



М.М. БЕЗЗУБЦЕВА, В.С. ВОЛКОВ

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**для обучающихся по направлению подготовки 35.04.06
Агроинженерия, профиль «Электротехнологии
и электрооборудование»**

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2020

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

М.М. БЕЗЗУБЦЕВА, В.С. ВОЛКОВ

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

для обучающихся по направлению подготовки 35.04.06
Агроинженерия, профиль «Электротехнологии
и электрооборудование»

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2020

УДК 663.915

ББК 40.76

Рецензенты:

д.т.н., проф. С.А. Ракутько (ИАЭП — филиал ФГБНУ ФНАЦ ВИМ);

д.т.н., проф. А.Г. Новоселов НИУ ИТМО

М.М. Беззубцева, В.С. Волков А.В. Методика экспериментальных исследований. Учебное пособие для обучающихся по направлению подготовки 35.04.06 Агроинженерия, профиль «Электротехнологии и электрооборудование» – СПб.: СПбГАУ, 2020. – 217 с.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по направлению подготовки 35.04.06 Агроинженерия, профиль «Электротехнологии и электрооборудование».

В учебном пособии представлены основные методологические основы проведения эксперимента, как основного инструмента исследователя при поиске оптимальных условий.

Учебное пособие также может быть использовано аспирантами, научными сотрудниками и инженерами, работающими в различных областях АПК.

Рекомендовано к размещению на электронном носителе для включения в информационные ресурсы университета согласно лицензионному договору Учебно-методическим советом СПбГАУ, протокол №__ от __ _____ 2020 года

ISBN -----

© М.М. Беззубцева,
В.С. Волков, 2020
© СПбГАУ, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

1 Краткие сведения из теории вероятностей	7
1.1 Случайные события и случайные величины	7
1.2. Числовые характеристики случайных величин	9
1.2 Законы распределения случайных величин	11
2 Основы постановки и проведения экспериментальных исследований	19
2.1 Понятие эксперимента и характеристика объекта исследований	19
2.2 Специфика проведения экспериментальных исследований	21
2.3 Классификация экспериментов	22
2.4 Этапы постановки и проведения экспериментальных исследований	27
3 Обработка результатов экспериментов	33
3.1 Погрешности измерений	33
3.2. Предварительная обработка экспериментальных данных	35
3.3 Оценка случайной погрешности прямых измерений	38
3.4 Обработка результатов косвенных измерений	48
3.5 Определение параметров эмпирических зависимостей методов наименьших квадратов	55
3.6 Корреляционный анализ экспериментальных данных	63
4 Планирование экспериментов	69
4.1 Общие положения	69
4.2 Планирование однофакторного эксперимента	73
4.3 Планирование многофакторных экспериментов	76
5 Статистическая обработка результатов исследований	98
6 Оценка показателей качества объекта по результатам экспериментов	113
Практическая работа. Статистические характеристики случайных величин	113
Практическая работа. Оценка параметров и определение закона распределения	114
7 Линейная парная регрессия	121
Практическая работа. Вычисление коэффициентов уравнения линейной регрессии	121
Практическая работа. Вычисление выборочного коэффициента корреляции	122
Практическая работа. Проверка значимости уравнения линейной регрессии по критерию Фишера	123

Практическая работа. Вычисление коэффициентов уравнения линейной регрессии.....	124
Практическая работа. Автокорреляция остатков. статистика Дарбина-Уотсона.....	126
8. Нелинейная парная регрессия.....	129
Практическая работа. Построение нелинейной регрессии.....	129
Практическая работа. Построение нелинейной регрессии с использование команды «Добавить линию тренда»	131
Практическая работа. Взвешенный метод наименьших квадратов.....	133
9 Линейная множественная регрессия	134
Практическая работа. Вычисление коэффициентов линейной множественной регрессии.....	134
Практическая работа. Вычисление коэффициентов линейной множественной регрессии и проверка значимости в режиме регрессия	136
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	142
Приложение 1	
Критическое значение t-критерия Стьюдента при уровне значимости 0.10; 0.05; 0.01 (двухсторонний).....	150
Приложение 2	
Таблица значений F -критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0,05$	151
Приложение 3	
Значение статистик Дарбина-Уотсона dl, du при 5 %-ном уровне значимости	152
Приложение 4	153
Задание для самостоятельной работы № 1 Изучение основ технологического применения озона.....	153
Приложение 5	179
Задание для самостоятельной работы № 2 Исследование работы барьерного озонатора.....	179
Приложение 6	196
Задание для самостоятельной работы № 3. Исследование работы барьерного озонатора	196

ПЕРДИСЛОВИЕ

В процессе организации экспериментальных исследований решается широкий круг задач, связанных с постановкой исследования, разработкой программы его проведения, оценкой полученных результатов. В ряде случаев эксперименты выполняются в условиях действия случайных факторов, и обработка результатов таких экспериментов связана с использованием методов теории вероятностей и математической статистики.

Учитывая ограниченный объем методических материалов по вопросу разработки магистерской диссертации, авторы при написании пособия придерживались точки зрения, что излагаемый материал должен быть написан кратко, ясно, доступно для понимания, а необходимые теоретические выкладки подкреплены решением задач из области электроэнергетики и электротехники.

Основное теоретическое содержание пособия составляют вопросы, связанные с оценкой погрешности измерений, планированием экспериментов, обработкой статистических данных.

В пособии даются методические рекомендации, по оценке погрешности прямых и косвенных измерений.

Внедрение математических методов планирования экспериментов позволяет в значительной степени исключить интуитивный, волевой подход и заменить его научно-обоснованной программой проведения экспериментальных исследований, содержащей объективную оценку полученных результатов. При этом осуществляется управление процессов проведения эксперимента с минимальным числом опытов. Известно, что методы планирования экспериментов базируются на теоретических положениях корреляционно-регрессионного анализа. Использование такого подхода в книге доведено до решения конкретных примеров из области электроэнергетики и электротехники.

Пособие содержит также необходимые сведения из теории вероятностей и математической статистики, позволяющие студенту квалифицированно проводить обработку статистических данных.

При освоении дисциплины обучающиеся формируют элементы следующих компетенций: ПК-21; ПК-22; ПК-23 ;ПК-24; ПК-25.

1 Краткие сведения из теории вероятностей

1.1 Случайные события и случайные величины

Абстрактное понятие «событие» определяется тем, что происходит или не происходит некоторое явление. Понятия случайность, вероятность заимствованы из внешнего мира. Случайность — случай, вероятность — вера. Теория вероятностей является прикладной наукой, она работает с окружающим миром. При этом случайность — это явление, а вероятность — это средство его количественного описания, мера возможности его наступления в будущем.

Итак, вероятность это численная мера возможности появления или не появления изучаемого события, например, при производстве испытаний ею называется отношение числа благоприятных исходов испытаний к общему числу проведенных испытаний. Вероятность события A определяется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{N}, \quad (1.1)$$

где m — число благоприятных исходов,
 N — общее число исходов.

Событие, вероятность которого равна единице, называется достоверным событием, т. е. таким событием, которое в результате опыта обязательно произойдет. Событие, вероятность которого равна нулю, называется невозможным событием. Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти при определенных заданных условиях.

Предсказать каждое случайное событие невозможно. Однако большое число однородных случайных событий подчиняется определенным вероятностным закономерностям. Теория вероятностей занимается изучением этих закономерностей.

При одновременном изучении двух или нескольких событий различают независимые и зависимые, совместные и несовместные события. Если вероятность одного события не изменяется от того, произошло или не произошло другое событие, то такие события называются независимыми. Если же возможность появления одного события зависит от того, произошло или не произошло другое событие, то такие события называются зависимыми событиями.

Импульсные перенапряжения в электрических сетях возникают не зависимо от технического состояния этих сетей (независимые события), и в тоже время отказ одного из элементов электрической сети может привести к отказу других элементов электроустановки

(зависимые события). События называются несовместными, если никакие два из них не могут появиться вместе и, наоборот, события называются совместными, если они могут появиться одновременно.

Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей $0 \leq P(A) \leq 1$.

Понятием весьма близким к понятию вероятности является относительная частота событий, или частость. Частость определяется по формуле

$$\omega(A) = \frac{\omega}{N}, \quad (1.2)$$

где ω — число появления событий в испытаниях.

Разница между вероятностью и частостью заключается в том, что для определения частости требуется проведение испытаний, а для определения вероятности они не требуются.

Случайной величиной X называется величина, которая в данном конкретном опыте может принимать одно из множества возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно. Случайные величины могут быть дискретными или непрерывными. В качестве дискретных величин можно рассматривать число аварийных заявок на обслуживание электроустановок, количество поступивших в ремонт электродвигателей и др. Непрерывной случайной величиной является время вынужденного простоя электроустановки из-за аварийной ситуации, длительность грозových перенапряжений и т. д.

Для описания случайной величины нужно знать вероятности принятия ею различных значений. Исчерпывающей характеристикой случайной величины является закон ее распределения, под которым понимается связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями [5].

Закон распределения случайной величины может задаваться в виде таблиц, графиков, аналитически. Например, для дискретной случайной величины закон распределения может быть задан в виде таблицы, первая строка которой содержит все возможные значения случайной величины, а вторая — соответствующие вероятности их появления (таблица 1.1).

Таблица 1.1 - Табличная форма задания закона распределения

x_1	x_2		x_n
P_1	P_2		P_n

Сумма вероятностей всех возможных событий равна единице

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1. \quad (1.3)$$

Закон распределения дискретной случайной величины может задаваться в виде графика рисунок 1.1, где каждому значению $X = x_i$ соответствует вероятность P_i

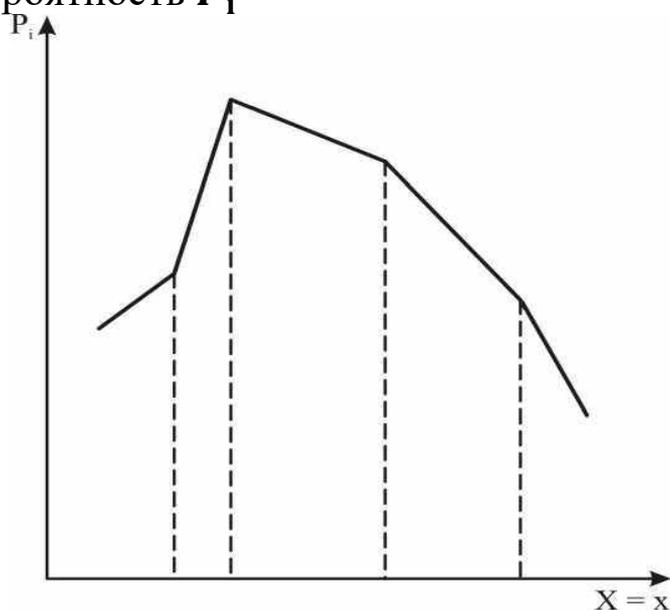


Рисунок 1.1 — Закон распределения дискретной случайной величины

1.2. Числовые характеристики случайных величин

Вместо полного определения случайной величины в виде закона распределения в прикладных задачах часто используют числовые характеристики, называемые моментами случайной величины. Наиболее часто на практике в качестве числовых характеристик используются математическое ожидание и дисперсия.

Математическое ожидание $M(x)$ дискретной случайной величины — сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятность этих значений. Если задан ряд

распределения вероятностей P_i для значений x_i дискретной случайной величины X , то математическое ожидание определяется по формуле

$$M(X) = m_x = \sum_{i=1}^n x_i P_i. \quad (1.4)$$

Основные свойства математического ожидания: математическое ожидание приблизительно равно среднему арифметическому значению случайной величины (чем больше число испытаний, тем точнее это тождество), математическое ожидание постоянной величины равно постоянной величине.

Показателем, характеризующим степень рассеяния случайной величины около своего математического ожидания, является дисперсия (математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания).

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \quad (1.5)$$

Корень квадратный из дисперсии называется средним квадратическим отклонением

$$\sigma_x = \sqrt{D(x)}. \quad (1.6)$$

Так как для непрерывных случайных величин невозможно перечислить все ее возможные значения, то для таких величин пользуются не вероятностью события $P(X = x_i)$, а вероятностью события $P(X < x_i)$. Зависимость вероятности $P(X < x_i)$ от x называется функцией распределения непрерывной случайной величины $F(x)$

$$F(x) = P(X < x). \quad (1.7)$$

Функция распределения — самая универсальная характеристика случайной величины. Она существует для всех случайных величин, как дискретных, так и непрерывных.

Кроме интегральной функции распределения $F(x)$ в практике проведения вероятностных расчетов используется такая характеристика как плотность распределения вероятностей случайной величины (дифференциальный закон распределения случайной величины)

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (1.8)$$

Функции $F(x)$ и $f(x)$ обладают следующими основными свойствами:

- $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1;$
- $F(x_1) > F(x_2)$ при $x_1 > x_2;$
- функция распределения непрерывна слева, т. е. $F(x) = F(x - 0);$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1;$
- $f(x) \geq 0.$

Математическое ожидание и дисперсия для непрерывных случайных величин определяются по формулам:

- $m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx;$ (1.9)

- $D(x) = M[(X - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx.$ (1.10)

1.2 Законы распределения случайных величин

Известно большое количество законов распределения случайных величин. Рассмотрим наиболее часто используемые из них.

Распределение Пуассона. Распределение Пуассона применяется для описания дискретных случайных величин. Он позволяет определить вероятность $P_k(t)$ наступления ровно k событий за промежуток времени t

$$P_k(t) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (1.11)$$

где a — математическое ожидание числа событий за время t .

От значения величины a зависит вид кривых распределения (рисунок 1.2).

Пример 1.1. Средний выход осветительных приборов в ремонтной мастерской за время $T = 1000$ ч составил 20 шт. Какова вероятность того, что за время 100 ч возникнет 3 отказа?

Решение. 1. Так как отказы независимы друг от друга и равномерно распределены во времени, число отказов за время 100 ч

распределяется по закону Пуассона. Математическое ожидание числа отказов за время 100 ч а определим следующим образом

$$\lambda = \frac{n}{T} = \frac{20}{1000} = 0,02 \text{ и } a = \lambda t = 0,02 \cdot 100 = 2$$

2. Вероятность возникновения трех отказов

$$P_{k=3} = \frac{a^k}{k!} e^{-a} = \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} e^{-2} = 0,18$$

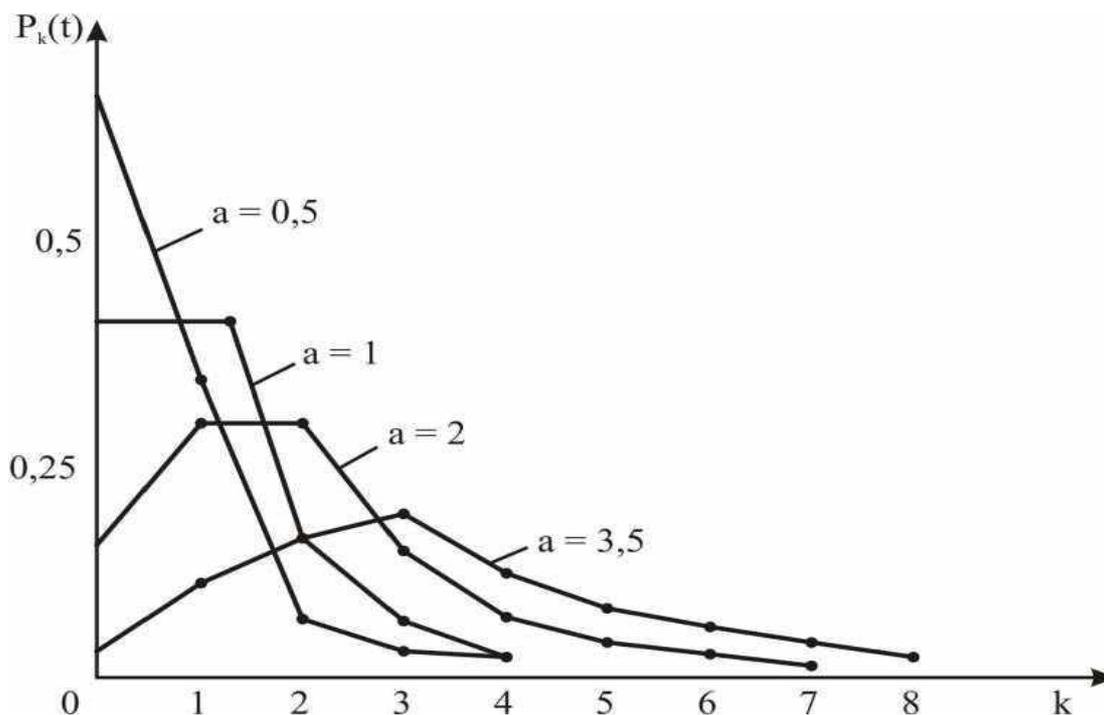


Рисунок 1.2 – Вид кривых распределения Пуассона при различных значениях a

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность распределения имеет вид где m_x и σ_x — математическое ожидание и дисперсия случайной величины X .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad (1.12)$$

где m_x и σ_x — математическое ожидание и дисперсия случайной

величины X .

График плотности нормального распределения (рисунок 1.3) называется нормальной кривой или кривой Гаусса

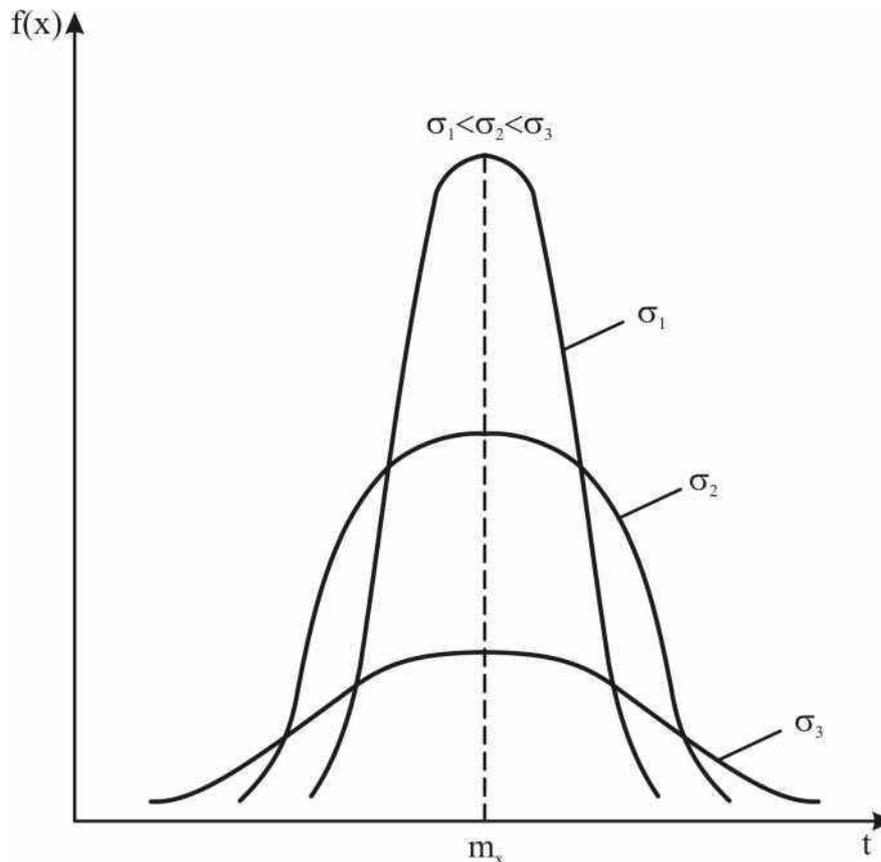


Рисунок 1.3 - Плотность нормального распределения

Функция распределения при нормальном законе равна

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^x \left(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right) dx. \quad (1.13)$$

При нормальной кривой распределения вероятность попадания случайной величины x в интервал (a, b) можно определить по формуле:

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m_x}{\sigma_x}\right), \quad (1.14)$$

где $\Phi(x)$ - табулированная функция Лапласа.

Нормальное распределение обладает двумя замечательными свойствами:

1. Согласно правилу трех сигм вероятность отклонения случайной величины более чем на 3σ ничтожно мала (0,0027). С учетом правила 3σ можно установить наличие промаха в результате отдельного измерения, а значит отбросить его, если результат измерения более чем на 3σ отличается от измеренного среднего значения случайной величины.

2. Если случайная величина X представляет собой сумму

большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние которых на всю сумму мало, то величина X имеет нормальное распределение. Закономерность такого утверждения следует из центральной предельной теоремы Ляпунова.

Распределение Вейбулла. Плотность распределения для случайных величин, подчиняющихся закону Вейбулла, определяется по формуле

$$f(t) = \beta \alpha t^{\alpha-1} \exp(-\beta t^\alpha), \quad (1.15)$$

где β и α - параметры распределения, β - параметр масштаба, α - параметр формы кривой.

Кривая, характеризующая плотность распределения случайной величины, распределенной по закону Вейбулла, показана на рисунке 1.4.

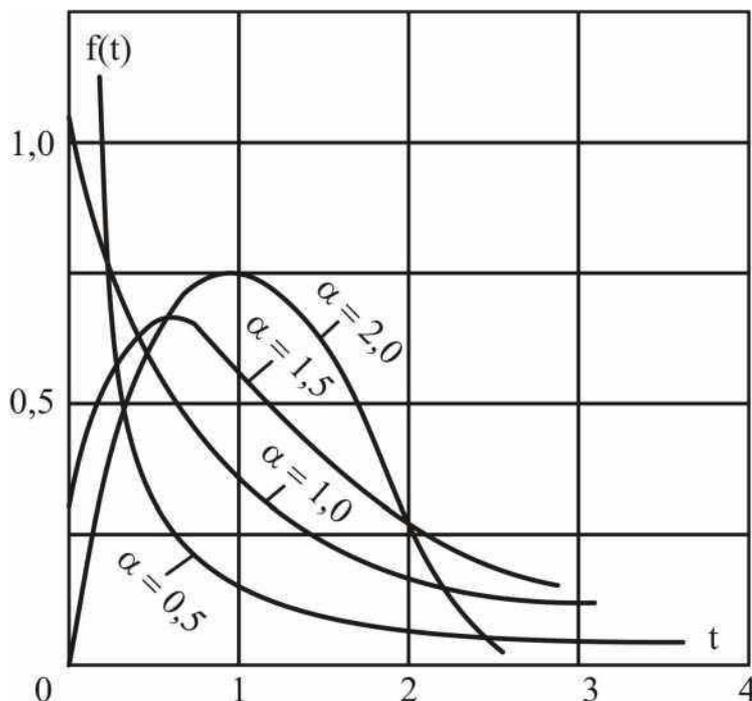


Рисунок 1.4 — Плотность распределения Вейбулла

Модель Вейбулла является универсальной моделью, характеризующей надежность электрооборудования. Надежность электрооборудования на участке приработки во многих случаях описывается таким законом с $\alpha < 1$, в период старения с $\alpha > 1$, а в период длительной эксплуатации с $\alpha = 1$.

Экспоненциальное распределение. Экспоненциальная модель применительно, например, к надежности описывает надежность не стареющих элементов. Этот закон определяется всего лишь одним параметром $\lambda(t) = const$. При расчетах надежности этот параметр

представляет собой интенсивность отказов. Дифференциальная функция распределения случайной величины с экспоненциальным распределением описывается выражением

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (1.16)$$

Соответственно, интегральный закон при экспоненциальном распределении может быть представлен в следующем виде

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (1.17)$$

Интегральная функция экспоненциального распределения показана на рисунке 1.5.

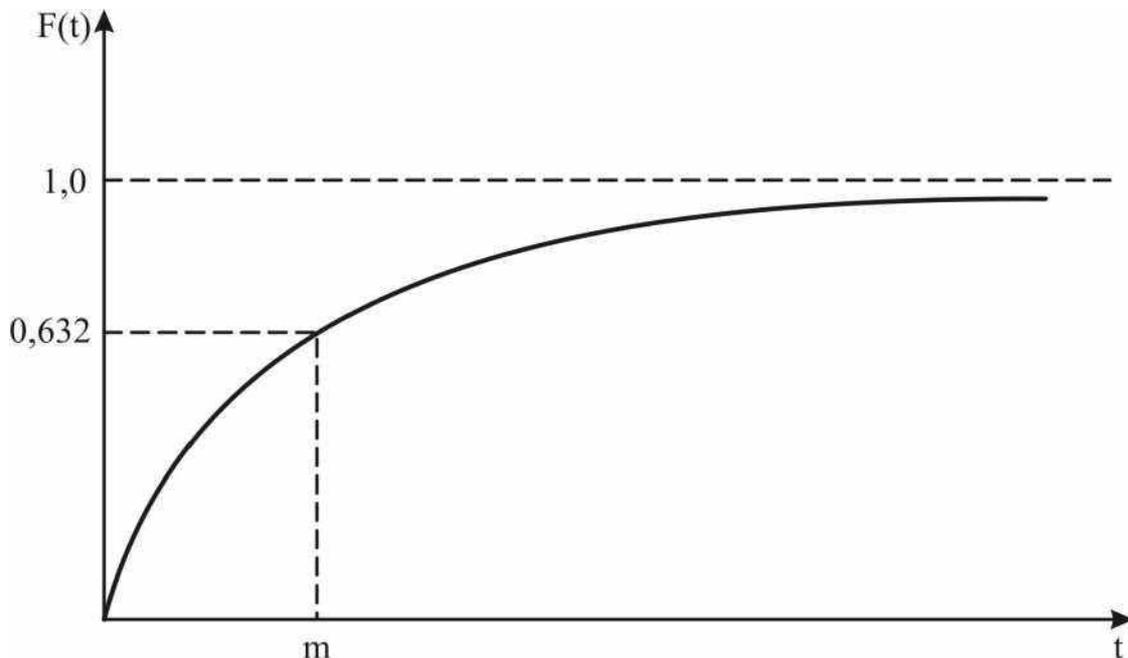


Рисунок 1.5 — Интегральная функция экспоненциального распределения

Распределение X играет большую роль при обработке статистических данных, получаемых в результате эксплуатации или опытов.

Рассмотрим k независимых случайных величин x_1, x_2, \dots, x_k , каждая из которых распределена по нормальному закону с параметрами $m_x = 0$ и $\sigma_x^2 = 1$, то есть

$$f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (1.18)$$

Сумма квадратов этих величин обозначается через χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2, \quad (0 < x < \infty) \quad (1.19)$$

Параметр k называется числом степеней свободы.

Плотность распределения величины χ^2 имеет следующий вид (рисунок 1.6) и описывается формулой

$$f_{\chi}(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}} t^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}, \quad (t \geq 0) \quad (1.20)$$

где f — табулированная гамма-функция.

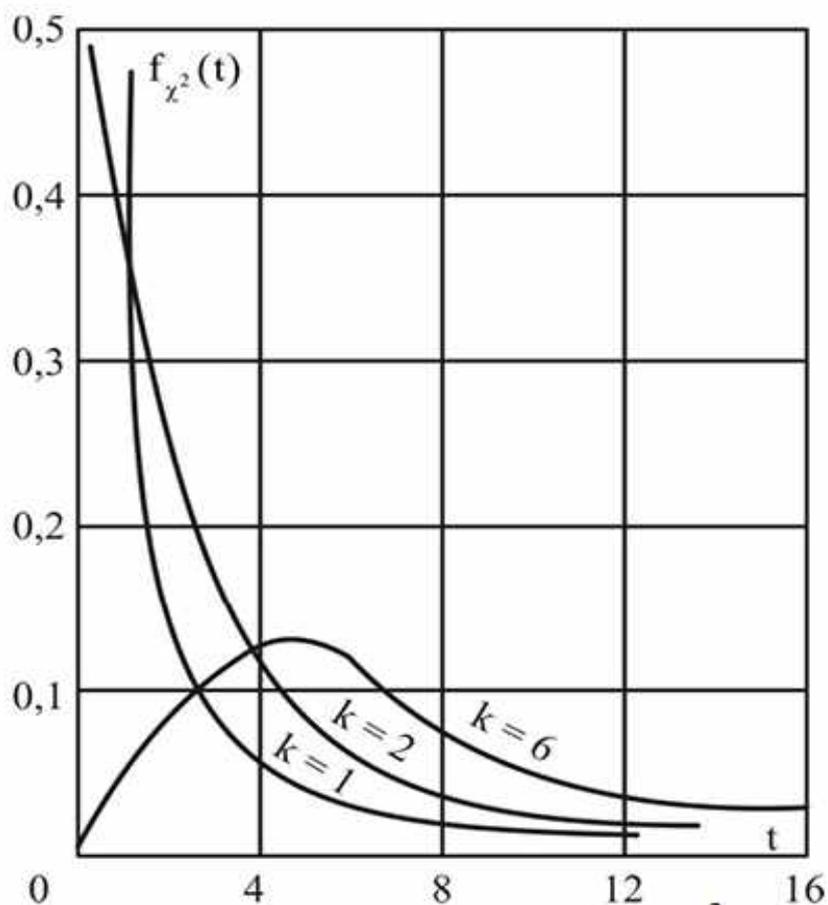


Рисунок 1.6 – Плотность распределения величины χ^2

Распределение χ^2 широко используется при оценке сходимости теоретического и статистического распределений.

Гамма-распределение — практически универсальный закон экспериментальных испытаний. Он широко применяется для описания процессов восстановления и потока отказов при исследовании надежности электромеханических и механических устройств, элементов высоконадежной электронной аппаратуры.

Гамма-распределением случайной величины T называется распределение, задаваемое плотностью вероятности где $k > 1$ и $\beta > 0$ — параметры распределения;

$$f_{\chi}(t) = \frac{1}{\Gamma(k)\beta^k} t^{k-1} e^{-\frac{t}{\beta}}, \quad (t \geq 0) \quad (1.21)$$

где $k \geq 1$ и $\beta > 0$ – параметры распределения;
 $\Gamma(k)$ - гамма-функция, определяемая по формуле

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx \quad (1.22)$$

На рисунке 1.7 представлены кривые плотности гамма-распределения для различных значений параметра формы распределения k .

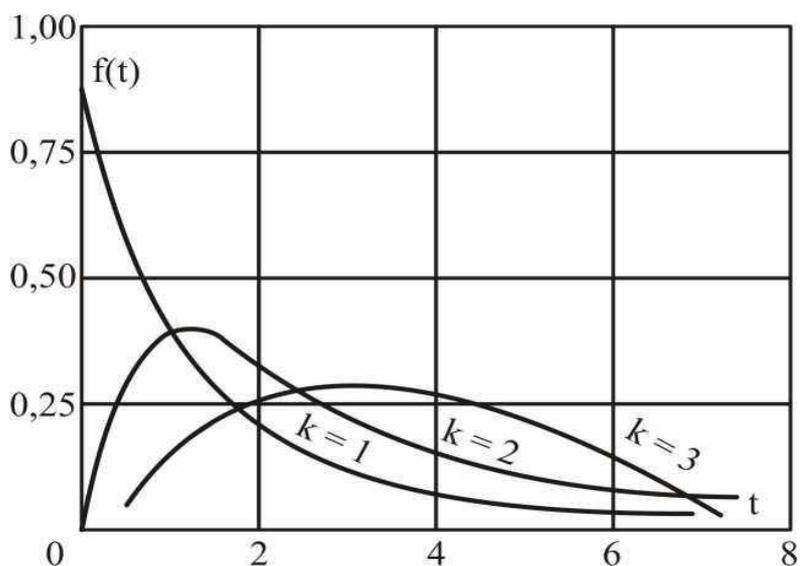


Рисунок 1.7 — Кривые гамма-распределения

2 Основы постановки и проведения экспериментальных исследований

2.1 Понятие эксперимента и характеристика объекта исследований

Неотъемлемой составной частью процесса научных исследований является эксперимент, проводимый с помощью разнообразных приборов и установок.

Научно-технические эксперименты довольно разнообразны по своей физической природе, по характеру и объему проводимых исследований, по используемому экспериментальному оборудованию. Они охватывают широкий класс задач от сравнительно простых до сложных, проводимых на уникальных установках.

Под экспериментом будем понимать совокупность операций, совершаемых над объектом с целью получения информации о его свойствах.

Эксперимент предполагает проведение тех или иных опытов. Опыт - воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях проведения эксперимента при возможной регистрации его результатов.

Эксперименты делятся на качественные и количественные. Качественный эксперимент устанавливает сам факт существования какого-либо явления, но при этом не дает никаких количественных характеристик объекта исследования. Качественный эксперимент обычно предусматривает словесное описание его результатов. Количественный эксперимент не только фиксирует факт существования того или иного явления, но и позволяет установить соотношения между количественными характеристиками явления и количественными характеристиками внешнего воздействия на объект исследования.

Известно, что электроэнергетические установки относятся к категории сложных систем. Для оценки явлений, происходящих в таких объектах исследования, удобно пользоваться кибернетическим подходом «черный ящик».

Объект, рассматриваемый в виде «черного ящика», характеризуется совокупностью входных и выходных параметров, а внутреннее состояние системы является неизвестным и о нем судят по выходным параметрам.

В соответствии с предлагаемым методическим подходом сложный объект может быть представлен в виде структурной схемы (рисунок 2.1)

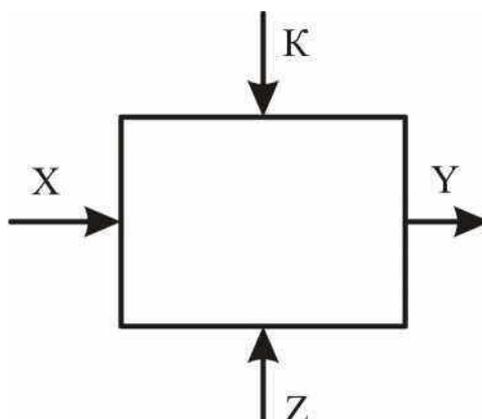


Рисунок 2.1 — Структурная схема сложного объекта

Всю совокупность параметров, определяющих состояние объекта, в этом случае можно разбить на следующие группы.

1. *Входные переменные* $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. В эту группу входят управляемые параметры объекта, такие как уставки регуляторов, количество используемого топлива на тепловых электростанциях и др. Значения входных переменных может быть ограничено определенным диапазоном, задаваемым технологическими регламентами или техническими ограничениями $x_{i \min} \leq x_i \leq x_{i \max}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

2. *Выходные параметры* $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ содержат сведения о количественных и качественных характеристиках выходного продукта. В качестве выходных величин может быть выбран обобщенный техникоэкономический показатель или один из показателей, характеризующих рассматриваемый процесс и принимаемый за главный. В качестве такого показателя может быть принята, например, величина отклонения напряжения в электрической сети, один из показателей надежности электротехнического устройства и т. д. В этом случае выходная характеристика является скалярной величиной.

3. *Контролируемые, но неуправляемые параметры* $Z = (z_1, z_2, \dots, z_v)$. Эту группу составляют те параметры объекта, целенаправленное изменение которых невозможно, например, качество электрической энергии в электрической сети при проведении испытаний на срок службы партии электродвигателей.

4. *Неконтролируемые параметры* $K = (k_1, k_2, \dots, k_w)$. В эту группу входят возмущающие воздействия, временные характеристики

которых, точки приложения и интенсивность действия носят случайный характер и не поддаются определению. К таким возмущениям можно отнести, например, импульсные перенапряжения, возникающие в электрической сети и воздействующие на партию электродвигателей, поставленных на ресурсные испытания, климатические возмущения и др.

Задача эксперимента наиболее часто описывается функцией $Y = \varphi(X, Z)$. При этом варьированию в некоторых пределах могут подвергаться лишь управляемые параметры (входные переменные).

Изучение объектов исследования во всей полноте и сложности может быть ограничено имеющимися исследовательскими возможностями (ограниченность технических средств ведения эксперимента, несовершенство методического подхода и т. д.). Поэтому, как правило, рассматриваются характеристики объекта, наиболее существенные для каждого конкретного случая. При этом связи между выбранными величинами стремятся получить в возможно более простом виде с учетом необходимой точности.

2.2 Специфика проведения экспериментальных исследований

Эксперименты различаются по их физической природе, используемым техническим средствам, объему задач исследования. При этом можно выделить ряд характерных особенностей, которые следует учитывать при организации и проведении экспериментальных исследований.

1. Прежде всего необходимо уяснить сложность объекта исследования, определяемую числом различных состояний, в которых он может находиться. При этом под состоянием объекта следует понимать все множество значений его характеристик и соотношений между ними, которое имеет место в данный момент времени. Понятие «простоты и сложности» необходимо рассматривать именно в таком контексте.

2. Второй важной характеристикой объекта исследования является его управляемость. Управляемость или неуправляемость объекта определяется возможностью его перевода в любое из различных состояний, в которых он может находиться в течение требуемого промежутка времени. Перевод объекта из одного состояния в другое происходит под влиянием управляющих

воздействий, улучшающих его функциональное состояние с точки зрения выбранных критериев. Таким образом, нужно различать управляемые и неуправляемые эксперименты. Особенностью управляемого эксперимента является возможность планирования процесса исследований.

3. Одной из важнейших особенностей экспериментальных исследований является непосредственное участие человека-исследователя при его проведении. При этом следует помнить, что цель экспериментальных исследований диктуется интересами человека, проводящего исследования.

4. Специфической особенностью большинства экспериментов любой разновидности является наличие неопределенности, обусловленной уровнем априорной информации об исследуемом объекте. При этом в принципе может быть два крайних случая — отсутствие необходимости в проведении экспериментальных исследований из-за наличия достаточного объема имеющейся информации и полное отсутствие априорной (ранее известной) информации об объекте исследований. При использовании априорных сведений необходимо учитывать степень их достоверности, определяемую надежностью и точностью имеющихся данных.

2.3 Классификация экспериментов

Необходимость классификации экспериментов обусловлена рядом причин. При наличии классификации можно использовать типовые алгоритмы регистрации и обработки данных, легче решать вопрос планирования и управления экспериментами, правильно сформулировать требования к техническим средствам.

При создании схемы классификации экспериментов необходимо учитывать ряд признаков: область функционирования объекта исследований, назначение экспериментов, их организацию, цель исследования, метод исследования, тип эксперимента, его математическую модель. Схему классификации удобно поделить на отдельные уровни. Уровневая схема классификации экспериментов представлена на рисунке 2.2.

Первый уровень предполагает деление объектов исследования по области их функционирования. Знание этой области позволяет учесть специфику и условия работы объектов исследования, требования к

алгоритмам обработки данных, к техническим средствам и т. д. В нашем случае выделим такие области, как электроэнергетика и радиоэлектроника, сельское хозяйство. Кроме этого определенными специфическими особенностями обладают химия, биология, медицина и др. Особое место занимает физический эксперимент, который в принципе может выполняться в различных областях.

Следующим уровнем классификации объектов экспериментальных исследований является деление их по назначению: лабораторные, стендовые, промышленные. Такое деление применимо не только к экспериментам в целом, но и к отдельным этапам их постановки и выполнения. Комплексные исследования зачастую предусматривают последовательное выполнение всех трех этапов.

Лабораторные исследования проводятся с целью проверки различных гипотез, изучения общих закономерностей различных явлений и процессов. Обычно лабораторные исследования выполняются в две стадии: на первом этапе — изучение качественной стороны явлений и процессов и на втором этапе — количественный анализ, позволяющий проверить теоретические выводы.

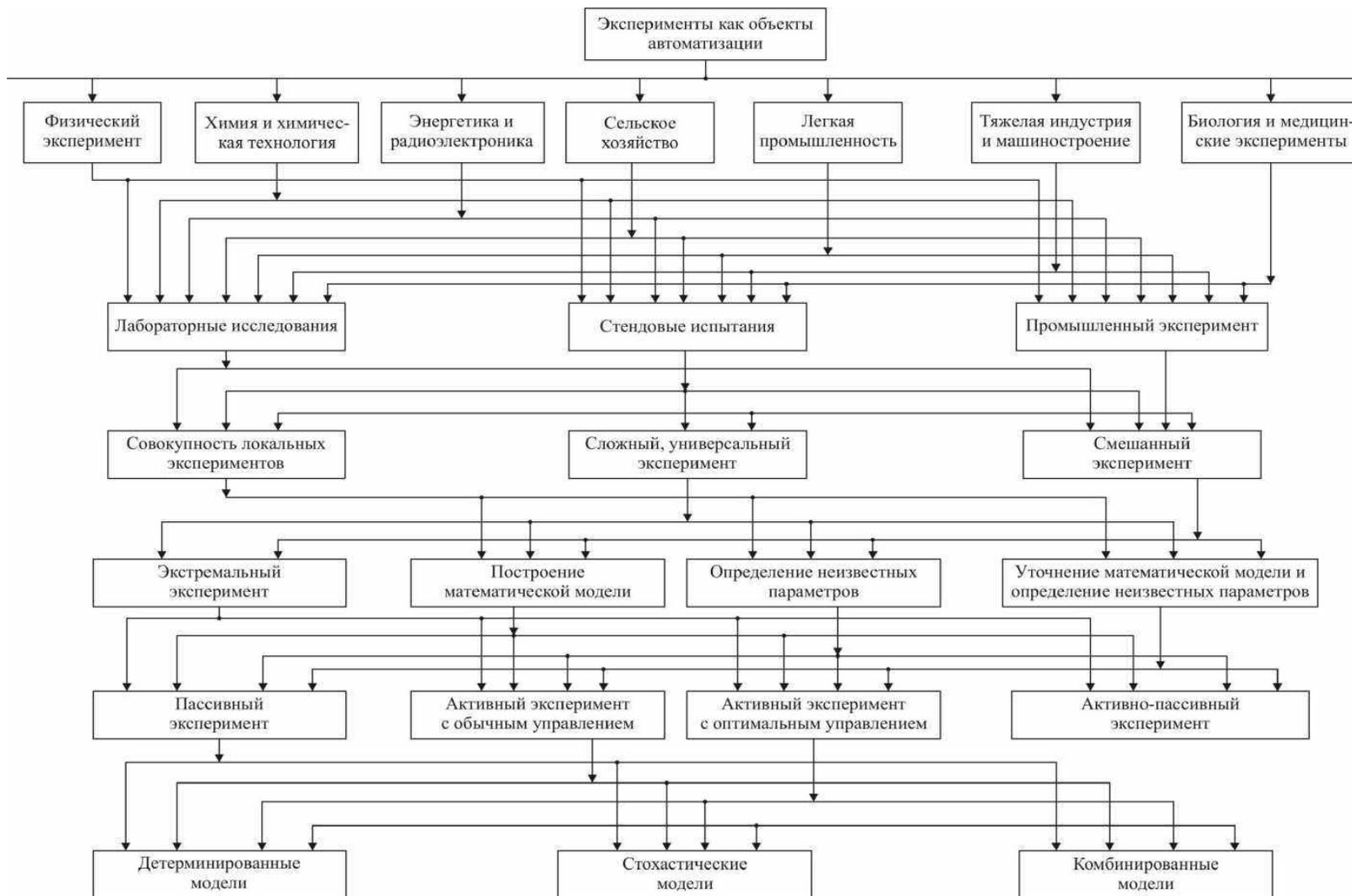


Рисунок 2.2 — Схема классификации экспериментов

Стендовые испытания предусматриваются в тех случаях, когда необходимо изучить конкретный технологический процесс с определенными физическими, химическими и другими свойствами. При этом могут уточняться параметры объекта, рассматриваться возможные недоработки, вырабатываться рекомендации по серийному выпуску изделий.

