**Некоторые сведения из теории вероятностей (ТВ).**

Все процессы окружающей действительности делятся на детерминированные процессы, поведение которых формализуется определёнными функциональными зависимостями, на основании которых можно получать достоверные показатели поведения этих процессов, и случайные (стохастические, вероятностные) процессы, зависящие от многих случайных факторов, будущее поведение которых можно оценивать в виде прогноза за счёт вычисления необходимых вероятностных характеристик.

Во многих исследованиях детерминированность процесса рассматривается как идеальная модель поведения некоторой системы для получения хотя бы первичных показателей поведения процесса, чтобы затем провести уже более углублённые исследования, где в большинстве случаев приходится учитывать недетерминированные факторы, влияющие на поведение исследуемого процесса.

Из сказанного можно сделать следующий вывод: как и в теории множеств, где классическая теория множеств является частью теории нечётких множеств, так и в нашем случае детерминированные процессы являются частью случайных процессов, отражая достоверную часть этих процессов.

Любой вероятностный эксперимент имеет множество элементарных исходов (в детерминированном варианте возможен только один исход). Понятие элементарного исхода относится к категории первичных понятий, поэтому при исследовании вероятностных процессов необходим достаточно большой опыт практических навыков для определения множества элементарных исходов (элементарных событий), чтобы их не спутать с обычными событиями, которые могут произойти при проведении исследуемого эксперимента.

Для примера рассмотрим следующую простую задачу.

В урне находится 5 белых и 7 чёрных шаров. Эксперимент состоит в том, чтобы из этой урны случайным образом извлечь один шар. В рамках проводимого эксперимента ставится задача о получении оценки возможности извлечения белого шара (или аналогичная задача извлечения чёрного шара). Оценка такой возможности в теории вероятностей называют вероятностью. Для правильного решения данной задачи необходимо правильно дать ответ о множестве элементарных исходов и их количестве (т.е. мощности множества элементарных исходов) в проводимом эксперименте. Наиболее реальных ответа два. *Первый ответ:* таких исходов два, так как можно извлечь или белый шар, или чёрный шар. *Второй ответ:* таких исходов 12, как сумма всех шаров в урне.

Для расчёта вероятности извлечения белого шара можно использовать следующую формулу: , где А - событие, означающее извлечение белого шара, m – это количество (мощность множества) элементарных исходов, благоприятствующих появлению события А, n - количество (мощность множества) всех элементарных исходов.

Согласно первому ответу имеем: , так как m=1 (из двух исходов один благоприятствует), а n=2 (количество всех элементарных исходов). Аналогичный расчёт для второго ответа даёт следующий результат: , где 5 – количество белых шаров, а 12 общее количество всех шаров в урне.

Исторические корни различных подходов к приведенным расчётам кроются в классическом и неклассическом подходе к исследованиям в теории множеств. Так при классическом подходе для множества из 12 шаров не учитывается факт наличия повторяющихся элементов, т. е. для классики это множество составляет только два элемента: белый шар и чёрный шар. Здесь не учитывается уникальность каждого шара, которая рассматривается в неклассическом подходе.

Какой же из этих ответов и подходов является правильным для данной задачи?

Рассматриваемая задача не является сложной, поэтому и ответ на поставленный вопрос можно достаточно просто определить, если сделать анализ выполнения трёх необходимых условий для того, чтобы **исход** (**событие**) некоторого эксперимента можно было считать **элементарным** **исходом** (**элементарным событием**).

Первое условие: все элементарные исходы должны образовывать полную группу событий, т. е. сумма вероятностей всех элементарных исходов должна равняться 1. Это условие выполняется для каждого из ответов. Для первого ответа: , для второго ответа:.

Второе условие: несовместность появления более одного элементарного исхода. Очевидно, что это условие также выполняется для каждого из ответов.

Третье условие: равновозможность появления каждого элементарного исхода. Очевидно, что (для первого ответа) возможность извлечения белого шара () ниже возможности извлечения чёрного шара (). Поэтому этот первый ответ неверен. Для второго ответа третье условие выполняется, так как обеспечена равновозможность появления каждого элементарного исхода (). Следовательно, правильным решением задачи является второй неклассический подход с ответом: .

В некоторых вероятностных задачах определение множества элементарных исходов является более сложным, требует глубокого понимания сути проблемы и большого опыта по решению таких задач.

Важно также отметить следующий исторический факт: для того чтобы некоторое научное направление можно было определить как науку, необходимо в качестве базиса иметь наличие группы постулатов (аксиом), над которыми можно было создавать определённые ассоциации, называемые в математике теоремами. В этом смысле теорию вероятностей, несмотря на её достаточно долгое историческое развитие, до 1933 года нельзя было называть наукой, так как только в 1933 году советский академик   
А.Н. Колмогоров определил три постулата, наличие которых ведёт к доказательству всех теорем в этой науке.

