она имеет седловую точку, а число  $v = \alpha = \beta$  называют *ценой игры*.

Для игры с седловой точкой оптимальными являются максиминная стратегия для игрока  $A$  и минимаксная стратегия для игрока  $B$ . Это означает, что если игрок  $A$  придерживается максиминной стратегии, то игроку  $B$  невыгодно отклоняться от минимаксной стратегии, обратно, если  $B$  придерживается минимаксной стратегии, то  $A$  невыгодно отклоняться от максиминной стратегии.

Предположим, что игрок  $A$  применяет стратегии  $A_i$  с заданными частотами (вероятностями):

Игрок $A$	$A_1$	$A_2$	...	$A_m$
Частота $P$	$p_1$	$p_2$	...	$p_m$

Так как стратегии  $A_i$  представляют собой полную группу несовместных событий, то  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ .

Аналогично игрок  $B$  применяет стратегию  $B_j$  с частотой  $q_j$ , причем  $\sum_{j=1}^n q_j = 1$ :

Игрок $B$	$B_1$	$B_2$	...	$B_n$
Частота $Q$	$q_1$	$q_2$	...	$q_n$

Наборы чисел  $(p_1, p_2, \dots, p_m)$  и  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  называются *смешанными стратегиями*. В частном случае, если все числа  $p_i$  равны нулю, кроме одного, равного единице, это означает, что игрок  $A$  постоянно придерживается одной стратегии. Такая стратегия называется *чистой* (аналогично для игрока  $B$ ).

Таким образом, игра с седловой точкой имеет решение в чистых стратегиях, игра без седловой точки не имеет решений в чистых стратегиях, но имеет решение в смешанных стратегиях. Однако при использовании смешанных стратегий игра становится случайной. Случайной становится и величина выигрыша игрока  $A$  (или, что то же самое, проигрыша игрока  $B$ ), поэтому можно говорить лишь о среднем значении выигрыша.

*Выигрышем игрока  $A$*  называется математическое ожидание выигрыша при заданных вероятностях смешанных стратегий. *Ценой игры* называется вы-



игрыш, получаемый при оптимальных смешанных стратегиях  $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*)$  и  $q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ :  $v^* = \sum_{i,j} a_{ij} p_i^* q_j^*$ .

**Основная теорема теории игр:** всякая конечная матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях. Для решения игры в смешанных стратегиях используется следующая теорема: для того чтобы стратегии  $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*)$  и  $q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$  были оптимальными в игре с матрицей (9.1) и ценой игры  $v^*$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^* \geq v^*, \quad j = 1, \dots, n. \quad (9.2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* \leq v^*, \quad i = 1, \dots, m. \quad (9.3)$$

Эта теорема позволяет свести нахождение оптимальных стратегий для матричной игры к решению некоторой задачи линейного программирования.

**Пример 9.1.** Предприятие может выпускать три вида продукции  $A_1, A_2, A_3$ , получая прибыль, зависящую от спроса на эту продукцию. Спрос, в свою очередь, может принимать одно из четырех состояний  $B_1, B_2, B_3, B_4$ . В матрице элементы  $a_{ij}$  характеризуют прибыль, которую получает предприятие при выпуске продукции  $A_i$  и состоянии спроса  $B_j$ .

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	1	3	5	2
$A_2$	5	6	5	3
$A_3$	2	0	7	4

Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, считая состояние спроса полностью неопределенным, гарантируя при этом среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса.

**Решение.** Исследуем игру и исключим в платежной матрице заведомо невыгодные и дублирующие стратегии. Вторая строка доминирует над первой, так как все ее элементы не меньше элементов первой строки соответственно, поэтому стратегия  $A_1$  заведомо менее выгодна, чем  $A_2$ . В результате получаем матрицу

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_2$	5	6	5	3
$A_3$	2	0	7	4

В этой матрице третий столбец доминирует над первым, и поскольку столбцы характеризуют стратегии игрока  $B$ , стремящегося уменьшить выигрыш игрока  $A$ , то эта стратегия заведомо невыгодна. После его исключения получаем

$$\begin{array}{ccc} & B_1 & B_2 & B_4 \\ \begin{array}{c} A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Проверим упрощенную матрицу на наличие в ней седловой точки, определив нижнюю и верхнюю цену игры. Получим  $\beta = \min \{5, 6, 4\} = 4$ ,  $\alpha = \max \{3, 0\} = 3$ . Так как  $\alpha \neq \beta$ , то игра не имеет седловой точки и ее решением будет смешанная стратегия, а цена игры  $v$  заключена в пределах  $3 \leq v \leq 4$ .