Промышленный эксперимент обычно проводится при выпуске новых изделий, а также при проведении контрольно-выборочных испытаний и контроле качества выпускаемой продукции.

Третий уровень классификации связан с организацией экспериментальных исследований. При этом могут быть локальные эксперименты, не связанные единой программой друг с другом, а также сложные универсальные эксперименты — совокупность локальных экспериментов, связанных единой программой. В том случае, если программа исследований предусматривает использование локального и сложного универсального эксперимента, говорят о смешанном эксперименте.

Одно из центральных мест в классификации занимает различие экспериментов по целям их постановки (четвертый уровень). При этом может быть экстремальный эксперимент, построение математической модели, определение неизвестных параметров, уточнение математической модели и определение неизвестных параметров. Значительная часть исследований в различных отраслях науки и техники сводится к решению оптимальных задач. При этом цель эксперимента заключается в поиске таких значений параметра процесса, при которых обеспечивается оптимальная величина некоторого критерия.

Математическая модель может быть составлена на основе изучения физической природы явления или процесса, либо она может быть задана априорно (при наличии теоретических или экспериментальных результатов, полученных ранее). В такой ситуации результат эксперимента позволяет оценить адекватность модели реальному процессу. Одной из проблем, возникающих при построении математической модели изучаемого процесса, является отсутствие достаточного объема информации и необходимость постановки и проведения дополнительных локальных экспериментов.

Следующим этапом классификации является учет способа проведения эксперимента. В зависимости от способа сбора экспериментального материала, необходимого для нахождения

математического описания исследуемого объекта, можно говорить о пассивном и активном экспериментах.

Пассивный эксперимент предполагает регистрацию контролируемых переменных в режиме нормальной работы объекта без внесения каких-либо преднамеренных возмущений. Например, контроль показателей качества электроэнергии в электрической сети в нормальном режиме ее работы.

Активный эксперимент основан на использовании искусственных возмущений, вводимых в объект по заранее запланированной программе.

Например, при оценке динамических характеристик системы бесперебойного электроснабжения выполняется «наброс» 100 % нагрузки. Очевидно, что варьированию в процессе активного эксперимента подвергаются лишь управляемые параметры объекта. При этом учитываются технологические ограничения данной системы. Активный эксперимент позволяет быстро получать необходимые эффекты, целенаправленно продвигаясь к области оптимального значения критерия эффективности, строить модели адекватные результатам эксперимента. Активный эксперимент с программным управлением проводится по заранее составленному плану. Активно-пассивный эксперимент характеризуется тем, что при его проведении часть данных просто регистрируется, а часть получается путем активного воздействия на экспериментальную установку.

Последний уровень классификации экспериментов учитывает природу исследуемых явлений и в соответствии с этим математические модели рассматриваются как детерминированные, стохастические, комбинированные.

Многие из изучаемых процессов и явлений могут быть описаны функциональной зависимостью, в которой аргумент не подвергается случайным возмущениям. Такие модели относятся к классу детерминированных. Они могут быть выражены посредством различных полиномов дифференциальных или интегральных уравнений. При рассмотрении детерминированной модели никогда не возникает неопределенности. Например, график плановых работ энергослужбы предприятия на год, разработанный в соответствии с действующими нормативами, представляет собой детерминированную модель при отсутствии нарушений в его выполнении.

Вместе с тем, изучение сложных процессов и явлений часто

связано с некоторой неопределенностью из-за наличия случайно меняющихся параметров. Например, журнал дефектов распределительной электрической сети содержит перечень неисправностей, появляющихся случайным образом. Аналогичный характер носит время выполнения ремонтных работ в электрических сетях, поскольку оно зависит от многих факторов: места возникновения дефекта, тяжести повреждения, наличия резервных элементов и т. д. Модель, которая описывает процессы с учетом случайных параметров, является стохастической. Такая модель может быть представлена в виде полиномов со случайно изменяющимися коэффициентами, стохастических интегро-дифференциальных уравнений, вероятностных автоматов, алгоритмов стохастического моделирования и др.

Ряд объектов исследования следует рассматривать в виде комбинированной модели, в которой часть параметров является детерминированной, а часть изменяется случайным образом.

2.4 Этапы постановки и проведения экспериментальных исследований

Проведение экспериментальных исследований требует всестороннего изучения их структурной организации, выбора технических устройств и их элементов, обеспечения эффективности выполнения работы. Проведение экспериментальных исследований должно выполняться в несколько этапов.

1. *Рассмотрение проблемы.* Под проблемой будем понимать сложную теоретическую или практическую задачу, способы решения которой неизвестны или известны не полностью. При этом предполагается существование дефицита знаний в этой области. На этапе рассмотрения проблемы необходимо:

- осознание потребности в устранении дефицита знаний;
- описание проблемной ситуации и формулировка проблемы в научных терминах.

Например, работа оперативно-выездных бригад по устранению аварийных ситуаций в электрических сетях носит случайный характер. С целью рационализации работы таких подразделений необходимо проведение исследований с использованием теории массового обслуживания и компьютерного моделирования.

2. *Установление актуальности проведения исследований.*

Актуальность проблемы оценивается по степени изученности данного направления, разработанности рассматриваемых вопросов. Особенно следует выделить неизученные и мало изученные вопросы, противоречия в понимании явления в целом и его отдельных сторонах, противоречия в имеющихся эмпирических данных. Например, применительно к рассматриваемой проблеме работы оперативно-выездных бригад имеются результаты отдельных теоретических исследований частного характера, но в целом уровень разработанности вопроса и степень теоретической отработки материала применительно к конкретной области не позволяют оптимизировать состав и рационализировать работу персонала таких подразделений.

3. *Формулировка целей экспериментальных исследований.* Под целью исследований будем понимать достижение какого-либо конкретного результата. Например, получение экспериментальных кривых, характеризующих провал напряжения на выходе различных автономных источников питания при «набросе» 100 % нагрузки. Однозначная и непротиворечивая формулировка цели исследования является необходимым условием его успешного проведения. При этом следует стремиться к количественному описанию цели в терминах и понятиях конкретной области исследования. В случае постановки экстремального эксперимента следует установить количественный параметр оптимизации. Так, при определении оптимального маршрута следования ремонтной бригады по обслуживанию электрических сетей в качестве критерия оптимальности может быть принята протяженность маршрута в километрах. Необходимо отметить, что этапу формулировки цели эксперимента обычно предшествует предварительное изучение объекта исследования, позволяющее оценить целесообразность проведения эксперимента.

4. *Изучение характеристик объекта и формулировка задач исследования.* На этом этапе необходимо проанализировать имеющуюся априорную информацию об объекте и сформулировать задачи исследования. В первую очередь рассматриваются наиболее важные характеристики. Ряд параметров может быть отсеян. Ограничения стремятся ввести, исходя из технических и экономических соображений. Однако при этом не следует забывать о требуемой степени достоверности получаемых результатов. Некоторые сведения об изучаемом объекте могут быть заимствованы из предыдущих исследований, накопленного опыта эксплуатации и т.

д. Во многом вопрос выбора исследуемых параметров зависит от опыта и интуиции исследователя. Определение целей проведения экспериментальных исследований, изучение механизма явлений, структуры информационных потоков, выявление существенных характеристик и их соотношений позволяют сделать окончательный вывод о целесообразности постановки эксперимента и сформулировать программу его проведения.

Программа экспериментальных исследований представляет собой систему мероприятий, предусматривающих порядок, последовательность, сроки и средства их выполнения. При разработке программы экспериментальной работы исследователю необходимо ответить на следующие вопросы:

- что будет являться предметом экспериментальных исследований, по каким значимым параметрам (свойствам, характеристикам, признакам) можно будет судить об эффективности выполняемой работы?

- в чем заключается эксперимент, какие именно характеристики будут проверяться?

- какие методы получения и обработки информации будут применяться?

- какова логическая схема эксперимента?

- как будут оформляться и оцениваться результаты эксперимента?

Составной частью подготовки программы эксперимента является

разработка конкретных методик и методов исследования. Разработка методики проведения исследования один из наиболее ответственных этапов, так как допустима многовариантность путей и методов проведения исследований, а выбор оптимального варианта полностью зависит от исполнителя работы. Как правило, чем выше его квалификация, тем более современные и эффективные методы исследования он может применить.

В работах экспериментального характера методика определяет вид, характер и количество экспериментов, уровень точности измерений и, самое главное, способы их проведения.

Необходимый компонент программы — сроки проведения эксперимента. Без указания сроков невозможно установить, в какой стадии находится эксперимент. Лучше определять сроки поэтапного проведения исследований. Начиная эксперимент, нельзя гарантировать абсолютный успех всего задуманного и поэтому в программу следует заложить резерв времени на случай неудачи или

отрицательных результатов, чтобы компенсировать издержки эксперимента.

5. *Построение предварительной математической модели эксперимента.* Получение вывода о целесообразности проведения экспериментальных исследований позволяет перейти к составлению математической модели объекта. В последующем модель может уточняться по мере выполнения эксперимента. На практике стремятся к получению аналитической зависимости для описания эксперимента, однако это не всегда возможно и приходится прибегать к аппаратурному или статистическому моделированию.

При проведении экспериментальных исследований различных процессов и явлений во многих случаях наблюдается случайный характер изменения во времени параметров, характеризующих объект исследований. Например, величина грозových перенапряжений в электрической сети может быть описана только с учетом случайного характера их появления. Указанная особенность экспериментальных исследований связана с тем, что исследуемые объекты могут быть подвержены воздействию большого числа случайных факторов, возникающих как в самом объекте, так и вследствие его взаимодействия с внешней средой. Кроме этого, в ряде случаев фактор случайности вводится в рассмотрение при довольно большом числе переменных, влияющих на поведение объекта, или при их исключительной сложности для анализа. В связи с этим возникает необходимость описания поведения объекта с помощью стохастических моделей.

6. *Отнесение объекта к эталонному классу.* Полученные результаты по изучению объекта, наличие его предварительной математической модели позволяют отнести изучаемый объект к одному из эталонных классов. Например, динамический режим синхронного генератора при резком изменении нагрузки с определенными допущениями может быть описан в виде реального дифференцирующего звена

$$TV' + V = kTf', \quad (2.1)$$

где T — постоянная времени;

V — отклонение напряжения; k — коэффициент; f — возмущающее воздействие.

Применение указанного подхода позволяет в ряде случаев

отказаться от проведения дополнительных экспериментов.

7. *Анализ и синтез экспериментальной установки.* На данном этапе определяется вариант экспериментальной установки, позволяющий реализовать заданную программу исследований. При этом анализ предусматривает разбиение экспериментальной установки на отдельные элементы и последующую оценку каждого из них, а синтез направлен на формирование системы в целом из отдельных подсистем. На этапе синтеза выбирают вариант экспериментальной установки, обеспечивающий наилучшие показатели ее функционирования.

8. *Выбор технических средств экспериментальных исследований.* Возможность полноценного проведения экспериментальных исследований во многом зависит от наличия или отсутствия необходимого оборудования, приспособлений, комплектующих изделий, измерительных устройств и т. д. В ряде случаев невозможность постановки и проведения экспериментальных исследований обусловлено отсутствием соответствующей экспериментальной базы. Среди требований, предъявляемых к техническим средствам, в первую очередь необходимо отметить способность обеспечить получение экспериментальных параметров на выходе установки и возможность обеспечения необходимых режимов их эксплуатации.

9. *Проведение эксперимента, анализ результатов, оценка эффективности исследований.* В результате проведения эксперимента удается получить объективную, основанную на опыте количественную и качественную информацию о параметрах, характеризующих исследуемый процесс или явление. В ходе эксперимента могут проверяться результаты, полученные на этапе теоретического исследования или появляться новые результаты, проверяться адекватность разработанной математической модели, уточняться параметры, полученные расчетом. При этом следует помнить, что эксперимент является единственным способом проверки теории. Для повышения достоверности каждый опыт может быть повторен несколько раз.

Полученные в ходе эксперимента данные заносятся в таблицы или строятся графики, а затем данные обрабатываются. Необходимо учитывать, что техника проведения опытов различна в каждом конкретном случае, а обработка полученных экспериментальных данных представляет собой отдельную и довольно сложную научную

задачу. Особенно это характерно при исследовании стохастических процессов.

При оценке полученных результатов уточняются причинно-следственные связи исследуемых параметров процесса или явления, окончательно устанавливается степень адекватности разработанной модели, описывающей процесс или явление, делается заключение о целесообразности практического применения полученных результатов. Для отслеживания процесса и результатов эксперимента нужно четко определить параметры, по которым будет устанавливаться эффективность разработанной методики, структуры, технологии.

С целью оценки практической значимости полученных результатов важно определить положительные изменения в технологическом процессе, организованном по новой технологии. При установлении теоретической значимости эксперимента определяется новизна идей, которые могут дополнить имеющиеся теории.

На заключительном этапе формулируются также общие выводы, в которых указывается: подтвердилась или опровергнута гипотеза, достигнута ли цель и как решены задачи исследования (эксперимента), какие результаты достигнуты. При необходимости формулируются практические результаты, оцениваются перспективы дальнейшей разработки проблемы.

3 Обработка результатов экспериментов

3.1 Погрешности измерений

Экспериментальные исследования событий и процессов основаны на наблюдениях, в ходе которых регистрируются различные факты искусственного и естественного происхождения.

Изучение разнообразных явлений и процессов связано с измерением различных физических величин. Измерением называется нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных средств. После проведения измерений должна быть выполнена обработка экспериментальных данных. Основная цель такой обработки заключается в получении результата измерения и оценке его погрешности.

По способу получения результата измерения подразделяются на прямые и косвенные.

Прямые измерения — это измерения, при которых искомое значение величины находится непосредственно из опытных данных. Оценка при этом ведется по показаниям приборов. Например, определение величины тока в электрической цепи с помощью амперметра, измерение освещенности на рабочих местах люксметром и т. д.

При выполнении *косвенных измерений* измеряемая величина определяется (вычисляется) по результатам прямых измерений других величин, которые связаны с измеряемой величиной определенной зависимостью. Например, нахождение удельной электропроводимости проводника по его сопротивлению, определение сечения проводника по его диаметру и др.

Измерение физической величины не может быть выполнено абсолютно точно. Любое измерение дает приближенный результат, то есть содержит погрешность измерений. Таким образом, измерить физическую величину — это значит не только опытным путем с помощью специальных средств получить его числовой показатель, но и оценить погрешность измерений, поскольку без этого нельзя судить о мере достоверности полученного результата.

Погрешностью измерений называется разность между истинным значением измеряемой величины x и результатом измерения x_i , то есть

$$\Delta x_i = x - x_i. \quad (3.1)$$

При обработке результатов экспериментальных исследований обычно рассматривается несколько погрешностей.

Систематическая погрешность - это составляющая погрешности измерения, которая остается постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях. Такая погрешность может быть связана с ограниченной точностью измерительных приборов, неправильным выбором метода измерений, неправильной установкой приборов для проведения измерений, техническим состоянием исследуемого объекта. Например, окисление контактов на клеммах аккумуляторной батареи может привести к неправильным результатам при контроле напряжения источника питания.

Систематическая погрешность вызывается вполне определенными причинами, величина ее при повторных замерах остается постоянной или изменяется по определенному закону. Поскольку такая погрешность в принципе может быть известна, то до проведения измерения она может быть исключена путем изменения метода измерения, внесения поправок в показания прибора и т. д. Одним из способов убедиться в отсутствии систематической погрешности является повторение измерения другим методом и в других условиях.

Грубые погрешности (промахи) — это ошибки, являющиеся чаще всего результатом низкой квалификации экспериментатора, его небрежности или невнимательности, а также неисправности приборов. Разработан ряд приемов, позволяющих исключить такие результаты из дальнейшего рассмотрения.

Случайная погрешность зависит от большого числа случайных причин, действие которых при каждом измерении различно и не может быть заранее учтено. Случайную погрешность следует рассматривать как случайную величину, подчиненную определенной статистической закономерности.

Приборная погрешность — погрешность, вносимая измерительным прибором при каждом измерении. Она связана с точностью прибора. Эта погрешность равна той доле деления шкалы прибора, до которой с уверенностью в правильности результата можно выполнять отсчет. Обычно если нет дополнительных сведений в паспорте прибора, она равна $\pm 0,5$ цены наименьшего деления.

Приборная погрешность содержит в себе как систематическую, так и случайную погрешности. Систематическая погрешность может быть вызвана смещением начала отсчета, неточностью нанесения шкалы, а случайная погрешность может быть обусловлена трением в механизме прибора, люфтом прибора и другими причинами.

Необходимо иметь ввиду, что если случайная погрешность в результате эксперимента меньше точности прибора, то говорить о погрешности не корректно. И, наоборот, если случайная погрешность больше приборной, то нужно увеличить объем экспериментальных данных, чтобы повысить точность определения величины погрешности.

3.2. Предварительная обработка экспериментальных данных

Прежде чем выполнить оценку погрешности проведенных измерений необходимо провести предварительную обработку полученных данных для ускорения дальнейших расчетов и предупреждения ошибок.

Во-первых, необходимо правильно записать полученный цифровой материал. Экспериментальные данные могут быть представлены в символьной форме, в виде таблиц, графиков, осциллограмм, рисунков. В дальнейшем будем рассматривать цифровую форму представления данных, как наиболее универсальный и широко распространенный метод представления информации.

После проведения измерений и вычислений не менее важно грамотно округлить и записать конечный результат. Для этого существуют правила, которые регламентируются стандартом СЭВ 547-77 при представлении нормативно-технической и технологической документации. Существо рекомендаций сводится к следующему.

Запись цифр материала необходимо осуществлять так, чтобы все нули, стоящие справа и слева в данном числе и обозначающие десятичные разряды, представлялись в виде целых положительных чисел или степеней десяти. Например, интенсивность отказов электротехнического изделия $\lambda = 0,006\text{ч}^{-1}$ следует записывать $\lambda = 6 \cdot 10^{-3}\text{ч}^{-1}$.

Числовые значения величин должны указываться с одинаковым числом разрядов:

- правильная запись: $21,0 \pm 0,2$; $15,13 \pm 0,20$;

- неправильная запись: $21 \pm 0,2$; $15,13 \pm 0,2$.

Числовое значение величины и ее погрешность (отклонение) необходимо записывать с указанием одной и той же физической величины.

Округление числа заключается в отбрасывании значащих цифр справа до определенного разряда с возможностью изменения цифры этого разряда. Например, округление числа 163,92 до четырех значащих цифр дает 163,9. При этом следует учитывать, что если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя сохраняемая цифра не меняется. Округление цифры 15,61 до трехзначной позволяет записать 15,6. Если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на 1. При округлении цифры 13,86 до трехзначной цифры мы получим 13,9. Округление следует выполнять сразу до желаемого количества значащих цифр. Например, число 239,44 может быть округлено до 239 или до 239,4. Поэтапное округление с изменением нескольких разрядов не допустимо, то есть нельзя число 239,44 вначале округлить до 239,4, а затем до 239.

Прежде чем рассматривать параметры, характеризующие полученную совокупность экспериментальных данных, необходимо проверить имеющийся массив на наличие так называемых выскакивающих значений (промахов). Они являются, как правило, следствием какой-либо грубой ошибки в проведении данных измерений, незамеченной экспериментатором. Речь может вестись о величинах, существенно отличающихся от остальных, например в несколько раз. Причины таких ошибок могут быть сбои в аппаратуре, ложное проставление экспериментатором результатов из-за невнимательности или усталости. Промахи нужно исключить, однако руководствоваться только эмоциями некорректно.

Методы, обычно применяемые при выявлении выскакивающих значений, довольно громоздки. Однако существует достаточно быстрый способ, позволяющий решить задачу с приемлемой точностью [1]. Метод основан на оценке различий крайних значений рассматриваемой совокупности экспериментальных данных. Рассмотрим конкретный пример обработки данных. Пусть в результате эксперимента получен следующий массив результатов измерений: 1,06; 1,03; 1,07; 1,01; 1,29; 1,05; 1,04; 1,12.

Расположим полученные данные в порядке возрастания и пронумеруем их:

1	2	3	4	5	6	7	8
1,01	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,07	1,29

Рассмотрение полученного ряда показывает, что выскакивающим значением является величина под номером 8. Обозначим приведенные данные через x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ и укажем их номера в виде индекса, например выскакивающее значение x_8 .

Рассчитав отношение $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$, получим $\frac{x_8 - x_7}{x_8 - x_1} = \frac{1,29 - 1,12}{1,29 - 1,01} = 0,61$.

Полученное значение оценим с использованием данных, приводимых в Приложении А. В таблице Приложения А для числа экспериментальных данных $n = 8$ и уровня достоверности 99% указано пограничное значение отношения $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$ равное 0,59. Так как вычисленное значение, больше табличного, мы в праве рассматривать вариант 8 в качестве промаха и исключить его из дальнейшего рассмотрения.

Вместе с тем возможен случай, когда отношение $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$ будет находится в диапазоне достоверности от 95 до 99 %. В этом случае мы не имеем права говорить о безоговорочном исключении выскакивающего значения, можно говорить только о значительной вероятности грубой ошибки. В такой ситуации лучше провести дополнительное измерение, но при условии, что найденное в опыте значение $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$ меньше пограничного уровня достоверности 95%, тогда предположение об исключении выскакивающего значения является безоговорочным.

В Приложении А приводятся также другие возможные варианты появления выскакивающих значений в массиве экспериментальных данных, это отношение, $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$ когда выскакивающими являются наибольшее и наименьшее значения измеряемого параметра и отношение $\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_{n-1}}$, когда выскакивающими являются сразу два наибольших значения.

3.3 Оценка случайной погрешности прямых измерений

При прямых измерениях числовые значения измеряемой величины получают сразу из показаний прибора, с помощью которого выполняются измерения. Результат каждого прямого измерения включает случайную ошибку, которая зависит от большого числа случайных факторов.

При проведении n измерений одной и той же величины получаются результаты x_1, x_2, x_n . В математической статистике доказано, что при отсутствии систематических погрешностей (или после устранения их) наилучшим приближением к измеряемой величине является среднее статистическое значение результатов измерения.

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i \quad (3.2)$$

Разности между средним значением измеряемой величины x и значениями x_1, x_2, x_n , полученными при отдельных измерениях, называются абсолютными ошибками

$$\Delta x_1 = \bar{x} - x_1, \Delta x_2 = \bar{x} - x_2, \dots, \Delta x_n = \bar{x} - x_n \quad (3.3)$$

Рассматриваемые значения абсолютных ошибок могут быть как положительными, так и отрицательными.

В основе теории погрешностей лежат два предположения, подтверждаемые опытом.

1. При большом числе измерений случайные погрешности одинаковой величины, но разного знака, то есть погрешности, как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения, встречаются одинаково часто.

2. Большие (по абсолютной величине) погрешности встречаются реже, чем малые, то есть вероятность появления погрешностей уменьшается с ростом величины погрешности.

Для определения средней абсолютной ошибки результата измерений берут среднее арифметическое абсолютных значений отдельных ошибок

$$\Delta\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta X_i \quad (3.4)$$

Если число измерений достаточно велико (строго говоря, при $n \rightarrow \infty$), то согласно предположению 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta X_i = 0 \quad (3.5)$$

Из теории ошибок известно, что плотность распределения случайных ошибок зависит от их величины и выражается формулой нормального распределения (закон Гаусса)

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\bar{x}-x_i)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.6)$$

где \bar{x} — истинное (среднеарифметическое значение измеряемой величины;

σ^2 — дисперсия;

σ — средняя квадратическая погрешность.

Дисперсия генеральной совокупности для n полученных значений случайной величины x_1, x_2, x_n определяется по формуле:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2 \quad (3.7)$$

Она характеризует степень разброса x_1 , вокруг \bar{x} . Стандартное отклонение (среднеквадратическую ошибку) отдельного опыта находят по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2} \quad (3.8)$$

Кривая плотности нормального распределения показана на рисунке 3.1.

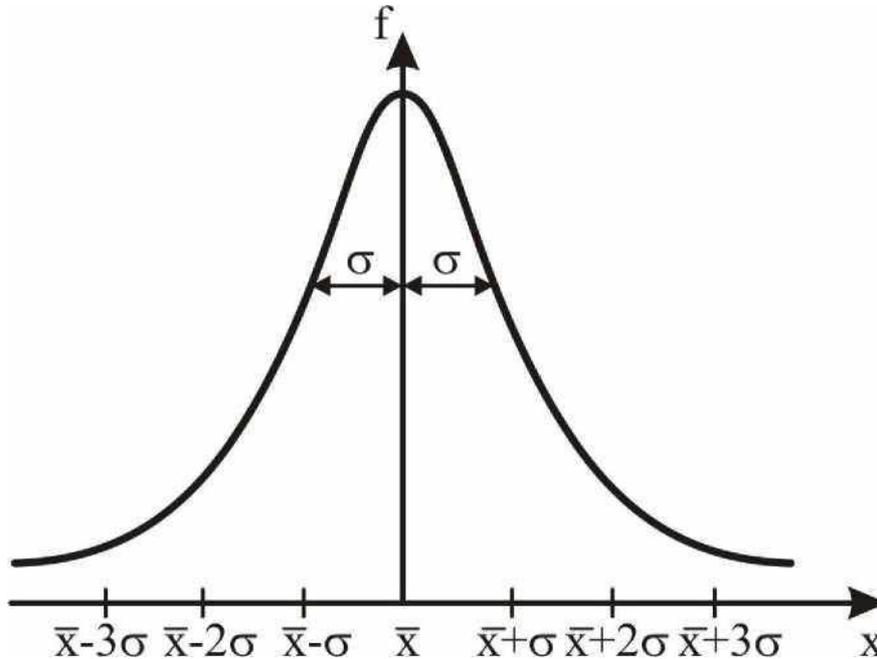


Рисунок 3.1 — Кривая плотности нормального распределения

Кривая плотности распределения случайной величины x характеризует частоту попадания измеряемой величины x_i в интервалы $\bar{x} + \sigma$; $\bar{x} + 2\sigma$; $\bar{x} + 2\sigma$ и аналогично для отрицательных значений $\bar{x} - \sigma$; $\bar{x} - 2\sigma$; $\bar{x} - 3\sigma$.

В принципе цифры перед σ могут быть и дробными, поэтому используют общее обозначение в виде безразмерного коэффициента k_α .

Из приведенной на рисунке 3.1 кривой можно установить важную закономерность: в диапазон $\bar{x} + \sigma$ попадает 68% всех измеренных величин, в диапазон $\bar{x} + 2\sigma$ - 95 %, а в диапазон $\bar{x} + 3\sigma$ - 99,7 %.

Для полноты описания случайной погрешности необходимо уметь указывать вероятность α попадания результата измерения x_i в любой заданный интервал полуширины Δx кривой распределения случайных ошибок $(\bar{X} - \Delta X) < X_1$. При этом Δx удобно выражать через σ и коэффициент k_1 , то есть

$$\Delta x = k_\alpha \sigma \quad (3.8)$$

Интервал, в котором с заданной вероятностью находится истинное значение измеряемой величины, называется доверительным интервалом, а соответствующая вероятность α - доверительной вероятностью этого интервала. Зависимость доверительной вероятности от коэффициента k_α приведена в таблице 3.1.

Таблица 3.1 — Зависимость доверительной вероятности от коэффициента k_α

$k_\alpha = \frac{\Delta x}{\sigma}$, $k_\alpha = \frac{\Delta x}{\sigma_x}$	Доверительная вероятность α
1,0	0,680
2,0	0,950
2,6	0,990
3,0	0,997

Вероятность a в ряде случаев называется надежностью.

Задавшись a , мы по таблице 3.1 можем определить величину k_α и, зная a , определить Δx . Указанные рассуждения справедливы при большом числе измерений ($n \rightarrow \infty$). На практике обычно выполняется ограниченное число измерений. В этом случае величина \bar{x} называется выборочным средним (в отличие от генерального среднего, получаемого при $n \rightarrow \infty$). Выборка означает, что из бесконечного множества (генеральной совокупности) берется наугад n значений случайной величины x_α .

Если истинное значение x неизвестно, оценка дисперсии σ^2 является так называемая выборочная дисперсия или дисперсия выборки

$$\Delta S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n-1} \quad (3.9)$$

При ограниченном числе измерений n величина ΔS_n^2 является лишь σ^2 оценкой дисперсии a , а не равна ей, то есть при ограниченном числе измерений мы можем непосредственно определить лишь величину ΔS_n^2 , а не σ^2 .

Корень квадратный из выборочной дисперсии определяет выборочную среднюю квадратическую погрешность

$$\Delta S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n-1}}. \quad (3.10)$$

Покажем теперь, как найти оценку погрешности результата серии измерений. Если мы проведем несколько серий, каждая из которой будет состоять из n измерений, то мы будем получать после обработки каждый раз различное значение \bar{x} , то есть среднее арифметическое значение измеряемой величины для каждой серии само является случайной величиной и описывается нормальным законом распределения с дисперсией $\sigma_{\bar{x}}^2$.

При ограниченном числе измерений и нескольких сериях k приблизительным выражением $\sigma_{\bar{x}}^2$ будет $\Delta S_{\bar{x}}^2$.

$$\Delta S_{\bar{x}}^2 = \frac{\Delta S_n^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}. \quad (3.11)$$

Отсюда среднеквадратическая погрешность результата серии измерений равна

$$\Delta S_{\bar{x}} = \sqrt{\Delta S_{\bar{x}}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n-1}}. \quad (3.12)$$

Математическая статистика предлагает в качестве среднего значения случайной погрешности использовать именно величину $\Delta S_{\bar{x}}$. Эту величину называют среднеквадратическим отклонением среднего значения. Число $\Delta S_{\bar{x}}$ характеризует точность определения искомой величины x путем вычисления среднестатистического значения x от истинного значения \bar{x} . Не случайно, ГОСТ 8.201-76 регламентирует доверительную вероятность именно для этого показателя. Согласно этого ГОСТ в технических измерениях следует принимать доверительную вероятность $\alpha = 0,95$, а в научных исследованиях $\alpha = 0,68$.

Оценки дисперсий σ^2 и $\sigma_{\bar{x}}^2$ являются предельными. Они справедливы при n , то есть при большом числе n . При малых значениях n эти оценки сами являются случайными величинами и в лучшем случае определяют лишь порядок величины дисперсии. В силу этого при нахождении границы доверительного интервала для

величины x при малых значениях n ($n < 20$) мы не можем пользоваться коэффициентом $k_\alpha = \frac{\Delta x}{\sigma_{\bar{x}}}$, поскольку величина $\sigma_{\bar{x}}$ нам неизвестна.

Для получения границ доверительного интервала в этом случае нам необходимо ввести новый коэффициент t_α . Этот коэффициент был предложен 1908 году английским математиком и химиком Госсетом, публиковавшим свои работы под псевдонимом «Стьюдент» - студент, и получил в последствии название коэффициента Стьюдента. При n (практически при $n > 20$) распределение Стьюдента переходит в нормальное распределение с единичной дисперсией.

Распределение Стьюдента позволяет оценить величину надежности a по заданному значению Δx или наоборот, по заданной величине надежности a найти величину погрешности Δx . Таким образом, при недостаточно большом числе измерений (практически при $n < 20$) при расчетах Δx с учетом заданной надежности α необходимо вводить вместо коэффициентов k_α коэффициент Стьюдента t_α , зависящий от числа произведенных измерений и от величины надежности α

$$t_\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta S_{\bar{x}}} = \frac{\Delta x}{\Delta S_n / \sqrt{n}}, \quad (3.13)$$

где $\Delta S_{\bar{x}}$ — определяется по формуле (3.12), а ΔS_n , соответственно по формуле (3.10).

При $n \rightarrow \infty$ коэффициенты t_α переходят в коэффициенты k_α .

Значения коэффициентов Стьюдента t_α для разных значений надежности a и различных значениях n .

Согласно математической статистики для корректного представления результата измерений следует в начале задаться его надежностью (доверительной вероятностью α). Зная вероятность того, что истинное значение измеряемой величины x попадает в доверительный интервал, то есть, другими словами, задавая надежность a , равную определенной величине (например, $\alpha = 0,99$) по числу проведенных измерений (например, $n = 8$) по таблице Числа степеней свободы $f = n - 1$ можно усановить значение коэффициента Стьюдента. В нашем случае оно равно 3,50. Тогда, определив предварительно $\Delta S_{\bar{x}}$, используют формулу (3.13), удастся найти погрешность Δx по формуле

$$\Delta x = t_\alpha \Delta S_{\bar{x}} \quad (3.14)$$

После этого результат измерения можно записать в виде $(\bar{x} - \Delta x) < x_i < (\bar{x} + \Delta x)$ или $x = (\bar{x} \pm \Delta x)$, что означает, что истинное значение величины x попадает в доверительный интервал $(\bar{x} - \Delta x), (\bar{x} + \Delta x]$ с надежностью, равной α .

Данный метод оценки погрешности среднего измерения годен для любого числа измерений.

Часто при обработке результатов экспериментальных исследований целесообразно кроме абсолютной погрешности использовать относительную погрешность измеряемой величины. Относительной погрешностью измеряемой величины x называется отношение абсолютной погрешности Δx к истинному значению x .

В качестве наилучшей оценки относительной погрешности ε обычно используется отношение Δx к среднестатистическому значению \bar{x}

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \quad (3.15)$$

Относительная погрешность является безразмерной величиной и ее часто выражают в процентах.

Таким образом, изложенный теоретический материал позволяет сформулировать следующий алгоритм математической обработки результатов прямых измерений.

1. Записывается массив полученных экспериментальных данных.
2. Полученные данные располагаются в порядке возрастания и нумеруются.
3. Делается оценка наличия выскакивающих данных и при их наличии они отбрасываются.
4. Определяется среднее арифметическое значение измеряемой величины

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

5. Вычисляются погрешности отдельных измерений $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$.
6. Определяются квадраты погрешностей отдельных измерений

$$\Delta x_i^2 = (\bar{x} - x_i)^2$$

7. Рассчитывается средняя квадратическая погрешность результата

$$\text{серии измерений } \Delta S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}$$

8. Задается значение надежности α .
9. Определяется коэффициент Стьюдента t_α
10. Находятся границы доверительного интервала по формуле $\Delta x = t_\alpha \Delta S_{\bar{x}}$.
11. Если величина погрешности результата измерений, определенная по п. 10, окажется сравнимой с величиной

погрешности прибора, то в качестве границы доверительного интервала следует взять величину

$$\Delta x = \sqrt{t_{\alpha}^2 \Delta S_{\bar{x}} + \left(\frac{t_{\alpha}(\infty)}{3}\right)^2 \delta^2},$$

где δ - величина погрешности прибора.

12. Окончательный результат записывается в виде $x = \bar{x} \pm \Delta x$.

13. Выполняется оценка относительной погрешности результата

$$\text{серии измерений } \varepsilon = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$$

Пример 3.1. Цифровым прибором было произведено 11 замеров тока нагрузки в распределительном устройстве частного домовладения. В результате замеров получен следующий массив информации: 11,02; 10,14; 9,96; 10,00; 11,56; 16,28; 11,13; 10,66; 10,44; 9,73; 10,82 А.

Определить относительную погрешность результата измерений.

Решение. 1. Расположим полученные данные в порядке возрастания и пронумеруем их:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
9,73	9,96	10,00	10,14	10,44	10,66	10,82	11,02	11,13	11,56	16,28

2. Рассмотрим полученный ряд на предмет наличия выскакивающей величины. Ею является результат измерения $x_{11} = 16,28$.

3. Рассчитаем отношение $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1} = (16,28 - 11,56) / (16,28 - 9,73)$
 $=$
 $= 0,72$.

4. Согласно Приложения А для числа экспериментальных данных

$n = 11$ и уровня достоверности $\alpha = 99\%$ отношение $\frac{x_n - x_1}{x_n - x_1} = 0,50$. Так как $0,72 > 0,50$, то мы вправе

исключить из дальнейшего рассмотрения выпадающее значение

$$n_{11} = 16,28.$$

5. Для оставшихся 10 результатов измерений определим среднее арифметическое значение тока нагрузки

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{9,73 + 9,96 + 10,00 + 10,14 + 10,44 + 10,66 + 10,82 + 11,02 + 11,13 + 11,56}{10} \\ &= 10,55 \text{ A} \end{aligned}$$

6. Найдем погрешность отдельных измерений по формуле

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i: \Delta x_1 = 0,82; \Delta x_2 = 0,59; \Delta x_3 = 0,55; \Delta x_4 = 0,41; \Delta x_5 = 0,11; \Delta x_6 = -0,11; \Delta x_7 = -0,27; \Delta x_8 = -0,47; \Delta x_9 = -0,58; \Delta x_{10} = -1,01 \text{ A}.$$

7. Определим квадраты погрешностей отдельных измерений

$$\begin{aligned} \Delta x_1^2 &= 0,67; \Delta x_2^2 = 0,35; \Delta x_3^2 = 0,30; \Delta x_4^2 = 0,17; \Delta x_5^2 = 0,01; \\ \Delta x_6^2 &= 0,01; \\ \Delta x_7^2 &= 0,07; \Delta x_8^2 = 0,22; \Delta x_9^2 = 0,34; \Delta x_{10}^2 = 1,02. \end{aligned}$$

8. Найдем среднюю квадратическую погрешность серии измерений по формуле

$$\Delta S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{3,16}{90}} = 0,19$$

9. Зададимся значением надежности $\alpha = 0,95$.

10. Определим коэффициент Стьюдента t_α для выбранного значения надежности α и числа степеней свободы $f = n - 1 = 9$. По Приложению Б устанавливаем $t_\alpha = 2,26$.

11. Находим границы доверительного интервала

$$\Delta x = t_\alpha \Delta S_{\bar{x}} = 2,26 \cdot 0,19 = 0,43, \text{ A}.$$

12. Окончательный результат можем записать в виде $x = \bar{x} \pm \Delta x = 10,55 \pm 0,43, \text{ A}.$

13. Оценим относительную погрешность результата серии измерений $\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} \frac{0,43}{10,55} \cdot 100\% = 4\%.$

14. Делаем вывод: для научно-исследовательских измерений случайная погрешность 4% является вполне допустимой.

3.4 Обработка результатов косвенных измерений

В ряде случаев интересующая нас величина a не может быть измерена непосредственно, и рассчитывается как функция других экспериментально измеренных величин. В такой ситуации функциональная зависимость между величиной a и измеренными величинами имеет вид

$$a = f(x, y, z, \dots) \quad (3.16)$$

При этом каждая из измеренных величин имеет свою погрешность.

В ходе эксперимента величины x, y, z, \dots многократно измеряются в идентичных условиях. По полученным результатам для каждого из них можно вычислить средние статистические значения $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$ по приведенной ранее формуле (3.2).

Среднее значение физической величины a можно рассчитать по средним значениям измеренных величин. Тогда мы получим следующую зависимость

$$\bar{a} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots) \quad (3.17)$$

В этом случае согласно математической статистике достигается наилучшее приближение к истинному значению величины a . После вычисления приближенного значения искомой величины $\bar{a} \approx a$ необходимо провести оценку погрешности полученного приближения, разумеется, при выбранной доверительной вероятности α .

Обозначим абсолютные погрешности измеренных величин Δx , Δy , Δz . По этим значениям необходимо вычислить абсолютную и относительную погрешности искомой величины a .

Эта задача решается с помощью математического аппарата теории приближенных чисел. После логарифмирования и дифференцирования выражения (3.16) получим

$$\frac{\partial a}{a} = \frac{\partial f(x)}{f(x)} + \frac{\partial f(y)}{f(y)} + \frac{\partial f(z)}{f(z)} + \dots \quad (3.18)$$

Обычно случайные погрешности измеренных величин намного меньше собственных значений этих величин, то есть $\Delta x \ll \bar{x}$; $\Delta y \ll \bar{y}$; $\Delta z \ll \bar{z}$, ... В результате можно с достаточной точностью бесконечно малые величины в уравнении (3.18) заменить на конечные изменения

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta f(x)}{f(x)} + \frac{\Delta f(y)}{f(y)} + \frac{\Delta f(z)}{f(z)} + \dots \quad (3.19)$$

В курсе математической статистике доказывается, что если измерение величин x , y , z , ... проводятся независимо, то абсолютная погрешность Δa величины a , задаваемая при помощи функции (3.16), может быть представлена в следующем виде

$$\Delta a = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \Delta z\right)^2 \dots}, \quad (3.20)$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}$ - производная по переменной x , взятая в точке $x = x_{\text{изм}}$;

$\frac{\partial f}{\partial y}$ - производная по переменной y , взятая в точке $y = y_{\text{изм}}$;

$\frac{\partial f}{\partial z}$ - производная по переменной z , взятая в точке $z = z_{\text{изм}}$;

Δa , Δx , Δy , Δz , - средние квадратические погрешности;

$\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x$ составляющая погрешности, обусловленная погрешностью измерения величины x , аналогичный смысл имеют измерения других величин y, z, \dots

По виду функциональной зависимости величины a от непосредственно измеряемых величин рассчитывают абсолютную Δa и относительную $\frac{\Delta a}{a} \cdot 100\%$ погрешности косвенно определяемых величин. Рассмотрим выражения по определению величин погрешностей для наиболее простых и часто встречающихся функциональных зависимостей искомой величины от измеряемых характеристик.