Перед их изложением определим вероятностное пространство как семейство из трёх множеств: (Ω, F, p), где Ω=(ω1, ω2,…, ωn) – множество всех элементарных исходов некоторого эксперимента, определяемое как достоверное событие, F – это множество всех исходов (событий) данного эксперимента (т.е. из материала дискретной математики это есть булеан множества Ω: В(Ω) как множество всех подмножеств множества Ω), и р – это вероятность, разные определения которой давались в ТВ. А теперь сформулируем три постулата А. Н. Колмогорова:

1. ∀ событию А⊆ Ω (или ∀ А∈ F) соответствует р(А)≥0, называемое вероятностью события А.
2. р(Ω)=1, т.е. вероятность достоверного события равна 1.
3. , т.е. вероятность хотя бы одного из попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Если в нашем примере событие А рассмотреть как объединение 5-ти элементарных событий, благоприятствующих появлению белого шара, т.е. если ω1- вытащить 1-й белый шар, ω2- вытащить 2-й белый шар,…, ω5- вытащить 5-й белый шар, и следовательно А=, то согласно третьему постулату, с учётом того, что вероятность появления любого элементарного события равна , имеем: р(А)=р==.

Важно также вспомнить некоторые другие факты из ТВ:

***Определение****.* Два события называются **независимыми**, если р(А∩В)=Р(АВ)=р(А)р(В), т.е. вероятность пересечения (или произведения) независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Факт вычисления вероятности появления события В при условии, что событие А уже состоялось, называют *условной вероятностью* и записывают как р(В\А) (или рА(В)). Вычисляют её по формуле: р(В\А)= =.

Следовательно, если события А и В независимые, то получаем следующий результат: р(В\А)=.

**Пример.** В задаче про 12 шаров (5 белых и 7 чёрных) обозначим событием В извлечение белого шара, если до этого наступило событие А – извлекли белый шар. Найти вероятность события В.

**Решение. Вариант №1** (по формуле условной вероятности)**:** вычислим сначала Р(АВ).

Р(АВ)==  
====.

р(В\А)== .

**Вариант №2** (без формулы условной вероятности)**:** так событие А наступило, то в урне осталось 11 шаров, из которых 4 белых. Поэтому р(В\А)=.

**Формула полной вероятности** вытекает из следующей постановки задачи: событие А может наступить лишь при наступлении одного из несовместных событий В1, В2,…,Вn, образующих полную группу событий. Тогда:

р(А)=р(В1) р(А\В1)+ р(В2) р(А\В2)+…+ р(Вn) р(А\Вn).

**Пример.** В урне находятся два шара любых цветов. В урну опускают белый шар и затем из неё наудачу извлекают один шар. Найти вероятность того, что извлечённый шар окажется белым.

**Решение:** событие А – извлечён белый шар. Первоначальный состав урны: В1 - нет белых шаров, В2 – один шар белый, В3 – два белых шара. Это полная группа равновозможных событий, поэтому: р(В1)= р(В2)= р(В3)= . р(А\В1)= , так как только один из трёх шаров белый. Соответственно: р(А\ В2)= , р(А\В3)=1. Имеем:  
 р(А)=р(В1) р(А\ В1)+ р(В2) р(А\ В2)+ р(В3) р(А\ В3)= ⋅+⋅+⋅1=.

**Формула Бейеса(**или **Байеса):** событие А характеризуется также, как и в предыдущей постановке, но оно уже произошло. Тогда условные вероятности появлений событий Вi (i=1, 2,…,n) определяется по формуле: р(Вi \А)=, (i=1, 2,…,n).

**Пример.** В предыдущем примере внесём корректировку о том, что событие А уже состоялось. Определить вероятность того, что первоначальный состав шаров в урне был В1.

**Решение:** р(А)=  из предыдущего примера.

Имеем: р(В1 \А)== .

***Определение****.* Случайная величина (с.в.) – это числовая (комплексная или векторная) величина, принимающая определённые значения в зависимости от случая, т.е. от результатов эксперимента. Если обозначить числовую с.в. буквой ξ, то с.в. есть функция ξ(ω): ΩR, где R - множество действительных чисел (числовая ось).

**Пример.** Эксперимент состоит в том, что дважды подбрасывается монета. Если обозначить выпадение герба буквой Г, а выпадение решки буквой Р, то всё множество элементарных исходов для двух подбрасываний можно записать как Ω=(ГГ, ГР, РГ, РР). Определить с.в. ξ(ω), равную числу появлений герба в данном эксперименте.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ω | ГГ | ГР | РГ | РР |
| ξ = ξ(ω) | 2 | 1 | 1 | 0 |

**Решение:**

Для ***дискретной с.в. закон распределения*** записывают парами соответствий (ξi , рi ).

В нашем примере закон распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ξi | 0 | 1 | 2 |
| рi |  |  |  |

Для ***непрерывной с.в. закон распределения*** нельзя задать обычным перечислением, поэтому для такой с.в. вводятся интервальные оценки, которые называются ***функцией распределения с.в.:*** , т.е. вероятность появления таких элементарных событий ω, для которых значения с.в. меньше некоторого порогового значения **х,** определяющего интервальную оценку от до х.

**Замечание**. Обращаем особое внимание на выполнение строго неравенства между значением с.в. и пороговым значением х в отечественной интерпретации функции распределения.