Будем искать оптимальную стратегию для игрока  $A$ . Для его стратегии  $(p_2, p_3)$ , где  $p_2$  — частота применения стратегии  $A_2$ , а  $p_3$  — стратегии  $A_3$ , должны выполняться равенства (9.2)

$$\begin{cases} 5p_2 + 2p_3 \geq v, \\ 6p_2 \geq v, \\ 3p_2 + 4p_3 \geq v, \end{cases}$$

кроме того,  $p_2 + p_3 = 1$ . Разделим обе части полученных соотношений на  $v > 0$  и обозначим  $x_1 = \frac{p_2}{v}$ ,  $x_2 = \frac{p_3}{v}$ . Тогда получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ 6x_1 \geq 1, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 = \frac{1}{v}. \end{cases}$$

Так как игрок  $A$  стремится сделать свой выигрыш  $v$  как можно большим, то есть величину  $\frac{1}{v}$  — как можно меньшей, то приходим к следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ 6x_1 \geq 1, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 1, \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$



Полученную задачу линейного программирования решим графически. Допустимое множество изображено на рис. 9.1, направление роста целевой функции указано стрелкой

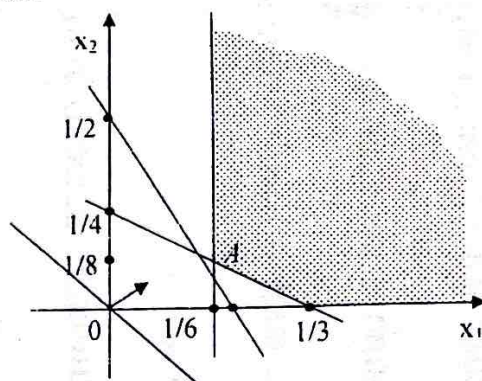


Рис. 9.1

Точка  $A$  является точкой, в которой целевая функция первый раз пересекает допустимое множество, ее координаты можно найти, решив систему уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = 1. \end{cases}$$

В результате получим искомое оптимальное решение  $x^* = (\frac{1}{6}, \frac{1}{8})$  со значением

целевой функции  $f_{\min}^* = f(\frac{1}{6}, \frac{1}{8}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$ . Отсюда цена игры

$v^* = \frac{1}{f_{\min}^*} = \frac{24}{7}$ ,  $p_2 = x_1 \cdot v^* = \frac{4}{7}$ ,  $p_3 = x_2 \cdot v^* = \frac{3}{7}$ ,  $p_1 = 0$  (так как стратегия  $A_1$  заведомо невыгодна). Следовательно, оптимальной смешанной стратегией игрока  $A$  является набор  $(p_1, p_2, p_3) = (0, \frac{4}{7}, \frac{3}{7})$ .

Таким образом, продукцию первого вида производить невыгодно, а продукцию второго и третьего вида следует производить в отношении 4:3.

Найдем оптимальную смешанную стратегию для игрока  $B$ . Для этого решим следующую двойственную к предыдущей задачу линейного программирования:

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 6y_2 + 3y_3 \leq 1, \\ 2y_1 + 4y_3 \leq 1, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

Отметим, что  $y_1 = \frac{q_1}{r}$ ,  $y_2 = \frac{q_2}{r}$ ,  $y_3 = \frac{q_4}{r}$ .

Для отыскания решения воспользуемся теорией двойственности. На основании первой теоремы двойственности

$$f_{\min}^* = g_{\max}^* = \frac{7}{24},$$

на основании второй теоремы двойственности для вектора  $y^*$ , являющегося решением двойственной задачи, должны выполняться равенства

$$y_1^* (1 - 5x_1 - 2x_2) = 0,$$

$$y_2^* (1 - 6x_1) = 0,$$

$$y_3^* (1 - 3x_1 - 4x_2) = 0.$$

Подставляя координаты вектора  $x^* = (\frac{1}{6}, \frac{1}{8})$ , получаем

$$y_1^* (1 - \frac{5}{6} - \frac{2}{8}) = 0, \quad y_1^* (-\frac{1}{12}) = 0, \text{ отсюда } y_1^* = 0,$$

$$y_2^* (1 - \frac{6}{6}) = 0, \quad y_2^* \cdot 0 = 0, \text{ отсюда } y_2^* \text{ может быть отличен от нуля,}$$

$$y_3^* (1 - \frac{3}{6} - \frac{4}{8}) = 0, \quad y_3^* \cdot 0 = 0, \text{ отсюда } y_3^* \text{ может быть отличен от нуля.}$$

Так как обе неизвестные исходной задачи оказались положительными, то в соответствующих ограничениях двойственной задачи должны стоять знаки равенств. Таким образом, подставляя  $y_1 = 0$ , приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 6y_2 + 3y_3 = 1, \\ 4y_3 = 1, \end{cases}$$

откуда  $y_2^* = \frac{1}{24}$ ,  $y_3^* = \frac{1}{4}$ . Таким образом, оптимальная точка двойственной за-

дачи  $y^* = (0, \frac{1}{24}, \frac{1}{4})$  со значением целевой функции  $g_{\max}^* = \frac{7}{24}$ .

Следовательно, оптимальной смешанной стратегией игрока В является набор  $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (0, \frac{1}{7}, 0, \frac{6}{7})$ .

**Задание 8.** Предприятие может выпускать три вида продукции  $A_1, A_2, A_3$ , получая прибыль, зависящую от спроса на эту продукцию. Спрос, в свою очередь, может принимать одно из четырех состояний  $B_1, B_2, B_3, B_4$ . В матрице элементы  $a_{ij}$  характеризует прибыль, которую получает предприятие при выпуске продукции  $A_i$  и состоянии спроса  $B_j$ .

$$\begin{matrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, считая состояние спроса полностью неопределенным, гарантируя при этом среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса.

1.  $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

2.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

3.  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4.  $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

5.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

6.  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

7.  $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

8.  $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

9.  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10.  $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

11.  $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

12.  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

13.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

17.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

19.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

21.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

23.

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

14.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

16.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

18.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

20.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

22.

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

24.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$