1. Пусть косвенно измеряемая величина a является суммой или разностью непосредственно измеряемых величин x и y , то есть $a = x \pm y$. Тогда

$$\bar{a} = \bar{x} \pm \bar{y}; \frac{\partial a}{\partial x} = 1; \frac{\partial a}{\partial y} = \pm 1 \quad (3.21)$$

Абсолютную погрешность в данном случае можно представить в виде простого выражения

$$\Delta a = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (3.22)$$

а относительную погрешность ϵ_a в виде отношения

$$\epsilon_a = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\bar{x} + \bar{y}} \quad (3.23)$$

2. Допустим, что величина a есть произведение величин x и y , то есть $a = xy$. Следовательно, в этом случае $\bar{a} = \bar{x}\bar{y}$; $\frac{\partial a}{\partial x} = y$; $\frac{\partial a}{\partial y} = x$

Абсолютная погрешность при этом равна

$$\Delta a = \sqrt{\bar{y}^2 (\Delta x)^2 + \bar{x}^2 (\Delta y)^2} \quad (3.24)$$

Относительная погрешность ϵ_a имеет вид

$$\epsilon_a = \frac{\sqrt{\bar{y}^2 (\Delta x)^2 + \bar{x}^2 (\Delta y)^2}}{\bar{x}\bar{y}} \quad (3.25)$$

Или после преобразования

$$\epsilon_a = \left(\frac{\Delta x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\bar{y}}\right)^2 = \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2}. \quad (3.26)$$

3. Рассмотрим случай, когда величина a равна отношению величин x и y , то есть $a = x/y$. Для этой функциональной зависимости определим частные производные

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \quad (3.27)$$

При этом абсолютная погрешность будет равна

$$\Delta a = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{x}\Delta y}{\bar{y}^2}\right)^2} \quad (3.28)$$

А относительная погрешность определится из выражения

$$\epsilon_a = \sqrt{\frac{\bar{y}^2}{\bar{x}^2} \left(\left(\frac{\Delta x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{x}\Delta y}{\bar{y}^2}\right)^2 \right)} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{x}\Delta y}{\bar{y}^2}\right)^2} = \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2} \quad (3.29)$$

Существуют и более сложные функциональные зависимости вида $a = f(x, y, z, \dots)$. Аналитические выражения для них даются в специальной литературе, посвященной обработке результатов измерений, например, [10].

Из приведенных аналитических зависимостей можно сделать вывод о том, что если функциональная зависимость (3.16) представляет собой сумму или разность величин, то легче в начале вычислить абсолютную погрешность Δa , а затем относительную погрешность ϵ_a . Если же в функции (3.16) в правой части содержится произведение или отношение аргументов, то проще в начале определить относительную погрешность аргумента, по ней вычислить относительную погрешность ϵ_a величины a , и затем - абсолютную погрешность Δa , используя выражение

$$\Delta a = \epsilon_a \bar{a} \quad (3.30)$$

Алгоритм операций по оценке точности при выполнении косвенных измерений выглядит следующим образом.

1. Для каждой серии измерений величин, используемых при определении рассматриваемого параметра, проводится расчет погрешности, как

это было описано ранее (см. подраздел 3.3). При этом для всех измеряемых величин задают одно и то же значение доверительной вероятности α .

2. Находят выражение для абсолютной и относительной погрешностей искомой величины в соответствии с конкретным видом функциональной зависимости от измеряемых параметров. Если табличное значение такой зависимости в литературе отсутствует, то функция вначале логарифмируется, затем берется дифференциал, а затем уже выводится выражение для погрешности косвенных измерений для данной функции.

3. Оцениваются границы доверительного интервала для результатов косвенных измерений. При этом следует учитывать, что до настоящего времени нет универсального способа оценки границ доверительного интервала при заданной надежности для результата косвенных измерений. Рекомендуется пользоваться достаточно простым рецептом [10]. Если количество измерений каждой из величин меньше 20, то погрешности Δx и Δy определяются с помощью коэффициента Стьюдента для одного и того же значения надежности α .

4. Окончательный результат записывается в виде $a = \bar{a} + \Delta a$.

5. Определяется относительная погрешность результатов серии косвенных измерений.

Пример 3.2. Оценить погрешность определения коэффициента полезного действия асинхронного короткозамкнутого электродвигателя, работающего при постоянной нагрузке, по данным замеров мощности, потребляемой из сети ($P_{вх}$) и мощности, развиваемой электродвигателем ($P_{вых}$). Результаты замеров представлены в таблице ниже.

$P_{вх}$, кВт	5,08	5,14	5,00	4,87	5,18	4,79	4,93
$P_{вых}$, кВт	4,63	4,42	4,48	4,56	4,52	4,50	4,59

Решение. 1. Установим аналитическую зависимость для расчета коэффициента полезного действия асинхронного короткозамкнутого

электродвигателя. Из курса электрических машин известно, что КПД электродвигателя определяется по формуле $\eta = \frac{P_{\text{ВЫХ}}}{P_{\text{ВХ}}}$. Обозначим измеряемые величины через x и y . Пусть мощность, потребляемая из сети, будет y , а мощность, развиваемая электродвигателем, x , тогда КПД будет равен отношению x/y .

2. Выполним обработку полученных экспериментальных данных величины x .

Среднее арифметическое значение мощности на валу электродвигателя

$$\bar{x} = \frac{4,63 + 4,42 + 4,48 + 4,56 + 4,52 + 4,50 + 4,59}{7} = 4,53 \text{ кВт}$$

Погрешности отдельных измерений $\Delta x = \bar{x} - x_i$: $\Delta x_1 = -0,1$; $\Delta x_2 = 0,11$; $\Delta x_3 = 0,05$; $\Delta x_4 = -0,03$; $\Delta x_5 = 0,01$; $\Delta x_6 = 0,03$; $\Delta x_7 = -0,06$.

Квадраты погрешностей отдельных измерений
 $(\Delta x_1)^2 = 1 \cdot 10^{-2}$; $(\Delta x_2)^2 = 1,2 \cdot 10^{-2}$; $(\Delta x_3)^2 = 0,3 \cdot 10^{-2}$;
 $(\Delta x_4)^2 = 0,1 \cdot 10^{-2}$; $(\Delta x_5)^2 = 0,1 \cdot 10^{-2}$; $(\Delta x_6)^2 = 0,1 \cdot 10^{-2}$;
 $(\Delta x_7)^2 = 0,4 \cdot 10^{-2}$.

Средняя квадратическая погрешность

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^7 (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{3,2 \cdot 10^2}{42}} = 0,03 \text{ кВт.}$$

Задаемся значением надежности $\alpha=0,95$. Для $\alpha=0,95$ и $n=7$ коэффициент Стьюдента $t_{\alpha}=2,45$ (Приложение Б).

Определим границы доверительного интервала

$$\Delta x = t_{\alpha} S_{\bar{x}} = 2,45 \cdot 0,03 = 0,07 \text{ кВт.}$$

Относительная погрешность измерения выходной мощности

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{0,07}{4,53} \cdot 100\% = 1,54\%.$$

3. Проведем обработку результатов измерений потребляемой из сети мощности.

Среднее арифметическое значение мощности потребляемой электродвигателем из сети составляет

$$\bar{y} = \frac{5,08 + 5,14 + 5,00 + 4,87 + 5,18 + 4,79 + 4,93}{7} = 5,00.$$

Погрешность отдельных измерений

$$\Delta y = \bar{y} - y_i: \Delta y_1 = 0,08; \Delta y_2 = -0,14; \Delta y_3 = 0; \Delta y_4 = 0,13; \Delta y_5 = -0,18; \Delta y_6 = 0,21; \Delta y_7 = 0,07.$$

Квадраты погрешностей отдельных измерений

$$(\Delta y_1)^2 = 6,4 \cdot 10^{-2}; (\Delta y_2)^2 = 2,0 \cdot 10^{-2}; (\Delta y_3)^2 = 0; (\Delta y_4)^2 = 1,7 \cdot 10^{-2}; (\Delta y_5)^2 = 3,2 \cdot 10^{-2}; (\Delta y_6)^2 = 4,4 \cdot 10^{-2}; (\Delta y_7)^2 = 0,5 \cdot 10^{-2}.$$

Средняя квадратическая погрешность

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^7 (\Delta y_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{18,2 \cdot 10^{-2}}{42}} = 0,07.$$

Задаемся значением надежности $\alpha = 0,95$. Для $\alpha = 0,95$ и $f=n-1=6$ коэффициент Стьюдента $t_\alpha = 2,45$

Границы доверительного интервала

$$\Delta y = t_\alpha S_{\bar{y}} = 2,45 \cdot 0,07 = 0,17 \text{ кВт.}$$

Относительная погрешность измерения мощности потребляемой из сети

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{\bar{y}} \cdot 100\% = \frac{0,17}{5} \cdot 100\% = 3,40\%.$$

4. Определим относительную погрешность косвенных измерений коэффициента полезного действия.

$$\varepsilon_\eta = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2} = \sqrt{3,40^2 + 1,54^2} = 3,73\%$$

5. Рассчитаем абсолютную погрешность измерения коэффициента полезного действия

$$\Delta \eta = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\bar{y}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{x} \Delta y}{\bar{y}^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,07}{5,00}\right)^2 + \left(\frac{4,53 \cdot 0,16}{5,00^2}\right)^2} = 0,03$$

6. Таким образом, коэффициент полезного действия по результатам измерений находится в диапазоне

$$\eta = \frac{4,53}{5,00} = 0,91 \pm 0,03 \text{ с доверительной вероятностью } a = 0,95.$$

3.5 Определение параметров эмпирических зависимостей методов наименьших квадратов

В предыдущем подразделе рассмотрен вопрос оценки погрешности измерений физической величины, если она в процессе опыта остается неизменной. Однако бывают случаи, когда оцениваемая величина в ходе эксперимента изменяется в зависимости от непостоянства другой величины. В этом случае две физические величины связаны между собой функциональной зависимостью.

Предположим, что в результате эксперимента мы получили ряд значений величины y : y_1, y_2, \dots, y_n , которые являются функцией другой величины x : x_1, x_2, \dots, x_n . Зависимость между x и y может быть представлена графически в виде точек.

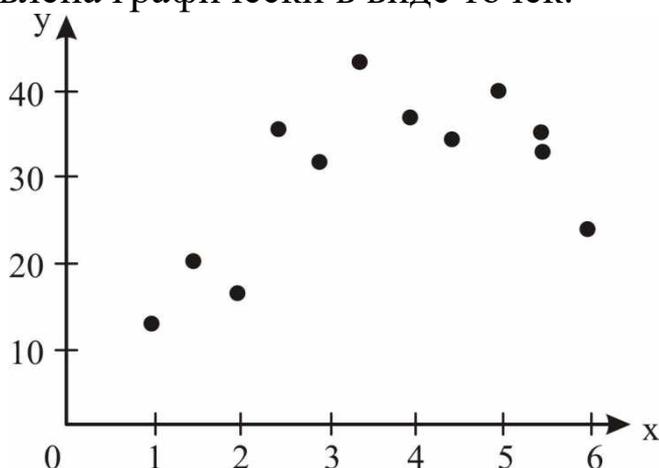


Рисунок 3.2 — Положения экспериментальных значений

Задача заключается в том, чтобы по данным эксперимента построить кривую, которая проходила бы как можно ближе к истинной функциональной зависимости $y = f(x)$. При этом по отношению к искомой кривой экспериментальные точки могут быть смещены, как в сторону меньших, так и больших значений.

Согласно теории вероятностей наилучшим приближением будет

такая прямая или кривая линия, для которой сумма квадратов расстояний по вертикали от точек до кривой будет минимальной. Этот метод называется методом наименьших квадратов.

Математический процесс поиска наилучшего согласия между экспериментальными данными и теоретической кривой называется аппроксимацией. Другими словами, при аппроксимации нам необходимо заменить экспериментальные точки кривой, имеющей наибольшее приближение к экспериментальным данным. Такая функция называется аппроксимирующей.

Метод аппроксимации заключается в том, что в качестве значений

искомых параметров a, b, c, \dots выбираются величины минимизирующие сумму квадратов разностей измеренных в процессе опыта величин y и соответствующих вычисленных значений $f(x_i, a, b, c, \dots)$

$$q = \sum_{i=1}^n [f(x_i, a, b, c, \dots) - y_i]^2 \quad (3.31)$$

Величина q представляет собой определенную меру отклонения экспериментальных результатов от получаемых теоретически. В дальнейшем задача заключается в нахождении численных значений параметров a, b, c, \dots , при которых функция $q(a, b, c, \dots)$ достигает своего минимума.

Из математического анализа известно, что необходимым условием экстремума функции в определенной точке является равенство нулю в этой точке первых частных производных по всем аргументам.

Приравнивая полученные выражения частных производных нулю:

$\partial q / \partial a = 0, \partial q / \partial b = 0, \partial q / \partial c = 0, \dots$, получим систему уравнений для неизвестных значений параметров a, b, c , и т. д.

В результате решения системы уравнений можно получить численные значения параметров, которые обозначим неизвестными a^*, b^*, c^* , и т. д.

Подстановка этих чисел в функциональную зависимость между y и x дает нам определенный вид аппроксимирующей функции

$$y^* = f(x, a^*, b^*, c^*, \dots) \quad (3.32)$$

С учетом того, что неизвестные числа a, b, c, \dots заменены на известные a^*, b^*, c^*, \dots , можно для любого значения аргумента x вычислить значение функции y по формуле (3.32). Строго говоря, аппроксимация функции (3.32) является некоторым приближением

теоретической кривой $y = f(a, b, c, \dots)$.

Линейная аппроксимация. Метод наименьших квадратов в большинстве случаев применяется, если исследуемая функция является линейной или ее можно свести к линейной с помощью элементарных преобразований.

Широкое применение линейной аппроксимации обусловлено возможностью разложения любой гладкой функции в ряд Тейлора. При этом такое разложение имеет хорошую точность в некотором интервале значений аргумента.

Итак, мы полагаем, что между величинами x и y существует линейная зависимость (хотя бы на определенном интервале значений x). Тогда функцию $y = f(x)$ можно записать в следующем виде

$$y = \alpha + \beta x, \quad (3.33)$$

где α и β - некоторые постоянные коэффициенты.

Коэффициенты α и β будем определять, пользуясь экспериментальными данными с применением метода наименьших квадратов.

Для начала в выражении (3.33) заменим неизвестные постоянные α и β на переменные a и b . Сумма квадратов для линейной функции (3.33) приобретет вид

$$q = \sum_{i=1}^n (a + bx_i + y_i)^2 \quad (3.34)$$

Рассматривая функциональную зависимость (3.34) мы видим, что величина q является функцией двух аргументов a и b , так как значения x_i и y_i нами получены из опыта. Следовательно, необходимо варьировать переменными a и b до тех пор, пока величина q , не достигнет минимума. После этого для постоянных коэффициентов α и β линейной зависимости (3.33) можно взять найденные значения переменных a и b , которые минимизируют выражение (2.34) при заданных значениях x_i и y_i .

Отыскание минимума функции двух переменных $q = f(a, b)$ представляет собой типичную задачу математического анализа. В точке экстремума первые частные производные q , взятые по a и b обращаются в нуль

$$\frac{\partial q}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial b} = 0. \quad (3.35)$$

Это условие дает нам систему двух уравнений для определения двух неизвестных a и b .

Дифференцирование правой части уравнения (3.34) и алгебраические преобразования приводят систему уравнений (3.35) к стандартной форме

$$a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + a \sum_{i=1}^n x_i y_i; \quad (3.36)$$

$$an + \sum_{i=1}^n x_i + a \sum_{i=1}^n y_i$$

Фактически мы получаем систему двух линейных алгебраических уравнений для двух неизвестных величин a и b .

Решение такой системы уравнений можно записать в виде

$$a = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n x_i y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (3.37)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (3.38)$$

Как следует из выражения (3.34) данная квадратичная зависимость всегда будет положительной.

Частным случаем линейной зависимости является пропорциональная зависимость

$$y = \beta_0 x \quad (3.39)$$

Применяя метод наименьших квадратов, заменим β_0 на b_0 , получим уравнение

$$q = \sum_{i=1}^n (b_0 x_i - y_i) \quad (3.40)$$

Производную $q(b_0)$ по параметру b_0 приравняем нулю, получим уравнение

$$2 \sum_{i=1}^n (b_0 x_i - y_i) x_i = 0 \quad (3.41)$$

Из полученного уравнения выразим величину b_0 через результаты эксперимента

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (3.42)$$

№	t_i , °C	r_i , Ом	t_i^2	$t_i r_i$	$r(t_i)$	Δr_i
1	20,00	85,90	400,00	1718,00	86,04	- 0,14
2	25,00	87,08	625,00	2177,00	87,84	- 0,76
3	30,00	90,62	900,00	2718,60	89,64	0,98
4	35,00	91,23	1225,00	3193,05	91,44	- 0,21
5	40,00	93,16	1600,00	3726,40	93,24	- 0,08
6	45,00	95,06	2025,00	4277,70	95,04	- 0,02
7	50,00	96,41	2500,00	4820,50	96,84	- 0,43
Сумма	245,00	639,46	9275,00	22631,25	640,08	

Решение. 1. Из курса электротехники известно, что зависимость сопротивления неизолированного провода от температуры можно представить в следующем виде $r = r_0 + \alpha t$.

2. Заменяем параметры r_0 и a на a и b соответственно, получим уравнение $r = a + bt$.

3. По уравнению (3.37) определим значение параметра a

$$a = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n x_i y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} =$$

$$= \frac{9275,00 \cdot 639,46 - 245,00 \cdot 22631,25}{7 \cdot 9275,00 - (245,00)^2} = 78,84 \text{ Ом}$$

4. По уравнению (3.38) рассчитаем значение коэффициента b

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} =$$

$$= \frac{7 \cdot 22631,25 - 245,00 \cdot 639,46}{7 \cdot 9275,00 - 245,00^2} = 0,36 \frac{\text{Ом}}{^\circ\text{C}}$$

5. Функциональную зависимость $r = r_0 + \alpha t$ запишем в следующем виде $r = 78,84 + 0,36t$, Ом.

6. Для сравнения полученных в результате аппроксимации данных с экспериментальными данными в 6 и 7 столбцах таблицы помещены полученные расчетом значения.

7. Построим график аппроксимирующей кривой и экспериментально полученные точки (рисунок 3.3).

Нелинейная аппроксимация. Нелинейную аппроксимацию можно применить для квадратичной зависимости типа $y = +bx + cx^2$ [10], а также некоторых случаев нелинейных зависимостей, например, для уравнения типа $y = \alpha e^{-\gamma t}$, довольно часто используемого в электротехнике.

Рассмотрим этот вопрос применительно к последней зависимости более подробно. В этом случае целесообразно искать не минимум суммы квадратов функции $\sum_{i=1}^n (y_i - \alpha e^{-\gamma t})^2$, а минимум суммы квадратов отклонений логарифмов этих функций $\sum_{i=1}^n [\ln y_i - \ln(\alpha e^{-\gamma t})]^2$

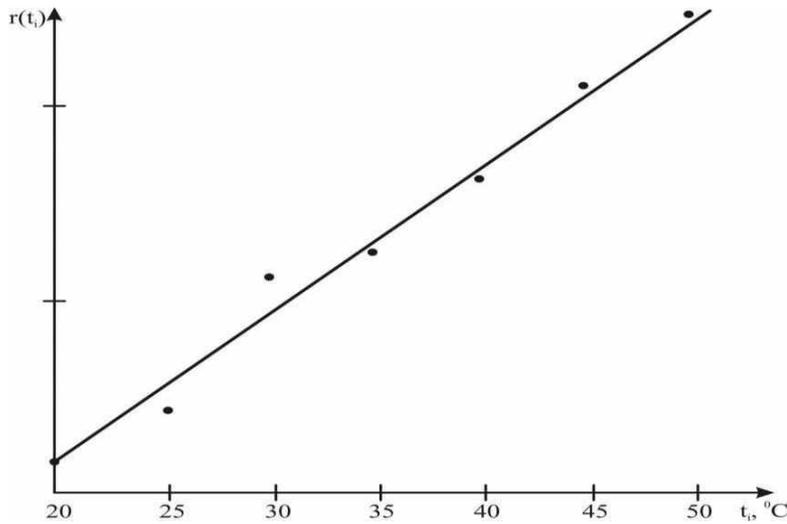


Рисунок 3.3 — Эмпирическая зависимость электрического сопротивления неизолированного провода от температуры (точки соответствуют результатам измерений)

В результате мы получим систему уравнений

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n (\ln y_i - \ln \alpha + e^{-\gamma \tau_i}) = 0; \quad (3.43)$$

$$\sum_{i=1}^n (\ln y_i - \ln \alpha + \gamma \tau_i) \tau_i = 0.$$

После преобразования система уравнений будет выглядеть следующим образом

$$-\gamma \sum_{i=1}^n \tau_i - \ln \alpha = \sum_{i=1}^n \ln y_i \quad (3.44)$$

$$-\gamma \sum_{i=1}^n \tau_i^2 + \sum_{i=1}^n \tau_i \ln \alpha = \sum_{i=1}^n \tau_i \ln y_i$$

Решение системы алгебраических уравнений позволяет определить параметры γ и $\ln \alpha$

$$\gamma = \frac{(\sum_{i=1}^n \tau_i)(\sum_{i=1}^n \ln y_i) - n \sum_{i=1}^n \tau_i \ln y_i}{n \sum_{i=1}^n \tau_i^2 - (\sum_{i=1}^n \tau_i)^2} \quad (3.45)$$

$$\ln \alpha = \frac{(\sum_{i=1}^n \tau_i^2)(\sum_{i=1}^n \ln y_i) - (\sum_{i=1}^n \tau_i)(\sum_{i=1}^n \tau_i \ln y_i)}{n \sum_{i=1}^n \tau_i^2 - (\sum_{i=1}^n \tau_i)^2} \quad (3.46)$$

Пример 3.4. Процесс изменения амплитуды тока короткого замыкания в электрической сети с течением времени τ при некоторых допущениях можно описать убывающей экспоненциальной функцией вида $\varphi = \varphi_0 e^{-\delta\tau}$, где φ - амплитуда тока короткого замыкания; φ_0 - амплитуда тока в начальный момент времени; δ - коэффициент затухания; τ - время.

Результаты экспериментального исследования изменения амплитуды тока короткого замыкания представлены в столбцах 2 и 3 таблицы.

i	τ_i , мс	φ_i , А	τ_i^2	$\ln \varphi_i$	$\tau_i \ln \varphi_i$
1	4,00	55,00	16,00	4,00	16,00
2	11,00	50,00	121,00	3,91	43,01
3	20,00	45,00	400,00	3,81	76,20
4	36,00	40,00	1296,00	3,69	132,84
5	49,00	35,00	2401,00	3,56	174,44
6	66,00	30,00	4356,00	3,40	224,40
7	83,00	25,00	6889,00	3,22	267,26
8	111,00	20,00	12 321,00	3,00	333,00
9	148,00	15,00	21 904,00	2,71	401,08
10	199,00	10,00	39 601,00	2,30	457,70
11	280,00	5,00	78 400,00	1,61	2 309,50
Сумма	1007,00		167 705,00	35,21	2 576,73

Выполнить нелинейную аппроксимацию экспериментальной кривой

Решение: 1. Заменяем показатели φ_0 и δ на α и γ . В результате получим уравнение $\varphi = \alpha e^{-\gamma\tau}$.

2. Выполним расчет промежуточных значений для проведения последующих расчетов по формулам (3.45), (3.46). Результаты занесем в таблицу.

3. Определим значение γ по формуле (3.45).

$$\gamma = \frac{1007,00 \cdot 35,25 - 11 \cdot 2576,73}{11 \cdot 167705,00 - 1007,00^2} = 8,56 \cdot 10^{-3}.$$

4. Рассчитаем значение параметра $\ln \alpha$ по выражению (3.46).

$$\ln \frac{167705,00 \cdot 35,21 - 1007,00 \cdot 2576,73}{11 \cdot 167705,00 - 1007,00^2} = 3,98.$$

5. По таблице натуральных логарифмов определяем значение $\alpha = 54 \text{ А}$.

6. Таким образом, уравнение, описывающее процесс изменения амплитуды тока короткого замыкания в электрической сети, будет иметь вид

$$\varphi = 54e^{-8,56 \cdot 10^{-3}t}$$

3.6 Корреляционный анализ экспериментальных данных

Многие физические величины связаны между собой определенной функциональной зависимостью. Например, закон Ома выражает линейную зависимость тока на участке цепи от падения напряжения на этом участке. Однако, в ряде случаев вид зависимости между физическими величинами не известен, величины могут быть независимыми или существуют сомнения в наличии такой связи.

Статистика разработала значительное количество методов изучения связей между исследуемыми величинами.

Исследование причинно-следственной связи между двумя величинами x и y проводится путем измерения значения величины y при различных значениях величины x . При этом x называется фактором, а y - результативным признаком.

По полученным результатам делается вывод о связи или независимости физических величин x и y . При этом нужно учитывать, что измерения вносят погрешность.

Поскольку при изучении физических зависимостей во многих случаях мы имеем дело со случайными величинами, то в этой ситуации говорят о стохастической зависимости. Частным случаем стохастической зависимости является корреляционная связь, при которой изменение среднего значения результативного признака обусловлено изменением факторных признаков.

На практике зачастую бывает трудно по результатам экспериментальных исследований на глаз определить строгую функциональную зависимость из-за наличия значительных погрешностей. Поэтому необходимы математические методы анализа взаимосвязи переменных x и y .

Связь между величинами x и y можно классифицировать как

прямую и обратную. При прямой связи с увеличением или уменьшением x происходит увеличение или уменьшение значения результативного признака.

По аналитическому выражению связи могут быть линейными и нелинейными. Если статистическая связь между величинами x и y может быть приближенно выражена уравнением прямой линии, то такая связь является линейной. Если же она выражается уравнением кривой линии (параболы, гиперболы, экспоненты, степенной функции), то говорят о нелинейной или криволинейной связи.

Взаимосвязь признаков x и y изображается графически с помощью поля корреляции.

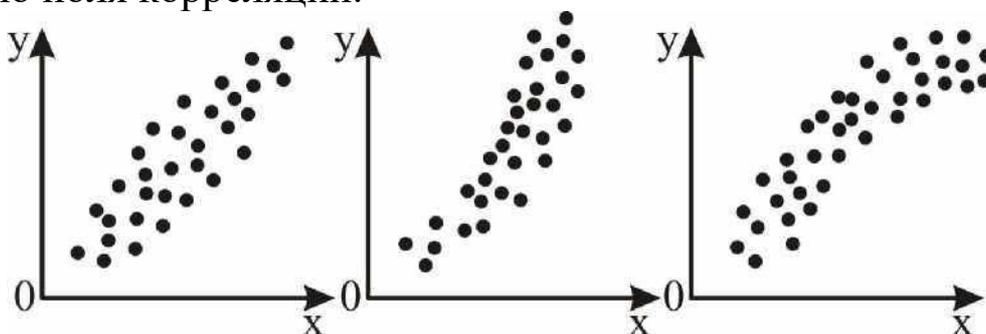


Рисунок 3.4 — Прямая (положительная) регрессия взаимосвязанных признаков x и y

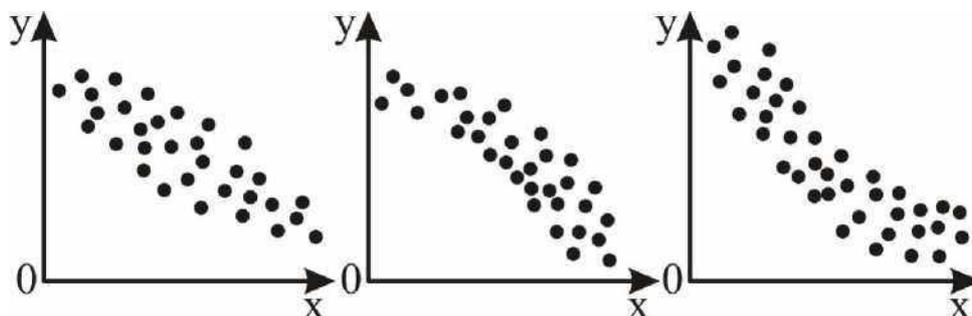


Рисунок 3.5 — Обратная (отрицательная) регрессия взаимосвязанных признаков x и y

В системе координат по оси абсцисс откладывается значение факторного признака, а по оси ординат - результативного признака. Чем сильнее будет связь между признаками, тем теснее будут группироваться точки вокруг определенной линии, выражающей форму связи.

В статистике различают следующие варианты зависимости исследуемых величин:

- парная корреляция - связь между двумя признаками (результативным и факторным или двумя факторными);
- частная корреляция - зависимость между результативным и одним из факторных признаков при постоянстве значений других факторных признаков;
- множественная корреляция - зависимость результативного

признака от двух и более факторных признаков, используемых при проведении исследования.

Основной предпосылкой применения корреляционного анализа является необходимость подчинения совокупности значений всех факторных признаков (x_1, x_2, x_n) и результативного y признака k -мерному нормальному закону распределения или близость к нему. Если объем исследуемой совокупности достаточно большой ($n > 50$), то нормальное распределение может быть подтверждено путем использования критерия Пирсона, Колмогорова и др. Если $n < 50$, то закон распределения исходных данных определяется на базе построения и визуального анализа поля корреляции. При этом, если в расположении точек наблюдается линейная тенденция, то можно предположить, что совокупность исходных данных (y, x_1, x_2, \dots, x_n) подчиняется нормальному распределению.

Корреляционный анализ имеет своей целью количественное определение тесноты связи между признаками.

Простейшей, но достаточно информативной характеристикой тесноты связи двух величин x и y является коэффициент корреляции. В теории вероятностей этот показатель определяется с помощью других вероятностных характеристик.

Линейный коэффициент корреляции был впервые введен в 40-х годах XIX столетия Пирсоном, Эджвортом и Велдоном. На практике применяются различные модификации формул для расчета коэффициента корреляции.

Наилучшим приближенным значением коэффициента корреляции, который можно вычислить с помощью результатов измерений, является величина r_{xy} , определяемая по формуле

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (3.47)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$; $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$.

Таким образом. Численное значение коэффициента корреляции характеризует близость к линейной зависимости между исследуемыми величинами x и y . Целесообразность применения коэффициента корреляции обусловлена в том случае, если близость к линейной зависимости обоснована теоретически и связана с тем, что в первом приближении многие сложные зависимости полагаются линейными.

Линейный коэффициент корреляции имеет большое значение при исследовании процессов и явлений, распределение которых близко к нормальному.

Коэффициент корреляции имеет ряд важных свойств:

1. Абсолютное значение коэффициента корреляции не превышает 1 ($|r_{xy}| \leq 1$) Линейный коэффициент корреляции изменяется в пределах от (-1) до (+1).

2. Легко доказывается, что равенство $r_{xy} = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы величины x и y были независимы.

3. Если $r_{xy} = 1$, то это означает, что все точки (x и y) находятся на прямой и зависимость между x и y является функциональной ($y = kx + b$, k и b - постоянные величины).

4. Коэффициент корреляции однозначно определяет характер зависимости $y = f(x)$. Если $r_{xy} > 0$, то величины x и y одновременно возрастают или убывают (с точностью до случайных погрешностей). Если $r_{xy} < 0$, то с ростом x величина y убывает, а с уменьшением x - величина y растет.

Значимость линейного коэффициента корреляции проверяется на основе t -критерия Стьюдента. При этом выдвигается и проверяется гипотеза H_0 о равенстве коэффициента корреляции нулю ($r_{xy} = 0$). При проверке этой гипотезы используется t -статистика

$$t_p = \sqrt{\frac{r_{xy}^2}{1-r_{xy}^2} (n-2)} = \frac{|r_{xy}|}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} \sqrt{n-2}. \quad (3.48)$$

При выполнении H_0 t -статистика имеет распределение Стьюдента с входными параметрами (α , $f = n - 2$). Если расчетное значение t_p больше табличного значения t_a , то гипотеза H_0 отвергается, что свидетельствует о значимости линейного коэффициента корреляции, а, следовательно, о статистической существенности зависимости между x и y .

Рассматриваемый критерий используется при числе наблюдений $n < 50$. При числе наблюдений $n > 100$ можно применить другую формулу t -статистики

$$t_p = \frac{|r_{xy}|}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} \sqrt{n}$$

Необходимо отметить также, что если по предварительным теоретическим исследованиям связь между величинами в принципе нелинейна, то использование коэффициента корреляции в представленном виде является не корректным. В таких случаях анализ нелинейной связи следует проводить с помощью так называемых корреляционных отношений. Метод их применения дается в специальной литературе по статистике.

Пример 3.5. На основании экспериментальных данных о длительности (τ) и амплитуде (u) импульсных напряжений в электрической сети, представленных в таблице, оценить тесноту связи между этими параметрами.

N п/п	τ_i , мкс	u_i , кВ	$\tau_i - \bar{\tau}$	$u_i - \bar{u}$	$(\tau_i - \bar{\tau})^2$	$(u_i - \bar{u})^2$	$(\tau_i - \bar{\tau})(u_i - \bar{u})$
1	12	0,25	-32,7	-2,11	1069,29	4,45	69,00
2	18	0,75	-20,7	-1,61	712,89	2,59	42,99
3	22	1,30	-22,7	-1,06	515,29	1,12	24,06
4	25	1,70	-19,7	-0,66	388,09	0,44	13,00
5	30	2,20	-14,7	-0,16	216,09	0,026	2,35
6	41	2,70	-3,7	0,34	13,69	0,12	1,26
7	49	3,00	4,3	0,64	18,49	0,41	2,75
8	60	3,50	15,3	1,14	234,09	1,30	17,44
9	80	3,70	35,3	1,34	1 246,09	1,80	47,30
10	110	4,50	65,3	2,14	4 264,09	4,58	139,74
Среднее	44,7	2,36			8 678,1	16,84	359,89

Р е ш е н и е. 1. Выполним расчет промежуточных величин, результат запишем в таблицу (столбцы 4 - 8).

2. По формуле (3.47) определим значение коэффициента корреляции

$$r_{\tau u} = \frac{\sum_{i=1}^n (\tau_i - \bar{\tau})(u_i - \bar{u})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\tau_i - \bar{\tau})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}} = \frac{359,89}{\sqrt{8678,1} \cdot \sqrt{16,84}} = 0,94.$$

Результат свидетельствует о сильной прямой зависимости между изучаемыми признаками.

3. Проверим значимость коэффициента корреляции (формула 3.48)

$$t_p = \frac{|r_{xy}|}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} \sqrt{n-2} = \frac{0,94}{\sqrt{1-0,94^2}} \sqrt{10-2} = 8,00.$$

При уровне достоверности $\alpha=0,95$ и числе степеней свободы $f=10-2=8$ по таблице t-критерия Стьюдента (Приложение Б) находим $t_\alpha=2,31$. Так как $t_p=8,00 > t_\alpha=2,31$, то гипотеза H_0 отвергается, что свидетельствует о значимости данного коэффициента корреляции.

4 Планирование экспериментов

4.1 Общие положения

Проведение экспериментальных исследований предполагает наличие определенного плана их выполнения. Обычный («традиционный») метод исследования направлен на отыскание детерминированной (однозначной) зависимости между интересующим нас параметром и влияющими на него факторами. В этом случае влияние факторов изучается отдельно, то есть выбирается и варьируется какой-либо фактор, а все другие факторы фиксируются (для данного опыта) на заранее выбранных условиях. Затем таким же путем изучается влияние второго, третьего и всех других факторов. При большом числе рассматриваемых факторов объем экспериментальной работы сильно возрастает, и в то же время полученные выводы представляют лишь частный случай. При таком подходе не удастся оценить роль взаимодействия факторов и отыскать оптимальное сочетание действующих факторов.

Главный недостаток традиционного метода заключается в том, что при исследованиях не видно направления движения в поиске оптимальных условий протекания процесса, то есть эксперимент оказывается пассивным. Вместе с тем рассматриваемый недостаток не отменяет традиционных методов при исследовании детерминированных величин или постановке простых однофакторных экспериментов, а вот при наличии нескольких воздействующих факторов целесообразно использовать теорию планирования экспериментов. Итак, для повышения эффективности экспериментальных исследований необходимо проводить опыты таким образом, чтобы при их минимальном количестве получить исчерпывающую информацию об объекте исследования. Для этого и используется планирование экспериментов.

Планирование эксперимента - это метод выбора числа и условий его проведения, минимально необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

В процессе планирования эксперимента предусматривается определение объема опытов, которые проводятся по заранее составленной схеме в зависимости от цели и задач исследований. Когда в эксперименте участвуют несколько факторов одновременно, то такой эксперимент называется факторным.

Основные преимущества планирования многофакторного эксперимента сводятся к следующему:

- значительно сокращается число опытов по сравнению с традиционным методом;
- уменьшается время на проведение опытов и затраты материальнотехнических ресурсов;
- увеличивается емкость эксперимента за счет рассмотрения взаимодействия факторов между собой;
- производится оценка ошибок опытов, что дает возможность судить о действии факторов с определенным уровнем значимости.

Входные переменные (будем называть их факторами) определяют состояние объекта. Основное требование к факторам - управляемость. Под управляемостью понимается возможность установки нужного значения фактора (уровня) и поддержание его в течение всего опыта. В этом состоит особенность активного эксперимента. Факторы могут быть количественными и качественными. В качестве фактора можно рассматривать температуру, влажность, давление и др. Выходная переменная - это реакция (отклик) на воздействие входных факторов. Отклик зависит от специфики исследования. Это могут быть технологические, экономические, технические характеристики. Выходной параметр должен быть эффективным с точки зрения достижения цели, универсальным, количественным (выражаться числом), иметь ясный физический смысл, быть простым и легко вычисляемым.

Итак, планирование эксперимента предполагает, что эксперимент является активным и объект исследования представлен в виде модели «черный ящик». При этом используется только группа входных контролируемых параметров $X = x_1, x_2, x_n$, называемых факторами, и один параметр y из группы выходных параметров $Y = y_1, y_2, \dots, y_r$. Совокупность факторов образует факторное пространство, а зависимая переменная $y_r = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется функцией отклика. Геометрическое представление функции отклика в n -мерном факторном пространстве образует так называемую поверхность отклика.

Наиболее результативно методы планирования экспериментов применяются в настоящее время при решении задач по оптимизации (экстремальных задач), то есть по поиску экстремума некоторой функции. В такой ситуации задача планирования эксперимента

формулируется следующим образом: предполагается, что параметр оптимизации u связан с факторами каким-либо математическим выражением, требуется так спланировать эксперимент, чтобы при минимальном количестве факторов, варьируя их значениями по определенным правилам, найти область оптимума.

Практика выработала следующие рекомендации при использовании такого метода: число факторных признаков (n) должно быть в пять-шесть раз меньше объема изучаемой совокупности параметров, воздействующих

на исследуемый объект. Установлено, что при проведении полного факторного эксперимента рассматривать число факторов более четырех нецелесообразно, так количество необходимых опытов растет по показательной функции 2^i (i - число факторов) и для $i=5$ необходимо проводить 32 варианта определений. При большом числе исследуемых факторов целесообразно использовать дробный факторный эксперимент.

Методы планирования эксперимента существенно отличаются от статистической обработки результатов наблюдений, где количественному анализу отводится пассивная роль обработки данных, полученных в процессе испытаний. В противоположность статистической обработке, математический аппарат планирования экспериментов играет активную роль при постановке и проведении эксперимента и последующего анализа результатов. Вместе с тем такая постановка не умоляет роли самого экспериментатора, ибо неправильно сформулированная и спланированная задача может привести к неполноценному решению.

Планирование эксперимента используют для изучения и математического описания процессов и явлений путем построения математических моделей в форме так называемых уравнений регрессии - соотношений, связывающих с помощью ряда параметров значения факторов и результаты эксперимента.

Регрессионный метод заключается в определении аналитического выражения связи, в котором изменение одной величины (результативного признака) обусловлено влиянием одной или нескольких независимых величин (факторов), а множество всех прочих факторов, также оказывающих влияние на выходную характеристику, принимаются постоянными. Другими словами регрессионный анализ определяет аналитическую зависимость между контролируемыми факторами x_1, x_2, x_n и выходным параметром y .

Целью регрессионного анализа является оценка функциональной зависимости условного среднего значения результативного признака y от факторных параметров x_1, x_2, \dots, x_n .

Основной предпосылкой регрессионного анализа является то, что только результативный признак y подчиняется нормальному закону распределения, а факторные признаки x_1, x_2, \dots, x_n могут иметь произвольный закон распределения. При этом в регрессионном анализе заранее подразумевается наличие причинно-следственных связей между результативным y и факторными x_1, x_2, \dots, x_n

признаками.

Уравнение регрессии или статистическая модель связи выражается функцией

$$\bar{y} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.1)$$

Эта функция является достаточно адекватной реальному процессу или явлению, если к построению модели предъявляются следующие требования:

- все факторные признаки должны иметь количественное (цифровое) выражение;
- объем исследуемо выборочной совокупности должен быть достаточно большим;
- причинно-следственные связи между факторами и выходной величиной должны описываться линейной или приводимыми к линейной формами зависимости.

Одной из проблем построения уравнения регрессии является его размерность, то есть определение числа факторных признаков, включаемых в модель. Их число должно быть оптимальным. Сокращение размерности за счет исключения второстепенных, несущественных факторов позволяет получить модель, реализуемую быстрее и качественнее. Однако при этом построение модели малой размерности может привести к тому, что она будет недостаточно полно описывать исследуемое явление или процесс.

4.2 Планирование однофакторного эксперимента

Планирование однофакторного эксперимента сводится к получению уравнения парной регрессии.

Парная регрессия характеризует связь между двумя признаками - результативным и факторным. Аналитическая связь между этими признаками может быть описана следующими уравнениями:

$$\text{прямой - } \bar{y} = a_0 + a_1 x \quad (4.2)$$

$$\text{гиперболы - } \bar{y} = a_0 + \frac{a_1}{x} \quad (4.3)$$

$$\text{параболы - } \bar{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (4.4)$$

Определить тип уравнения можно рассмотрев графическую зависимость между величинами x и \bar{y} . Существуют и общие соображения на этот счет. Если результативный и факторный признаки возрастают одинаково, примерно в арифметической прогрессии, то это свидетельствует о линейной связи между ними, а при обратной связи - о гиперболической. Если факторный признак увеличивается в арифметической прогрессии, а результативный признак значительно быстрее, то это является свидетельством параболической или степенной связи.

Оценку параметров уравнения регрессии в приведенных выше выражениях обычно осуществляют методом наименьших квадратов, в основе которого лежит предположение о независимости исследуемой совокупности.

Теоретические предпосылки использования метода наименьших квадратов рассмотрены ранее. Существо метода наименьших квадратов, как известно, заключается в нахождении параметров модели a_0, a_1 , при которых минимизируется сумма квадратов отклонений эмпирических (фактических) значений результативного признака от теоретических, полученных по выбранному уравнению регрессии

$$q = \sum (y - \bar{y}) \rightarrow \min. \quad (4.5)$$

Для прямой зависимости это уравнение будет иметь вид

$$q = \sum [y - (a_0 + a_1 x)]^2 \rightarrow \min \quad (4.6)$$

Рассматривая q как функцию параметров a_0 , и a_1 , после дифференцирования получим

$$\frac{\partial q}{\partial a_0} = \sum 2(a_0 + a_1 x - y) = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial q}{\partial a_1} = \sum 2(a_0 + a_1 x - y)x = 0$$

В результате система нормальных уравнений для нахождения параметров линейной парной регрессии методом наименьших квадратов будет иметь следующий вид

$$na_0 + a_1 \sum x = \sum y \quad (4.8)$$

$$a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 = \sum xy$$

где n - число единиц наблюдения.