В нашем примере: 

Для с.в. ξ(ω), представленной семейством из двух с.в. ξ(ω)=(ξ1(ω), ξ2(ω)), заданных на общем Ω, ***функция распределения*** записывается: F(x,y)=p{ ξ1(ω)<x, ξ2(ω)<y}

Для с.в. ξ(ω), представленной семейством из **n** с.в. ξ(ω)=(ξ1(ω), ξ2(ω),.., ξn(ω)), заданных на общем Ω, ***функция распределения*** записывается:

F(x1, x2,.., xn)=p{ ξ1(ω)< x1, ξ2(ω)< x2,.., ξn(ω)< xn}

**Понятие случайного процесса.**

Случайный процесс – это математическая модель процесса (величины, зависящей от времени), на поведение которого оказывают влияние случайные факторы. В любой момент времени изучаемый объект описывается случайной величиной, однако, наибольший интерес представляет изучение поведения процесса, т.е. раскрытие взаимосвязи между случайными величинами, сопоставленными с различными моментами времени.

Течение случайного процесса, также как и детерминированного, описывается некоторой функцией *f(t,ω)* (часто случайный процесс обозначают через *ξ(t,ω)* ), зависящей от двух аргументов и принимающей действительные, комплексные или векторные значения. Величина *t ≥ 0* характеризует время существования процесса, *ω* - элементарный исход некоторого случайного эксперимента. Если фиксируется элементарный исход , то  называют реализацией случайного процесса. Если фиксируется  то  является случайной величиной.

Таким образом, говорят, что случайный процесс – это семейство случайных величин, зависящих от параметра *t.*

Задание случайного процесса осуществляется с помощью конечномерных функций распределения. В фиксированные моменты времени  наблюдаются значения  случайных величин и, чтобы задать случайный процесс, надо задать функцию распределения

 , (1.1)

которая удовлетворяет условиям согласованности:

 (1.2)

Отметим, что областью определения случайного процесса является область .Область значений (фазовое пространство) случайного процесса - - может быть как непрерывным так и дискретным.

Вышесказанное приводит к следующему определению случайного процесса.

*Определение.* Случайным процессом , заданным на множестве  и принимающим действительные значения называют семейство распределений (1.1), удовлетворяющее условиям согласованности (1.2).

Данное определение случайного процесса называют определением в широком смысле слова.

***Начальная классификация случайных процессов.***

1. Случайные процессы классифицируются, во-первых, в зависимости от вида фазового пространства. По данному признаку они делятся на процессы с **дискретным** или **непрерывным** фазовым пространством.

Случайный процесс называется процессом с **непрерывными состояниями**, если значением случайного процесса является непрерывная случайная величина.

Случайный процесс называется случайным процессом с **дискретными состояниями**, если значением случайного процесса является дискретная величина.

1. Случайные процессы также классифицируются по временному фактору их изучения. Здесь организуется два класса процессов: **первый класс** – процессы **дискретные во времени**, если система в которых они протекают, меняет свои состояния только в моменты времени t1, t2,…,tn, число которых конечно или счетно; и **второй класс** – процессы **с непрерывным временем**, если переход их из состояния в состояние может происходить в любой момент времени.

**Вывод**: пересечение двух первых вариантов классификации порождает следующие классы СП: 1. Класс с дискретным множеством состояний процесса и дискретным временем исследования его поведения; 2. Класс с дискретным множеством состояний процесса и непрерывным временем исследования его поведения; 3. Класс с дискретным временем, непрерывными состояниями; 4. Класс с непрерывным временем, непрерывными состояниями

1. Важный класс случайных процессов образуют **стационарные** случайные процессы. Так называются процессы, теоретико-вероятностные характеристики которых не меняются при сдвиге во времени. Формально это означает следующее:

***Определение****.* Стационарным случайным процессом называется процесс , конечномерные распределения которого в момент времени  не зависят от *t*, т.е. .

1. Важный класс случайных процессов образуют **марковские** процессы. Пусть , тогда случайный процесс  называется ***марковским****,* если  при условии, что совпадает с вероятностью , которую называют переходной вероятностью марковского процесса, где , т.е. будущее поведение процесса не зависит от предыстории. Говорят, что марковский процесс это процесс, забывающий свою историю. Для данного процесса интерес для прогноза поведения процесса в будущем представляет только то состояние в котором процесс находился в момент времени 

***Преимущества марковских случайных процессов.***

1. Они достаточно легко описываются в терминах либо переходных (условных) вероятностей, либо безусловных. Их исследование не представляет большой сложности.

2. Они адекватно описывают достаточно большое число реальных процессов.

3. Многие немарковские процессы, при определенных дополнительных условиях, можно сделать марковскими.

**Раздел 1. Марковские процессы с дискретным временем  
и дискретным множеством состояний**

**1.2 Цепи Маркова с дискретным временем и дискретным множеством состояний**

**Определение**. Дискретная марковская цепь представляет собой марковский случайный процесс , пространство состояний которого счетно или конечно, а изменение процесса происходит в фиксированные, заранее определенные моменты времени.

Для удобства анализа цепей Маркова, считается, что время принимает фиксированные значения 0, 1, 2, 3, … . Пусть  - значение случайного процесса в момент времени *n*. Часто говорят об , как об исходе *n –* огоиспытания или о состоянии марковской цепи на *n* – ом шаге. Говорят, что  находится в состоянии *i* (или что цепь на *n-* ом шаге находится в состоянии *i*)*,* если = *i*, где *i* *= 0, 1, 2, 3, …* . Далее будут рассматриваться примеры, когда *i* будет принимать значения от 1 и до определённого конечного значения или до бесконечности, или когда *i* будет принимать значения от -∞ и до +∞. Все эти состояния будут зависеть от конкретной задачи.

Для определения марковского процесса с дискретным множеством состояний и дискретным временем задают, так называемые, одношаговые переходные вероятности того, что цепь на (*n* + *1*) *–* ом шаге будет находиться в состоянии *j*, если известно, что на *n* – ом шаге она находилась в состоянии *i,* которые обозначаются через *,* т.е. формально:

 (1.3)

В таком обозначении подчеркивается, что в общем случае переходные вероятности зависят не только от начального (*i*) и конечного(*j*) состояний, но и от момента осуществления перехода (n и n+1). В данном случае цепь Маркова называется **неоднородной** цепью Маркова, в противном случае цепь Маркова называется **однородной**.

В дальнейшем будем рассматривать только однородные цепи Маркова, т.е. будем считать, что переходные вероятности не зависят от времени перехода из состояния в состояние, и имеют вид:

.

*Рij -* есть вероятность того, что цепь Маркова из состояния *i* попадет в состояние *j* за один шаг, независимо от времени перехода.

Переходные вероятности цепи Маркова удобно записывать в виде матрицы, называемой матрицей одношаговых переходных вероятностей:

*P(1)*=. (1.4)

Для одношаговой матрицы цифру 1 в скобках можно не записывать, понимая эту запись по умолчанию. Если число состояний процесса конечно, то матрица Р **–** это конечная квадратная матрица, порядок которой равен числу состояний. Очевидно, что переходные вероятности состояний удовлетворяют следующим двум условиям:

 (1.5)

 (1.6)

Условие (1.5) отражает тот факт, что каждое испытание вызывает возможность определенного перехода из состояний в состояния, когда возможность перехода оценивается вероятностью (для удобства мы будем говорим о переходе и в том случае, когда состояние остается неизменным, т.е. когда система находилась в состоянии *i* и, сделав один шаг, не переходит в другое состояние).

Условие же (1.6) характеризует тот факт, что выйдя из состояния *i,* за один шаг, процесс обязательно попадет в какое-то состояние *j*, т.е. список состояний представляет собой полную группу возможных событий. Матрица, у которой сумма элементов по строкам равна единице, называется стохастической матрицей.

Если  хотя бы для некоторого состояния, то матрицу называют полустохастической, т.е. список состояний не определён как полная группа возможных событий. Этот факт не является объектом нашего описания, так как требует сложных индивидуальных теоретических исследований, при высокой степени практической значимости данного факта.

Для того, чтобы знать состояние цепи на любом шаге надо знать начальное состояние цепи (или говорят, состояние цепи на нулевом шаге), т.е. вектор вероятностей *P*0: , или в развёрнутом виде:

*P*0=, (1.7)

где *k* принимает значения из множества состояний (в данной записи множество состояний: 0,1,.., n,..).

**Вывод:** марковская цепь полностью определяется своей матрицей одношаговых переходных вероятностей (1.4)и заданием распределения вероятностей в нулевой или начальный момент времени (1.7).

Задание переходных вероятностей цепи Маркова удобно представлять в виде размеченного графа (см. рис. 1.2.)

P12

P13

P01

P32

P03

P10

S0

S1

S3

S2

Рис. 1.2. Размеченный граф состояний системы с дискретным временем.

На этом графе нет петель, указывающих на возможность не переходить в другое состояние, так как этот факт можно вычислить из формулы(1.6):



Этой цепи соответствует следующая матрица одношаговых переходных вероятностей:

*Р(1)=Р*=, где *Рii* согласно формулы (1.6) определяется как *Рii=1-Р00=1 - Р01 - Р03;Р11 =1 – Р10 – Р12 – Р13; Р22 = 1; Р33 = 1 - Р32*

Анализ марковской цепи связан. главным образом, с вычислением вероятностей возможных её реализаций, важнейшей характеристикой которых является матрица вероятностей перехода за *n* шагов , где  - вероятность того, что цепь Маркова, выйдя из состояния *i* попадет в состояние *j* за *n* шагов, или, в принятых ранее обозначениях:

. (1.8)

Заметим, что мы рассматриваем процессы, однородные во времени, т.е. процессы, имеющие стационарные переходные вероятности, независящие от момента времени *m;* в противном случае левая часть (1.8) зависела бы от параметра *m.*

Эти вероятности называют *n* шаговыми переходными вероятностями. При *n = 1* эта вероятность равна соответствующим вероятностям одношаговой переходной матрицы.

Пусть *n* = 2, тогда . Это согласуется с формулой полной вероятности (см. стр. 5), когда событие А (переход из состояния i в состояние j за два шага) может наступить лишь при наступлении одного из несовместных событий В1, В2,…,Вn,.., где Вk – это возможное событие перехода на первом шаге из состояния i в любое из своих состояний k, а А\Вk это событие перехода на втором шаге из состояния k в состояние j.