В уравнениях регрессии (4.8) параметр a_0 показывает усредненное

влияние на результативный признак неучтенных (не выделенных для исследования) факторов. Параметр a_1 и a_2 в уравнении параболы дают представление о том, на сколько изменяется в среднем значение результативного признака при увеличении факторного признака на единицу собственного измерения.

Определение параметров a_0 и a_1 из системы нормальных уравнений

(4.8) не представляет трудностей и рассмотрено ранее в примере 3.3.

Аналогичным образом решается задача в случае обратной зависимости между x и y , когда с увеличением (уменьшением) x уменьшается (увеличивается) результативный признак y . В этом случае парная регрессия описывается уравнением гиперболы (4.3) и система нормальных уравнений для нахождения параметров гиперболы будет иметь вид

$$na_0 + a_1 \sum \frac{1}{x} = \sum y; \quad (4.9)$$

$$a_0 \sum \frac{1}{x} + a_1 \sum \frac{1}{x^2} = \sum \frac{y}{x}.$$

Решение такой системы алгебраических уравнений также не представляет серьезных трудностей.

Несколько сложнее решается задача, если связь между признаками y и x криволинейная и описывается уравнением параболы второго порядка (4.4). В этом случае задача сводится к определению неизвестных параметров a_0, a_1, a_2 .

Метод наименьших квадратов обладает замечательным свойством, позволяющим сделать число нормальных уравнений равным числу неизвестных коэффициентов.

В результате применения метода наименьших квадратов мы получим уравнение

$$q = \sum_{i=1}^n \sum (y - a_0 + a_1x + a_2x^2) \rightarrow \min. \quad (4.10)$$

Взяв частные производные по этим величинам и, приравняв их нулю, получим

$$\frac{\partial q}{\partial a_0} = \sum 2(y - a_0 + a_1x - a_2x^2) = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial q}{\partial a_1} = \sum 2(y - a_0 + a_1x - a_2x^2)x = 0,$$

$$\frac{\partial q}{\partial a_2} = \sum 2(y - a_0 + a_1x - a_2x^2)x^2 = 0.$$

После преобразования получается система нормальных уравнений следующего вида

$$\begin{aligned} na_0 + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 &= \sum y, \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 &= \sum yx, \\ a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 &= \sum yx^2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Решив систему алгебраических уравнений, можно найти значения неизвестных коэффициентов a_0, a_1, a_2 и получить уравнение регрессии.

4.3 Планирование многофакторных экспериментов

В отличие от достаточно широко распространенного однофакторного эксперимента, когда изучается действие каждого фактора в отдельности, существует метод, позволяющий осуществлять эксперимент при варьировании несколькими факторами сразу. Это способствует повышению эффективности экспериментальных исследований, так как интересующий экспериментатора параметр определяется с меньшей ошибкой, то есть при увеличении числа факторов повышается точность экспериментов.

План многофакторного эксперимента выполняется в несколько этапов:

- выбор уравнения регрессии;

- определение необходимого числа опытов;
- составление плана многофакторного эксперимента;
- расчет коэффициентов регрессии;
- расчет дисперсии воспроизводимости и дисперсии коэффициентов регрессии;
- оценка значимости коэффициентов регрессии;
- проверка адекватности модели.

Выбор уравнения регрессии. Математическая задача планирования эксперимента может быть записана в следующем виде

$$r = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.13)$$

где r - выход процесса, то есть параметр, который изучается;
 x_1, x_2, \dots, x_n - переменные факторы, которыми можно варьировать.

В общем случае мы не располагаем полным знанием механизма изучаемого явления и, следовательно, вид функции r нам не известен. В этом случае пользуются разложением функции в степенной ряд.

Точность, с которой степенной ряд описывает процесс, зависит от порядка (степени) ряда, то есть от того с какими показателями степени представлены последние члены ряда. Если описать какой-либо процесс в узком интервале переменных, то почти всегда можно воспользоваться частью степенного ряда, отбросив члены высших порядков. Только для описания оптимальной области может возникнуть необходимость использования ряда, содержащего члены второго, а иногда и третьего порядка.

Пользуясь результатами эксперимента можно получить лишь оценки модели, представленной уравнением (4.13). В зависимости от числа изучаемых факторов, определяющих условия прохождения процесса, можно записать в общем виде уравнение регрессии без членов высших порядков:

- для двух факторов

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{1,2}x_1x_2; \quad (4.14)$$

- для трех факторов

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{1,2}x_1x_2 + b_{1,3}x_1x_3 + b_{2,3}x_2x_3 + b_{1,2,3}x_1x_2x_3, \quad (4.15)$$

где \hat{y} - выборочная оценка для выходного

параметра; x_1, x_2, \dots , - значения факторов;

b_0 - свободный член, равный выходу процесса при $x = 0$;

b_1, b_2, b_3 - коэффициенты регрессии соответствующих факторов, указывающие на влияние того или иного фактора на изучаемый процесс;

$b_{1,2}, b_{1,3}, b_{2,3}$ - коэффициенты регрессии при произведениях факторов, свидетельствующие о наличии двойного взаимодействия между факторами;

$b_{1,2,3}$ - коэффициент регрессии, указывающий на тройное взаимодействие факторов.

Аналогично записывается уравнение для четырех и более факторов.

Определение необходимого числа опытов. При составлении плана проведения экспериментальных исследований для каждого фактора выбирается определенное число уровней варьирования. Поэтому необходимое число опытов устанавливается числом возможных комбинаций уровней варьирования независимых переменных, а также количеством повторных опытов. В большинстве случаев планирование экспериментов осуществляется по схеме полного факторного эксперимента. Она предусматривает варьирование всех исследуемых факторов на двух уровнях:

- верхнем, имеющему максимальное значение рассматриваемого фактора;
 - нижнем, соответствующему минимальному значению фактора.
- В этом случае необходимое число опытов определяется по формуле

$$m = 2^i \quad (4.16)$$

где i - число рассматриваемых факторов.

Варьирование переменными на двух уровнях позволяет значительно уменьшить объем экспериментальной и счетной работы.

Значения (уровни) факторов удобно задавать в кодированных величинах: верхний уровень фактора (+ 1), нижний (- 1), средний или основной (условный нулевой) уровень 0_{x_i} .

Условный нулевой уровень - это такое значение переменных x_i , в

области которых начинается изучаемый процесс. Обычно нулевой уровень выбирается достаточно близко к центру факторного пространства. При отсутствии каких-либо теоретических или практических соображений этот уровень выбирается произвольно.

Основное преимущество многофакторного эксперимента заключается в том, что в процессе его проведения варьируются одновременно все факторы. Это приводит к тому, что дисперсия при оценке коэффициентов регрессии оказывается в m раз меньше ошибки опыта.

Кроме выбора уровней необходимо установить единицы варьирования, то есть величины, на которые в сторону увеличения или уменьшения мы будем изменять данный фактор от нулевого уровня. Обозначим значение единицы варьирования через μ_i . Указанный параметр нельзя выбирать слишком малым, чтобы не получить результат ниже ошибки измерения. При большом значении μ_i возникает опасность получения уравнения, не содержащего членов второй, третьей и других более высоких степеней. Таким образом, в каждом конкретном опыте единицы варьирования нужно задавать исходя из опыта и интуиции исследователя.

Обычно выбирают $\mu_i = 0,5 \dots 0,3$ от значения области определения фактора.

Основное требование к интервалу варьирования состоит в том, чтобы он не превышал удвоенную квадратичную ошибку опыта. Это требование связано с тем, что интервал между двумя соседними уровнями должен значимо (не случайно) влиять на выходной параметр. Обычно интервал варьирования выбирается на основании априорной информации (или интуитивно), а затем уточняется (если он выбран неудачно) после получения математической модели. Удачно выбранный интервал варьирования факторов гарантирует получение достоверной математической модели. Определенные сведения о нулевых уровнях и интервалах варьирования могут быть получены на этапе предварительного эксперимента.

Уровни $(0_{x_i} - \mu_i)$ и $(0_{x_i} + \mu_i)$ обозначим в кодированном виде соответственно $(- 1)$ и $(+ 1)$. После этого можно приступить к составлению матрицы планирования эксперимента.

Составление плана многофакторного эксперимента. План эксперимента удобно задавать таблицей, называемой матрицей планирования эксперимента, включающей в себя последовательность

проведения опытов, значения факторов и эффектов и их взаимодействий, а также значения исследуемой функции. При этом должны быть исчерпаны все возможные значения комбинаций факторов, варьируемых на верхнем и нижнем уровнях.

Условия эксперимента представляются в виде таблицы - матрицы планирования, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы - значениям факторов. Матрица планирования обычно записывается не в физических, а в кодированных переменных.

Для двухфакторного эксперимента матрица планирования, включающая четыре опыта, имеет вид (таблица 4.1).

Таблица 4.1 - Матрица планирования эксперимента для двух факторов

Номер опыта	Уровень фактора			Расчетные показатели	Выходной параметр
	x_0	x_1	x_2		
1	+ 1	- 1	- 1	+ 1	y_1
2	+ 1	+ 1	- 1	- 1	y_2
3	+ 1	- 1	+ 1	- 1	y_3
4	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	y_4

Во втором столбце таблицы 4.1 даются значения фиктивной переменной $x_0 = 1$, вводимой формально для расчета b_0 , в третьем и четвертом столбцах - значения переменных x_1 и x_2 (эти две переменные являются управляемыми и определяют собственно планирование). В пятом (расчетном столбце) приводится значение произведения x_1 , вводимого в матрицу планирования для вычисления в последующем коэффициентов регрессии $b_1, 2$, а в шестом - значения результатов наблюдения в каждом из четырех опытов. Первая строка матрицы соответствует первому варианту опыта, в котором обе переменные x_1 и x_2 находятся на нижнем уровне, вторая строка - второму варианту опыта, в котором первая переменная находится на верхнем уровне, а вторая - на нижнем уровне и т. д.

Этот план соответствует уравнению регрессии

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{1,2}x_1x_2.$$

Для трехфакторного эксперимента матрицу планирования можно получить из матрицы для двух факторов, повторив ее дважды - один раз при значениях x_3 на нижнем уровне, а второй раз - при значениях x_3 на верхнем уровне. В результате мы получим следующую таблицу (таблица 4.2).

Таблица 4.2 - Матрица планирования трехфакторного эксперимента

Номер опыта	Уровень фактора				Расчетные показатели				Выходной параметр
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	\bar{y}_m
1	+	—	—	—	+	+	+	—	\bar{y}_1
2	+	+	—	—	—	—	+	+	\bar{y}_2
3	+	—	+	—	—	+	—	+	\bar{y}_3
4	+	+	+	—	+	—	—	—	\bar{y}_4
5	+	—	—	+	+	—	—	+	\bar{y}_5
6	+	+	—	+	—	+	—	—	\bar{y}_6
7	+	—	+	+	—	—	+	—	\bar{y}_7
8	+	+	+	+	+	+	+	+	\bar{y}_8

В том случае, если необходимо учесть четыре фактора, матрица планирования эксперимента будет содержать 16 наблюдений. Строится она в такой последовательности. Сначала берется матрица для двух факторов (без их произведений), затем она повторяется дважды при $x_3 = -1$ и $x_3 = +1$. Полученная матрица для трех факторов снова повторяется дважды для $x_4 = -1$ и $x_4 = +1$. Кроме столбцов, содержащих уровни факторов, в матрицу добавляются значения произведений факторов x_1x_2 , x_1x_3 , x_2x_3 , $x_1x_2x_3$, и т. д.

Аналогичный подход может быть использован для составления матрицы планирования эксперимента при наличии пяти и более факторов. Однако на практике при постановке многофакторного эксперимента рассмотрение четырех и более факторов производится крайне редко, так как это не дает большого выигрыша в получении информации от эксперимента, а лишь приводит к повышенным затратам средств и времени на реализацию опытов.

Обычно в многофакторном эксперименте важно оценить эффект влияния и направление действия того или иного фактора, а также возможность взаимодействия между ними. Два-три фактора вполне обеспечивают выполнение такого условия.

Рассматривая планы полного факторного эксперимента для двух и трех факторов, нетрудно установить общую определенную закономерность получения таких планов. В первом столбце матрицы для переменной x_1 знаки меняются в каждой строке, во втором столбце для переменной x_2 - через две строки, а для i - переменной

знаки будут меняться через $2^i - 1$ строки.

Матрица планирования эксперимента показывает, в каких точках факторного пространства необходимо производить измерение отклика, т. е. произвести опыты. Каждый опыт состоит в установке нужных значений факторов и в измерении отклика. Требуемые значения кодированных факторов устанавливаются варьированием или принятием соответствующих значений физических переменных.

После построения матрицы планирования эксперимента приступают непосредственно к эксперименту. Обычно матрицу представляют в виде, удобном для реализации опытов, - все кодированные значения факторов заменяют натуральными. Такую матрицу планирования называют рабочей.

Поскольку на изменение выходного параметра влияют помехи, план чаще всего реализуют несколько раз, получая k параллельных значений переменной состояния. Число k выбирается по результатам предварительного эксперимента или с помощью специально поставленных опытов. Матрица планирования эксперимента с несколькими параллельными опытами представлена в таблице 4.3.

Таблица 4.3 - Матрица планирования двухфакторного эксперимента при наличии нескольких серий опытов .

Номер опыта	Уровень факторов			Расчетный показатель x_1x_2	Выходной параметр			
					y'_m	y''_m	y'''_m	\bar{y}_m

В таблице 4.3 величины y' , y'' , y''' показывают значения выходного параметра в трех параллельных сериях опытов.

Расчет коэффициентов регрессии. Для двухфакторного эксперимента в соответствии с уравнением (4.14) необходимо вычислить коэффициенты регрессии для уравнения, содержащего четыре члена - свободный член b_0 , два линейных эффекта b_1x_1 и b_2x_2 и взаимодействие факторов $b_{1,2}$, x_1x_2 . Что касается трехфакторного плана эксперимента, то здесь уже, согласно выражения (4.15), необходимо вычислить коэффициенты для уравнения, содержащего 8 членов.

Расчет коэффициентов регрессии выполняется по следующим формулам

$$\mathbf{b}_0 = \frac{1}{m} \sum \bar{y}_m \mathbf{x}_0^m, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{b}_i = \frac{1}{m} \sum \bar{y}_m \mathbf{x}_i^m, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{b}_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \bar{y} \mathbf{x}_i^m \mathbf{x}_j^m, \quad (4.19)$$

где $m = 2^i$ - число вариантов в матрице планирования

эксперимента; \bar{y}_m - среднее значение выходного параметра в m - м варианте; \mathbf{x}_i^m - значение данного фактора в m - м варианте;

$\mathbf{x}_i^m \mathbf{x}_j^m$ - значение произведения факторов в m - м варианте.

Таким образом, для нахождения \mathbf{b}_0 необходимо вычислить сумму произведений \bar{y}_m на значение фиктивной переменной и разделить полученный результат на $m=4$ в двухфакторной схеме и $m=8$ в трехфакторной схеме эксперимента. Например, для двухфакторного эксперимента

$$b_0 = \frac{1}{m} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4). \quad (4.20)$$

Иными словами, b_0 не что иное как средняя арифметическая величина выходного параметра, когда факторы находятся на нулевом уровне.

Для нахождения b_1 необходимо вычислить сумму произведений \bar{y}_m на значения $+1$ или -1 фактора в соответствующем столбце матрицы планирования эксперимента и разделить результат на $m = 2^i$. Например, для двухфакторного эксперимента

$$b_0 = \frac{1}{m} [\bar{y}_1(-1) + \bar{y}_2(+1) + \bar{y}_3(-1) + \bar{y}_4(+1)], \quad (4,21)$$

$$b_0 = \frac{1}{m} [\bar{y}_1(-1) + \bar{y}_2(-1) + \bar{y}_3(+1) + \bar{y}_4(+1)]. \quad (4,22)$$

С физической точки зрения коэффициенты b_1 и b_2 показывают насколько изменяется выходной параметр процесса при изменении соответственно x_1 и x_2 от нуля до $\pm 1\mu_i$.

При вычислении коэффициентов регрессии для

взаимодействующих факторов значения $x_i x_j$ берутся в расчетных столбцах матрицы планирования эксперимента. Так, для двухфакторного эксперимента

$$b_{1,2} = \frac{1}{m} [\bar{y}_1(+1) + \bar{y}_2(-1) + \bar{y}_3(-1) + \bar{y}_4(+1)], \quad (4.23)$$

В зависимости от значения коэффициента $b_{1,2}$ судят о степени взаимодействия между факторами.

После нахождения величины коэффициентов регрессии записывается уравнение регрессии, и переходят к статистическому анализу уравнения регрессии. Анализ состоит из 3 этапов: оценки дисперсии воспроизводимости (оценки ошибки опыта), определения значимости коэффициентов уравнения регрессии и проверки адекватности модели.

Расчет дисперсии воспроизводимости и дисперсии коэффициентов

регрессии. Известно, что ошибка опыта $S^2(y)$ оценивается по параллельным опытам. Перед расчетом ошибки опыта необходимо убедиться в том,

что рассеяние в каждой точке факторного пространства не превышает некоторой величины, т. е. проверить однородность построчных дисперсий.

Для этого рассчитываются построчные дисперсии $S^2(y_m^k)$. Расчет проводится по формуле

$$S^2(y_m^k) = \sum (\bar{y}_m - y_m^k)^2 / (k - 1) \quad (4.24)$$

где k - число параллельных опытов.

Понятие однородность нескольких оценок дисперсий означает, что все они являются оценками одной и той же дисперсии $S^2(y_m^k)$, которая называется дисперсией воспроизводимости или дисперсией опытов. В этом случае различие между оценками объясняется их случайным характером.

Проверить однородность дисперсий $S^2(y_m^k)$ можно по критерию Кохрена. Критерий Кохрена для проверки однородности построчных дисперсий применяется, когда число параллельных опытов во всех строках постоянно $k = \text{const}$.

Расчетное значение критерия Кохрена определяется следующим образом

$$G_p = S^2(y_m^k)_{\max} / \sum S^2(y_m^k), \quad (4.25)$$

где $S^2(y_m^k)_{\max}$ - наибольшая построчная дисперсия.

Полученная величина G_p сравнивается со значением G_n . С величиной G_n связаны два параметра: $f_1 = k - 1$ - число степеней свободы суммы стоящей в знаменателе и $f_2 = m$. По значению чисел f_1 и f_2 и уровню значимости γ (обычно $\gamma = 0,05$) из распределения Кохрена находят G_n .

Гипотеза об однородности дисперсий принимается, если выполняется неравенство $G_p < G_n$. При $G_p > G_n$ дисперсии признаются неоднородными и принимаются меры для достижения их однородности.

Если условие $G_p < G_n$ не выполняется, то одним из решений является увеличение числа параллельных опытов, то есть еще один раз или несколько раз необходимо реализовать матрицу планирования эксперимента.

Если увеличение числа параллельных опытов не дает результата, то следует изменить метод контроля выходного параметра, увеличив его точность. Иногда прибегают к масштабированию функции отклика - вводится некоторая математическая функция от y (например, квадратный корень или логарифм).

Выполнив требование однородности построчных дисперсий $S^2(y_m^k)$ можно перейти к определению дисперсии воспроизводимости, как среднего арифметического значения построчных дисперсий

$$S^2(y) = \sum S^2(y_m^k) / m. \quad (4.26)$$

Затем необходимо определить дисперсию среднего значения

$$S^2(\bar{y}) = \sum S^2(y) / k \quad (4.27)$$

И только после этого можно установить дисперсию коэффициентов регрессии по выражению

$$S^2(b_i) = \sum S^2(\bar{y})/m. \quad (4.28)$$

Зная $S^2(y)$, можно определить ошибку коэффициентов регрессии

$$S(b_i)\sqrt{S^2(b_i)} \quad (4.29)$$

В ряде случаев в процессе исследований ставится всего один эксперимент вместо нескольких параллельных опытов. Если $k = 1$, то есть, повторяемости опытов нет, то дисперсия среднего значения совпадает с дисперсией метода измерения, который может быть определен по результатам предварительных исследований. При этом $S^2(b_i)S^2(m)$ и $S^2(b_i)S/\sqrt{m}$

Таким образом, ошибка коэффициентов регрессии в \sqrt{m} раз меньше ошибки используемого метода, что является одним из достоинств многофакторного эксперимента.

Проверка значимости коэффициентов регрессии. Различные факторы могут по-разному влиять на выходной показатель - один больше, другой меньше. Для оценки этого влияния используют проверку значимости каждого коэффициента регрессии. С этой целью составляется неравенство

$$b_i > S(b_i)t_\alpha(f) \quad (4.30)$$

Значения коэффициента Стьюдента приводятся в таблице Приложения Б для заданной достоверности α и числа степеней свободы $f = m(k - 1)$.

Если для какого либо фактора условие (4.30) не выполняется, то соответствующий фактор можно признать не значимым и исключить его из уравнения регрессии. Однако нужно быть осторожным и всегда помнить, что при проведении предварительных экспериментов уже отсеивались незначимые факторы. Нельзя утверждать со 100 % уверенностью, что оказавшийся не значимым фактор не влияет на процесс.

Обычно отсутствие значимости коэффициента регрессии может быть обусловлено следующими причинами:

- соответствующий фактор (или взаимодействие) не имеют функциональной связи с откликом y ;
- дисперсия воспроизводимости $S^2(y)$ слишком велика, т. е. на

фоне помех выделить влияние данного фактора не возможно.

Таким образом, установление не значимости фактора может являться следствием неудачно выбранного интервала варьирования (он был выбран слишком малым). Более правильным в этом случае является решение повторить эксперимент при расширенном значении единицы варьирования с увеличенным числом параллельных опытов. Безусловно, при этом число опытов, а также время эксперимента возрастают. Иногда количество опытов можно уменьшить, если единицу варьирования добавлять только в одном направлении, а другой уровень оставлять неизменным. Если фактор остается не значимым после повторной серии экспериментов и всех необходимых расчетов, то его (или их) отбрасывают и переходят к оценке адекватности полученной математической модели.

Проверка адекватности модели предусматривает проверку принятой гипотезы о линейности системы и включает два этапа - оценку возможности описания выхода процесса уравнением без квадратичных членов и возможности использования уравнения без парных членов.

Первый этап - оценка значимости коэффициентов регрессии при членах высших порядков. Для выполнения рассматриваемой оценки нужно повторить опыт на нулевом уровне несколько раз и по полученным результатам вычислить среднее значение выходного параметра \bar{y}_0 . Разность $|\bar{y}_0 - b_0|$, если она не значима, указывает на возможность использования уравнения без квадратичных членов.

Значение величины $|\bar{y}_0 - b_0|$ определяется по формулам

$$|\bar{y}_0 - b_0| > \sqrt{\tilde{S}^2} \sqrt{\frac{m+n}{vm}} t_\gamma(f), \quad (4.31)$$

$$\tilde{S}^2 = \frac{(m-1)S^2(b_i) + (v-1)S^2(\bar{y}_0)}{m+v-2}, \quad (4.32)$$

$$S^2 = (\bar{y}_0) = \sum(\bar{y}_0 - y_0)^2 / v(v - 1), \quad (4.33)$$

где b_0 - свободный член в уравнении регрессии, определяемый после постановки многофакторного эксперимента;

\tilde{S}^2 - средневзвешенное значение из двух дисперсий;

v - количество серий опытов с переменными x_1, x_2 , находящимися на

нулевом уровне;

$t_\gamma(f)$, - коэффициент Стьюдента для выбранного уровня достоверности и числа степеней свободы $f = (m + v - 2)$;

$S^2(\bar{y}_0)$ - дисперсия среднего значения выходного параметра при значениях всех факторов на нулевом уровне.

Если неравенство (4.31) выполняется, это свидетельствует о значимости разности $|\bar{y}_0 - b_0|$ и о невозможности отбросить квадратичные члены

в уравнении регрессии. Указанная ситуация свидетельствует о значительной кривизне поверхности отклика вблизи оптимума. В этой ситуации необходима постановка факторного эксперимента с меньшими единицами варьирования.

Если же проведенные расчеты показывают обратный результат, то принятое предположение о возможности описания выхода процесса без членов высших порядков в уравнении регрессии справедливо. В этом случае для упрощения модели процесса желательно также проверить возможность описания выходного параметра уравнением с линейными членами без их парных взаимодействий.

Второй этап - проверка описания процесса линейной моделью. В этом случае необходимо преобразовать матрицу планирования эксперимента: исключить выходы эксперимента при повторных опытах и дополнить матрицу выходным параметром \hat{y}_m процесса, рассчитанным по уравнению регрессии без парных взаимодействий. Для двухфакторного эксперимента такая матрица будет иметь вид, представленный в таблице

4.4

Таблица 4.4 - Преобразованная матрица для проверки описания процесса линейной моделью

№ варианта	x_1	x_2	\bar{y}_m	$\hat{y}_m = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$	\hat{y}_m	$\bar{y}_m - \hat{y}_m$	$(\bar{y}_m - \hat{y}_m)^2$
1	-	-	y_1	$\hat{y}_m = b_0 + b_1(-1) + b_2(-1)$			
2	+	-	y_2	$\hat{y}_m = b_0 + b_1(+1) + b_2(-1)$			
3	-	+	y_3	$\hat{y}_m = b_0 + b_1(+1) + b_2(+1)$			
4	+	+	y_4	$\hat{y}_m = b_0 + b_1(+1) + b_2(+1)$			

Выполнив необходимые расчеты, можно определить дисперсию неадекватности модели без парных взаимодействий

$$S_a^2 = \sum (\bar{y}_m - \hat{y}_m)^2 / (m - i - 1),$$

где m - число вариантов при проведении многофакторного эксперимента, равное 2^i ;

$(m - i - 1)$ - число отброшенных взаимодействий; i - число факторов.

Получив значение S_a^2 его сравнивают с дисперсией воспроизводимости $S^2(y)$, определяя $= S_a^2 / S^2(y)$.

Далее по критерию Фишера $F_{расч} > F(f_1; f_2)$ можно оценить возможность отбрасывания членов парных взаимодействий.

Значение критерия Фишера $F(f_1; f_2)$ для степеней свободы f_1 и f_2 определяется по таблице Приложения Г. При этом $f_1 = m - i - 1$, $f_2 = k - 1$.

Если $F_{расч} > F(f_1; f_2)$, то мы не можем отбросить парные взаимодействия и должны констатировать, что линейное приближение не адекватно. Если $F_{расч} \geq F(f_1; f_2)$, то парные взаимодействия из уравнения регрессии можно исключить и уравнение регрессии будет адекватно полностью линейной модели.

Пример 4.1. Проведен трехфакторный эксперимент по исследованию освещенности на рабочем месте. В качестве управляемых факторов рассматривались: мощность осветительного прибора (x_1), напряжение питания (x_2), высота подвеса осветительного прибора (x_3).

Уровни факторов приняты следующими:

Факторы	Уровень факторов			
	0x_i	I_i	+ 1	- 1
X_1	150	50	200	100
X_2	220	20	240	200
X_3	75	25	100	50

Для оценки линейности уравнения регрессии выход y_0 на нулевом уровне определялся три раза, получены значения $y_0 = 157,1; 139,1; 165,4$.

В процессе проведения эксперимента выполнено три серии опытов ($k = 3$). Матрица планирования эксперимента и результаты

параллельных опытов приведены в таблице 4.5.

Таблица 4.5 - Матрица . планирования трехфакторного эксперимента

Номер опыта	Уровень фактора				Расчетные показатели				Выходной параметр			
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y_m^I	y_m^{II}	y_m^{III}	\bar{y}_m
1	+	-	-	-	+	+	+	-	54,3	49,5	39,6	47,8
2	+	+	-	-	-	-	+	+	148,8	151,4	119,	139,7
3	+	-	+	-	-	+	-	+	102,1	94,2	75,3	90,5
4	+	+	+	-	+	-	-	-	275,5	273,3	218,6	255,8
5	+	-	-	+	+	-	-	+	80,4	68,7	54,9	68,0
6	+	+	-	+	-	+	-	-	221,2	196,8	157,	191,9
7	+	-	+	+	-	-	+	-	153,4	133,2	105,	130,7
8	+	+	+	+	+	+	+	+	410,9	368,4	294,7	358,0

Провести обработку полученных данных.

Решение. 1. Запишем формулу уравнения регрессии для трехфакторного эксперимента

$$\hat{y}_m = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{1,2}x_1x_2 + b_{1,3}x_1x_3 + b_{2,3}x_2x_3 + b_{1,2,3}x_1x_2x_3.$$

2. Вычислим построчно средние значения выходного параметра \bar{y}_m по результатам трех серий параллельных опытов и занесем их в таблицу (последний столбец таблицы 4.5).

3. Рассчитаем коэффициенты регрессии уравнения (по формулам 4.17 - 4.19).

$$b_0 = \frac{47,8 + 139,7 + 90,5 + 255,8 + 68,0 + 191,8 + 130,7 + 358,0}{8} = 160,3$$

$$b_1 = \frac{-47,8 + 139,7 - 90,5 + 255,8 - 68,0 + 191,8 - 130,7 + 358,0}{8} = 76,0$$

$$b_2 = \frac{-47,8 - 139,7 + 90,5 + 255,8 - 68,0 - 191,8 + 130,7 + 358,0}{8} = 48,4$$

$$b_3 = \frac{-47,8 - 139,7 - 90,5 - 255,8 + 68,0 + 191,8 + 130,7 + 358,0}{8} = 26,8$$

$$b_{1,2} = \frac{47,8 - 139,7 - 90,5 + 255,8 + 68,0 - 191,8 - 130,7 + 358,0}{8} = 22,1$$

$$b_{1,3} = \frac{47,8 - 139,7 + 90,5 - 255,8 - 68,0 + 191,8 - 130,7 + 358,0}{8} = 11,7$$

$$b_{2,3} = \frac{47,8 + 139,7 - 90,5 - 255,8 - 68,0 - 191,8 + 130,7 + 358,0}{8} = 8,7$$

$$b_{1,2,3} = \frac{-47,8 + 139,7 + 90,5 - 255,8 + 68,0 - 191,8 - 130,7 + 358,0}{8} = 3,8$$

По результатам расчетов уравнение регрессии может быть представлено в следующем виде

$$\hat{y} = 160,3 + 76,0x_1 + 48,4x_2 + 26,8x_3 + 22,1x_1x_2 + 11,7x_1x_3 + 8,7x_2x_3 + 3,8x_1x_2x_3.$$

4. Вычислим ошибку коэффициентов регрессии.

Расчет построчных дисперсий.

По формуле $S^2(y_m^k) = \sum(\bar{y}_m - y_m^k)^2 / (k - 1)$ определяем

$$S^2(y_1^k) = \frac{(47,8-54,3)^2 + (47,8-49,5)^2 + (47,8-39,6)^2}{2} = 56,2.$$

$$S^2(y_2^k) = \frac{(139,7-148,8)^2 + (139,7-151,4)^2 + (139,7-119,0)^2}{2} = 324,1.$$

$$S^2(y_3^k) = \frac{(90,5-102,1)^2 + (90,5-94,2)^2 + (90,5-75,3)^2}{2} = 189,7.$$

$$S^2(y_4^k) = \frac{(255,8-275,5)^2 + (255,8-272,3)^2 + (255,8-218,6)^2}{2} = 1039,1.$$

$$S^2(y_5^k) = \frac{(68,0-80,4)^2 + (68,0-68,7)^2 + (68,0-54,9)^2}{2} = 162,9.$$

$$S^2(y_6^k) = \frac{(191,8-221,2)^2 + (191,8-196,8)^2 + (191,8-157,4)^2}{2} = 1036,3.$$

$$S^2(y_7^k) = \frac{(130,7-153,4)^2 + (130,7-133,2)^2 + (130,7-105,7)^2}{2} = 573,3.$$

$$S^2(y_8^k) = \frac{(358,0-410,9)^2 + (358,0-368,4)^2 + (358,0-294,7)^2}{2} = 3456,7.$$

Расчет дисперсии воспроизводимости.

По формуле $S^2(y) = \sum S^2(y_m^k) / m$ определяем

$$S^2 (y) = \frac{56,2 + 324,1 + 189,7 + 1039,1 + 162,9 + 1036,3 + 573,3 + 3456,7}{8} = 854,8$$

Расчет дисперсии среднего значения.

$$S^2 (\bar{y}) = \sum S^2 (y) / k = 284,9.$$

Расчет дисперсии коэффициентов регрессии.

$$S^2 (b_i) = S^2 (\bar{y}) / m \frac{284,9}{8} = 35,6$$

Ошибка коэффициентов регрессии.

$$S (b_i) = \sqrt{S^2 (b_1)} = \sqrt{35,6} = 6,0.$$

5. Проверка однородности построчных дисперсий по критерию Кохрена.

Определение суммарного значения построчных Дисперсий.

$$\sum S^2 (y_m^k) = 56,2 + 324,1 + 189,7 + 1039,1 + 162,9 + 1036,3 + 573,3 + 3456,7 = 6838,3.$$

Расчет значения критерия Кохрена.

$$G_p = S^2 \frac{(y_m^k)_{\max}}{\sum S^2 (y_m^k)_{\frac{3456,7}{6838,3}}} = 0,5.$$

Для числа степеней свободы $f_1 = k - 1 = 2$, $f_2 = m = 8$ и уровня значимости 0,05 по таблице Приложения В находим значение $G_n = 0,52$.

Поскольку $G_p = 0,5$ меньше $G_n = 0,52$, гипотеза об однородности дисперсии подтверждается.

6. Оценка значимости коэффициентов регрессии по критерию Стьюдента.

Составим уравнение $b_i > S(b_i) t_\alpha$. Коэффициент Стьюдента для $f = m(k - 1) = 8(3 - 1) = 16$ и достоверности $\alpha = 95 \%$ по таблице Приложения Б $t_{95}(16) = 2,12$.

$$\text{В результате } S(b_i) t_\alpha = 6,0 \cdot 2,12 = 12,7.$$

Выполним оценку значимости коэффициентов регрессии.

$$b_0 = 160,3 > 12,7; \quad b_1 = 76,0 > 12,7; \quad b_2$$

$$=48,4 > 12,7;$$

$$b_3 = 26,8 > 12,7;$$

$$b_{1,2} = 22,1 > 2,7;$$

$$b_{1,3} = 11,7 < 12,7;$$

$$b_{2,3} = 8,7 < 12,7;$$

$$b_{1,2,3} = 3,8 < 12,7.$$

Таким образом, коэффициенты регрессии $b_{1,3}$, $b_{2,3}$ и $b_{1,2,3}$ не значимы и уравнение регрессии можно записать в виде

$$\hat{y}_m = 160,3 + 76,0x_1 + 48,4x_2 + 26,8x_3 + 22,1x_1x_2$$

7. Проверка правильности предположения о возможности использования уравнения регрессии без членов высших порядков.

Воспользуемся неравенством $|\bar{y}_0 - b_0| > \sqrt{\tilde{S}^2 (m + v) / vmt_\alpha}$. При этом

$$\tilde{S}^2 = \frac{(m-1)S^2(b_i) + (v-1)S^2(\bar{y}_0)}{m+v-2}.$$

В этом уравнении число серий опытов по определению y_0 на нулевом уровне.

Чтобы определить \tilde{S}^2 нужно кроме $S^2(b_i)$ знать $S^2(\bar{y}_0)$, то есть дисперсию выходного параметра при значениях всех факторов на нулевом уровне. Среднее значение дисперсии выходного параметра на нулевом уровне $\bar{y}_0 = 153,8$.

Определим $S^2(y_0)$ по формуле $= \Sigma(\bar{y}_0 - y_0)^2 / v(v - 1)$.

$$S^2(\bar{y}_0) = \frac{(153,8-157,1)^2 + (153,8-139,1)^2 + (153,8-165,4)^2}{3 \cdot 2} = 60,3.$$

$$\text{В результате } \tilde{S}^2 = \frac{7 \cdot 35,6 + 2 \cdot 76,6}{8+3-2} = 41,1.$$

Подставим полученные значения в неравенство

$$|\bar{y}_0 - b_0| > \sqrt{\tilde{S}^2 (m + v) / vmt_\alpha}, \text{ приняв число степеней свободы } f = (m + v - 2) = 9 \text{ и } \alpha = 0,95, \text{ получим}$$

$$|153,8 - 160,3| > \sqrt{44,7} \sqrt{(8 + 3) / 8 \cdot 3} \cdot 2,26 = 9,8, \text{ то есть } 6,5 > 9,8.$$

Различие между \bar{y}_0 и b_0 статистически незначимо, следовательно, гипотеза о возможности использования уравнения без квадратичных

членов верна.

8. Проверка линейности принятой модели.

Результатом такой проверки является оценка возможности отбросить парные взаимодействия.

Построим матрицу планирования трехфакторного эксперимента с отброшенными членами парных взаимодействий, дополнив ее значениями \hat{y}_m , рассчитанными по уравнению регрессии.

№	x_1	x_2	x_3	\bar{y}_m	$\hat{y}_m = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$	\hat{y}_m	$\bar{y}_m - \hat{y}_m$	$(\bar{y}_m - \hat{y}_m)^2$
1	-	-	-	47,8	$\hat{y}_1 = b_0 - b_1 - b_2 - b_3$	9,1	38,7	1497,7
2	+	-	-	139,7	$\hat{y}_2 = b_0 + b_1 - b_2 - b_3$	161,1	-21,4	458,0
3	-	+	-	90,5	$\hat{y}_3 = b_0 - b_1 + b_2 - b_3$	105,9	-15,4	237,2
4	+	+	-	255,8	$\hat{y}_4 = b_0 + b_1 + b_2 - b_3$	257,9	-2,1	4,4
5	-	-	+	68,0	$\hat{y}_5 = b_0 - b_1 - b_2 + b_3$	62,7	5,3	28,1
6	+	-	+	191,8	$\hat{y}_6 = b_0 + b_1 - b_2 + b_3$	214,7	-22,9	524,4
7	-	+	+	130,7	$\hat{y}_7 = b_0 - b_1 + b_2 + b_3$	159,5	-28,8	829,4
8	+	+	+	358,0	$\hat{y}_8 = b_0 + b_1 + b_2 + b_3$	311,5	46,5	2162,3

Последовательно рассчитаем значения u_m по уравнениям для каждого номера варианта, $\bar{y}_m - \hat{y}_m$, $(\bar{y}_m - \hat{y}_m)^2$. Результаты занесем в таблицу.

Определим дисперсию неадекватности

$$S_a^2 = \frac{\sum(\bar{y}_m - \hat{y}_m)^2}{m-i-1} = \frac{5741,5}{4} = 1453,3.$$

Выполним сравнение S_a^2 и $S^2(y)$ по критерию Фишера

$$F_{\text{расч}} = \frac{S_a^2}{S^2(y)} = \frac{1453,3}{854,8} = 1,7.$$

Найдем табличное значение критерия Фишера $F(f_1, f_2)$. Для степеней свободы $f_1 = m - i - 1 = 4$ и $f_2 = k - 1 = 2$ и $\alpha = 95\%$ по таблице Приложения Г определяем $F(f_1, f_2) = 19,3$.

В результате $F_{\text{расч}} < F(f_1, f_2)$, что свидетельствует о том, что достаточно точно можно описать процесс без парных взаимодействий.

Таким образом, окончательное уравнение регрессии может быть представлено в следующем виде

$$\hat{y} = 160,3 + 76,0x_1 + 48,4x_2 + 26,8x_3$$

Экспериментальная оптимизация при постановке многофакторного эксперимента

После получения линейной модели, описывающей локальную область факторного пространства, исследователю надлежит принять решение о дальнейшем ходе исследования - следует ли оптимизировать процесс, двигаясь в направлении градиента, либо область экстремума уже достигнута.

Экстремальные задачи имеют цель определения наилучшего значения целевой функции, в качестве которой принимают значение интересующей исследователя характеристики процесса.

Для этого на основе выбранного плана строят модель, отвечающую рассматриваемому отклику, и, используя ее, с помощью известных методов поиска экстремума находят значения факторов, при которых целевая функция будет экстремальна. На практике такой подход часто реализуется так называемым методом крутого восхождения (метод Бокса-Уилсона).

Метод крутого восхождения (спуска) удобно интерпретировать с человеком с завязанными глазами, находящимся на склоне горы, которому необходимо достигнуть вершины (или подножия) кратчайшим путем. Для этого он должен оценить ситуацию, сделав поочередно во всех четырех направлениях по шагу, чтобы выбрать направление движения. После этого он может двигаться в нужном направлении. Достигнув вершины (подножия) человеку необходимо вновь проверить правильность достижения цели путем поочередной оценки крутизны склона во все четыре стороны, сделав по одному шагу.

Рассматриваемый метод можно применить к поиску оптимума при проведении многофакторного эксперимента.

Полученное уравнение регрессии описывает небольшой участок поверхности отклика. Величины коэффициентов регрессии при линейных членах дают необходимое представление о пропорции, в которой следует менять факторы, чтобы достичь оптимума.

Бокс и Уилсон показали, что при наличии серии опытов, проведенных таким образом, что в каждом последующем варианте содержание x_1 и x_2 (например при двухфакторном эксперименте) пропорционально произведению коэффициентов регрессии данного фактора на величину его единицы варьирования, то такое движение по

поверхности отклика и будет кратчайшим в зоне оптимума.

Рассмотрим конкретный пример.

Для описания выходной координаты на небольшом участке поверхности отклика был поставлен полный факторный эксперимент с нулевым

уровнем в точках $x_1 = 4$ и $x_2 = 3$. Единицы варьирования были выбраны $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0,5$. Уравнение регрессии получено в следующем виде $y = 56 + 14x_1 + 8x_2$.

По результатам эксперимента мы имеем: $\mu_1 = 1$, $b_1 = 14$, $b_1\mu_1 = 14$; $\mu_2 = 0,5$, $b_2 = 8$, $b_2\mu_2 = 4$.

В качестве «шага» выберем величину $0,1b_i\mu_i$. В этом случае план крутого восхождения будет вычисляться следующим образом.