Рассуждая аналогично, имеем при *n* = 3, 

Очевидно, что для любого *n >0* имеем:

 или  (1.9)

В рассмотренных формулах нетрудно увидеть формулы умножения матриц, поэтому в матричном виде *n* шаговые переходные вероятности определяются соотношением

*P(n)* = *P n , n>1,* (1.10)

где , а  и *P n* означает, что матрица *P* умножается сама на себя *n* раз. Очевидно, что справедливы в матричном виде и следующие соотношения:

*P(n)* = *P m P n - m*(1.11)

Если вероятность того, что в начальный момент или на k-ом шаге система находилась в состоянии *j*, т.е. или равна , или равна , то вероятность оказаться в состоянии *i* на *n* шаге будет равна

 (1.12)

Очевидно, что для определения состояния системы на *n* шаге в матричном виде справедливы следующие соотношения:

*Pn* = *P0P(n) = PkP(n-* *k)*

Помимо определения вероятностей состояний цепи на любом шаге, часто интерес представляет выяснение асимптотического поведения вероятностей  при *n* → ∞. Можно ожидать, что влияние начального состояния со временем уменьшается и следовательно, эти вероятности стремятся к пределу независящему от состояния *i.* Для того, чтобы дать точный анализ асимптотического поведения марковской цепи, введем классификацию ее состояний.

В заключение данного пункта приведем примеры процессов, описываемых цепями Маркова.

***Пример 1.*** (*Анализ спроса).* Пусть имеется три конкурирующих предмета потребления *А, В, С.* С целью определения спроса на эти продукты производится публичный опрос. Сначала клиентов опрашивают о том, каким из продуктов они пользуются в настоящее время. Допустим, что при этом выяснилась следующая доля (частота) клиентов, пользующихся соответственно каждым из продуктов *Р(А) = 0,5; Р(В) = 0,2; Р(С) =* 0,3. Через месяц клиентов, пользовавшихся продуктом А опрашивают о том, продолжают ли они пользоваться этим продуктом или перешли к продуктам В или С. Пусть при этом получились следующие частоты, которые принимают за вероятности перехода: *Р11 (1) = 0,9; Р12 (1) =0,1; Р13 (1) = 0.* Вероятность *Р11 (1);* означает, что клиент за рассматриваемый период продолжал пользоваться продуктом А. Вероятность *Р12* означает, что клиент за рассматриваемый период клиент перешел к использованию продукта В. Вероятность *Р13* означает, что клиент за рассматриваемый период клиент перешел к использованию продукта С. Аналогично поступают с клиентами, которые пользовались продуктами В и С. Пусть *Р21(1) = 0,4; Р22(1) = 0,3;* *Р23(1) = 0,3; Р31(1) = 0,7; Р32 (1) = 0,1; Р33 (1) = 0,2.* Итак, предполагая, что поведение клиентов не меняется во времени, имеем стационарную цепь Маркова с матрицей перехода:

. (1.13)

Через месяц после опроса распределение клиентов будет следующим:

(*Р1(1); Р1(2); Р1(3)) Р = (0,5; 0,2; 0,3) Р= (0,74; 0,14; 0,12).*

Через четыре месяца, если опросы клиентов каждый раз приводят к матрице (1.13), получится (*Р4(1); Р4(2); Р4(3)) = (0,5; 0,2; 0,3)Р4 = (0,827; 0,125; 0,048).*

***Пример 2.*** (*Ветвящиеся процессы*) Предположим, что в некоторый начальный момент времени численность популяции равна , и предположим, что организм в конце своей времени жизни производит случайное число *ξ* потомков согласно распределению вероятностей

*P{ξ =k } = ak , k = 0, 1, 2, 3, . . .*  (1.14)

где как обычно *ak ≥ 0 и *. В свою очередь потомки независимо друг от друга в конце своей времени жизни (для простоты продолжительность жизни предполагается одинаковой для всех организмов) производят потомство, каждый в соответствии с распределением (1.12), продолжая таким образом свой биологический вид. Процесс {*Хn }*, где  *Хn  -* численность популяции в *n -* м поколении, представляет собой марковскую цепь. В самом деле

**, (1.15)

где *ξ1, ξ2, … ξi* - независимые наблюдения некоторой случайной величины, имеющей распределение (1.14).

***Пример 3*** (*Случайные блуждания).* Одномерное случайное блуждание представляет собой марковскую цепь, пространство состояний которой состоит из конечного или бесконечного множества целых чисел. Если частица находится в состоянии *i,* то за один шаг она может либо перейти в одно из соседних состояний (*i*+*1*)или (*i – 1),* либо остаться в состоянии *i.* Если пространством состояний служит множество неотрицательных целых чисел, то матрица переходных вероятностей случайного блуждания имеет вид:

 (1.16)

где *рi*.> *0,* *qi* > *0, ri > 0, рi+ qi + ri = 1, i = 1, 2, 3, …, р0.≥ 0, r0 ≥ 0, р0.+ r0 = 1.* Числа *рi.*, *qi*, *ri* имеют следующий смысл: если *Хn = i,* то при *i ≥ 1  *. Изменения для *i = 0* очевидны.

В пользу названия «случайное блуждание» для процесса такого типа говорит тот факт, что его реализация описывает путь абсолютно пьяного человека, делающего случайным образом шаг вперед или шаг назад.

***Пример 4.*** *Капитал игрока,* участвующего в серии партий азартной игры, часто описывают процессом случайного блуждания. Предположим, что игрок *А*, имеющий капитал *k*, играет с бесконечно богатым партнером, при этом вероятность того, что он выиграет партию и увеличит свой капитал на единицу, равна *pk*, а вероятность того, что он проиграет и тем самым уменьшит свой капитал на единицу, равна . Зависимость вероятностей выигрыша и проигрыша от *k* отражает возможную зависимость условий игры от капитала. Так, можно условиться, что, оказавшись в состоянии *0* (соответствующем разорению игрока *А*), процесс остается в этом состоянии, т.е. *r0* = 1. Процесс , где  – размер капитала игрока *А* после *n* партий, является процессом случайного блуждания. Этот процесс известен под названием «задачи о разорении игрока».

Случайное блуждание с вероятностями *pk = p*,  и *r0* = *1* соответствует одинаковым повторяющимся партиям; если , то в каждой партии шансы игрока *А* явно предпочтительнее. Можно показать, что в этом случае с вероятностью , где *х0* – его начальный капитал, игрок *А* разоряется (теряет свой капитал) и с вероятностью  его капитал будет беспредельно возрастать. Если же , то игра явно выгодна хозяевам игорного заведения, и почти наверное (с вероятностью *1*) игрок *А* разорится, если будет играть достаточно долго. Игрок *А* обречен на разорение (с вероятностью 1) и в том случае, когда игра безобидна, т.е. когда .

Если партнер, игрок *Б*, тоже начинает игру, располагая ограниченным капиталом *у*, то капитал игрока *А* снова описывается Марковской цепью . Однако эта цепь имеет конечное множество состояний 0, 1, …, *а*, где *а = х + у*, *х* и *у* – начальные состояния игроков *А* и *Б* соответственно. Разность  интерпретируется как капитал игрока *Б* после *n* партий. Если среди исходов каждой партии допускается ничья, то матрица переходных вероятностей цепи  имеет вид:

.

Как и ранее, , *i* = 1, 2, …, *a* – 1, есть вероятность того, что игрок *А*, имея капитал *i*, увеличит (уменьшит) его на единицу в следующей партии. Отметим, что в соответствии с матрицей переходных вероятностей (1) капитал игрока *А* (состояние процесса), достигнув величины а или обратившись в *0*, остается в этих состояниях навсегда. Мы говорим, что игрок *А* разорен, если процесс достиг состояния *0*; если же процесс попадает в состояние *а*, то мы говорим, что разорен игрок *Б*.

*Пример 5.* *(Модель из теории запасов.)* Рассмотрим систему, в которой запасается некоторый товар с целью удовлетворения постоянного спроса. Предположим, что восполнение запаса осуществляется в моменты времени t1, t2, …, а суммарный спрос  на товар в интервале  представляет собой случайную величину с распределением

,  (1.17)

одинаковым для всех интервалов, причем как обычно,  и . Уровень запаса фиксируется в начале каждого периода. Стратегия запасания такова: если имеющееся количество товара не превышает некоторого критического уровня s, то производится немедленное пополнение запаса до уровня . Если же имеющееся количество товара больше s, то пополнения не производится. Пусть  обозначает уровень наличного запаса непосредственно перед моментом *tn*. Пространство состояний  складывается из возможных значений уровня запаса *S*, *S* – 1, …, + 1, 0, –1, –2, …, где отрицательные значения интерпретируются как неудовлетворенный спрос (эти заказы подлежат немедленному исполнению при пополнении запаса). Согласно описанной стратегии, уровни запаса двух последовательных периодов связаны соотношением

 (1.18)

где  – суммарный спрос за *n*-й период с распределением вероятностей (2). Если предположить, что с.в.  независимы, то уровни запаса *Х0*, *Х1*, *Х2*, … образуют Марковскую цепь, матрицу переходных вероятностей которой можно вычислить, отправляясь от соотношения (1.16).

*Задача 1.* Промышленному предприятию с целью принятия необходимых плановых решений требуется знать ожидаемый уровень выполнения плана в конце первого, второго, третьего и четвертого кварталов. Возможные состояния: *S*1 - план выполнен на 100%; *S*2 - план не выполнен; *S*3 - план перевыполнен; *S*4 - план существенно не выполнен. Размеченный граф состояний имеет вид (см. Рис. 1.3). Исходное состояние *S*2. Определить вероятность состояний после первого, второго, третьего и четвертого шагов.

S3

S1

S2

S4

0,5

0,2 0,2

0,3

0,1

0,1

## Рис. 1.3 Размеченный граф состояний предприятия

Решение. Определим вначале вероятности, когда нет перехода:

*P11 = 1 – P12 – P13 – P14 = 1 – 0,2 – 0,2 = 0,6;*

*P22 = 1 – P21 – P23 – P24 = 1 – 0,3 – 0,1 = 0,6;*

*P33 = 1 – P31 – P32 – P34 = 1 – 0,5 = 0,5;*

*P44 = 1 – P41 – P42 – P43 =1 -0,1 = 0,9.*

Начальное состояние системы - *S*2 , значит *P0(2) = 1,* остальные вероятности: *P0(1) = P0(3) = P0(4) =* 0.