Вид обозначения уровня фактора	№ варианта	1	2	3	4	5	6
Условные обозначения	x_1	0_{x_1}	$0+$ $0,1b_1\mu_1$	$0+$ $0,2b_1\mu_1$	$0+$ $0,3b_1\mu_1$	$0+$ $0,4b_1\mu_1$	$0+$ $0,5b_1\mu_1$
	x_2	0_{x_2}	$0+$ $,1b_2\mu_2$	$0+$ $,2b_2\mu_2$	$0+$ $0,3b_2\mu_2$	$0+$ $0,4b_2\mu_2$	$0+$ $0,5b_2\mu_2$
Реальные числа	x_1	4	4 + 1,4	4 + 2,8	4 + 4,2	4 + 5,6	4 + 7,0
	x_2	3	3 + 0,4	3 + 0,8	3 + 1,2	3 + 1,6	3 + 2,0

Проведя рассматриваемую серию опытов, получены следующие значения выхода

№ варианта 1 2 3 4 5 6

Выход 64 71 79 86 87 74

Приведенные данные свидетельствуют о том, что начиная с четвертого варианта дальнейшее изменение факторов (движение по градиенту) уже не приводит к существенному изменению выходного параметра. В результате можно считать, что оптимальное соотношение факторов составляет $x_1 = 8,2$ и $x_2 = 4,2$.

Чтобы уточнить оптимальное соотношение проводится новый факторный эксперимент с принятым оптимальным значением факторов. В зоне оптимума коэффициенты регрессии должны быть незначимы при линейных членах уравнения. Если же окажется, что какой-либо из коэффициентов регрессии при линейных членах будет значимым, то следует скорректировать программу крутого

восхождения, используя вновь рассчитанный градиент.

Специфические особенности, возникающие при анализе уравнения регрессии:

1. Если анализ уравнения регрессии показывает, что изучаемый процесс нельзя описать уравнением без членов высших порядков, то это свидетельствует о близости к оптимальной области и крутое восхождение выполнять нецелесообразно.

2. В случае описания процесса уравнениями без членов высших порядков, но с парными взаимодействиями рекомендуется использовать программу крутого восхождения. Однако после получения оптимального значения выходного параметра необходима постановка еще одного факторного эксперимента для уточнения направления движения по градиенту.

3. Если доказана адекватность линейного приближения, то проведение крутого восхождения эффективно и его рекомендуется выполнять в обязательном порядке.

5 Статистическая обработка результатов исследований

При проведении опытных исследований различают пассивный или активный эксперименты. Методология пассивного эксперимента предполагает проведение большой серии опытных исследований с поочередным варьированием значений входных переменных и анализом результатов измерений выходной переменной y . К пассивному эксперименту принято относить также сбор и обработку опытных данных в процессе эксплуатации электроэнергетических установок. Обработка результатов пассивного эксперимента проводится методами регрессионного и корреляционного анализа, а также выбора эмпирической модели, то есть установления закона распределения исследуемой случайной величины.

Законы распределения случайных величин практически могут быть получены двумя путями: путем аналитического исследования и путем обработки экспериментальных данных. В первом случае законы распределения находят проводя анализ природы какого-либо явления или процесса и определенных математических операций. Во втором случае производится сбор необходимых экспериментальных данных. Данные могут быть получены либо в результате специально поставленного эксперимента, либо в результате наблюдений. В процессе проведения эксперимента накапливается большой объем разнообразных данных, которые на первый взгляд могут выглядеть весьма хаотично. От их правильной обработки во многом зависит интерпретация результатов эксперимента.

Статистическая обработка накопленной информации позволяет получить аналитическую зависимость искомого закона распределения вероятностей и вычислить параметры распределения.

Экспериментальное определение закона распределения случайной величины играет особую роль. Как бы глубоко и тщательно не было проведено аналитическое исследование, в результате которого получен закон распределения, окончательное заключение может быть сделано только базируясь на эксперименте.

Специальная дисциплина «Математическая статистика» занимается разработкой методов регистрации, описания и анализа статистических экспериментальных данных, получаемых в результате наблюдения массовых случайных явлений [5]. Она решает следующие основные задачи:

- построение статистической функции распределения случайной

величины;

- нахождение статистических числовых характеристик;
- определение статистических параметров закона

распределения, если тип закона известен;

- определение типа закона распределения;
- статистическая проверка гипотез.

Генеральная совокупность и случайная выборка. На практике исследователь обычно располагает лишь ограниченным числом значений случайной величины, представляющим собой некоторую выборку из генеральной совокупности. В силу закона случая какие-то величины, определенные по малому числу наблюдений, в общем случае могут не совпадать с теми же величинами, вычисленными по большому числу наблюдений, выполненных в тех же условиях. Поэтому в математической статистике вводят абстрактное понятие генеральной совокупности, состоящей из всех допустимых значений случайной величины и выборочной совокупности, представляющей собой ограниченное число значений, полученных в результате опытов. Иными словами, выборка представляет собой отбор значений случайной величины из генеральной совокупности.

В соответствии с этим различают выборочные характеристики случайной величины, найденные по ограниченному числу наблюдений и зависящие от этого числа, и соответствующие им характеристики генеральной совокупности. При этом выборочные характеристики рассматриваются как оценки соответствующих характеристик генеральной совокупности.

Выборки могут быть повторными и бесповторными. В первом случае отобранный объект возвращается в генеральную совокупность, во втором случае - не возвращается. Обычно применяются бесповторные выборки.

Выборка называется репрезентативной (представительной), если она дает достаточное представление об особенностях генеральной совокупности.

Случайная функция распределения. Исходными данными для статистического исследования случайной величины X чаще всего является набор n наблюдений ее реализаций (реализация случайной величины - значение, принимаемое ею в опыте). Этот набор называется простой статистической совокупностью. Обычно простая статистическая совокупность оформляется в виде таблицы с одним входом, в первом столбце которой стоит номер опыта i , а во втором -

наблюдаемое значение случайной величины (таблица 5.1).

Таблица 5.1 - Случайная величина импульсного напряжения в электрической сети

i	U_i , кВ	i	U_i , кВ	i	U_i , кВ
1	2,3	8	4,4	15	3,7
2	1,6	9	2,8	16	3,2
3	4,1	10	3,6	17	4,9
4	2,9	11	3,3	18	6,6
5	3,4	12	5,0	19	5,4
6	4,3	13	6,1	20	1,9
7	2,8	14	3,1		

Для удобства использования исходный статистический материал записывается в виде вариационного ряда, где номера от 1 до n присваиваются реализациям в порядке их возрастания (таблица 5.2).

Таблица 5.2 - Вариационный ряд, составленный по данным таблицы 5.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,6	1,9	2,3	2,8	2,8	2,9	3,1	3,2	3,3	3,4
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3,6	3,7	4,1	4,3	4,4	4,9	5,0	5,4	6,1	6,6

Простой статистический ряд представляет собой первичную форму записи статистического материала и может быть обработан различными способами. Одним из способов такой обработки является построение статистической функции распределения. Она представляет собой прерывистую ступенчатую функцию, скачки которой соответствуют наблюдаемым значениям случайной величины и по величине равны частотам этих значений.

Статистической функцией распределения случайной величины X называется частота события $X < x$ в данном статистическом материале

$$F^*(x) = P^*(X < x).$$

Для того чтобы найти значение статистической функции распределения для данного значения x достаточно подсчитать число опытов, в которых величина X приняла значение меньше, чем x и разделить на общее число n произведенных опытов. Например, для случайной величины импульсных напряжений в электрической сети статистическая функция распределения будет выглядеть следующим образом (рисунок 5.1).

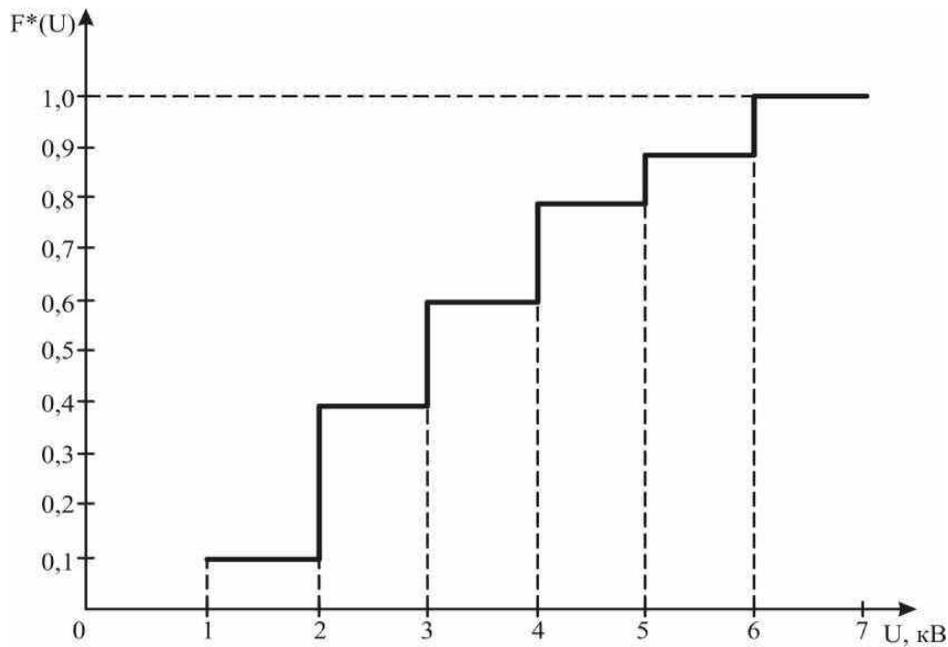


Рисунок 5.1 — Выборочная функция распределения

Если X непрерывная случайная величина, то при увеличении числа наблюдений n число скачков функции $F^*(x)$ увеличивается, сами скачки уменьшаются и график функции $F^*(x)$ неограниченно приближается к плавной кривой $F(x)$ - функции распределения случайной величины X .

В принципе построение статистической функции распределения уже решает задачу описания экспериментального материала. Однако при большом числе опытов работать с вариационным рядом неудобно. Кроме этого в интересах наглядности вместо функции распределения $F^*(x)$ лучше использовать плотность распределения $p^*(x)$. В этом случае исходный статистический материал подвергают предварительной обработке.

Статистически ряд и гистограмма распределения случайной величины. Предварительная обработка сводится к построению статистического ряда. Весь диапазон случайной величины делится на интервалы и подсчитывается количество членов выборки, приходящихся на каждый интервал.

Число интервалов (k) можно выбирать произвольно или по эмпирическим формулам, например по выражению

$$k=1+1,39\ln n. \quad (5.1)$$

Величина k округляется до ближайшего целого.
Длина интервала при этом равна

$$h = x_{max} - x_{min}/k.$$

Число интервалов, на который следует разбивать статистический ряд, рекомендуется брать порядка 10 ... 20 [5].

Длина интервалов может быть как одинаковой, так и различной. Проще проводить обработку статистических данных, когда используется одинаковая длина интервалов. Однако, в случае крайне неравномерного распределения случайной величины бывает оправдано применение различной длины интервалов.

Число значений случайной величины, попавших в i -й интервал, обозначим через n_i . Тогда частота для i -го интервала будет

$$p_i^* = n_i / n. \tag{5.2}$$

При проведении предварительной обработки статистического материала и формировании статистического ряда естественно возникает вопрос об отнесении к тому или другому интервалу значений случайной величины, находящихся точно на границе двух разрядов. Условно можно считать их принадлежащими к обоим разрядам и поделить пополам для одного и второго разряда.

Статистический ряд записывается в виде таблицы (таблица 5.3)

Таблица 5.3 - Статистический ряд длительности отключений воздушных линий электропередачи напряжением 10 кВ

Δt_i	0 - 1	1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5	5 - 6	6 - 7	7 - 8
Δn_i	66	41	30	18	9	6	4	2
n_i	0,38	0,23	0,17	0,1	0,051	0,034	0,022	0,011

Полученный статистический ряд обычно оформляется в виде гистограммы. Для ее построения на оси абсцисс откладываются интервалы статистического ряда. На каждом интервале, как на основании, строится прямоугольник, высота которого равна частоте данного интервала. В качестве примера построим гистограмму для статистического ряда, приведенного в таблице 5.3.

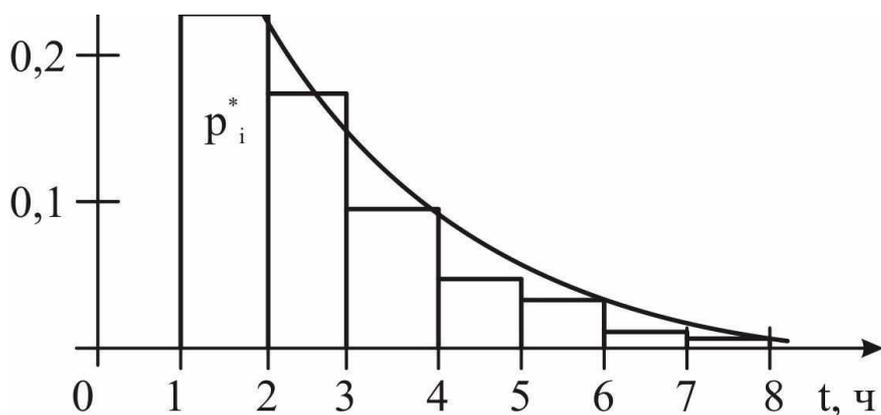


Рисунок 5.2 — Гистограмма длительности отключений линий напряжением 10 кВ

Полная площадь гистограммы равна 1. При увеличении числа опытов гистограмма будет все больше приближаться к некоторой кривой, ограничивающей площадь равную 1. Эта кривая представляет собой график плотности распределения величины X .

Числовые характеристики статистического распределения. При обработке результатов наблюдений обычно не удастся получить эмпирическую функцию распределения. Однако при этом в большинстве случаев удастся установить тип неизвестной функции распределения. Окончательное уточнение неизвестной функции распределения сводится к определению некоторых числовых параметров распределения.

По выборкам могут быть рассчитаны выборочные статистические характеристики (выборочное среднее, дисперсия и т. д.), которые являются оценками соответствующих генеральных параметров.

Выборочные значения будут отличаться от значений параметров генеральной совокупности, однако они дают представление о величине последних. Такое приближенное значение случайных параметров генеральной совокупности называется оценкой параметров. Для того чтобы статистические оценки давали наилучшее приближение оцениваемых параметров, они должны удовлетворять ряду требований.

При увеличении числа опытов оценка должна сходиться по вероятности к искомому параметру. Такая оценка называется состоятельной.

Необходимо, чтобы оценка не давала систематической ошибки в сторону завышения или занижения.

Различают несмещенные и смещенные оценки случайной

величины. Точечная оценка называется несмещенной, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру генеральной совокупности. В противном случае оценка называется смещенной.

Желательно также, чтобы выбранная оценка имела по сравнению с другими наименьшую дисперсию. Оценка, обладающая таким свойством, называется эффективной.

Все точечные оценки можно разделить на три группы: средние статистики, статистики рассеяния и статистики отклонения формы распределения.

Средние статистики определяют центр распределения случайной величины, около которого группируется большая ее часть, то есть измеряют центральную тенденцию выборки. Средние величины отражают закономерный результат воздействия главных возмущающих факторов.

В качестве оценки математического ожидания или среднего арифметического значения генеральной совокупности (генеральной средней) принимается выборочная средняя

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (5.3)$$

Эта оценка является состоятельной и несмещенной, а в случае нормального распределения - и эффективной.

Статистики рассеяния отражают результат воздействия второстепенных возмущающих факторов.

Выборочная дисперсия определяется следующим образом

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (5.4)$$

Выборочная дисперсия является смещенной оценкой генеральной дисперсии и поэтому не может быть рекомендована в качестве оценки. Для получения несмещенной оценки следует использовать выражение

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (5.5)$$

Обычно при $n > 50$ можно считать, что $S_0 \gg S^2$.

Для оценки среднего квадратического отклонения генеральной совокупности следует пользоваться исправленным средним квадратическим отклонением

$$S^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \quad (5.6)$$

Статистики отклонения формы распределения характеризуют отклонение функции распределения от симметричной формы и форму вершины плотности распределения.

Коэффициент асимметрии вычисляется по формуле

$$A = \mu_3 / S^2, \quad (5.7)$$

где μ_3 - центральный выборочный момент третьего порядка

$$\mu_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3. \quad (5.8)$$

Коэффициент асимметрии характеризует отклонение функции плотности распределения от симметричной формы относительно выборочного среднего значения \bar{x} . Если в вариационном ряду преобладают значения меньше \bar{x} , то асимметрия называется левосторонней. При значениях $A > 0$ асимметрия называется правосторонней.

Эксцесс (коэффициент крутости) можно найти по выражению

$$E = \frac{\mu_3}{S^3} - 3, \quad (5.9)$$

где μ_4 - центральный выборочный момент четвертого порядка

$$\mu_4 = S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4. \quad (5.10)$$

Эксцесс указывает, насколько плотность распределения более заострена или, наоборот, приплюснута по сравнению с плотностью нормального распределения. Распределение считается близким к нормальному, если выборочные значения A и E удовлетворяют условию $|A| < 0,1$ и $|E| < 0,1$.

Коэффициент асимметрии и эксцесс нормально распределенной случайной величины равны 0.

На практике параметры генеральной совокупности - математическое ожидание и дисперсия не известны. Их точечные оценки (выборочное среднее и выборочная дисперсия) являются случайными величинами. При этом при условии $n < 25$ эти оценки считаются ненадежными. Поэтому часто используют так называемые интервальные оценки.

Если параметр N оценен выборочным параметром N_B , то чем меньше разность $|N - N_B| = S$, тем точнее оценка. Таким образом, число E позволяет определить доверительный интервал для параметра N . Однако доверительный интервал может быть найден только с определенной вероятностью и зависит от нее. Эта вероятность α называется доверительной. В этом случае можно записать

$$P(N_B - \varepsilon < N < N_B + \varepsilon) = \alpha. \quad (5.11)$$

Это равенство означает, что с доверительной вероятностью α значение параметра N находится в доверительном интервале $(N_B - \varepsilon, N_B + \varepsilon)$.

Доверительные интервалы для математического ожидания нормального распределения \bar{x} при известном среднем квадратическом отклонении σ с вероятностью α могут быть определены из соотношения

$$P\left(\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - 2\Phi(t) = \alpha \quad (5.12)$$

где $\Phi(t)$ - табулированная функция Лапласа.

Доверительные интервалы для математического ожидания нормального распределения при неизвестном среднем квадратическом отклонении α вероятностью α могут быть определены из соотношения.

$$P\left(\bar{x} - t_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \bar{x} + t_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

где t_{α} - параметр распределения Стьюдента.

Распределение Стьюдента зависит только от объема выборки и не зависит от x и σ .

Имеются готовые таблицы, по которым для заданных значений t_{α} и n можно найти α , а по заданным α и n найти t_{α} .

Определение закона распределения случайной величины. Установление закона распределения случайной величины на основе статистических данных важная и часто встречающаяся задача в математической статистике. При этом следует учитывать, что не существует способа непосредственно из имеющихся данных получить математическое выражение для закона распределения. Известные методы позволяют лишь подтвердить (или опровергнуть) соответствие данного статистического материала выдвинутой гипотезе о законе распределения.

В общем случае процедура получения модели закона распределения случайной величины состоит из двух этапов: выдвижение гипотезы и проверка соответствия выдвинутой гипотезы имеющимся данным.

Гипотезы о законе распределения могут выдвигаться на основе анализа физической природы и свойств рассматриваемой случайной величины. Источником этих гипотез может служить предварительный анализ имеющихся статистических материалов, в частности, рассмотрение кривых плотности распределения случайной величины, так как гистограммы наиболее рельефно и наглядно отображают свойства распределения.

Проверка соответствия гипотезы о законе распределения случайной величины сводится к установлению степени близости гипотетического (теоретического) и статистического распределений. Решающее значение здесь играет выбор количественной меры близости двух распределений.

С целью проверки гипотез о законе распределения применяют специально разработанные критерии (критерии согласия).

Наибольшее распространение из них получили критерий Колмогорова и критерий Пирсоа (критерий χ^2).

При применении критерия Колмогорова в качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим распределениями рассматривается максимальное значение модуля разности между теоретической и экспериментальной функциями. Условие соответствия определяется формулой

$$\Delta x = \Delta F \sqrt{N} \leq 1, \quad (5.13)$$

где $\Delta F = \max |F^*(t) - F(t)|$ - наибольшее отклонение экспериментальной кривой от теоретической;

N - количество экспериментальных данных.

Недостаток рассматриваемого критерия - необходимость иметь не только вид функции распределения, но и ее параметры, что не всегда встречается на практике. Использование только статистических данных может дать неверные результаты.

Критерий χ^2 - Пирсона не требует построения самого закона распределения. Достаточно задаться только общим видом функции $F(t)$, а входящие в нее числовые параметры определяются по данным эксперимента. При использовании критерия согласия χ^2 - Пирсона определяется мера расхождения:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(\Delta n_i - N p_i)^2}{N p_i}.$$

где k - число интервалов статистического ряда;

p_i - вероятность попадания случайной величины в i -й интервал, вычисленная для теоретического распределения;

N - число испытаний.

Для применения критерия χ^2 - Пирсона необходимо, чтобы $N > 50 \dots 60$, $k > 6 \dots 8$. Распределение χ^2 зависит от числа степеней свободы $f = k - z - 1$, где z - число вычисляемых параметров распределения. По таблицам, приводимым в литературе по теории вероятностей и математической статистике, для каждого значения χ^2 и f можно найти вероятность того, что за счет случайных причин мера расхождения теоретического и экспериментального распределения будет не меньше, чем фактическое значение χ^2 . Если $P_f > 0,1$, то обычно считают, что теоретическое распределение не противоречит экспериментальным данным.

Пример 5.1. По данным вариационного ряда (таблица 5.3) проверить гипотезу об экспоненциальном распределении времени восстановления, используя критерий χ^2 - Пирсона.

Решение. 1. Определяем среднее время восстановления:

$$T_B^* = \sum_{i=1}^k \bar{t}_i p_i^* = 0,38 \cdot 0,5 + 0,23 \cdot 1,5 + 0,17 \cdot 2,5 + 0,1 \cdot 3,5 + 0,051 \cdot 4,5 + 0,034 \cdot 5,5 + 0,022 \cdot 6,5 + 0,011 \cdot 7,5 = 1,95 \text{ ч.}$$

2. Вычисляем значения теоретической кривой по формуле

$$F(t) = Q(t) = 1 - e^{\frac{-t}{T_B^*}}.$$

3. Последовательно определяем промежуточные величины, необходимые для получения χ^2 (таблица 5.4). При этом величины p_i берутся равными приращению функции распределения $F(t)$ на i -м участке.

4. По формуле $\chi^2 = \sum_{i=1}^8 \frac{(\Delta n_i - N p_i)^2}{N p_i}$ определяем:

$$\chi^2 = 0,23 + 0,02 + 1 + 0,6 + 0,2 = 2,03.$$

5. Для $f = 8 - 1 - 1 = 6$ и $\chi^2 = 2,03$ по Приложению Д находим $P_f = 0,91$. Эта величина малой не является, и следовательно, гипотезу о том, что время восстановления подчинено экспоненциальному закону, можно считать правдоподобной.

Таблица 5.4 - Результаты расчетов для определения критерия χ^2 - Пирсона

$\Delta t_i, \text{ ч}$	0 - 1	1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5	5 - 6	6 - 7	7 - 8
Δn_i	66	41	30	18	9	6	4	2
$F(t)$	0,4	0,64	0,785	0,871	0,92	0,95	0,97	0,982
p_i	0,4	0,24	0,145	0,086	0,05	0,03	0,022	0,011
$N p_i$	70	42	25	15	9	5	4	2
$(\Delta n_i - N p_i)^2$	16	1	25	9	0	1	0	0
$\frac{(\Delta n_i - N p_i)^2}{N p_i}$	0,23	0,02	1	0,6	0	0,2	0	0

Пример 5.2. Данные о наработке до отказа 201 потребительской ТП сгруппированы в интервалы статистического ряда и приведены в таблице 5.5. Требуется оценить с помощью критерия χ^2 - Пирсона гипотезу о согласии принятого нормального распределения с экспериментальными данными.

Таблица 5.5 — Данные о наработке до отказа потребительских ТП

Интервал	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δt_i , ч.	0-1000	1000-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000	5000-6000
Δn_i	5	15	22	35	43	37	20	15	9
p_i^*	0,025	0,075	0,110	0,174	0,214	0,184	0,100	0,075	0,045
p_i	0,017	0,097	0,120	0,168	0,187	0,169	0,122	0,070	0,045
Np_i	3,4	19,5	23,9	33,8	37,6	34	24,5	14,1	9
$\frac{(\Delta n_i - Np_i)^2}{Np_i}$	0,75	1,04	0,15	0,04	0,79	0,26	0,82	0,06	0

Данные в таблице 5.5 являются средними значениями, полученными по результатам наблюдений за наработкой до отказа.

Решение. 1. Вычисляем частоты $p_i^* = \Delta n_i / N$ попадания случайной величины наработки до отказа в i -й интервал ($i=1, 2, \dots, k$) статистического ряда. Результаты заносим в таблицу 5.5. Для каждого интервала определяем значение \bar{t}_i - середины интервала.
 2. Вычисляем математическое ожидание и дисперсию случайной величины по данным статистического распределения:

$$m_t^* = \sum_{i=1}^k \bar{t}_i p_i^* \approx 3260 \text{ ч.} \quad D_t^* = \sum_{i=1}^k (\bar{t}_i - m_i^*)^2 p_i^*$$

$$\sigma_i^* = \sqrt{D_i^*} = 1056 \text{ ч.}$$

3. Находим теоретические вероятности попадания случайной величины в интервалы статистического ряда по формуле

$$p_i = 1/2\{\Phi_0[(t_{i+1} - m_i^*)/0,672\sigma_i^*]\},$$

где $\Phi_0(x)$ -приведенная функция Лапласа (Приложение Е);

t_i, t_{i+1} - границы интервала.

Полученные данные заносим в таблицу 5.5.

4. Проводим вычисление промежуточных данных Np_i и $(\Delta n_i - Np_i)^2 / Np_i$, необходимых для определения χ^2 , результаты заносим в таблицу 5.5.

5. Определяем χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^9 \frac{(\Delta n_i - Np_i)^2}{Np_i} = 3,91.$$

6. Число степеней свободы $f = k - u - 1 = 9 - 2 - 1 = 6$.

Из Приложения Д для значения $\chi^2 = 3,91$ и числа степеней свободы

$f = 6$ находим $P_f = 0,7$. Так как $P_f > 0,1$, то можно считать, что распределение случайной величины наработки до отказа потребительских трансформаторных подстанций по нормальному закону не противоречит экспериментальным данным.

6 Оценка показателей качества объекта по результатам экспериментов

В этой теме рассмотрены основные задачи математической статистики о первичной статистической обработке данных. В статистике, как правило, статистические данные являются результатами наблюдений над некоторой случайной величиной X .

Пример. В результате эксперимента были получены значения переменной X (таблица 6.1).

Таблица 6.1 — экспериментальные значения переменной X

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	14,85	14,80	14,84	14,81	14,63	14,81	14,80	14,85	14,84	14,80

Практическая работа. Статистические характеристики случайных величин

Цель работы. Научиться вычислять оценки основных числовых характеристик по экспериментальным данным. Статистическая функция **СЧЕТ** используется для определения числа значений (рис. 6.1).

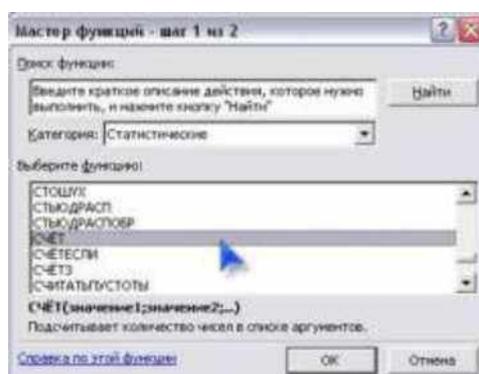


Рисунок 6.1.

Диапазон ячеек указывается адресами первой и последней ячейки данных, записанными через двоеточие, например **B6:B15** (рис. 6.2).

Функция **СРЗНАЧ** рассчитывает среднее значение выборки.

Функция **СТАНДОТКЛОН** — стандартное отклонение выборки. Аргументами этих функций служит все тот же диапазон ячеек.

Статистическая функция **СТЮДРАСПОБР** используется для нахождения коэффициента Стьюдента. Этот коэффициент зависит от вероятности ошибки (при обычно задаваемой надежности 95 % вероятность ошибки составляет 5 %) и от числа степеней свободы n — 1. Также это значение можно найти по таблице

критических значений t-критерия (приложение 1).

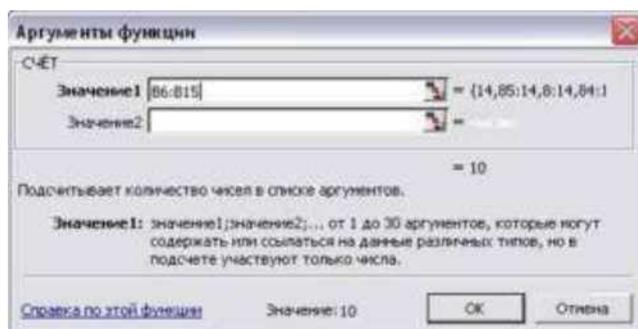


Рисунок 6.2

Для нахождения доверительного интервала используется обычная формула умножения «=СТЫЮДРАСПОБР*Хср».

Решение. Данные из примера введем в столбец В (табл. 6.2). В столбцах D и E - подсказки характеристик, которые мы будем рассчитывать. Используя приведенные выше функции, в столбец F поместим результаты. По найденному значению ячейки F11 окончательный результат доверительного интервала можно записать так: с 95 %-ной надежностью $X = 14,81 \pm 0,046$. В заключение вычислим относительную ошибку определения доверительного интервала:

$\delta = \text{ДИ}/X_{\text{ср}}$ (формула: «=F11/F7»). Значение относительной ошибки обычно выражают в процентах, в нашем случае 0,3 %.

Таблица 6.2

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3		Данные эксперимента			Обработка	
4						
5	№	X				
6	1	14,85	Число значений n	СЧЕТ		10
7	2	14,80	Среднее значение Xср	СРЗНАЧ		14,803
8	3	14,84	Станд. отклонение S	СТАНДОТКЛОН		0,0643
9	4	14,81	Ст. откл. среднего S ср	=S / КОРЕНЬ(n)		0,0203
10	5	14,63	К.Стьюд (5%, n-1) t	СТЫЮДРАСПОБР		2,2622
11	6	14,81	Доверит. интервал ДИ	= t * S _{ср}		0,046
12	7	14,80	Относит. ошибка δ	= ДИ / Xср		0,0031
13	8	14,85				
14	9	14,84				
15	10	14,80				

Практическая работа. Оценка параметров и определение закона распределения

Пример. Исследуется случайная величина – число правонарушений в течение одних суток в некотором городе N. Получены данные за первые 150 суток года.

5	4	4	5	8	2	3	1	6	6	1	2	5
4	4	3	4	5	5	2	2	3	4	3	2	4
10	1	4	3	3	2	5	7	5	3	6	7	5
4	6	4	5	4	5	7	6	5	3	5	5	8
5	5	4	5	3	3	6	3	5	2	2	2	6
6	8	4	4	8	3	6	4	4	5	5	7	5
5	4	5	5	4	7	6	9	3	3	5	6	6
5	2	6	7	5	5	4	2	5	4	2	6	2
5	8	5	3	5	2	5	3	7	4	6	3	6
4	4	5	2	7	7	3	1	1	3	6	5	7

Цель работы. Требуется провести первичную статистическую обработку данных, проверить гипотезу о виде распределения случайной величины с помощью критерия согласия Пирсона.
Расчетные соотношения. Данная задача решается с помощью статистических процедур **Анализа данных** и статистических функций библиотеки встроенных функций MS Excel. Приведем алгоритм решения задачи.

1. Ввод данных. В диапазон ячеек **A1:AN** ввести выборочные значения.
2. Построение вариационного ряда. Скопировать содержимое ячеек **A1:AN** в ячейки **B1:BN**. Упорядочить выборочные значения, используя кнопку сортировки по возрастанию.
3. Построение статистического ряда выборки. В ячейки **C1:CK** ввести k различных выборочных значений. В меню **Данные** выделить строку **Анализ данных**, выделить процедуру **Гистограмма**. В поле **Входной интервал** диалогового окна **Гистограмма** ввести ссылку на диапазон **A1:AN**. В поле **Интервал карманов** ввести ссылку на диапазон **C1:CK**. Активизировать поле **Выходной интервал** и ввести в это поле ссылку – левая верхняя ячейка, в которую будет введена таблица результатов решений. Установить флажок **Вывод графика**. Составить табл. 6.3 статистического ряда по следующему образцу:

Таблица 6.3

x_i различные выборочные значения	n_i частота выборочного значения x_i	$\frac{n_i}{N}$ относительная частота выборочного значения x_i	$\frac{n_i^*}{N}$ Накопленная относительная частота
--	--	---	---

Первые столбцы заполнить копированием. Относительные и накопленные частоты вычислить с использованием формул.

4. Построение полигонов относительных и накопленных относительных частот.

Скопировать первый и третий столбцы табл. 6.3. Выделить их. Используя меню **Вставка**, применить к выделенным числам средство диаграммы **Точечная**. Полученный график есть полигон относительных частот. Если эти же действия проделать с первым и четвертым столбцами табл. 6.3, то получим полигон накопленных частот – сглаженный график эмпирической функции распределения.

5. Определение выборочных характеристик. В меню **Данные** выделить подменю **Анализ данных**, выделить процедуру **Описательная статистика**, в поле ввода **Входной интервал** ввести ссылку на диапазон ячеек, содержащий статистические данные **A1:AN**. Установить флажок **Итоговая статистика**. Активизировать поле **Выходной интервал**, ввести в это поле ссылку – левая верхняя ячейка, в которую будет введена таблица результатов решений.

6. Проверка гипотезы о виде распределения случайной величины с помощью критерия согласия Пирсона. Заполнить табл. 6.4.

Таблица 6.4

x_i различные выборочные значения	n_i частота выборочного значения x_i	P_i Теоретическая вероятность выборочного значения x_i	$n'_i = N \cdot p_i$ Теоретическая частота выборочного значения x_i	$\frac{(n'_i - n_i)^2}{n'_i}$
--	---	--	---	-------------------------------

Первые столбцы заполнить копированием, а оставшиеся – вычисленными по формулам значениями. Если проверяется гипотеза о *распределении Пуассона*, то теоретические вероятности вычислить с помощью функции **ПУАССОН** ($x_i, \bar{x}, 0$). \bar{x} – выборочное среднее, оно определяется в пункте 5, 0 – параметр, показывающий, что вычисляется вероятность того, что случайная величина, распределенная по закону Пуассона, принимает значение . Если проверяется гипотеза о биномиальном распределении случайной величины, то теоретические вероятности вычислить с помощью функции **БИНОМРАСП** ($x_i, N, P, 0$), при этом вероятность успеха P в одном испытании определить по формуле $P = \frac{\bar{x}}{N}$ где \bar{x} – выборочное среднее. В случае других распределений воспользоваться справкой о статистических функциях библиотеки встроенных функций MS Excel.

Значение $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n'_i - n_i)^2}{n'_i}$ является наблюдаемым значением случайной величины

χ^2 Число степеней свободы этой случайной величины равно $r = k - 2$ при проверке гипотезы о распределении Пуассона и $r = k - 3$, если проверяется гипотеза о биномиальном распределении. Критическое значение случайной величины χ^2 определить с помощью функции $\chi^2_{кр} = \text{ХИ2ОБР}(\alpha, r)$, где α – уровень значимости. Полученное наблюдаемое значение χ^2 сравнить с $\chi^2_{кр}$.

Если $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то гипотеза о виде распределения принимается при уровне значимости α . Если $\chi^2 > \chi^2_{кр}$ то гипотеза отвергается с уровнем значимости α .

Решение. По предложенному алгоритму проведем первичную статистическую обработку данных. Согласно пункту 3 алгоритма находим $k = 11$ различных выборочных значений

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

С помощью пакета **Анализ данных** получаем статистический ряд выборки и его графическое представление (рис. 6.3).



Рисунок 6.3.

Построенная гистограмма позволяет сделать предположение о виде распределения случайной величины X . В результате заполнения табл. 6.3 получим табл. 6.5, в третьем столбце которой, представлены относительные, а в четвертом – накопленные относительные частоты выборочных значений.

Таблица 6.5

x_i	n_i	n_i/N	n_i^*/N
0	1	0,006667	0,006667
1	6	0,04	0,046667
2	16	0,106667	0,153333
3	22	0,146667	0,3
4	27	0,13	0,43
5	33	0,253333	0,733333
6	19	0,126667	0,36
7	13	0,036667	0,946667
3	6	0,04	0,936667
3	1	0,006667	0,993333
10	1	0,006667	1

Согласно пункту 4 алгоритма получим полигоны относительных и накопленных частот (рис. 6.4, 6.5).

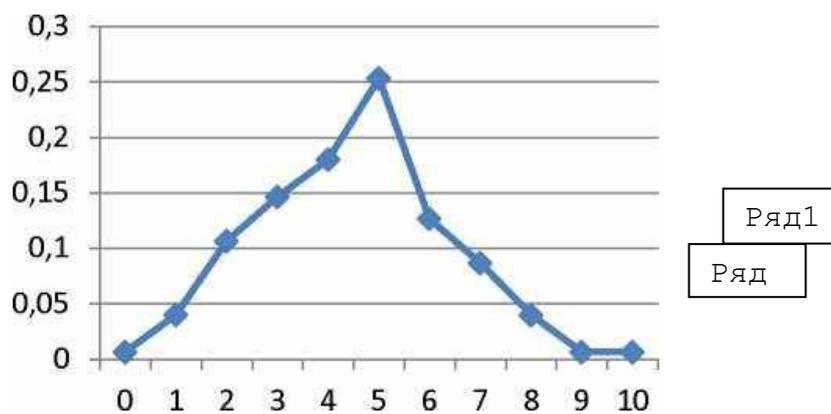


Рисунок 6.4.

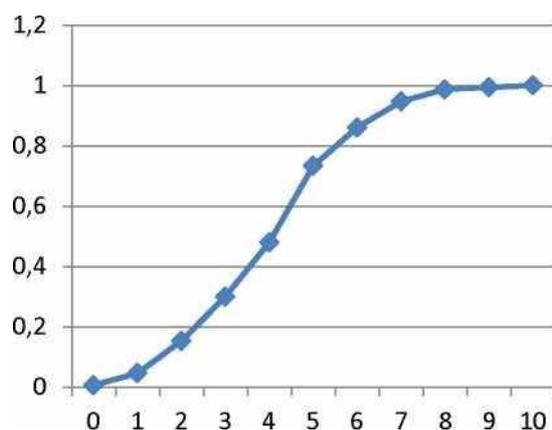


Рисунок 6.5.

Согласно пункту 5 алгоритма получаем выборочные характеристики (табл. 6.6).

Таблица 6.6

Среднее	4.49333
Стандартная ошибка	0.15063
Медиана	5
Мода	5
Стандартное	1.34553
Дисперсия выборки	3.40599
Экспесс	-
Асимметричность	0.13032
Интервал	10
Минимум	0
Максимум	10
Сумма	674
Счет	150

Проверим гипотезу о распределении случайной величины по закону Пуассона. В качестве точечной оценки параметра распределения выбираем выборочное среднее $\lambda = \bar{x} = 4,49$. В результате заполнения табл. 6.4 получим табл. 6.7. Наблюдаемое значение случайной величины $x_2 = 9,261528$. Оно получено суммированием чисел последнего столбца табл. 1.6. Критическое значение $X^2 = \chi^2_{OBR}(a, r) = 16,91898$, где $a = 0,05$, $r = k - 2 = 11 - 2 = 9$. Так как $X^2 < X^2_{кр}$, то гипотеза о распределении по закону Пуассона при уровне значимости $a = 0,05$ не противоречит опытными данным.

Таблица 6.7

xi	ni	P'	ni'	ХИ2
0	1	0,011133	1,677501	0,273626
1	6	0,05025	7,53756	0,313644
2	16	0,112396	16,93439	0,051557
3	22	0,169093	25,36393	0,446146
4	27	0,139943	23,49213	0,073142
5	38	0,170699	25,6049	6,00035
6	19	0,127335	19,17521	0,001601
7	13	0,032053	12,30365	0,033331
8	6	0,046039	6,913355	0,120667
9	1	0,02301	3,451554	1,741273
10	1	0,010339	1,550397	0,195635
				9,261523

7 Линейная парная регрессия

Эта тема включает выполнение лабораторных работ, посвященных построению и исследованию уравнения линейной регрессии вида

$$\hat{y} = f(x) = a + bx. \quad (7.1)$$

Построение линейной регрессии сводится к оценке ее параметров a , b . Классический подход к оцениванию параметров линейной регрессии основан на **методе наименьших квадратов (МНК)**.

Пример. Для определения зависимости между сменной добычей угля на одного рабочего (переменная Y , измеряемая в тоннах) и мощностью угольного пласта (переменная X , измеряемая в метрах) на 10 шахтах были проведены исследования, результаты которых представлены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	8	11	12	9	8	8	9	9	8	12
Y	5	10	10	7	5	6	6	5	6	8

Практическая работа. Вычисление коэффициентов уравнения линейной регрессии

Цель работы. Вычисление коэффициентов уравнения линейной регрессии по пространственной выборке табл. 7.1.

Расчетные соотношения. Коэффициенты, определяемые на основе МНК, являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} na + b \sum x = \sum y, \\ a \sum x + b \sum x^2 = \sum xy \end{cases} \quad (7.2)$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$a = \bar{y} - b\bar{x}, \quad (7.3)$$

$$b = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{x^2 - (\bar{x})^2} = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x^2} \quad (7.4)$$

где $\text{cov}(x, y) = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$ - выборочная ковариация; s_x^2 - выборочное значение дисперсии величины x , определяемой по формуле:

$$S_x^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x}^2). \quad (7.5)$$

Решение. Вычислим значения, используя данные табл. 7.2:

$$x = 9,4; \quad y = 6,8; \quad \bar{x} = 90,8; \quad \bar{xy} = 66,4.$$

Таблица 7.2

А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н	І	Ј	К
№ п/п	x	y	xy	x^2	y^2	$(y - \bar{y})$	$(y - \bar{y})^2$	\hat{y}_i	$(y - \hat{y}_i)$	$(y - \hat{y}_i)^2$
1	8	5	40	64	25	-1,8	3,24	5,38	0,38	0,1429
2	8	5	40	64	25	-1,8	3,24	5,38	0,38	0,1429
3	8	6	48	64	36	-0,8	0,64	5,38	-0,62	0,3869
4	8	6	48	64	36	-0,8	0,64	5,38	-0,62	0,3869
5	9	7	63	81	49	0,2	0,04	6,39	-0,61	0,3672
6	9	6	54	81	36	-0,8	0,64	6,39	0,39	0,1552
7	9	5	45	81	25	-1,8	3,24	6,39	1,39	1,9432
8	11	10	110	121	100	3,2	10,24	8,43	-1,57	2,4775
9	12	10	120	144	100	3,2	10,24	9,44	-0,56	0,3114
10	12	8	96	144	64	1,2	1,44	9,44	1,44	2,0794
Сумма	94	68	664	908	496	0	33,6	68	0	8,3934
Среднее	9,4	6,8	66,4	90,8	49,6					

Коэффициенты a , b вычислим по формулам (7.3), (7.4)

соответственно:

$$a = -2,75; \quad b = 1,02,$$

а само уравнение регрессии (2.1) примет

вид

$$\hat{y} = f(x) = -2,75 + 1,02x. \quad (7.6)$$

Практическая работа. Вычисление выборочного коэффициента корреляции

Цель работы. Вычисление выборочного коэффициента корреляции по пространственной выборке табл. 7.1.

Расчетные соотношения. Выборочный коэффициент корреляции определяется соотношением

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x \cdot s_y}, \quad (7.7)$$

$$s_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}; \quad s_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}; \quad \bar{y}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2. \quad (7.8)$$

Решение. Используя вычисления лабораторной работы 7.1, данные табл. 7.2 и формулы (7.7), (7.8), получим:

$$s_x = 1,56; \quad y^2 = 49,6; \quad S_y = 1,83; \quad r_{xy} = \frac{66,4 - 9,4 \cdot 6,8}{1,56 \cdot 1,83} = \frac{2,48}{2,86} = 0,87.$$

Величина $r_{xy} = 0,87$ говорит о сильной положительной линейной связи.

Практическая работа. Проверка значимости уравнения линейной регрессии по критерию Фишера

Цель работы. По данным табл. 7.1 оценить при уровне $\alpha = 0,05$ значимость уравнения регрессии (7.6), построенного в лабораторной работе 7.1. **Критерий Фишера (F-критерий).** Уравнение парной регрессии значимо при уровне значимости α , если выполняется следующее неравенство:

$$F = \frac{Q_r(n-2)}{Q_e} > F_{1-\alpha; 1; n-2}. \quad (7.9)$$

Величины Q_r , Q_e являются факторной и остаточной суммами квадратов соответственно:

$$Q_r = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2, \quad Q_e = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2. \quad (7.10)$$

Величина $F_{1-\alpha; 1; n-2}$ - табличное значение F-распределения с числами степеней свободы $k_1 = 1$ и $k_2 = n - 2$ квантиля уровня $\gamma = 1 - \alpha$ (прил. 2). Эту вероятность можно также определить с помощью функции

ФРАСПОБР:

$$F_{1-\alpha; 1; n-2} = \text{ФРАСПОБР}(\alpha; 1; n - 2). \quad (7.11)$$

Значение F для *линейной* парной регрессии можно вычислить через коэффициент корреляции:

$$F = \frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2} (n - 2). \quad (7.12)$$

Величина $r_{xy}^2 = R^2$ называется коэффициентом детерминации и характеризует долю дисперсии результативного признака y , объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака:

$$R^2 = 1 - \frac{Q_e}{Q}, \quad \text{где } Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (7.13)$$

Соответственно величина $1 - r_{xy}^2$ характеризует долю дисперсии y , вызванную влиянием остальных, не учтенных в модели факторов. Решение. Вычислим значения Q_e , $Q_r = Q - Q_e =$ и критерий F по данным табл. 7.2. В столбце **I** значения вычисляются по формуле (7.6). Итак, получены следующие значения:

$$Q_e = 8,39, Q_r = Q - Q_e = 33,6 - 8,39 = 25,21,$$

$$F = \frac{Q_r(n-2)}{Q_e} = \frac{25,21 \cdot 8}{8,39} = 24,03.$$

По формуле (2.11) при $k_1 = 1$, $k_2 = 8$ или по таблице (приложение 2) вычисляем квантиль $F_{0,95; 1; 8} = 5,32$. Неравенство (7.9) выполняется, т. е. $24,03 > 5,32$, и поэтому уравнение регрессии (7.6) значимо.

Практическая работа. Вычисление коэффициентов уравнения линейной регрессии

Цель работы. Вычисление коэффициентов уравнения линейной регрессии.

В вычислительной среде табличного процессора MS Excel эта задача решается при помощи статистических функций НАКЛОН (наклон прямой относительно оси X , коэффициент b) и ОТРЕЗОК (отрезок, отсекаемый прямой на оси Y , коэффициент a).

Для знакомства с этими возможностями введем необходимые исходные данные (табл. 7.3). В столбцах В и С вводятся данные табл. 2.1, записи в столбце Е играют роль подсказок, столбец F заполняется по мере обработки. В ячейку F3 вводится функция НАКЛОН, в ячейку F4 - ОТРЕЗОК. Обе эти функции имеют два аргумента: диапазон ячеек со значениями Y (С3:С12) и диапазон ячеек со значениями X (В3:В12).

Статистическая функция КВПИРСОН вычисляет значение коэффициента детерминации.

Таблица 7.3

	А	В	С	Д	Е	Ф
1	Линейная зависимость			Обработка		
2	№	X	Y			
3	1	8	5	НАКЛОН	1.0164	
4	2	11	10	ОТРЕЗОК	-2.754	
5	3	12	10	КВПИРСОН	0,7502	
6	4	9	7			
7	5	8	5			
8	6	8	6			
9	7	9	6			
10	8	9	5			
11	9	8	6			
12	10	12	8			

Функция ЛИНЕЙН (изв_знач_у; изв_знач_х; константа; стат) вычисляет коэффициенты линейной регрессии, коэффициент детерминации R^2 , F-статистику. В поле «изв_знач_у» вводится диапазон значений Y (C3:C12); «изв_знач_х» – диапазон значений X (B3:B12); константа устанавливается на 0, если заранее известно, что свободный член равен 0, и на 1 в противном случае; стат устанавливается на 0, если не нужен вывод дополнительных сведений регрессионного анализа, и на 1 в противном случае.

Порядок использования функции ЛИНЕЙН:

1. Выделить область пустых ячеек 5×2 (5 строк, 2 столбца) для вывода результатов регрессионной статистики и 1×2 для вывода только коэффициентов a, b.

2. Ввести функцию ЛИНЕЙН вручную или через Мастер функций.

3. После корректного ввода функции в левой верхней ячейке выделенной таблицы появится первый итоговый элемент таблицы. Чтобы раскрыть всю таблицу, следует сначала нажать клавишу F2, а затем одновременно нажать клавиши [Ctrl], [Shift], [Enter]. Далее появляется следующая регрессионная статистика, представленная в табл.7.4.

Таблица 7.4

Значение коэффициента b	Значение коэффициента a
Среднеквадратическое отклонение b	Среднеквадратическое отклонение a
Коэффициент детерминации R	Среднеквадратическое отклонение y
F-статистика	Число степеней свободы
Регрессионная сумма квадратов	Остаточная сумма квадратов

Решение. В результате выполнения вышеуказанных действий получим табл. 7.5. Значения в табл. 7.5 совпадают со значениями, полученными в лабораторных работах 7.1, 7.3.

Таблица 7.5

Значение коэффициента b	1,0164	-2,754	Значение коэффициента a
Среднеквадратическое отклонение b	0,2074	1,9759	Среднеквадратическое отклонение a
Коэффициент детерминации R^2	0,7502	1,0243	Среднеквадратическое отклонение y
F-статистика	24,025	8	Число степеней свободы
Регрессионная сумма квадратов	25,207	8,3934	Остаточная сумма квадратов

Практическая работа. Автокорреляция остатков. статистика Дарбина-Уотсона

Цель работы. Научиться пользоваться статистикой Дарбина-Уотсона.

Одна из предпосылок МНК - это независимость значений случайных отклонений от значений отклонений во всех других наблюдениях. Автокорреляция (последовательная корреляция) - это корреляция между наблюдаемыми показателями, упорядоченными во времени (временные ряды) или в пространстве (перекрестные ряды). Нам неизвестны истинные значения отклонений $e_i = y_i - f(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Поэтому выводы об их независимости делаются на основе оценок e_i , $i = 1, \dots, n$. При этом обычно проверяется некоррелированность только соседних величин. При наличии автокорреляции остатков полученное уравнение регрессии считается неудовлетворительным.

Критерий Дарбина-Уотсона - наиболее известный способ обнаружения автокорреляции первого порядка. Пусть n - число наблюдений, k - число факторов модели, уровень значимости α . Для n , k , α по таблицам распределения Дарбина-Уотсона (прил. 3) находим числа d_l и d_u . Вычисляем статистику Дарбина-Уотсона

$$DW = \frac{\sum_{i=1}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2}$$

Здесь $e_i = y_i - (ax_i + b)$ - остатки, вычисленные по уравнению линейной регрессии $y = a + bx$ для статистических данных (x_i, y_i) .

Если $DW < d_l$, то это свидетельствует о положительной автокорреляции остатков. Если $DW > 4 - d_l$, то это свидетельствует об отрицательной автокорреляции остатков. При $d_u < DW < 4 - d_u$ гипотеза об отсутствии автокорреляции остатков принимается.

Если $d_l < DW < d_u$ или $4 - d_u < DW < 4 - d_l$,

то гипотеза об отсутствии автокорреляции остатков не может быть ни принята, ни отвергнута.

Решение. Вернемся к примеру. Определим наличие автокорреляции с помощью критерия Дарбина–Уотсона. В столбце К табл. 2.2 получили

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = 8,39$$

Во второй столбец e_i табл. 7.6 введем данные столбца J табл. 7.2. Из каждого числа 2-го столбца вычитаем предыдущее число этого же столбца и результат введем в третий столбец $e_i - e_{i-1}$. Статистика Дарбина-Уотсона равна:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} = \frac{16,78}{8,39} = 2.$$

Таблица 6

№ п/п	e_i	$e_i - e_{i-1}$	$(e_i - e_{i-1})^2$
1	0,38	-	-
2	0,38	0	0
3	-0,62	-1,00	1
4	-0,62	0	0
5	-0,61	0,01	0
6	0,39	1	1
7	1,39	1	1
8	-1,57	-2,96	8,76
9	-0,56	1,01	1,02
10	1,44	2	4
Сумма			16,78

По таблице распределения Дарбина-Уотсона (прил. 3) находим числа $d_l = 0,88$ и $d_u = 1,32$ при $n = 10$, $k = 1$. Так как $d_u < DW < 4 - d_u$ ($1,32 < 2 < 2,68$), то гипотеза об отсутствии автокорреляции остатков не отклоняется на уровне значимости $0,05$. Это является одним из подтверждений высокого качества модели.

8. Нелинейная парная регрессия

Эта тема включает выполнение лабораторных работ, посвященных построению уравнения нелинейной парной регрессии.

Пример. В табл. 8.1 приведены значения независимой переменной X (товарооборот, тыс. р.) и значения зависимой переменной Y (уровень издержек обращения по отношению к товарообороту, %).

Таблица 8.1

X	7	10	15	20	30	45	60	120
Y	10	9	7,2	6	6,3	5,8	5,4	5

Практическая работа. Построение нелинейной регрессии

Цель работы. Построить уравнение нелинейной регрессии и вычислить индекс детерминации R^2

Расчетные соотношения. В случае нелинейных зависимостей с помощью некоторых преобразований можно перейти к линейным. Приведем некоторые из нелинейных функций и их модификацию к линейной функции — табл. 8.2

Таблица 8.2

№ п /п	Исходная спецификация	Преобразование $x \rightarrow x^*$	Преобразование $y \rightarrow y^*$	Вычисление b по b^*	Вычисление a по a^*
1	$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$	$x^* = \frac{1}{x}$	$y^* = y$	$b = b^*$	$a = a^*$
2	$y = \frac{1}{a + bx + \varepsilon}$	$x^* = x$	$y^* = \frac{1}{y}$	$b = b^*$	$a = a^*$
3	$y = \frac{x}{a + bx + x\varepsilon}$	$x^* = \frac{1}{x}$	$y^* = \frac{1}{y}$	$b = a^*$	$a = b^*$
4	$y = ae^{bx+\varepsilon}$	$x^* = x$	$y^* = \ln y$	$b = b^*$	$a = e^{a^*}$
5	$y = ae^{\frac{b}{x}+\varepsilon}$	$x^* = \frac{1}{x}$	$y^* = \ln y$	$b = b^*$	$a = e^{a^*}$
6	$y = \frac{1}{a + be^{-x} + \varepsilon}$	$x^* = e^{-x}$	$y^* = \frac{1}{y}$	$b = b^*$	$a = a^*$
7	$y = ax^b e^\varepsilon$	$x^* = \ln x$	$y^* = \ln y$	$b = b^*$	$a = e^{a^*}$

Решение. На рис. 8.1 изображены данные в виде диаграммы. Из этого рисунка видно, что зависимость между показателями нелинейная. Будем искать регрессионную в виде степенной: $y = ax^b$; переходя к логарифмам (модификация табл.3.2) получим линейную зависимость $y^* = a^* + bx^*$, где $y^* = \ln y, x^* = \ln x$.

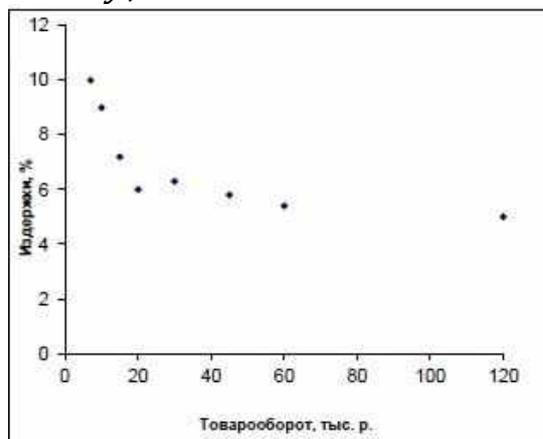


Рисунок 8.1

Определяем коэффициенты a^*, b для модифицированных данных. Исходные данные и основные вычисления приведены в табл. 8.3.

Таблица 8.3

№ п/п	x	$x^* = \ln x$	$y^* = \ln y$	x^2	y^2	$(y - \bar{y}_x)^2$	\hat{y}_x	$(y - \hat{y}_x)^2$
1	7	1,95	2,30	3,79	5,30	10,00	9,12	0,77
2	10	2,30	2,20	5,30	4,83	4,68	8,37	0,40
3	15	2,71	1,97	7,33	3,90	0,13	7,59	0,15
4	20	3,00	1,79	8,97	3,21	0,70	7,08	1,17
5	30	3,40	1,84	11,57	3,39	0,29	6,42	0,02
6	45	3,81	1,76	14,49	3,09	1,08	5,82	0,00
7	60	4,09	1,69	16,76	2,84	2,07	5,43	0,00
8	120	4,79	1,61	22,92	2,59	3,38	4,60	0,16
Итого		26,04	15,16	91,14	29,15	22,32	-	2,67

Аналогично практической работе 7.1 определим коэффициенты a^* и b из соотношений (7.3), (7.4): $a^* \approx 2,68; b \approx -0,24$. По величине $a^* = 2,68$ потенцированием находим исходный коэффициент a : $a = e^{2,68} \approx 14,58$

Таким образом уравнение регрессии имеет вид: $y = 14,58x^{-0,24}$
Изобразим эту кривую на диаграмме с исходными данными (рис.3.2)

Вычислим:

$$Q_B = 2,67; Q_r = Q - Q_B = 22,32 - 2,67 = 19,65$$

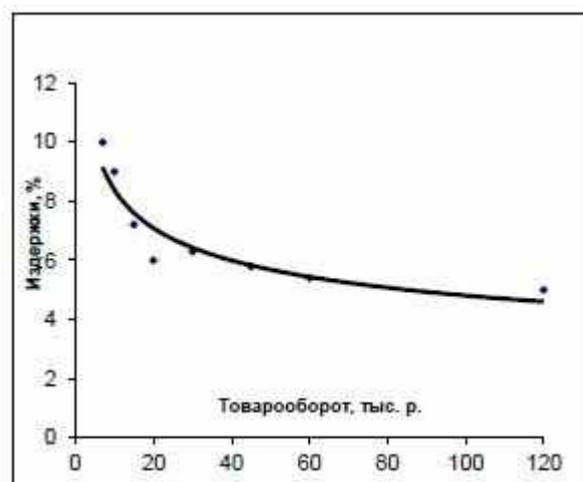


Рисунок 8.2

Согласно формуле (7.13) индекс детерминации равен

$$R^2 = 1 - \frac{Q_B}{Q} = 1 - \frac{2,67}{22,32} = 1 - 0,12 = 0,88$$

Вычисленное значение говорит о том, что уравнение регрессии объясняется 88 % дисперсии результативного признака, а на долю прочих факторов приходится лишь 12 %.

Практическая работа. Построение нелинейной регрессии с использованием команды «Добавить линию тренда»

Цель работы. Построить уравнение нелинейной регрессии с использованием команды «Добавить линию тренда».

Команда «Добавить линию тренда» используется для выделения тренда (медленных изменений) при анализе временных рядов. Однако эту команду можно использовать и для построения уравнения нелинейной регрессии, рассматривая в качестве времени t независимую переменную x .

Эта команда позволяет построить следующие уравнения регрессии:

- линейная $\hat{y} = a + bx$;
- полиномиальная $\hat{y} = a + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6$;
- логарифмическая $\hat{y} = a + b$;
- степенная $\hat{y} = ax^b$
- экспоненциальная $\hat{y} = ae^{bx}$

Для построения одной из перечисленных регрессий необходимо выполнить следующие шаги:

Шаг 1. Ввести по столбцам исходные данные $\{x_i|y_i\}$, $i=1,2,\dots, n$ (рис 8.3)

Шаг 2. По этим данным построить график в декартовой системе координат (рис.8.3)

Шаг 3. Установить курсор на любую точку построенного графика, сделать щелчок правой кнопкой мыши и в появившемся контекстном меню выполнить команду **Добавить линию тренда** (рис. 8.3)

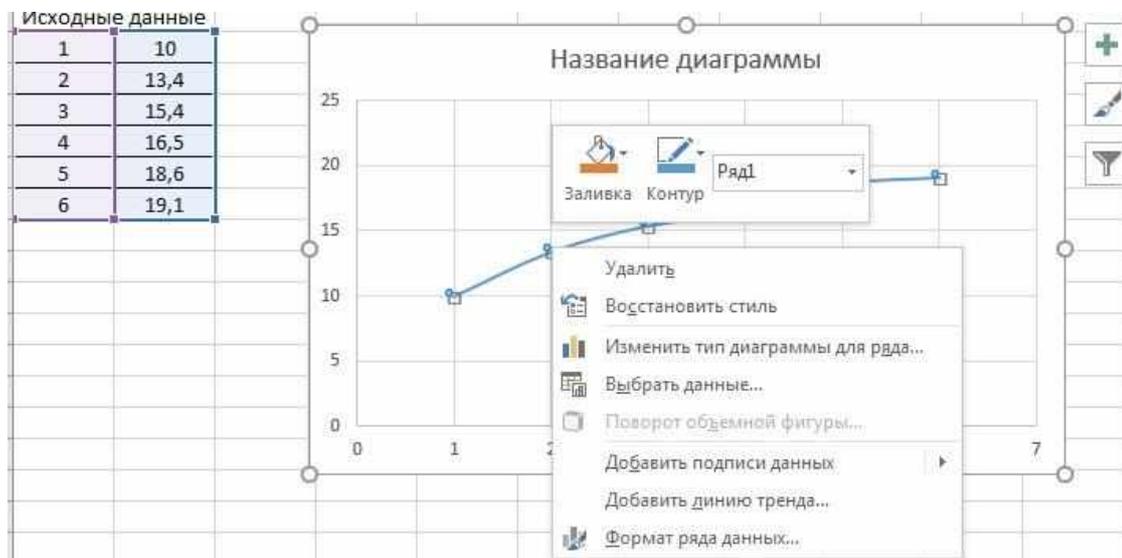


Рисунок 8.3

Шаг 4. В появившемся диалоговом окне выбрать нужное уравнение регрессии.

Шаг 5. «Включить» необходимые опции:

- **«Показать уравнение на диаграмме»** — на диаграмме будет показано выбранное уравнение регрессии с вычисленными коэффициентами.
- **«Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)»** — на диаграмме будет показано значение коэффициента детерминации R^2 (для нелинейной регрессии — индекс детерминации)

Если по построенному уравнению регрессии необходимо выполнить прогноз, то нужно указать число период прогноза.

Шаг 6. После задания всех перечисленных опций на диаграмме появится формула построенного уравнения регрессии и значения индекса детерминации R^2 .

Решение. По данным табл. 8.1 построить степенное уравнение регрессии $\hat{y} = ax^b$. После выполнения перечисленных шагов получим уравнение $\hat{y} = 14,58 x^{-0,24}$, для которого индекс детерминации равен $R^2 = 0,877$ (рисунок 8.4). Такая величина говорит о хорошем соответствии построенного уравнения исходными данными.

	x	y
1	7	10
2	10	9
3	15	7,2
4	20	6
5	30	6,3
6	45	5,8
7	60	5,4
8	120	5

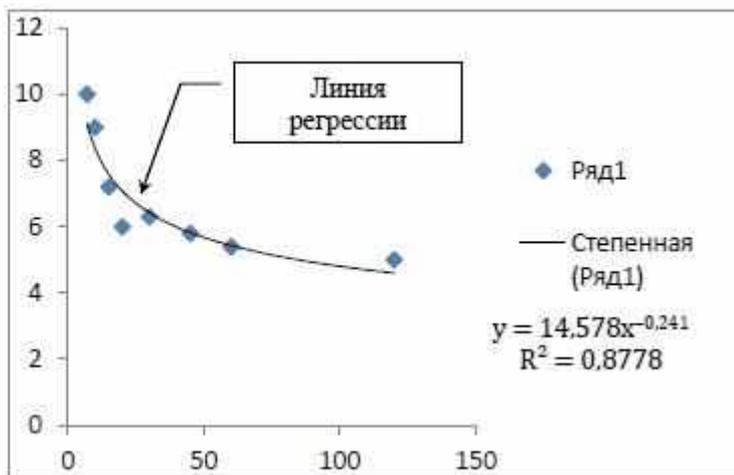


Рисунок 8.4

Практическая работа. Взвешенный метод наименьших квадратов

Цель работы. Освоение применения взвешенного метода наименьших квадратов для коррекции гетероскедастичности остатков.

Расчетные соотношения. После применения обычного МНК выясняется гетероскедастичность остатков: стандартное отклонение остатков линейно увеличивается при увеличении независимой переменной. Необходимо применить модификацию взвешенного МНК для коррекции такой гетероскедастичности.

Решение. Построить точечную диаграмму исходных данных, поместить на нее линию тренда, его уравнение и индекс детерминации.

1. Сформировать массив остатков.

2. Модифицировать массив независимой переменной следующим образом:

$$x_i^* = 1/x_i$$

3. Модифицировать массив зависимой переменной следующим образом: $y_i^* = y_i/x_i$

4. По полученным данным модифицированной регрессии x_i^*, y_i^* построить диаграмму облака рассеивания и индексом детерминации. Сравнить это уравнение с уравнением исходной регрессии.

9 Линейная множественная регрессия

Эта тема включает выполнение лабораторных работ, посвященных построению и исследованию уравнения линейной множественной регрессии вида

$$\hat{y}(x_1, x_2) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 \quad (9.1)$$

Пример. Данные о сменной добыче угля одного рабочего (переменная Y , измеряется в тоннах), мощности пласта (переменная X_1 , измеряется в метрах) и об уровне механизации работ в шахте (переменная X_2 , измеряется в процентах), характеризующие процесс добычи угля в 10 шахтах, приведены в табл.4.1.

Таблица 9.1

Номер шахты i	X_1	X_2	Y
1	8	5	5
2	11	8	10
3	12	8	10
4	9	5	7
5	8	7	5
6	8	8	6
7	9	6	6
8	9	4	5
9	8	5	6
10	12	7	8

Предполагая, что между переменными Y, X_1, X_2 существует линейная зависимость, необходимо найти аналитическое выражение для этой зависимости, т.е. построить уравнение линейной регрессии.

Практическая работа. Вычисление коэффициентов линейной множественной регрессии

Цель работы. Для пространственной выборки табл. 9.1 необходимо вычислить вектор коэффициентов $b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ уравнение регрессии (9.1)

Расчетные соотношения. Вектор коэффициентов, найденный

методом наименьших квадратов, является решением следующей системы уравнений:

$$X^T X b = X^T Y,$$

где X -матрица размерности 10×3 , первый столбец, который составлен из 1, а другие два столбца составлены из значений x_{i1} , x_{i2} , т.е. матрица X имеет структуру

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 1 & 11 & 8 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 12 & 7 \end{pmatrix},$$

а Y -вектор, составленный из 10 значений y_i , т.е.

$$Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ \dots \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Матрица $X^T X$ имеет обратную матрицу $(X^T X)^{-1}$, и тогда вектор коэффициентов равен

$$b = (X^T X)^{-1} (X^T Y). \quad (9.2)$$

Для реализации этой матричной формулы необходимо выполнять следующие операции: умножение матриц (частный случай— умножение матрицы на вектор); вычисление обратной матрицы. Все эти операции можно реализовать с помощью матричных функций *MS Excel* категории функций **Ссылки и массивы**. Для работы с этими функциями можно либо обратиться к **Мастеру функций** и выбрать нужную категорию функций, затем указать имя функции и задать соответствующие диапазоны ячеек, либо непосредственно ввести с клавиатуры имя функции и задать соответствующий диапазоны ячеек.

Функция **ТРАНСП (диапазон ячеек)** осуществляется транспонирование матрицы, где параметр диапазон ячеек задает все элементы транспонируемой матрицы (или вектора).

Функция **МУМНОЖ (диапазон_1; диапазон_2)** осуществляет умножение матриц в категории функций **Математические**. Параметр **диапазон_1** задает элементы первой из перемножаемых матриц, а параметр **диапазон_2** —элементы второй матрицы. При этом перемножаемые матрицы должны иметь соответствующие размерности (если первая матрица размерности $n \times k$, вторая — $k \times t$, то результатом будет матрица размерности $n \times t$).

Функция **МОБР (диапазон ячеек)** осуществляет обращение матрицы (вычисление обратной матрицы) в категории функции **Математические**. Параметр **диапазон ячеек** задает все элементы

обращаемой матрицы, которая должна быть квадратной и невырожденной.

При использовании этих функций необходимо соблюдать следующий порядок действий

1. Выделить фрагмент ячеек, в которые будет занесен результат выполнения матричных функций (при этом надо учитывать размеры исходной матрицы)
2. Ввести арифметическое выражение, содержащее к матричным функциям *MS Excel*;
3. Одновременно нажать клавиши **[Ctrl]**, **[Shift]**, **[Enter]**. Если этого не сделать, то вычислится только один элемент результирующей матрицы или вектора.

Решение. Сформируем матрицу X и вектор Y . Затем выполним формирование матрицы $X^T X$, вектора $X^T Y$ и вычисление вектора $b = (b_0, b_1, b_2)^T$ по формуле (4.2). В результате получим вектор коэффициентов

$$b = \begin{pmatrix} -3,5393 \\ 0,8539 \\ 0,3670 \end{pmatrix} \text{ и тогда уравнение регрессии (4.1) примет вид}$$
$$\hat{y}(x_1, x_2) = -3,5393 + 0,8539x_1 + 0,367x_2$$

(4.3)

Практическая работа. Вычисление коэффициентов линейной множественной регрессии и проверка значимости в режиме регрессия

Цель работы. Используя режим Регрессия, вычислить вектор коэффициентов уравнения регрессии (9.1)

Табличный процессор *MS Excel* содержит модуль **Анализ данных**. Этот модуль позволяет выполнить статистический анализ выборочных данных (построение гистограмм, вычисление числовых характеристик и т.д.). Режим работы **Регрессия** этого модуля осуществляется вычисление коэффициентов линейной множественной регрессии с k переменными, построение доверительных интервалов и проверку значимости уравнения регрессии.

После вызова режима **Регрессия** на экране появляется диалоговое окно (рис 9.1), в котором задаются следующие параметры:

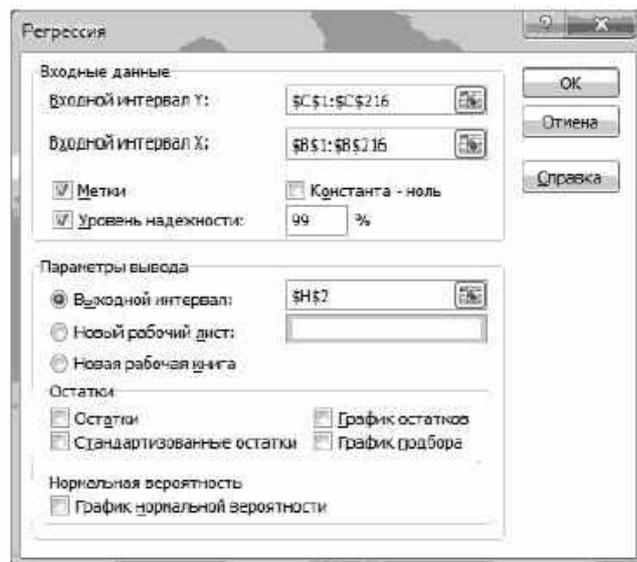


Рис. 9.1

1. *Входной интервал Y* – вводится диапазон ячеек, содержащих значения y_i (ячейки должны составлять один столбец).

2. *Входной интервал X* – вводится диапазон ячеек содержание значения независимых переменных. Значения каждой переменной представляются одним столбцом. Количество переменных- не более 16.

3. *Метки* – включается, если первая строка во входном диапазоне содержит заголовок. В этом случае автоматически будут созданы стандартные названия.

4. *Уровень надежности* – при включении этого параметра задается надежность γ при построении доверительных интервалов.

5. *Константа-ноль* – при включении этого параметра коэффициент $b_0 = 0$.

6. *Выходной интервал* – при включении активизируется поле, в которое необходимо ввести адрес левой верхней ячейки выходного диапазона, который содержит ячейки с результатами вычисления режима **Регрессия**.

7. *Новый рабочий лист* – при включении этого параметра открывается новый лист, в который, начиная с ячейки **A1**, вставляются результаты работы режима **Регрессия**.

8. *Новая рабочая книга* – при включении этого параметра открывается новая книга, на первом листе которой, начиная с ячейки **A1**, вставляются результаты работы режима **Регрессия**.

9. *Остатки* – при включении вычисляется столбец, содержащий невязки $y_i - \hat{y}_i, i = 1, \dots, n$.

10. *Стандартизированные остатки* – при включении вычисляется столбец, содержащий стандартизированные остатки.

11. *График остатков* – при включении выводятся точечные графики невязки $y_i - \hat{y}_i, i = 1, \dots, n$ в зависимости от значений переменных $x_j, j = 1, \dots, k$. Количество графиков равно числу k переменных x_j .

12. *График подбора* – при включении выводятся точечные графики предсказанных по построенной регрессии значений \hat{y}_i от значений переменных $x_j, j = 1, \dots, k$. Количество графиков равно числу k переменных x_j .

Решение. Первоначально введем в столбец **C** десять значений первой переменной X_1 , в столбец **D** – десять значений второй переменной X_2 , а в столбец **F** – десять значений переменной Y .

После этого вызовем режим **Регрессия** и в диалогом окне зададим необходимые параметры (рис. 4.1). Результаты работы приведены на рис.4.2 -4.3. Заметим, что из-за большой «ширины» таблиц, в которых выводятся результаты работы режима **Регрессия**, часть результатов помещена в другие ячейки.

Дадим краткую интерпретацию показателем, значения которых вычисляются в режиме **Регрессия**. Первоначально рассмотрим показатели, объединённые названием *Регрессионная статистика* (рис. 9.2).

ВЫВОДИТОГОВ			
<i>Регрессионная статистика</i>			
Множественный R	0,9009		
R-квадрат	0,8116		
Нормированный R-квадрат	0,7578		
Стандартная ошибка	0,9509		
Наблюдения	10		
Дисперсионный анализ			
	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>
Регрессия	2	27,2704	13,635
Остаток	7	6,3296	0,904
Итого	9	33,6000	
		<i>F</i>	<i>Значимость F</i>
		15,0794	0,0029

Рисунок 9.2

Множественный R – корень квадратный из коэффициента

детерминации.

R-квадрат – коэффициент детерминации R^2 .

Нормированный R-квадрат – приведенный коэффициент детерминации.

$$\widehat{R}^2 = 1 - \frac{(n-1)Q_B}{(n-k)Q} = 1 - \frac{n-1}{n-k}(1 - R^2).$$

Стандартная ошибка – оценка S для среднеквадратичного отклонения σ .

Наблюдения – число наблюдений n .

Перейдем к показателям, объединенными названием *Дисперсионный анализ* (рис. 9.2).

Столбец df – число степеней свободы. Для строки *Регрессия* показатель числу равен числу независимых переменных $k_1 = k - 1$; для строки *Остаток* он равен $k_2 = n - (k_1 + 1) = n - k$; для строки *Итого* $Q = Q_r + Q_e$.

Столбец SS – сумма квадратов отклонений. Для строки *Регрессия* показатель равен величине Q_r (см. формулы (7.10)); Для строки *Остаток* – равен величине Q_B (см. формулы (7.10)); для строки *Итого* $Q = Q_r + Q_e$.

Столбец MS – дисперсии, вычисленные по формуле $MS = \frac{SS}{df}$, т.е. дисперсия на одну степень свободы.

Столбец F – значение F_c , равное F -критерию Фишера, вычисленному по формуле

$$F_c = \frac{Q_r/k_1}{Q_e/k_2}$$

Столбец значимости F – значение уровня значимости, соответствующее вычисленной величине F -критерия и равное вероятности $P(F(k_1, k_2) \geq F_c)$, где $F(k_1, k_2)$ – случайная величина, подчиняющаяся распределению Фишера с k_1, k_2 степенями свободы. Если вероятность меньше уровня значимости α (обычно $\alpha = 0.05$), то построенная регрессия является значимой.

Перейдем к следующей группе показателей, объединенных в табл. 9.2.

Таблица 9.2

	<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t- статистика</i>
У-пересечение	-3,539	1,907	-1,8564
Переменная X_1	0,854	0,221	3,8726
Переменная X_2	0,367	0,243	1,5108
	<i>P-значение</i>	<i>Нижние 95 %</i>	<i>Верхние 95%</i>
	0,1058	-8,0477	0,9690
	0,0061	0,3325	1,3753
	-0,1746	-0,2074	0,9415

Столбец Коэффициенты – вычисленные значения коэффициентов b_0, b_1, \dots, b_k , расположенных сверху вниз.

Столбец Стандартная ошибка – значения $s_{b_j}, j = 0, \dots, k$, вычисленные по формуле

$$s_{b_j} = \sqrt{s^2 \{(X^T X)^{-1}\}_{jj}}$$

Столбец t-статистика – значение статистик T_{b_j} .

Столбец P-значение – содержит вероятности случайных событий $P(t(n-k) \geq T_{b_j})$, где $t(n-k)$ – случайная величина, подчиняющаяся распределению Стьюдента с $n-k$ степенями свободы.

Если эта вероятность меньше уровня значимости α , то принимается гипотеза о значимости соответствующего коэффициента регрессии.

Из табл. 9.2 видно, что значимым коэффициентом является только коэффициент при x_1 : $b_1 = 0,854$, так как P – значения при x_1 равно 0,0061, что меньше α .

Столбцы Нижние 95% и Верхние 95% – соответственно нижние и верхние интервалы для оцениваемых коэффициентов β_j .

Перейдем к следующей группе показателей, объединенных в табл.4.3.

Столбец Наблюдение – содержит номера наблюдений.

Столбец Предсказание Y – значения \hat{y}_i , вычисленные по построенному уравнению регрессии.

Столбец Остатки – значение невязок $y_i - \hat{y}_i$.

Таблица 9.3

ВЫВОД ОСТАТКА			
Наблюдение	Предсказанное Y	Остатки	Стандартные остатки
1	5,127	-0,127	-0,152
2	8,790	1,210	1,443
3	9,644	0,356	0,424
4	5,981	1,019	1,215
5	5,861	-0,861	-1,027
6	6,228	-0,228	-0,272
7	6,348	-0,348	-0,415
8	5,614	-0,614	-0,732
9	5,127	0,873	1,041
10	9,277	-1,277	-1,523

В заключении рассмотрения результатов режима работы *Регрессия* приведем график невязок – остатков $y_i - \hat{y}_i$ при заданных значениях только второй переменной (рис. 9.3). Наличие чередующихся положительных и отрицательных значений невязок является косвенным признаком отсутствия систематической ошибки (неучтенной независимой переменной) в построенном уравнении регрессии.

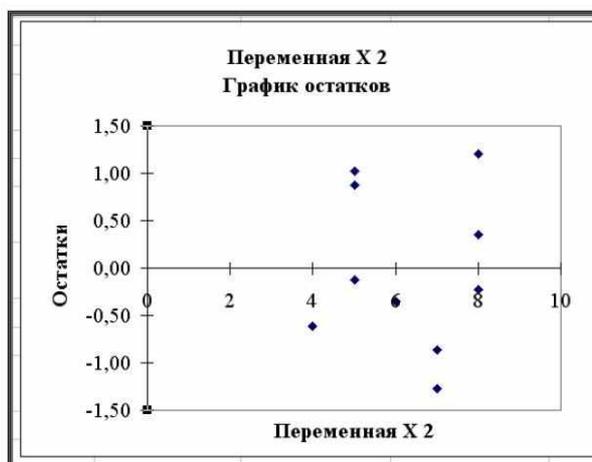


Рис. 4.3.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

10. Беззубцева М.М. Электротехнологии и электротехнологические установки: учебное пособие, 2012. – СПб.: СПбГАУ, 242 с.
11. Беззубцева М.М., Волков В.С., Пиркин А.Г., Фокин С.А. Энергетика технологических процессов – учебное пособие, 2011. – СПб.: СПбГАУ, 265 с.
12. Беззубцева М.М., Волков В.С., Зубков В.В. Прикладная теория тепловых и массообменных процессов в системном анализе энергоемкости продукции: – учебное пособие, 2013. – СПб.: СПбГАУ, 131 с.
13. Беззубцева М.М., Карпов В.Н., Волков В.С. Энергетическая безопасность АПК – учебное пособие, 2012. – СПб.: СПбГАУ, 242 с.
14. Беззубцева М.М., Волков В.С., Котов А.В. Энергоэффективные электротехнологии в агроинженерном сервисе и природопользовании - учебное пособие, 2012. – СПб.: СПбГАУ. – 260 с.
15. Беззубцева М.М., Ковалев М.Э. Электротехнологии переработки и хранения сельскохозяйственной продукции – учебное пособие, 2012. – СПб.: СПбГАУ. – 242 с.
16. Беззубцева М.М., Карпов В.Н., Волков В.С. Менеджмент интеллектуальной собственности в агробизнесе: – учебное пособие, 2014. – СПб.: СПбГАУ. – 133 с.
17. Беззубцева М.М., Волков В.С., Обухов К.Н., Котов А.В. Компьютерные технологии в научных исследованиях энергоэффективности потребительских энергосистем АПК. Методология исследования инновационных электротехнологических процессов в программном комплексе ANSYS», 2014. – СПб.: СПбГАУ. – 260 с.
18. Беззубцева М.М., Волков В.С. Практикум по технологическим расчетам процессов переработки сельскохозяйственного сырья, 2014. – СПб.: СПбГАУ. – 94 с.
19. Беззубцева М.М., Волков В.С. Нанотехнологии в энергетике: учебное пособие, 2012. – СПб.: СПбГАУ. – 133 с.

20. Беззубцева М.М., Волков В.С. Будущее энергетики человечества: учебное пособие, 2014. - СПб.: СПбГАУ. – 133 с.
21. Беззубцева М.М., Гулин С.В., Пиркин А.Г. Энергетический менеджмент и энергосервис в аграрном секторе экономики - учебное пособие, 2014. – СПб.: СПбГАУ. – 186 с.
22. Гулин С.В., Пиркин А.Г. Основы энергетического менеджмента и энергоаудита в аграрном секторе экономики: учебно-методическое пособие, 2011. – СПб.: СПбГАУ. – 85 с.
23. Беззубцева М.М., Мазин Д.А., Тюпин С.В. Энергетика технологических процессов: лабораторный практикум, 2009. – СПб.: СПбГАУ. – 122 с.
24. Халатов А.Н., Беззубцева М.М., Лазарева И.А. Электромембранные процессы: учебно-методическое пособие, 2009. – СПб.: СПбГАУ. – 44 с.
25. Волков В.С., Прибытков П.С., Елисеев А.Н. Расчет электромагнитного механоактиватора с применением программного комплекса ANSYS, 2009. - СПб.: СПбГАУ. – 52 с.
26. Беззубцева М.М., Волков В.С., Фокин С.А. Электротехнология. Практикум по электротехнологическим процессам, 2010. – СПб.: СПбГАУ. – 148 с.
27. Беззубцева М.М., Волков В.С., Котов А.В., Обухов К.Н. Инновационные электротехнологии в АПК: учебное пособие, 2015. – СПб.: СПбГАУ. – 148 с.
28. Беззубцева М.М., Волков В.С. Логика и методология в научных исследованиях инжиниринговых энергосистем: учебно-методическое пособие, 2015. – СПб.: СПбГАУ. – 107 с.
29. Беззубцева М.М. Методика организации научно-исследовательской работы магистрантов: учебно-методическое пособие, 2015. – СПб.: СПбГАУ, 67 с.
30. Беззубцева М.М., Волков В.С. Научно-исследовательская работа магистрантов. Патентно-информационные исследования, 2015. – СПб.: СПбГАУ, 151 с.
31. Беззубцева М.М., Волков В.С., Обухов К.Н. Инжиниринг энерготехнологических процессов в АПК, 2015 – СПб: СПбГАУ, 122 с.