Вероятности состояний после первого шага: *P1= P0P.* Имеем:

*P1(1) = P21 = 0,3; P1(2) = P22 = 0,6;*

*P1(3) = P23 = 0; P1(4) = P24 = 0,1.*

*Проверка:* *P1(1) + P1(2) + P1(3) + P1(4) = 1*.

Вероятности состояний после второго шага: *P2= P1P*

*P2 = (0,36; 0,43; 0,06; 0,15)*

*Проверка:* *P2(1) + P2(2) + P2(3) + P2(4) = 1.*

Вероятности состояний после третьего шага: *P3= P2P*

*P3 = (0,378; 0,364; 0,102; 0,156)*

*Проверка: P3(1) + P3(2) + P3(3) + P3(4) =1.*

Вероятности состояний после четвертого шага: *P4= P3P*

*P4 = (0,387; 0,3252; 0,1266; 0,1612)*

*Проверка: P4(1) + P4(2) + P4(3) + P4(4) =1.*

***Замечание1****.* Приведенные вычисления показывают, что они совпадают с произведением матриц: строки состояний на каждом шаге на переходную матрицу цепи Маркова. Переходная матрица данного марковского процесса имеет вид:

,

Вектор-строка начального распределения Р0 = (0; 1; 0; 0).

***Замечание 2.*** Аналогичныйрезультат можно получить, вычисляя матрицы перехода системы за один, два, три и четыре шага. И затем *P4= P0P(4)*

*Упражнения для домашнего задания.* В каждом упражнении приведен размеченный граф состояний марковского случайного процесса с дискретным временем и дискретными состояниями. Исходное состояние отмечено символом \*. Определить вероятность состояний *P*i(*k*) согласно приведенной таблицы.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № упр. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| *P*i(*k*) | *P*1(1) | *P*2(2) | *P*1(0) | *P*5(0) | *P*2(0) | *P*1(2) | *P*2(0) | *P*2(1) |
| *P*3(2) | *P*2(0) | *P*2(2) | *P*2(2) | *P*1(1) | *P*3(1) | *P*4(1) | *P*1(0) |

S1

S2

S3

0,2

0,3

**1**.

\*

S2

S1

S0

0,3

0,1

**2**.

\*

S2

S0

S1

0,2

0,1

**3**.

\*

S3

0,4

S0

S2

S1

0,5

0,1

**4**.

\*

S0

S1

S2

0,1

0,3

**5**.

\*

S2

S1

S0

0,3

0,1

**6**.

\*

S3

0,4

S3

S1

S2

0,2

0,1

**7**.

\*

S0

0,3

S4

0,4

S1

S0

S2

0,2

0,4

**8**.

\*

0,1 0,3

**1.3. Классификация состояний марковской цепи**

**Определение**. Состояние *j достижимо* из состояния *i*, если  для некоторого целого числа и обозначают i → j.

Это есть факт того, что вероятность попадания процесса за конечное число шагов в состояние *j*,отправляясь из состояния *i*, положительна.

**Определение**. Состояния *i* и *j*, достижимые друг из друга, называют *сообщающимися*; этот факт обозначают .

Если два состояния *i* и *j* не сообщаются, то либо  для всех , либо  для всех , либо оба условия выполняются одновременно.

Свойство сообщаемости представляет собой отношение эквивалентности. Действительно:

*  (рефлексивность), так как по определению имеем

;

* если , то  (симметричность), согласно определению сообщающихся состояний;
* если  и , то  (транзитивность).

Транзитивность доказывается следующим образом. Если , а , тогда очевидно, что существует пара неотрицательных целых чисел *n* и *m*, таких, что  и . Следовательно, в силу неотрицательности всех переходных вероятностей, имеем: .

Аналогично показывается существование целого числа , такого, что .

Из этого следует, что все множество состояний можно разбить на классы эквивалентности. Состояния объединяются в один класс, если они сообщаются друг с другом. Возможно, что, отправляясь из состояния, принадлежащего одному классу, мы с положительной вероятностью попадаем в другой класс, но тогда, очевидно, возврат в исходный класс уже невозможен, так как иначе оба упомянутых класса входили бы в один класс эквивалентности. Мы будем говорить, что марковская цепь *неприводима*, если введенное нами соотношение эквивалентности порождает только один класс состояний. Другими словами, процесс неприводим, если все его состояния сообщаются друг с другом.

### Для иллюстрации введенного понятия рассмотрим матрицу переходных вероятностей вида



Состояния марковской цепи, имеющей такую матрицу переходных вероятностей, распадаются на два класса сообщающихся состояний:  и . В зависимости от начального состояния процесс развертывается либо только в первом классе состояний и его переходы описываются подматрицей *Р1*, либо только во втором классе и его переходы описываются подматрицей *Р2*.

В марковской цепи процесса случайного блуждания с матрицей переходных вероятностей (см. Рис. 1.4) мы имеем три класса состояний: ,  и . Очевидно, что из второго класса можно попасть и в первый и в третий классы, но возвратиться из них во второй класс невозможно.

Состояния



Рис. 1.4. Переходная матрица состояний некоторого случайного блуждания.

***1.4. Периодичность марковской цепи***

Определим период состояния *i*, далее обозначаемый *d*(*i*), как наибольший общий делитель (н.о.д.) всех целых чисел , для которых .

Например, если для некоторого состояния *i* для *n=2, 3, 6, 12, 18, 24…,* тоздесь *d*(*i*)=6.

**Замечание**. Если  при всех , то по определению *d*(*i*) = *0*.

**Задания на СРС**:

**Задание 1**. Если в матрице переходных вероятностей случайного блуждания все , то период каждого из состояний цепи равен двум.

**Задание 2**. Если же хотя бы для одного состояния  величина  больше нуля, то все состояния цепи имеют период *1,* так как независимо от начального состояния *j* система может попасть в состояние  и оставаться в нем в течение произвольного времени прежде, чем вернуться в состояние *j*.

**Задание 3**.В конечной марковской цепи с *n* состояниями и матрицей переходных вероятностей (См. ниже) каждое состояние имеет период *n*.

Приведем без доказательства три основных свойства периода состояния.



***Теорема 1.*** *Если , то .*

Это утверждение определяет период как характеристику класса сообщающихся состояний.

***Теорема 2.*** *Если состояние i имеет период , то существует целое число N(i), зависящее от i, такое, что для всех целых чисел  вероятность .*

Например, если для некоторого состояния *i * для *m=4, 16, 32, 40, 48, 52,56,…,* то, так какздесь *d*(*i*)=4, имеем *N(i)=*12, так как n=12, 13,14, **.

Этим утверждается, что возвращение в состояние *i* может происходить во все достаточно далекие моменты времени, кратные периоду **.

***Следствие.*** *Если  и состояние i имеет период ,, то  для всех достаточно больших положительных целых чисел n.*

**Доказательство провести самостоятельно в рамках СРС.**

**Определение**. Если марковская цепь на определённом шаге для некоторого состояния *i* получила * и для многих m=1,2,… , то* ***d(i)=1****.*

**Определение**. Марковская цепь, каждое состояние которой имеет период *1,* называется *непериодической*.

**Возвратность состояний марковской цепи.**

Рассмотрим произвольное состояние i.

Для любого () целого n запишем:

, где

-это вероятность того, что система, выйдя из состояния i, в котором она была на 0-м шаге, впервые за n шагов в него возвратится.

Отметим следующие соотношения для :

1.  i , так как нельзя, выйдя из состояния i, вернуться в него за 0 шагов.
2.  i , т.е. значения этих вероятностей совпадают, так как и - одношаговая вероятность, и вероятность  имеют один смысл, когда процесс вышел из состояния i и за один шаг в состояние i возвращается.
3. Зная, что  i (факт того, что система находилась в состоянии i, и достоверно, что она в нём останется, не сделав ни одного шага), запишем основное рекуррентное соотношение между  и :

 (1)

**Определение возвратности**. Состояние i называется **возвратным** и обозначается , если  (2)

**Определение невозвратности**. Состояние i называется **невозвратным** и обозначается , если  (3)

Условие (2) означает факт достоверности того, что система за определённое конечное количество шагов, выйдя из состояния i, впервые за n шагов в него возвратится.

**Теорема о возвратности**. Состояние i является **возвратным** тогда и только тогда, когда , т.е. ряд из n шаговых вероятностей расходится. (4)

Из **теоремы о возвратности** следует**:** если , т.е. ряд из n шаговых вероятностей сходится, то состояние i является **невозвратным** (5)

**Следствие о возвратности**. Если состояния i и j сообщаются, и состояние i возвратно, то и состояние j возвратно.

**Вывод:** как и периодичность, возвратность является свойством класса сообщающихся состояний.

Для проведения исследования состояний марковской цепи на возвратность необходимы элементарные сведения сходимости или расходимости рядов из теории рядов, так как состояние возвратно или невозвратно решается после исследования ряда из n шаговых вероятностей на сходимость (см. условия на возвратность (3) и (4)).

Приведём некоторые сведения из теории рядов:

1. , т.е. сумма бесконечной последовательности чисел называется рядом. И здесь не играет роли начальное значение n – переменной индекса последовательности. Может n=0, или n=–∞, или любое другое значение, также как и в марковской цепи.
2. Если , то ряд называется сходящимся, иначе ряд расходится.
3. **Необходимый** признак сходимости рядов: , т.е. необходимо для сходимости ряда, чтобы предел его общего члена равнялся нулю. Это необходимо, но не достаточно. Классический пример. Исследуем гармонический ряд: . , но это ещё не значит, что ряд сходится. В теории рядов показано, что этот ряд расходится.
4. **Достаточные** признаки сходимости рядов:
   1. Признак сравнения для положительных рядов: исследуются на сходимость два положительных ряда  и , где *an* и *bn*>0, тогда, если *an* > *bn* ,то   
      1. из сходимости 1-го ряда следует сходимость 2-го ряда; и

2. из расходимости 2-го ряда следует расходимость 1-го ряда.

* 1. Признак Даламбера. При исследовании на сходимость ряда , если   
     1. , то исследуемый ряд сходится;

2. , то исследуемый ряд расходится;

3. , то исследуемый ряд может, как сходиться, так и расходиться. Для однозначного ответа нужны дополнительные исследования, как с гармоническим рядом, так как по признаку Даламбера для этого ряда: .

В файле Excel "Пример на сообщаемость, периодичность, возвратность" приводятся исследования состояний марковской цепи на эти три основных свойства состояний.