32. Беззубцева М.М., Котов А.В. Компьютерные технологии в научно-экспериментальных исследованиях, 2015 – СПб: СПбГА, 74 с.
33. Беззубцева М.М., Волков В.С. Электронно-ионные электротехнологии в агроинженерном сервисе и природопользовании: Практикум по электротехнологическим расчетам, 2016 . – СПб.:СПбГАУ, 110 с.
34. Беззубцева М.М., Волков В.С. Электротехнологии и электрооборудование в сельском хозяйстве. Раздел 1 «Электротехнологии в сельском хозяйстве»: Учебное пособие для обучающихся по направлению подготовки «Технологии, средства механизации и энергетическое оборудование в сельском, лесном и рыбном хозяйстве», 2016. – СПб.:СПбГАУ, 242 с.
35. Беззубцева М.М., Гулин С.В., Пиркин А.Г. Менеджмент и инжиниринг в энергетической сфере агропромышленного комплекса: Учебное пособие, 2016. – СПб.:СПбГАУ, 152 с.
36. Беззубцева М.М., Юлдашев З.Ш. Исследование энергетических характеристик фотоэлектрического преобразователя солнечной энергии (солнечного элемента): учебно-методическое пособие, 2015. – СПб.: СПбГАУ, 94 с.
37. Беззубцева М.М., Волков В.С. Нетрадиционная и возобновляемая энергетика. Конспект лекций, 2016. – СПб.: СПбГАУ, 127 с.
38. Беззубцева М.М., Волков В.С. Основы научных исследований в энергетике, 2016. – СПб.: СПбГАУ, 209 с.
39. Беззубцева М.М., Волков В.С. Научное обоснование энергоэффективности технологических процессов: учебное пособие, 2016. - СПб.: СПбГАУ, 264 с.
40. Беззубцева М.М., Волков В.С. Научное обоснование энергоэффективности технологических процессов: практикум по энерготехнологическим расчетам, 2016. – СПб.: СПбГАУ, 200 с.
41. Беззубцева М.М., Волков В.С. Инновационные электротехнологии в АПК: практикум по электротехнологическим расчетам, 2016. – СПб.: СПбГАУ, 136 с.

42. Беззубцева М.М., Волков В.С. Инжиниринг переработки и хранения сельскохозяйственной продукции. Часть 1 Ультразвуковые технологии : учебное пособие, 2016. – СПб.: СПбГАУ, 164 с.
43. Беззубцева М.М., Волков В.С. Материаловедение и ТКМ. Лабораторный практикум для обучающихся по направлению подготовки «Агроинженерия», 2016 – СПб: СПбГАУ, 80 с.
44. Беззубцева М.М., Волков В.С. Прикладная теория тепловых и массообменных процессов в системном анализе энергоемкости продукции. Раздел 1. Тепловые процессы предприятий АПК. Практикум для обучающихся по направлению 35.04.06 Агроинженерия, профиль Энергетический менеджмент и инжиниринг энергосистем, 2017. – СПб.: СПбГАУ, 200 с.
45. Беззубцева М.М. Энергетический менеджмент и инжиниринг энергосистем (программа магистратуры) // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 1. – С. 44-46.
46. Беззубцева М.М. Компетентности магистрантов-агроинженеров при исследовании энергоэффективности электротехнологического оборудования // Успехи современного естествознания. – 2014. – № 3. – С. 170-170.
47. Беззубцева М.М., Ружьев В.А. Формирование компетентностименеджера магистрантов-агроинженеров // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 4. – с. 179-180.
48. Беззубцева М.М. Формирование базы знаний при обучении магистрантов по программе «Энергетический менеджмент и инжиниринг энергосистем» // Электронный научно-методический журнал Омского ГАУ. 2016. № S2. С. 11.
49. Беззубцева М.М., Волков В.С. Инновационные программы подготовки научно-технических кадров энергетических специальностей для предприятий АПК Профессиональное образование, наука и инновации в XXI веке, т. 1 : сб. трудов X Санкт-Петербургского конгресса (Санкт-Петербург, 21-25 ноября 2016 г.) / Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I» / под общей ред.Т. С. Титовой - СПб. : ФГБОУ ВО ПГУПС, 2016. - С. 39-45.

50. Волков В.С., Беззубцева М.М. Особенности подготовки инженерно-технических и научных кадров энергетических специальностей в аграрном секторе экономики // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. – № 1. – С. 26-30.
51. Беззубцева М.М. Научное обоснование энергоэффективности технологических процессов (учебное пособие) // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. – № 11-2. – С. 256-257.
52. Беззубцева М.М. Инновационные электротехнологии в АПК (практикум по электротехнологическим расчетам) // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. – № 11-2. – С. 239-241.
53. Беззубцева М.М., Волков В.С. Электротехнологии и электрооборудование в сельском хозяйстве. Раздел 1 Электротехнологии в сельском хозяйстве // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. – № 6-1. – С. 118-118.
54. Беззубцева М.М., Волков В.С. Термоэлектрические устройства и установки (конспект лекций) // Научное обозрение. Реферативный журнал. – 2016. – № 5. – С. 67-67.
55. Беззубцева М.М., Волков В.С. Основы научных исследований в энергетике (учебное пособие) // Научное обозрение. Реферативный журнал. – 2016. – № 5. – С. 66-67.
56. Беззубцева М.М. Электронно-ионные технологии в агроинженерном сервисе и природопользовании (практикум по электротехнологическим расчетам) // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. – № 5-3. – С. 364-365
57. Беззубцева М.М., Волков В.С. Нетрадиционная и возобновляемая энергетика (конспект лекций) // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 12-1. – С. 90-91.
58. Беззубцева М.М., Гулин С.В., Пиркин А.Г. Менеджмент и инжиниринг в энергетической сфере агропромышленного комплекса (учебное пособие) // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 12-1. – С. 89-90.

59. Беззубцева М.М., Котов А.В. Компьютерные технологии в научно-экспериментальных исследованиях // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 5-2. – С. 221-222.
60. Беззубцева М.М., Юлдашев З.Ш. Исследование энергетических характеристик фотоэлектрического преобразователя солнечной энергии (солнечного элемента) (учебно-методическое пособие) // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 5-2. – С. 221-221.
61. Беззубцева М.М. Методика организации научно-исследовательской работы магистрантов-агроинженеров (учебно-методическое пособие) // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 4-2. – С. 385-385.
62. Беззубцева М.М., Волков В.С. Патентные исследования в научно-исследовательской работе магистрантов (учебное пособие) // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 3-3. – С. 308-309.
63. Беззубцева М.М., Волков В.С., Котов А.В., Обухов К.Н. Логика и методология в научных исследованиях инжиниринговых энергосистем (учебное пособие) // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 2-2. – С. 221-222.
64. Беззубцева М.М., Волков В.С., Котов А.В., Обухов К.Н. Инновационные электротехнологий в АПК (учебное пособие) // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 2-2. – С. 221-221.
65. Беззубцева М.М., Волков В.С. Практикум по технологическим расчетам процессов переработки сельскохозяйственного сырья (учебное пособие) // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 2-1. – С. 67-68.
66. Беззубцева М.М., Волков В.С., Котов А.В., Обухов К.Н. Компьютерные технологии в научных исследованиях энергоэффективности потребительских энергосистем АПК (учебное пособие) // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 1. – С. 63-63.

67. Беззубцева М.М., Волков В.С., Котов А.В., Обухов К.Н. Инновационные электротехнологии в АПК // Научное обозрение. Реферативный журнал. – 2015. – № 1. – С. 70-70.
68. Беззубцева М.М., Волков В.С., Котов А.В., Обухов К.Н. Логика и методология в научных исследованиях инжиниринговых энергосистем // Научное обозрение. Реферативный журнал. – 2015. – № 1. – С. 70-71.
69. Беззубцева М.М., Волков В.С., Котов А.В., Обухов К.Н. Компьютерные технологии в научных исследованиях энергоэффективности потребительских энергосистем АПК // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 10. – С. 71-72.
70. Беззубцева М.М. Энергетика технологических процессов (учебное пособие) // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – № 8-3. – С. 77-77.
71. Беззубцева М.М., Гулин С.В., Пиркин А.Г. Энергетический менеджмент и энергосервис в аграрном секторе экономики (учебное пособие) // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 6. – С. 112-113.
72. Беззубцева М.М., Волков В.С. Электротехнология // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 6. – С. 57-58.
73. Беззубцева М.М., Волков В.С. Будущее энергетики человечества (учебное пособие) // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 3-2. – С. 195-196.
74. Беззубцева М.М., Карпов В.Н., Волков В.С. Менеджмент интеллектуальной собственности в агробизнесе (Учебное пособие) // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2013. – № 11-1. – С. 122-123.
75. Беззубцева М.М., Волков В.С., Зубков В.В. Прикладная теория тепловых и массообменных процессов в системном анализе энергоемкости продукции (учебное пособие) // Международный журнал экспериментального образования. – 2013. – № 5. – С. 59-60.

76. Беззубцева М.М., Волков В.С. Нанотехнологии в энергетике // Международный журнал экспериментального образования. – 2012. – № 11. – С. 28-29.
77. Беззубцева М.М., Карпов В.Н., Волков В.С. Энергетическая безопасность АПК // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2012. – № 6. – С. 53-54.
78. Беззубцева М.М. Электротехнологии и электротехнологические установки // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2012. – № 6. – С. 51-53.
79. Беззубцева М.М., Ковалев М.Э. Электротехнологии переработки и хранения сельскохозяйственной продукции // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2012. – № 6. – С. 50-51.
80. Беззубцева М.М., Волков В.С., Пиркин А.Г., Фокин С.А. Энергетика технологических процессов в АПК // Международный журнал экспериментального образования. – 2012. – № 2. – С. 58-59.

Приложение 1

Критическое значение t-критерия Стьюдента при уровне значимости
0.10; 0.05; 0.01 (двухсторонний)

Число степеней свободы d.f.	α			Число степеней свободы d.f.	α		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,5041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

Приложение 2

Таблица значений F -критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0,05$

k_2	k_1									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,5	199,5	215,7	224,6	230,2	233,9	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14

Приложение 3

Значение статистик Дарбина-Уотсона d_l, d_u при 5 %-ном уровне
значимости

n	$k=1$		$k=2$		$k=3$		$k=4$		$k=5$	
	d_l	d_u								
6	0,61	1,40								
7	0,70	1,36	0,47	1,90						
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29				
9	0,82	1,32	0,63	1,70	0,46	2,13				
10	0,88	1,32	0,70	1,64	0,53	2,02				
11	0,93	1,32	0,66	1,60	0,60	1,93				
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86				
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82				
14	1,05	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78				
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,85	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,99
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83

Приложение 4

Задание для самостоятельной работы № 1 Изучение основ технологического применения озона

Цель работы

- 1) Ознакомление с распространенными схемами технологического применения озона;
- 2) Исследование выходных характеристик генератора озона;
- 3) Изучение процесса растворения (абсорбции) озона из озоно-воздушной смеси в воду и взаимодействия озона с загрязняющими примесями в воде в процессе ее обработки;
- 4) Получение навыков работы с генератором озона, измерителями концентрации озона в газе и жидкости, измерителем цвета жидкости (колориметром).

Предварительные сведения

Озон является аллотропной формой кислорода с химической формулой O_3 . При нормальных температуре и давлении он представляет собой газ голубого цвета с характерным запахом (по-гречески озон - пахнущий). При температуре кипения равной $-111,9^{\circ}C$ озон превращается в жидкость темно-синего цвета, а при температуре плавления $-192,5^{\circ}C$ озон кристаллизуется в темно-фиолетовые игольчатые кристаллы.

Чистый озон взрывоопасен, так как при его разложении высвобождается значительное количество тепла, способствующее процессу разложения озона.



При технологических концентрациях до 200 мг/л озон практически безопасен, поэтому взрывов не происходит ни при его нагревании, ни при ударах.

Озон токсичен и действует на органы дыхания, а также может поражать центральную нервную систему. Предельно допустимое содержание озона в

воздухе помещений, где работают люди, составляет 0,1 мкг/л.

Основное технологическое применение озона связано с его исключительными окислительными свойствами. По своим окислительным возможностям озон стоит за фтором, гидроксильным радикалом и атомарным кислородом, опережая такие широко известные вещества как хлор, перекись водорода. Озон, сам являясь сильным окислителем, при разложении образует атомарный кислород, окислительные свойства которого еще более значительные. Благодаря этому, озон в настоящее время находит все более широкое применение при подготовке питьевой воды, очистке сточных вод, обработке воды в плавательных бассейнах, очистке отходящих газов, в сельском хозяйстве.

Уникальные дезинфицирующие свойства обеспечивают применение озона в медицинских технологиях. Подготовка озонированного физиологического раствора, озонная аутогемотерапия, ожоговые заболевания, ингаляции - далеко не полный перечень методик лечения, где озон играет исключительно важную роль. Кроме того, доказано, что озонирование воздушной среды улучшает условия труда, снижает общую микробную загрязненность в 3-4 раза.

Рассмотрим несколько областей применения озона.

1. Подготовка питьевой воды. Применение озона для подготовки питьевой воды относится к самым ранним областям, использующим окислительные и дезинфицирующие свойства озона. Первоначально озон использовался только для обеззараживания, затем его стали применять для удаления запаха, цветности воды и примесей.

Обеззараживание - это удаление из воды бактерий, спор, микробов и вирусов (инактивация). Для удаления бактерий в воду вводят дезинфицирующее вещество. Чем больше дезинфицирующего вещества введено, тем эффективнее его воздействие на бактерии. Доза дезинфицирующего вещества (минимальное количество дезинфицирующего вещества в миллиграммах, необходимое для инактивации одного литра обрабатываемой воды) варьируется в зависимости от содержания в воде органических веществ, от температуры воды и от величины

активной реакции воды с дезинфицирующим веществом - рН. На рис.1 приведен график зависимости количества бактерий, содержащихся в воде, от величины дозы воздействующего дезинфицирующего вещества (в нашем случае хлора D_{Cl} и озона D_{O_3}).

Количество бактерий в воде в зависимости от дозы дезинфектанта

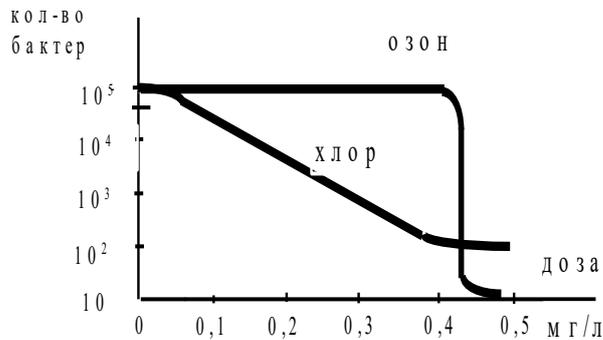


Рис. 1

Из графика видно, что при использовании хлора, чем больше его дозировка в обрабатываемую воду, тем меньшее количество бактерий

выживает. Для озона обнаруживается резкое бактерицидное действие при достижении критической дозы озона равной 0,4 - 0,5 мг озона в газе на литр обрабатываемой воды. Причем, происходит полная инактивация воды.

Механизм воздействия окислителя состоит в разрушении бактерий путем инактивации бактериальных протеинов, то есть диффузией через мембрану клетки в цитоплазму с поражением жизненных центров.

Исследования механизма озонирования бактерий показали, что действие его происходит быстро при условии поддержания нужной концентрации растворенного озона в воде в течение определенного времени. Если озон эффективно воздействует на бактерии, то хлор производит только выборочное отравление жизненных центров бактерий, причем довольно медленное из-за необходимости длительного времени для диффузии в цитоплазме.

Время необходимое для снижения концентрации бактерий до допустимой величины, характеризуемой коли-индексом и равной по ГОСТу 2874-82 значению 3, называется временем инактивации.

Для хлора время инактивации составляет 30 мин при содержании остаточного хлора в воде в пределах $c_{вCl}=0,05 - 0,2$ мг/л.

Для озона это время составляет 12 мин. при содержании растворенного озона

в воде $c_{\text{вО}_3}=0,1 - 0,3$ мг/л.

Во Франции для инактивации воды принято время равное 4 мин. при концентрации озона в воде $c_{\text{вО}_3}=0,4$ мг/л.

Учитывая, что время инактивации в сильной степени зависит от концентрации остаточного озона в воде, в США введено в практику использование так называемого СТ - фактора [мг/л·мин], который устанавливает связь между необходимым временем инактивации и концентрацией растворенного озона в воде.

Таблица 1. Зависимость СТ - фактора от степени инактивации воды и ее температуры (рН=6 - 9)

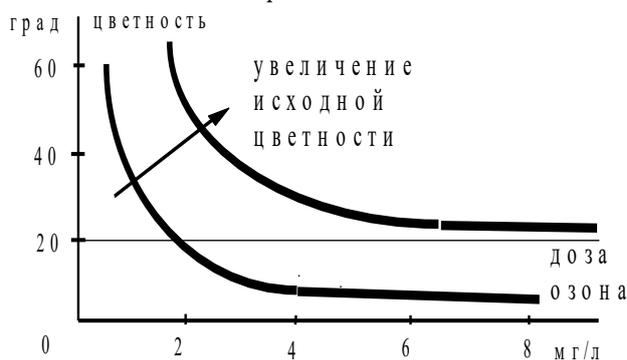
Уровень инактивации	Температура воды, °С					
	0,5	5	10	15	20	25
0,5	0,53	0,44	0,37	0,27	0,2	0,13
1,0	1,13	0,67	0,53	0,47	0,35	0,2
2,0	2,2	1,33	1,13	0,87	0,67	0,53
3,0	3,0	2,0	1,67	1,3	1,0	0,67

Из таблицы видно, что чем выше уровень (порядок снижения количества бактерий в воде) инактивации воды, то есть меньшее количество бактерий должно остаться в воде, тем большее должно быть значение СТ - фактора. Кроме того, чем выше температура воды, тем меньше СТ - фактор. Например, при температуре воды $+25^{\circ}\text{C}$ и остаточной концентрации озона в воде 1мг/л для инактивации на три порядка необходимо время обработки воды озоном равное 0,67мин.

Кроме большой способности уничтожения бактерий озон обладает высокой эффективностью в уничтожении спор, цист (плотные оболочки, образующиеся вокруг одноклеточных организмов, например, жгутиковых и корненожек, при их размножении, а также в неблагоприятных для них условиях) и многих других патогенных микробов.

Обесцвечивание - это удаление из воды органических и химических веществ, окрашивающих воду. В зависимости от цветности исходной воды требуется большее или меньшее количество озона для обесцвечивания воды.

Зависимость обесцвечивания воды от дозировки озона



Р и с . 2

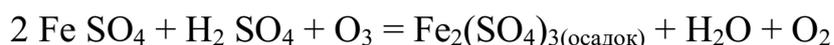
В России для поверхностных вод средних и северных районов для доведения цветности воды до нормы в 20° обычно требуется доза озона $D_{оз} = 2,5$ мг/л.

Для южных районов, где исходная цветность воды значительно больше, требуется уже доза озона, равная 8 мг/л.

Физический механизм воздействия озона при обесцвечивании воды заключается, во-первых, в разложении веществ до простейших H_2O и CO_2 , во-вторых, в коагуляции (объединении) веществ с дальнейшим выпадением их в осадок.

Эффективное обесцвечивание воды озонированием является одним из определяющих критериев в выборе озона в качестве воздействующего реагента при подготовке питьевой воды.

Удаление железа и марганца. В природных водах наиболее часто встречается железо в двух валентной форме, находящееся в растворенном состоянии. Марганец в природной воде обычно сопутствует железу. Оба этих вещества придают воде цветность и характерный привкус. Озон легко окисляет соли железа и марганца с образованием нерастворимых веществ, которые удаляются отстаиванием или фильтрацией. Химические реакции сульфидов железа и марганца с озоном можно записать в виде:



Если железо и марганец содержатся в форме органических соединений или коллоидальных частиц (с размером 0,1 - 0,01 мкм), то обезжелезивание и деманганация воды обычными способами не удаётся. В этом случае необходимо предварительное окисление этих комплексных органических соединений, приводящее к их расщеплению, после чего становится возможным удаление

железа и марганца одним из обычных методов. Окисляя комплексные соединения, озон преобразует растворимые соли в нерастворимые, поэтому необходимо последующее фильтрование воды для освобождения ее от выпадающих осадков.

Следует отметить, что хотя озонирование и не является наиболее экономичным методом обезжелезивания и деманганации, но применение озона с этими целями оправдано в двух случаях: во-первых, когда обычные способы удаления из воды железа и марганца не дают результатов или ведут к недостаточным результатам, во-вторых, когда необходимо одновременное устранение запахов, привкусов и цветности воды.

Устранение привкусов и запахов воды. Неприятные привкусы и запахи в некоторых природных водах вызываются присутствием соединений минерального и органического происхождения, находящихся в растворенном или коллоидном состоянии. Эти привкусы по своему происхождению могут быть:

а) минерального происхождения, т.е. вызываемые наличием железа, марганца, сероводорода и общей повышенной минерализацией;

б) природного органического происхождения - гуминовые кислоты, органические вещества, поступающие со стоками, водоросли и чаще всего планктон;

в) городского происхождения - продукты распада органических веществ в городских отбросах;

г) промышленного происхождения - различные химические стоки, моющие средства, углеводороды, гудрон и др. смолы;

д) сельскохозяйственного происхождения - пестициды, гербициды, минеральные удобрения.

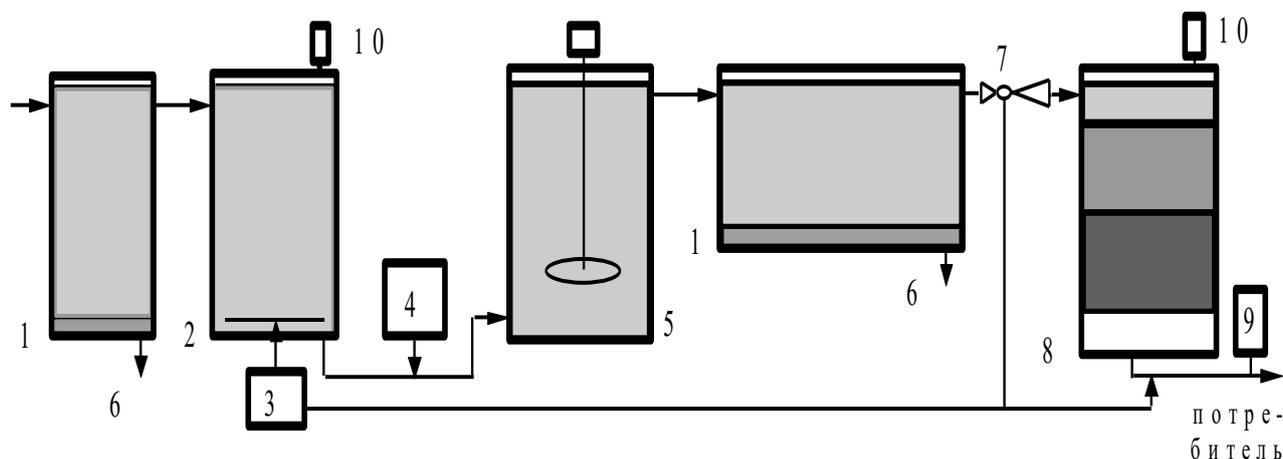
Озон окисляет названные выше соединения, приводя к их расщеплению, сопровождающемуся исчезновением привкусов и запахов. Таким образом происходит нейтрализация веществ путем своего рода “холодного сжигания”. Например, при окислении сероводорода наблюдается выделение серы:



Благодаря более высокой окислительной способности, озон в состоянии действовать на такие соединения, которые не подвергаются воздействию других химических реагентов. Обработка воды избыточным количеством озона не влечет за собой никаких нежелательных явлений: избыточный озон, будучи нестойким, снова превращается в кислород в течение нескольких минут. Озонирование не создает дополнительных или замещающих соединений, тогда как хлор дает с некоторыми веществами сложные соединения, вызывающие появление весьма резких запахов. Например, при обработке хлором воды, содержащей примесь фенолов, образуется хлорфенол, имеющий весьма неприятные привкус и запах. Наконец, при обработке озоном вода насыщается кислородом, что приводит к эффекту родниковой воды.

Рассмотрим принципиальную технологическую схему установки для комплексной очистки питьевой воды. В данной установке реализована традиционная схема очистки воды озонированием и фильтрованием. Схема установки показана на рис.3.

С х е м а п о д г о т о в к и п и т ь е в о й в о д ы



Р и с . 3

- | | | |
|------------------------|---------------------|----------------|
| 1 - отстойник | 4 - коагулянт | 7 - эжектор |
| 2 - контактный аппарат | 5 - камера смешения | 8 - фильтр |
| 3 - генератор озона | 6 - удаление отстоя | 9 - консервант |
| 10 - деструктор озона | | |

Перед поступлением в установку из воды, забираемой в водоеме, сначала

входным фильтром грубой очистки, а затем в отстойнике 1 удаляются механические примеси. Далее вода поступает на обработку реагентами. Обычно используется схема с пред- и постозонированием. Предозонирование воды осуществляется после удаления механических примесей и производится в контактном аппарате 2. Озон в контактный аппарат поступает от генератора озона 3. Предозонирование имеет целью проведения первичного обеззараживания воды, удаления цветности, окисления и перевода в коллоидное состояние растворенных металлов. Одновременно озонирование воды способствует реализации процесса флокуляции (явление слабого хлопьеобразования - коллоидальной мутности вод). Образовавшиеся нерастворимые вещества удаляются из воды отстаиванием в специальных аппаратах - отстойниках 1. Часто для усиления процесса флокуляции после предозонирования в воду добавляют специальные вещества - коагулянты 4, способствующие процессу слияния частиц в крупные агломераты и более быстрому выпадению их в осадок. К таким веществам относятся сульфат алюминия и хлорное железо. Для улучшения смешивания коагулянтов с водой в камерах смешения 5 осуществляют интенсивное перемешивание воды и коагулянта. После отстойника вода с оставшимися в ней загрязнителями подвергается повторному озонированию, целью которого является проведение промежуточной дезинфекции и окисления органических веществ. В нашем примере введение озона в воду осуществляется с помощью эжектора 7. Вода с расщепленными органическими веществами поступает в фильтр 8, который может быть или комбинированным с песчаной и угольной загрузкой, или состоящим из двух фильтров, загруженных соответственно песком и активированным углем. Установлено, что комбинированная очистка "озонирование-фильтрация на активированных углях" позволяет эффективнее использовать сорбционную загрузку фильтров. Причиной является насыщение воды кислородом при ее озонировании, что создает благоприятные условия для жизнедеятельности бактерий в толще угольной загрузки, обеспечивающих биологическое окисление загрязнений в порах загрузки и таким образом

увеличивающих срок использования активированного угля до его регенерации. После фильтрации вода подвергается озонированию для окончательной дезинфекции и придания необходимых вкусовых качеств. В качестве смешивающих устройств здесь используются контактная камера или комбинация из эжектора и турбулизатора (на рис.3 не показаны). На выходе к потребителю вода консервируется хлором 9, не позволяющим развитию бактерий в воде при ее транспортировке по трубопроводу.

2. Подготовка воды в плавательных бассейнах. Требования, предъявляемые к воде в плавательных бассейнах, аналогичны требованиям к питьевой воде. В связи с этим идентичны и основные стадии обработки воды: удаление примесей фильтром грубой очистки (волосоловкой), озонирование воды в контактной камере, удаление взвесей, образующихся в воде, песчаными и сорбционными фильтрами, консервация воды хлором с дозировкой $C_{cl} = 0,05-0,1$ мг/л. Однако в отличие от предыдущего случая вода движется по замкнутому циклу с добавлением лишь 10% свежей воды.

3. Обработка сточных вод. Механизм воздействия озона на загрязнения природных и сточных вод идентичен: это - молекулярное окисление и атака активными радикалами. В значительной степени механизм окисления обусловлен дипольностью молекулы озона, которая фиксируется на заряженных частицах и разрывает двойные связи с образованием окисленных форм. Полярный характер молекулы позволяет также использовать озон в процессе каталитического окисления совместно с Al_2O_3 , Fe_2O_3 , ультразвуком, ультрафиолетовым излучением.

Степень загрязнения сточных вод часто характеризуют показателями “химического поглощения кислорода (ХПК)” и “биологического поглощения кислорода (БПК)”, которые показывают какое количество кислорода в мг идет на окисление примесей в 1 л воды.

При высоких концентрациях загрязнителей, приводящих к значительному потреблению озона, для снижения концентрации удаляемых веществ с помощью озона, в начало цикла (см. рис.4.) после аэрации ставится система биологической

очистки воды с использованием микроорганизмов: бактерий, простейших червей, плесневых грибов, дрожжей и др. В этом случае если на входе БПК и ХПК ~1000, после аэротена ~500, после биофильтра ~30-50, то после

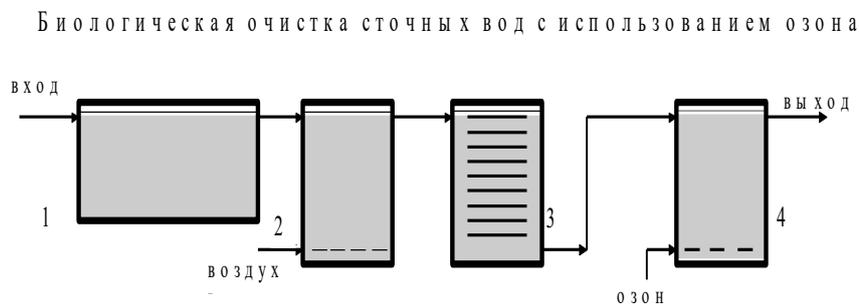


Рис. 4

1 - отстойник; 2 - аэротен; 3 - биофильтр;
4 - контактный аппарат

озонирования ~5. Таким образом, озон используется на выходе очистной системы для доведения воды до требуемой кондиции.

4. Медицинские технологии. Применение озона для профилактики и лечения заболеваний основано на широком спектре терапевтического воздействия различных доз озона на организм. Озон действует как иммуномодулирующее, противовоспалительное, бактерицидное, противовирусное, фунгицидное, цитостатическое, антистрессовое, анальгезирующее средство.

Озонотерапия эффективно используется в следующих случаях: болезни верхних дыхательных путей и легочные заболевания, инфекционные болезни (для инактивации вирусов, бактерий, лечения гепатитов), в хирургии (язвы, пролежни, свищи, гангрены, ожоги), в кожно-венерологической практике (экземы, дерматиты), в онкологии, в физиотерапии и курортологии, зубоврачебной практике, а также в гигиене и санитарии. Во многих случаях терапевтическое воздействие озона основано на более легком его проникновении в больные клетки, чем в здоровые.

Озон применяется как при низких концентрациях в газе (на уровне ПДК), например, при лечении легких и верхних дыхательных путей, так и при высоких

концентрациях, например, для растворения озона в физиологическом растворе и в дистиллированной воде, или при осуществлении обработки озоном крови больных (аутогемотерапия).

Для стерилизации медицинского инструмента также применяется вода с растворенным в ней озоном.

В медицинских установках имеет важное значение высокая концентрация озона в газе для ускорения процесса насыщения жидкости. В качестве смесителя используется барботажная камера.

5. Очистка отходящих газов. Воздушные выбросы не столь разнообразны по составу как сточные воды. Они содержат почти всегда окись азота и серы, сероводород, летучую органику. В ряде случаев наблюдаются выбросы фтора, окиси ванадия и синильной кислоты.

В связи с тем, что озон реагирует в жидкой среде гораздо быстрее, чем в газовой и, кроме того, в этом случае легче управлять процессом окисления, то практически всегда очистку воздушных выбросов производят пропусканием последних через специальные поглотительные растворы, используя для этой цели поглотительные колонны или другие аналогичные устройства.

6. Применение озона в сельском хозяйстве. Широкий спектр областей применения озона в сельском хозяйстве: растениеводство, животноводство, рыбоводство, кормопроизводство и хранение продуктов, обуславливает множество озонных технологий, которые условно можно разделить на два больших направления. Первое имеет целью стимулировать жизнедеятельность живых организмов. С этой целью применяются концентрации озона на уровне ПДК, например санация помещений с животными и растениями для улучшения комфортности их пребывания. Второе направление связано с подавлением жизнедеятельности вредных организмов или с устранением вредных загрязнений из окружающей атмосферы и гидросферы. Концентрации озона в этом случае намного превышают значения ПДК. К таким технологиям относятся дезинфекция тары и помещений, очистка газовых выбросов птицеферм, свинарников, обезвреживание сточных вод сельскохозяйственных предприятий

и т.д.

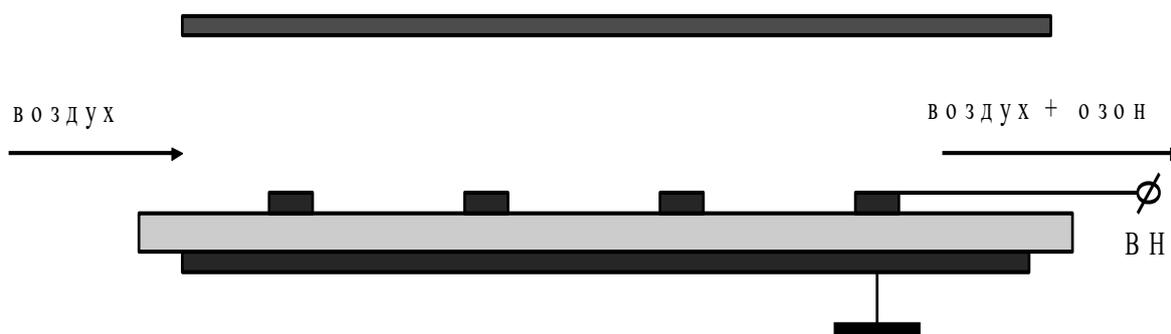
Из краткого обзора озонных технологий видно, что в большинстве случаев важно не только получение озона, но и обеспечение его эффективного технологического использования. Иными словами, глобальная задача озонных технологий разбивается на две:

- синтез озона - получение озono-воздушной (кислородной) смеси;
- растворение (абсорбция) озона в воде из газовой фазы.

Синтез озона. Для получения озона используются химический метод и электросинтез озона в плазме газового разряда. Наибольшее распространение получили озонаторы на барьерном разряде. В технологиях, где требуется небольшая производительность при высоких концентрациях озона в озono-воздушной смеси, все более широкое применение находят генераторы озона с поверхностным разрядом. В таких озонаторах разряд создается вдоль поверхности диэлектрика, выполненного в виде пленки, по одну сторону которой на поверхность нанесен коронирующий электрод, а по другую - индукционный электрод (см.рис.5.).

Молекулы кислорода, подвергаясь воздействию электронов в зоне разряда, диссоциируют на атомы. Затем атом кислорода, объединяясь с молекулой кислорода, образует молекулу озона. Однако на синтез озона расходуется только 20% энергии электрического разряда, а остальная выделяется в виде тепла и светового излучения, приводящих к увеличению температуры в зоне синтеза озона и, следовательно,

С х е м е г е н е р а т о р а о з о н а с п о в е р х н о с т н ы м р а з р я д о м



Р и с . 5

ускоряющих процесс разложения образующегося озона. В связи с этим для увеличения выхода озона необходимо осуществлять отвод выделяющегося тепла.

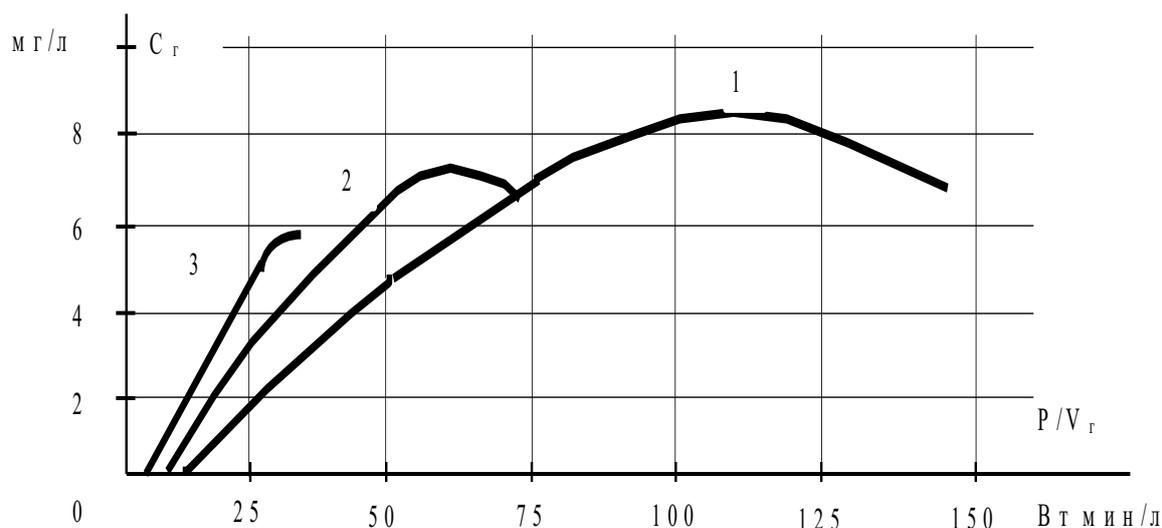
В озонаторах с поверхностным разрядом облегчены условия для отвода тепла по сравнению с барьерными озонаторами, у которых разряд развивается через газовый зазор перпендикулярно поверхности диэлектрического барьера и теплоотвод из газового зазора затруднен. Кроме того, для данного типа озонаторов возможно применение в качестве диэлектрика керамического материала, обладающего высокой теплопроводностью и стойкостью к воздействию плазмы газового разряда. Все это позволило поднять частоту питающего напряжения в десять раз и, следовательно, увеличить выход озона.

Концентрация синтезируемого озона зависит от активной мощности- P , вкладываемой в газовый разряд, и от расхода газа- $V_{г}$, проходящего через генератор озона. Отношение активной мощности к расходу газа через озонатор называется фактором удельной энергии:

$$F=P/V_{г} \quad (1)$$

Зависимость концентрации озона от фактора удельной энергии приведена на рис.6 при различных расходах осушенного воздуха через озонатор.

Зависимость концентрации озона от фактора удельной энергии



Р и с . 6

Расход осушенного воздуха через генератор озона:
 1 - 0,5 л/мин; 2 - 1,0 л/мин; 3 - 2,0 л/мин

Значение активной мощности, выделяемой в генераторе озона, рассчитывается по формуле:

$$P = 4 f [U_{\Gamma} (U_0 - U_{\Gamma}) C_{\delta} - U_{\Gamma}^2 C_{\Pi}] \quad (2)$$

где U_0 - амплитуда переменного напряжения частотой f , приложенного к генератору озона; U_{Γ} - напряжение возникновения газового разряда; C_{δ} - емкость диэлектрического барьера; C_{Π} - емкость разрядного промежутка.

Производительность озонатора G показывает какое количество озона в граммах производится в единицу времени. Из определения следует, что производительность равна произведению концентрации озона в газе на расход газа через озонатор:

$$G = c_{\Gamma} V_{\Gamma} \quad (3)$$

В настоящей работе на первом этапе исследуются зависимости концентрации озона и производительности озонатора от прикладываемого напряжения при разных расходах газа.

На втором этапе работы необходимо проследить динамику растворения

озона в воде и взаимодействия его с загрязняющими примесями в воде

Растворение озона. Наиболее полное растворение газообразного озона в воде, подлежащей очистке или обеззараживанию, является одной из основных задач техники озонирования, так как чаще всего только в растворенной форме озон способен воздействовать на загрязнения. Процесс смешивания озон-воздушной смеси с водой для ее обеззараживания был подвергнут всестороннему изучению еще в 60-х годах. Однако и по настоящее время четких универсальных рекомендаций о методе смешивания не предложено. Наиболее распространенными способами на сегодняшний день являются: механическое перемешивание, барботаж, эжекция. Предпочтение тому или иному способу диспергирования озона в воду обосновывается в каждом конкретном случае экономическими расчетами, а также зависит от предназначения озонирования. Например, для содействия процессам коагуляции (преозонирование) или дезинфекции воды требуются разные степени дисперсности газа, доза озона и продолжительность контакта с водой, что и определяет выбор той или иной системы диспергирования. Несмотря на это можно определить основные требования, предъявляемые к процессу абсорбции озона из газа в жидкость. Во-первых, необходима максимальная поверхность раздела между газовой и жидкой фазами, то есть должна быть максимальная поверхность пузырьков. Во-вторых, время пребывания пузырька в воде должно быть достаточным для диффузии озона из газа в жидкость. Некоторые конструкции контактных аппаратов приведены на рис.7.

Наиболее распространенное устройство для смешивания показано на рис.7,а. В нем озон-воздушная смесь поступает через пористую пластину в колонну с обрабатываемой водой. Вода подается в колонну сверху и движется противотоком движению газовых пузырьков, увеличивая таким образом время контакта. Вода, насыщенная озоном поступает в камеру, расположенную рядом с барботажной колонной, где выдерживается необходимое для ее обработки время. Воздух с непрореагировавшим озоном накапливается в верхней части аппарата и через разложитель озона выбрасывается в атмосферу. Барботажные

камеры для увеличения времени контакта озона с водой снабжаются гранулированным слоем (рис б), диафрагмированными тарелками (рис. 7,в), или механическими смесителями турбинного типа, завихряющими воду с газовыми пузырьками в контактной колонне (рис.7,г). Эжекционный смеситель показан на рис. 7,д, состоящий из нагнетающего воду насоса 1, эжектора 2, в котором за счет разряжения, создаваемого в сужающемся сечении эжектора, происходит засасывание озono-воздушной смеси в воду и дробление газа на мелкие пузырьки, змеевика 3, обеспечивающего необходимое время для контакта газа с водой и воздухоотделителя 4.

Каждое из этих устройств имеет свои преимущества и недостатки. При механическом перемешивании наличие движущихся частей в агрессивной среде снижает надежность установки. Барботаж, при его максимальной простоте, является самым неэффективным и длительным. Эжекторы (струйные насосы) используются только в проточных вариантах установок, как правило, небольшой производительности.

Контактные аппараты

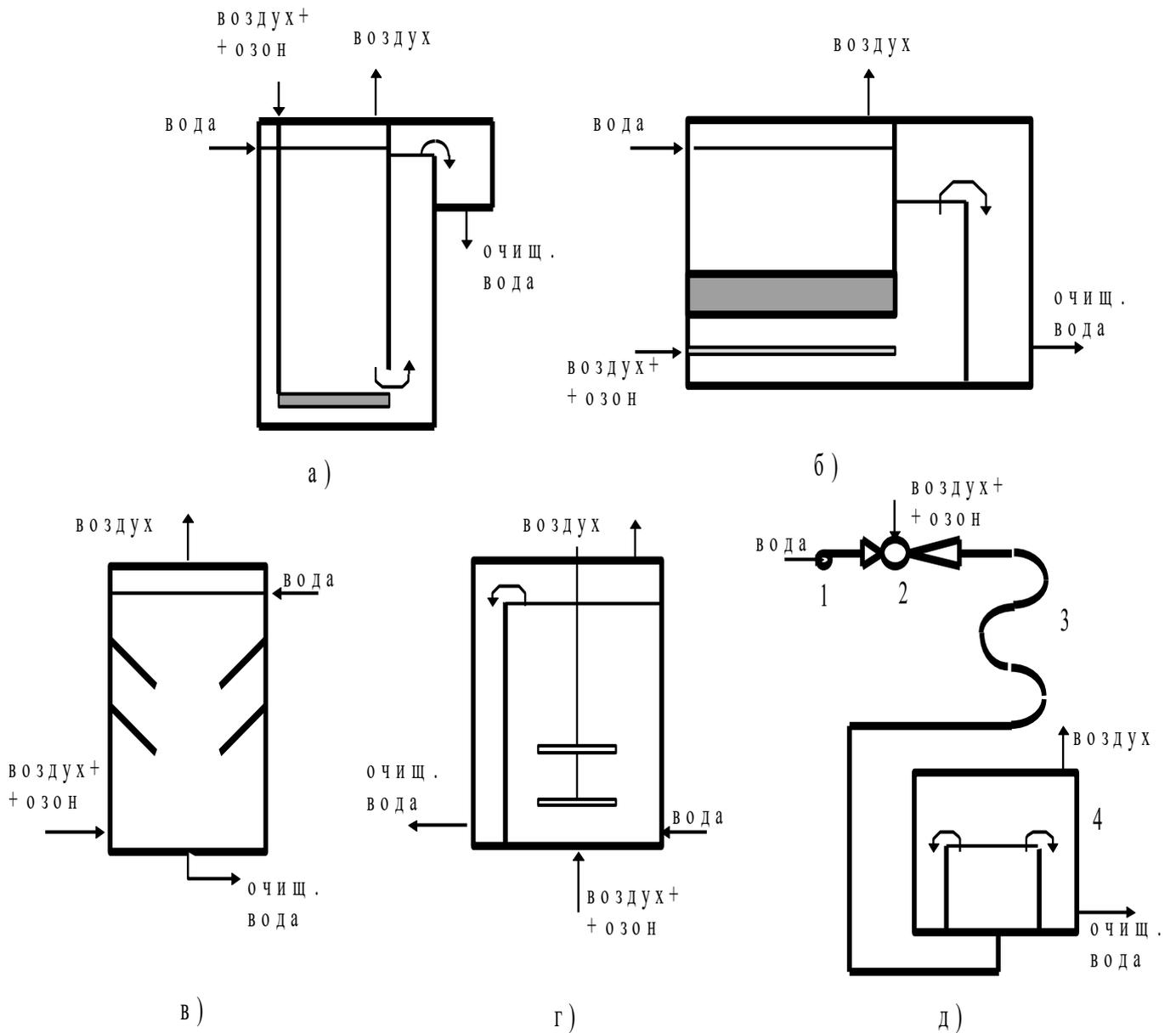


Рис. 7

а) барботажная колонна с пористой пластиной (диффузором), б) колонна с гранулированным слоем, в) колонна с тарелками, г) колонна с механическим смесителем турбинного типа, д) аппарат с эжектором и змеевым реактором; 1 - насос, 2 - эжектор, 3 - змеевик, 4 - воздухоотделитель

В предлагаемой работе рассматривается барботаж как наиболее простой и распространенный метод реализации контакта озона и воды.

В процессе всплытия пузырька происходит проникновение озона через его поверхность в воду. Уравнение массопереноса для одиночного пузырька выглядит следующим образом:

$$G_{\text{пуз}} = k' F_{\text{п}} (c_{\text{г}} - c_{\text{в}}) t, \quad (4)$$

где $G_{\text{пуз}}$ - количество озона, перешедшего из пузырька в воду; $k' = 0,012 \text{ л}/(\text{м}^2\text{с})$ - коэффициент массопередачи; $F_{\text{п}}$ - площадь поверхности пузырька; $c_{\text{г}}$ и $c_{\text{в}}$ - концентрация озона в газе и воде; t - время перехода озона из воздуха пузырька в воду.

Время перехода озона из газа в воду определяется по групповой скорости всплытия пузырей:

$$V = k \cdot 4 \sqrt{\frac{g\sigma(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{г}})}{\rho_{\text{в}}^2}}, \quad (5)$$

где $k = 1,4$; $g = 9,8 \text{ м}/\text{с}^2$ - ускорение свободного падения; $\sigma = 0,065 \text{ н}/\text{м}$ - коэффициент поверхностного натяжения; $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ - плотность жидкости; $\rho_{\text{г}} = 1,2 \text{ кг}/\text{м}^3$ - плотность газа.

Решение уравнения массопереноса довольно громоздко, так как все компоненты уравнения (4) являются функциями многих переменных. Например, площадь пузырька $F_{\text{п}}$ зависит от расхода газа, от конфигурации и размеров барботажной камеры, давления и т.д. Поэтому на практике чаще пользуются двумя очень простыми соотношениями:

уравнением распределения концентраций в газе и жидкости

$$c_{\text{в}} = R_{\text{т}} c_{\text{г}}, \quad (6)$$

где $R_{\text{т}}$ - коэффициент распределения;

и законом Генри

$$p = Kx \quad (7)$$

где p - давление в экспериментальной камере; K - постоянная Генри; x - мольная

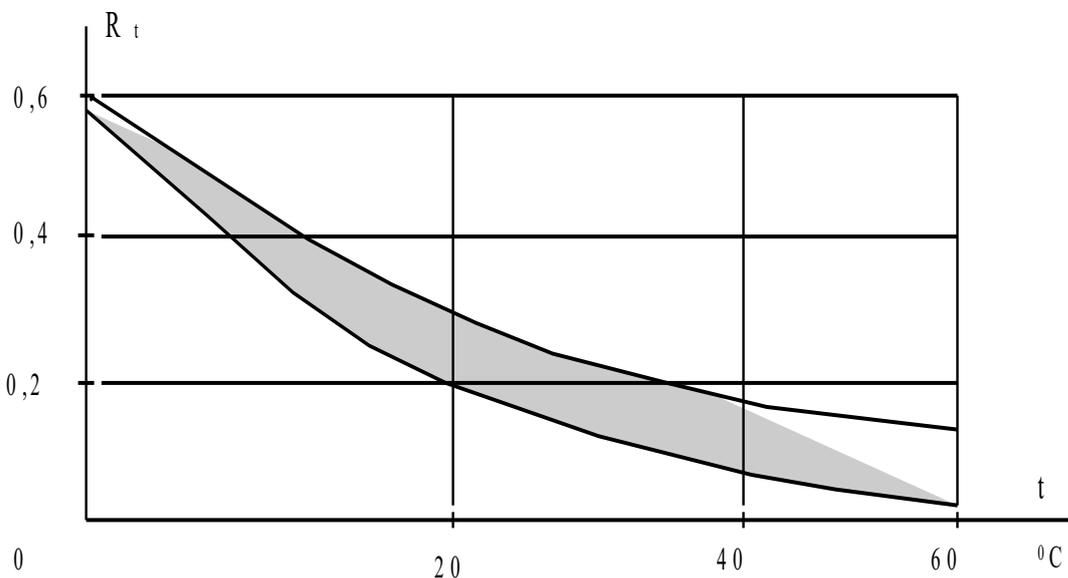
доля озона, растворенного в воде.

Выражения (6) и (7) справедливы только для равновесных состояний растворов, а выражение (7) соответствует состоянию идеального раствора (т.е. состоянию полного перемешивания). Значения коэффициентов R_t представлены на рис.8.

Использование коэффициента распределения более физически верно, чем применение закона Генри, так как он учитывает, что механизм абсорбции озона из раствора происходит в чистый компонент, в то время как закон Генри имеет дело с растворением одного чистого компонента в другой.

Однако, как видно из рис.8 коэффициент R_t является функцией только температуры T , никаким образом не отражая других факторов. В случае переменного давления удобнее использовать закон Генри. Постоянная Генри K , как и коэффициент распределения R_t , является функцией температуры.

Зависимость коэффициента распределения от температуры



Р и с . 8 .

Измерения концентрации озона проводятся фотометрическим методом, основанном на использовании закона Бугера-Ламберта-Бэра:

$$I = I_0 \exp(-k_1 c d), \quad (8)$$

где I_0 - интенсивность излучения до кюветы; I - интенсивность после

прохождения кюветы; c - концентрация вещества в среде; d - длина кюветы; k_1 - оптическая постоянная.

По ослаблению светового сигнала можно судить о концентрации озона в озono-воздушной смеси или в жидкой среде.

Принцип действия колориметра, в нашем случае измерителя светопоглощения, основан на сравнении светового потока Φ_0 , прошедшего через контрольный раствор, по отношению к которому производится измерение, и светового потока Φ , прошедшего через исследуемую среду. Световые потоки Φ_0 и Φ фотоприемником преобразуются в электрический сигнал A и выдаются на стрелочный измерительный прибор.

Коэффициент пропускания (τ) исследуемого раствора определяется как отношение потоков или сигналов

$$\tau = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{A - A_T}{A'' - A_T}, \quad (9)$$

где A_T - сигнал при неосвещенном фотоприемнике (темновой ток). В нашем случае $A_T = 0$.

Оптическая плотность

$$D = \lg \frac{1}{\tau} = \lg \frac{A'' - A_T}{A - A_T}, \quad (10)$$

Изменение оптической плотности загрязненной воды в процессе обработки ее озоном исследуется в данной работе.

Описание установки

Лабораторный стенд состоит из следующих основных узлов (рис. 9):

- микрокомпрессор 1, номинальный расход воздуха - 5 л/мин, максимальное давление 1,5 ати;
- блок осушки воздуха 2. Принцип осушителя основан на адсорбции молекул воды на поверхности гранул сорбента, которым в работе является силикагель;
- измеритель расхода газа (ротаметр) 3;

- генератор озона 4 с поверхностным разрядом. Электросинтез озона происходит в плазме поверхностного разряда. На лицевой панели установки находятся тумблер включения, ручки регулировки режима работы озонатора “Грубо”, “Плавно” и стрелочный прибор, показывающий значения напряжений, подаваемых на генератор озона;

Схема лабораторной установки

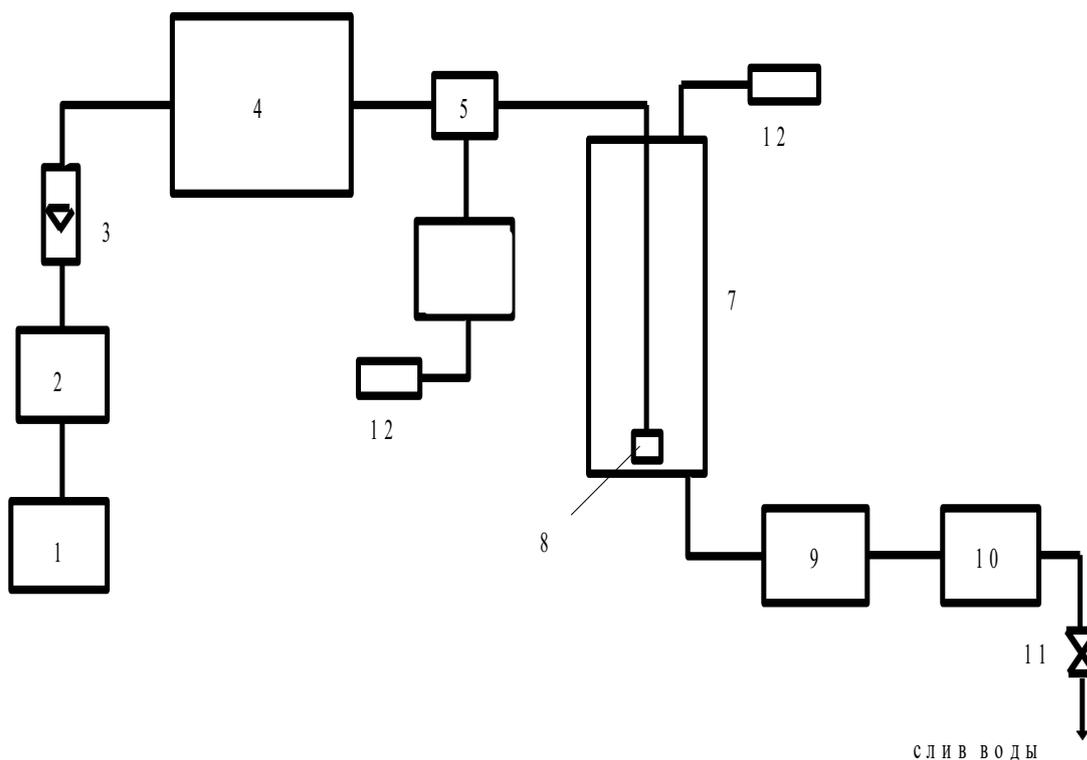


Рис. 9.

- 1 - микрокомпрессор
- 2 - осушитель воздуха
- 3 - ротаметр
- 4 - генератор озона
- 5 - коммутатор

- 7 - барботажная камера
- 8 - распылитель
- 9 - колориметр
- 10 - измеритель концентрации озона в жидкости

6 - измеритель концентрации озона в газе; 12 - разрушитель озона; 11 - слив воды; Основные штуцера камеры: - подача воды (находится на верхней части стэнда и имеет герметичную пробку); - штуцер подачи озона в газовый распылитель 8; - штуцер газосброса; - вентиль слива воды;

- разложитель озона 12. Предотвращает выброс озона в атмосферу;
- измерители концентрации озона в газовой 6 и жидкой 10 фазах;

- измеритель светопоглощения в воде (колориметр) 9;
- коммутатор 5.

Стенд функционирует следующим образом: воздух, нагнетаемый микрокомпрессором 1, через блок осушки 2 поступает в генератор озона 4, где в плазме поверхностного разряда происходит синтез озона. Расход газовой фазы контролируется ротаметром 3, а концентрация озона - измерителем 6. Далее в барботажной камере 7 происходит растворение озона в воде, неиспользованная часть которого через газосброс и разложитель 12 выбрасывается в атмосферу. После насыщения воды она через штуцер слива заполняет кювету колориметра 9 для измерения прозрачности воды. При необходимости измерять остаточный озон в воде последовательно колориметру подсоединяется измеритель концентрации озона в жидкости 10.

Необходимо постоянно помнить о том, что озон - крайне ядовитое и опасное вещество, и соблюдение техники безопасности - основополагающий фактор всей работы. Поэтому при проведении измерений запрещается открывать пробку входного патрубка!

Задание на предварительную подготовку

1. Рассчитать концентрацию озона на выходе озонатора и построить ее зависимость от напряжения, приложенного к озонатору (до 5 кВ), при трех расходах газа: 0,5 л/мин, 1 л/мин и 2 л/мин .

Считать, что напряжение возникновения разряда $U_r = 2,1$ кВ, емкость диэлектрического барьера $C_6 = 320$ пФ, емкость разрядного промежутка $C_{II} = 100$ пФ, частота питающего напряжения 13 кГц.

При расчете использовать зависимость концентрации озона от фактора удельной энергии (рис.6.).

2. Построить зависимость производительности озонатора от приложенного напряжения для указанных трех расходов газа. Определить оптимальный для

обработки воды режим работы озонатора при расходе газа $V_r = 0,5$ л/мин.

3. Определить время барботажа озоно-воздушной смеси, необходимое для обработки воды объемом $V_B = 1,5$ л с дозой озона, растворенного в воде, $D_{O_3} = 0,5$ мг/л. При расчете принять высоту водяного столба в барботажной камере $h_B = 0,37$ м, диаметр пузырьков при их всплытии считать неизменным и равным $d = 3$ мм. Расход воздуха при барботаже составляет $V_r = 0,5$ л/мин, а концентрация озона в газе не меняется и равна значению, найденному в предыдущем пункте. Температура обрабатываемой воды $t_B = +20^\circ\text{C}$, которой соответствует коэффициент распределения $R_t = 0,22$.

Порядок проведения экспериментов

1. Кнопкой “Вкл” подать напряжение на лабораторный стенд.
2. Включить для прогрева измерительные приборы.
3. Провести измерения выходных характеристик озонатора. Для этого необходимо:
 - 3.1. Тумблер коммутатора газового тракта перевести в положение “1”.
 - 3.2. Включить микрокомпрессор и установить расход воздуха 0,5 л/мин.
 - 3.3. Установить переключатель регулировки напряжения на генераторе озона “Грубо” и “Плавно” в крайнее левое положение.
 - 3.4. Включить тумблером “Вкл.” генератор озона.
 - 3.5. Установить ноль на измерителе озона.
 - 3.6. Ручками регулировки изменить напряжение, подаваемое на генератор озона.
 - 3.7. При помощи измерителя определить концентрацию озона в газе.
 - 3.8. Пункты 3.2.-3.7. повторить для расходов воздуха 1 л/мин и 2 л/мин.
 - 3.9. Построить графики выходных характеристик генератора озона c_r и G от напряжения для трех расходов газа.
 - 3.10. Исходя из полученных результатов, выбрать оптимальные значения подаваемого напряжения и расхода газа.

4. Изучить взаимодействие озона с загрязняющими примесями в воде. Для этого необходимо:

4.1. Убедиться, что генератор озона выключен.

4.2. Тумблер коммутатора газового тракта перевести в положение “II”.

4.3. Установить показания стрелочного измерительного прибора колориметра в положение “100” ($A_0 = 100$).

4.4. Подготовить 1,5 л раствора загрязненной воды и залить его через входной патрубок в барботажную камеру. Плотно закрыть пробку заливного патрубка.

4.5. Открыть сливной вентиль и установить расход 0,05 л/мин.

4.6. По стрелочному прибору колориметра определить значения A , соответствующие начальному световому потоку Φ , проходящему через раствор загрязненной воды.

4.7. Включить генератор озона и для выбранных параметров работы генератора озона провести барботаж газа через воду. Один раз в 1 мин. регистрировать показания A стрелочного прибора колориметра, соответствующие световому потоку Φ , проходящего через загрязненную воду. Эксперимент считать завершенным, если показания A стрелочного прибора изменились не более, чем на 5 % от предыдущего измерения.

4.8. Отключить генератор озона и компрессор.

4.9. Пункты 4.4. - 4.8. повторить для режима работы озонатора с два раза меньшей производительностью по озону.

5*. Изучить процесс насыщения озоном воды. Для этого необходимо:

5.1. Промыть барботажную камеру чистой водой.

5.2. После сливного вентиля подсоединить к водяной магистрали измеритель концентрации озона в жидкости. Подсоединить измеритель к сетевому питанию и включить прибор для прогрева.

5.3. Убедиться, что генератор озона выключен.

5.4. Проверить, что тумблер коммутатора газового тракта находится в положении “II”.

5.5. Залить 1,5 л воды через входной патрубок в барботажную камеру. Плотно

закрывать пробку входного патрубка.

5.6. Открыть сливной вентиль и установить расход воды 0,05 л/мин.

5.7. Установить показания измерителя концентрации озона в жидкости в положение “0”.

5.8. Включить генератор озона и для выбранных параметров работы генератора озона провести барботаж газа через воду. Один раз в 1 мин. производить измерения концентрации озона в воде. Эксперимент считать завершенным, если концентрация озона изменилась не более чем на 5 % по отношению к предыдущему измерению.

5.9. Отключить генератор озона и компрессор.

6. Отключить генератор озона, микрокомпрессор, измерительные приборы.

Обработка экспериментальных данных

1. Построить зависимость коэффициента пропускания света от времени обработки загрязненной воды озono-воздушной смесью. Сделать выводы по результатам эксперимента.

2*. Построить зависимость концентрации озона в воде от времени барботирования озono-воздушной смеси. Сделать вывод по результатам эксперимента.

3*. По уравнениям (6) и (7) определить коэффициент распределения и постоянную Генри. Сравнить полученный коэффициент распределения со значениями, приведенными на рис.8, определить абсолютную и относительную погрешность.

4. Сделать общие выводы.

Контрольные вопросы

1. Какие сильные окислители вы знаете? Область применения, недостатки.

2. Какие свойства озона первоначально использовались при подготовке

питьевой воды?

3. Из каких основных этапов состоит подготовка питьевой воды?

4. В чем преимущества комбинированной очистки “озонирование-фильтрация на активированных углях”?

5. Чем отличается технология очистки сточных вод от подготовки питьевой воды?

6. Особенности применения озона в здравоохранении.

7. Каким образом производится очистка отходящих газов с помощью озона?

8. Особенности синтеза озона в озонаторах с поверхностным разрядом?

9. Как определить производительность озонатора?

10. Значимость растворения озона в воде. Пути решения проблемы растворения.

11. Почему барботажная камера остается самым распространенным контактным аппаратом?

12. Как влияет концентрация озона в воде на остаточную концентрацию в газовой фазе?

13. Каким образом влияет на растворение озона диаметр барботажной камеры?

14. Методы измерения концентрации озона в газе и цветности воды.

15. Каким образом в условиях данной работы можно улучшить процесс очистки воды?

Задание для самостоятельной работы № 2 Исследование работы барьерного озонатора

1. Цель работы

1. Ознакомление с конструкцией барьерного озонатора, принципом его работы и выходными параметрами.

2. Исследование режимов работы барьерного озонатора, определение концентрации озона, активной мощности разряда.

2. Предварительные сведения

Под озонатором в общем случае понимают устройство для получения озона. Современные озонаторы, в которых озон получают с помощью электрического разряда в воздухе или в кислороде, состоят из генераторов озона и источников питания и являются составной частью озонаторных установок, включающих в себя, кроме озонаторов, вспомогательные устройства: систему очистки и осушки рабочего газа (воздуха или кислорода), систему охлаждения, компрессор, измерительные устройства.

В настоящее время озон O_3 является газом, используемым в так называемых озонных технологиях: очистка и подготовка питьевой воды, очистка сточных вод (бытовых и промышленных стоков), отходов газов и др.

В зависимости от технологии использования озона производительность озонатора может составлять от долей грамма до десятков килограмм озона в час.

Из большого числа различных современных конструкций озонаторов, использующих электрический разряд для получения озона, наибольшее распространение получили озонаторы с так называемым барьерным разрядом. Производительность одного барьерного озонатора может составлять от граммов до 15 кг озона в час.

Барьерным разрядом называют разряд в узком газовом зазоре между плоскими или коаксиальными электродами, один из которых (или оба) покрыт

слоем твердого диэлектрика (рис. 2.1) Если к электродам приложено переменное напряжение с амплитудой, превышающей пробивное напряжение газового промежутка, то в нем возникает разряд, состоящий из большого числа отдельных искр, дискретных в пространстве и во времени. Разряд продолжается до тех пор, пока мгновенное значение напряжения на электродной системе не достигнет U_{\max} . Особенностью барьерного разряда является локальное накопление заряда на поверхности диэлектрического барьера в процессе развития в промежутке каждой отдельной искры. Поясним это с помощью рис. 2.2.

Пусть к промежутку с барьером приложено переменное напряжение, при котором еще нет разряда. Это напряжение распределяется по емкостям барьера и газового промежутка, так что к газу приложено напряжение

$$U_{\Gamma} = U \cdot \frac{C_{\bar{6}}}{C_{\Gamma} + C_{\bar{6}}}, \quad (1)$$

где U - напряжение на электродах; $C_{\bar{6}}$ - емкость барьера C_{Γ} - емкость газового промежутка.

Для цилиндрической системы электродов

$$C_{\bar{6}} = 2 \cdot \pi \epsilon_0 \epsilon_{\bar{6}} \cdot \frac{L}{\ln \frac{D}{D_{\text{ВН}}}}; \quad C_{\Gamma} = 2 \cdot \pi \epsilon_{\Gamma} \epsilon_0 \cdot \frac{L}{\ln \frac{D_{\text{ВН}}}{D}}, \quad (2)$$

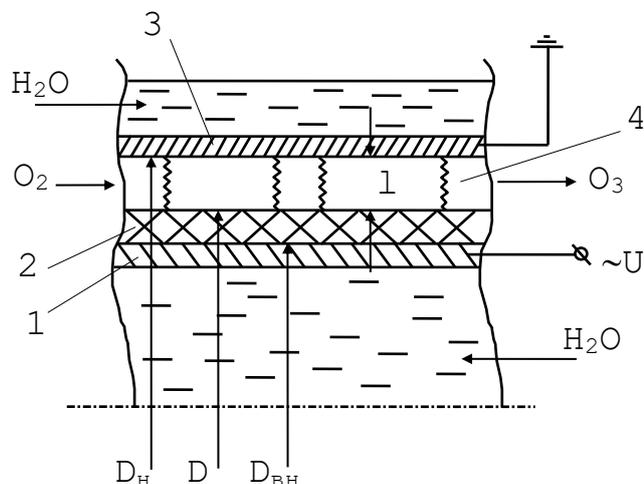


Рисунок 1 — Электродная система озонатора.

1, 3 - электроды; 2 - диэлектрический барьер; 4 - зона разряда.

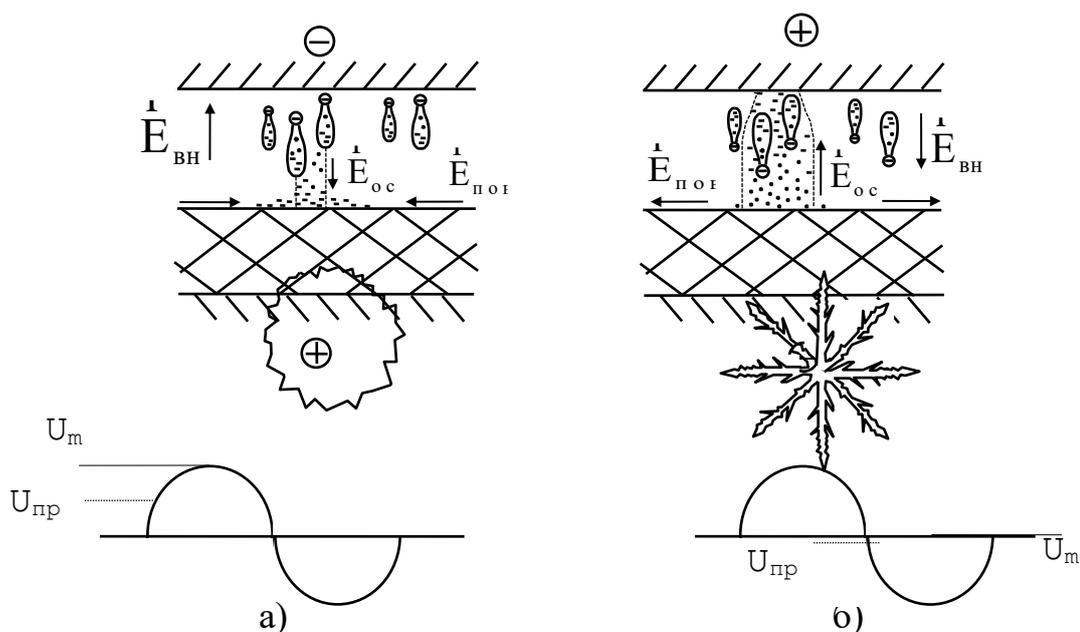


Рисунок 2 — Развитие разряда в промежутке озонатора где ϵ_b и ϵ_g - диэлектрические проницаемости барьера и газа; L - длина электродов; D_n , D , $D_{вн}$ - диаметры электродов барьера (см. рис.1).

Рассмотрим первый полупериод воздействующего напряжения, в который электрод с диэлектриком является анодом (рис. 2, а). Когда напряженность внешнего поля $E_{вн}$, создаваемого приложенным напряжением, достигнет значения начальной напряженности, в промежутке начинаются интенсивные ионизационные процессы и создается большое число лавин, продвигающихся по направлению к диэлектрическому барьеру. Расчеты показывают, что при нормальной плотности газа в разрядном промежутке длиной $l = 1 - 3$ мм развитие лавин может привести к созданию объемных зарядов с плотностью N , при которой выполняется условие перехода лавины в стример ($N = 10^8$ 1/см³). При выполнении этого условия в каком-то месте промежутка возникает стримерный канал, головка которого доходит до поверхности электрода, покрытого диэлектрическим барьером.

Происходит пробой газового промежутка по многолавино-стримерному механизму. Внешне разряд выглядит как искра. Этому процессу соответствует

напряжение $U_{пр}$.

В ходе образования и движения лавин и, в особенности, при подходе к диэлектрическому барьеру головки стримера, на поверхность барьера оседают отрицательные заряды - электроны. Диаметр канала стримера составляет при рассматриваемых условиях $\approx 0,1$ мм. Примерно таких же размеров оказывается и пятно заряда, осевшего на барьер. Что касается положительных ионов, образовавшихся при развитии лавин, то, обладая гораздо меньшей подвижностью, они постепенно смещаются в сторону металлического катода. Подходя к нему, они нейтрализуются. Оседание отрицательного заряда на поверхность диэлектрического барьера вызвано большим объемным сопротивлением материала барьера (порядка $10^{14} - 10^{16}$ Ом·см). Большое поверхностное сопротивление ($10^{12} - 10^{17}$ Ом) препятствует растеканию заряда по поверхности. Образуется заряженный диск с максимальной плотностью заряда в центре диска. заряженный диск создает поле, имеющее как нормальную \dot{E}_{oc} , так и тангенциальную $\dot{E}_{поп}$ составляющие, под действием которой вдоль поверхности барьера начинается поверхностный разряд лавинного типа. В рассматриваемом нами случае отрицательно заряженного диска поверхностный разряд создает круглое пятно отрицательного заряда с диаметром, во много раз превышающим диаметр начального заряда. Одиночный разряд в промежутке может создать пятно диаметром до 15 - 17 мм (рис. 2, а).

Образовавшееся на барьере после поверхностного разряда пятно отрицательного заряда создает в разрядном промежутке свое поле с нормальной составляющей напряженности \dot{E}_{oc} , направленной встречно к приложенному внешнему полю. Измерения и расчеты показывают, что напряженность \dot{E}_{oc} может достигать нескольких кВ/см. В итоге суммарное поле в промежутке $\dot{E}_{\Sigma} = \dot{E}_{вн} - \dot{E}_{oc}$ снижается, и ионизационные процессы в этой части промежутка прекращаются. Разряд гаснет. Весь описанный процесс занимает время до десяти наносекунд, за которое приложенное напряжение не успевает

измениться. Одновременно начинается развитие стримера в другой части промежутка, где процесс повторяется.

Образование в разных точках искр и их затухание будет продолжаться до тех пор, пока приложенное напряжение не достигнет максимального значения U_m . После этого разряд в промежутке прекращается. Осциллограмма тока через промежуток выглядит так, как показано на рис. 3, где на кривую тока смещения $\dot{i}_{см}$ наложены импульсы тока отдельных искр.

Рассмотрим теперь полупериод, когда электрод с диэлектрическим барьером является катодом. При этом вновь рассматривается самый первый

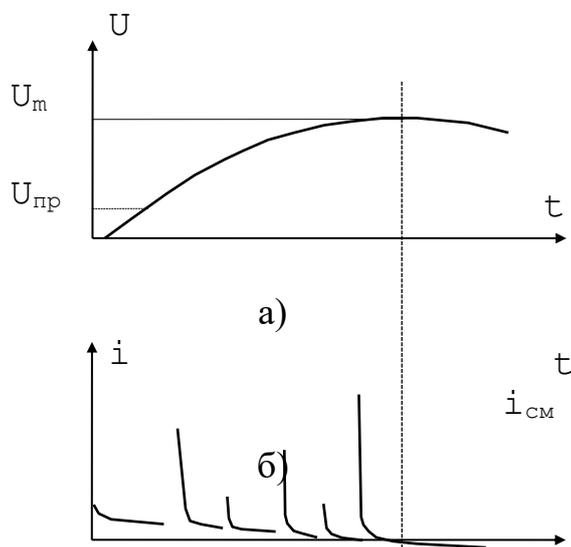


Рисунок 3 — Осциллограммы тока и напряжения
а) - осциллограмма напряжения на электродах; б) - осциллограмма тока через озонатор

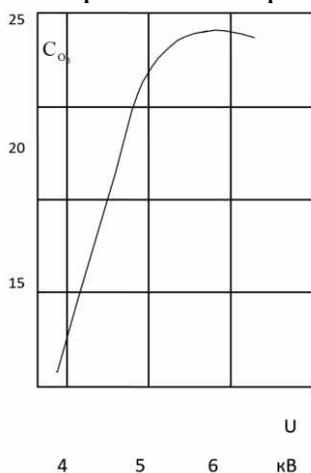


Рисунок 4 — Выход озона в зависимости от напряжения
Частота $f = 1500$ Гц; расход газа $v_r = 1$ л/мин.

полупериод, при котором развитие разряда в промежутке начинается при

отсутствии заряда на диэлектрике.

Развитие разряда идет в этом случае в направлении металлического электрода. Вновь образуется стример, но при подходе его головки к аноду все электроны уходят в металл. Накопления заряда на аноде не происходит. Но развитие стримера идет и в сторону катода, к которому перемещаются положительно заряженные ионы. Подходя к барьеру, они оседают на нем, образуя положительный заряд, являющийся причиной возникновения поверхностного разряда. В данном случае поверхностный разряд носит стримерный характер и на поверхности барьера остается пятно в виде звездочки (рис. 2.2, б), максимальная напряженность поля \dot{E}_{oc} , также составляет несколько кВ/см. В результате суммарная напряженность поля в промежутке снижается и разрядные процессы в этой части промежутка прекращаются. Диаметр звездочек одиночных разрядов достигает 20 - 25 мм. Когда напряжение на промежутке достигает U_m , разряд прекращается.

Иначе обстоит дело, когда разряд развивается в промежутке, в котором на диэлектрическом барьере уже имеется заряд, оставшийся от предыдущего полупериода. Поскольку поверхностное сопротивление материала барьера очень велико, заряд не успевает релаксировать за время одного периода. Распределение зарядов на поверхности к началу разряда в данный полупериод остается практически тем же, как в момент окончания разряда в предыдущий полупериод. Это означает, что в новый полупериод поле осевших зарядов складывается с внешним полем, усиливая его. Поэтому в местах, где расположены пятна или звездочки осевших зарядов, напряженность поля достигает начальной E_n раньше, чем в остальной части промежутка. Развитие ионизационных процессов и разряд оказываются “привязанными” к местам разряда в предыдущий полупериод.

Картина разряда в промежутке становится еще более сложной после длительного воздействия переменного напряжения. Но есть определенные закономерности, проявляющиеся во всех случаях: в каждый полупериод разряд

имеет вид отдельных, быстро затухающих искр. Разряд начинается, когда напряжение, приложенное к электродной системе, меньше разрядного напряжения газового промежутка. В каждый полупериод образуются импульсы тока, число и амплитуда которых являются статистическими величинами.

В процессе развития каждой отдельной искры происходят электрохимические реакции, результатом которых является образование озона и его разложение. Процесс образования озона состоит из нескольких этапов, хотя в общем случае число реакций, связанных с образованием озона и его разложением, превышает 70, существуют основные, без прохождения которых получение озона невозможно. Основной реакцией является процесс диссоциации молекул кислорода при взаимодействии со свободным электроном;



Постоянная времени этого процесса очень мала и составляет единицы наносекунд. Следующий этап состоит в образовании молекулы озона



в которой принимает участие третья частица M : молекула, ион, электрон или атом в нейтральном или возбужденном состоянии. Исследования показывают, что образование озона требует времени до 10 мкс.

Кроме образования озона, при движении частиц газа происходит разложения молекул O_3 по реакции



Эта реакция идет тем интенсивнее, чем выше температура газа. Образующийся в зоне разряда озон диффундирует в соседние области.

В результате прохождения рабочего газа через разрядную зону озонатора на выходе получается озono-воздушная или озono-кислородная смесь с концентрацией озона (10^{-1} - 10) г/м³, при этом получаемое количество озона зависит от превышения интенсивности образования над интенсивностью разложения.

Рассмотренный механизм развития разряда в однородном поле

промежутка с диэлектрическим барьером на электроде позволяет установить те особенности, из-за которых барьерный разряд стал одним из основных источников озона. Главная особенность - дискретность разрядных процессов в пространстве и во времени. В течение части каждого полупериода действующего напряжения разряд распределен по всему промежутку. Это позволяет интенсивно охлаждать всю разрядную зону охлаждением электродов, что особенно важно для предотвращения термического разложения уже образовавшегося озона. Барьерный разряд, кроме того, является наиболее рациональной формой разряда и для образования озона. Барьер выступает в роли токоограничивающего сопротивления для каждой отдельной искры, что предотвращает большие токи, т.е. потери энергии на разогрев разрядного канала. Вместе с тем, в таком разряде процессы диссоциации молекул кислорода идут с наибольшей интенсивностью, что обеспечивается имеющим место распределением по энергиям свободных электронов.

Образование искры в каждой области промежутка, где напряженность поля превысит пробивную и затухание этой искры из-за спада напряженности поля, вызванного осевшими зарядами, поддерживает на электродах практически неизменное напряжение на газовом промежутке U_r в течение всего времени горения разряда в данный полупериод. Поэтому средняя напряженность поля в газовом промежутке в течение всего времени горения разряда лишь незначительно отличается от начальной. Постоянство напряженности обеспечивает при разряде стабильное распределение электронов по энергиям, что важно для прохождения электрохимических реакций образования озона.

С ростом приложенного напряжения время горения разряда в каждый полупериод увеличивается, увеличивается число искр и возрастает выход озона. Однако почти пропорциональный рост выхода озона с ростом напряжения продолжается до определенного предела (рис. 2.4). С ростом числа искр увеличивается температура разрядной зоны, усиливается разложение озона. Работа озонатора при перегреве становится неэффективной. Поэтому рабочий режим озонатора должен лежать в области линейной части кривой зависимости

концентрации озона C_{O_3} от напряжения.

Приведенное выше описание процессов в озонаторе отражает только физическую картину в газовом промежутке. Для электрической цепи, включающей источник питания и озонатор, последний представляет сложную нагрузку, изменяющуюся при каждом зажигании разряда. Анализ процессов в эквивалентной электрической цепи содержащей озонатор, позволяет связать физические процессы с электрическими величинами, определяющими эти процессы.

В эквивалентной электрической схеме озонатор может быть представлен двумя последовательно включенными емкостями: емкостью газового промежутка и емкостью барьера, как это было определено ранее.

Пусть к озонатору приложено переменное напряжение

$$U = U_0 \cdot \sin \omega t , \quad (6)$$

До начала разряда в газовом промежутке, т.е. при напряжении $U_{\Gamma} < U_{\text{пр}}$, приложенное напряжение распределяется по емкостям газового промежутка и барьера: $U = U_{\Gamma} + U_{\text{б}}$, причем

$$U_{\text{б}} = U \frac{C_{\Gamma}}{C_{\Gamma} + C_{\text{б}}} ; \quad U_{\Gamma} = U \frac{C_{\text{б}}}{C_{\Gamma} + C_{\text{б}}} , \quad (7)$$

Ток через озонатор равен

$$i = U_0 \omega \cdot \frac{C_{\text{б}}}{C_{\text{б}} + C_{\Gamma}} \cdot \cos \omega t , \quad (8)$$

Когда напряжение на газовом промежутке станет достаточным для его пробоя, в промежутке начинается разряд, напряжение на газовом промежутке становится равным напряжению горения разряда $U_{\text{гор}}$ и не меняется пока горит разряд. Тогда напряжение на диэлектрическом барьере может быть определено как

$$U_{\delta} = U_0 \cdot \sin \omega t - U_{\text{г.оп}}, \quad (9)$$

Ток через озонатор при разряде

$$I = \frac{d}{dt}(C_{\delta} \cdot U_{\delta}) = U_0 \cdot \omega \cdot C_{\delta} \cdot \sin \omega t, \quad (10)$$

Так как $\varepsilon_{\delta} > \varepsilon_{\text{г}}$, то суммарная емкость озонатора меньше емкости барьера, и при возникновении разряда ток скачком возрастает.

Как уже говорилось выше, кривая тока через озонатор при разряде имеет сложную форму, учитывающую импульсы тока отдельных разрядов. Поэтому обычно пользуются понятием среднего тока через озонатор при разряде

$$I_{\text{ср}} = (U_0 - U_{\text{г.оп}}) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \omega C_{\delta}, \quad (11)$$

Очень важной характеристикой, определяющей не только интенсивность ионизационных процессов в газовом промежутке, но и эффективность образования озона, является активная мощность разряда P , с ростом которой выход озона возрастает. Правильная оценка активной мощности при работе озонатора позволяет определить эффективность работы устройства в целом.

Расчет активной мощности в цепи переменного тока проводится по уравнению

$$P = \frac{1}{t} \int iU dt - \frac{1}{2\pi} \int iU d(\omega t), \quad (12)$$

Если этот интеграл разбить на участки, соответствующие интервалам, когда разряд в промежутке есть и когда его нет, и на каждом участке использовать свои уравнения для напряжения и тока, то можно получить уравнение для активной мощности вида

$$P = U_{\text{г.оп}} \left[\frac{2 \cdot (U_0 - U_{\text{г.оп}}) C_{\delta} \omega}{\pi} - \frac{2 \cdot U_{\text{г}} \omega C_{\text{г}}}{\pi} \right], \quad (13)$$

где первое слагаемое в квадратных скобках соответствует среднему току через

озонатор при горении разряда, а второе слагаемое - среднему току в момент зажигания разряда, когда напряжение на промежутке становится равным пробивному. С небольшой погрешностью это напряжение можно считать равным напряжению горения разряда. Ток, соответствующий этому напряжению, называют критическим.

Тогда уравнение для мощности приобретает вид

$$P = U_{гор} (I_{ср} - I_{кр}) , \quad (14)$$

Это уравнение используется для определения мощности при построении вольт-амперной характеристики. Этот метод использован и в данной работе.

Метод состоит в том, что измеряют выпрямленный ток через озонатор при изменении напряжения, приложенного к электродам, и строят вольт-амперную характеристику $I = f(U)$. До начала разряда эта характеристика имеет вид прямой с наклоном, обусловленным сопротивлением всего озонатора (рис. 5). После зажигания разряда ток определяется в основном емкостью барьера, и наклон прямой меняется. Точка излома соответствует критическому режиму, при котором ток равен $I_{кр}$. Если продлить разрядную часть вольтамперной характеристики до пересечения с осью напряжения, то точка пересечения дает напряжение горения разряда $U_{гор}$.

Зная значения $I_{кр}$ и $U_{гор}$ можно найти мощность для любого значения напряжения по соответствующему значению $I_{ср}$.

Основными параметрами, определяющими эффективность работы барьерного озонатора, являются: напряжение на электродах U ; газовый зазор l (эта величина определяет характер разряда и его интенсивность); диэлектрическая проницаемость материала барьера ϵ_6 ; частота f воздействующего напряжения.

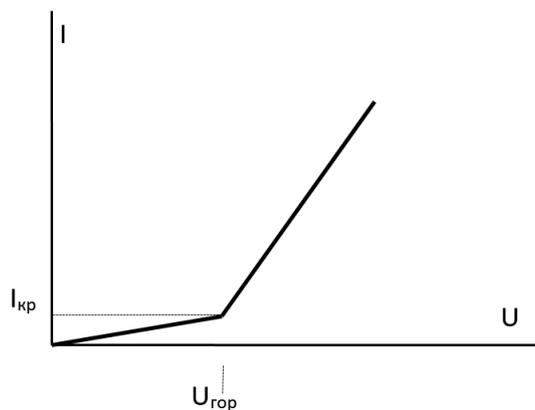


Рисунок 5 — Вольт - амперная характеристика озонатора

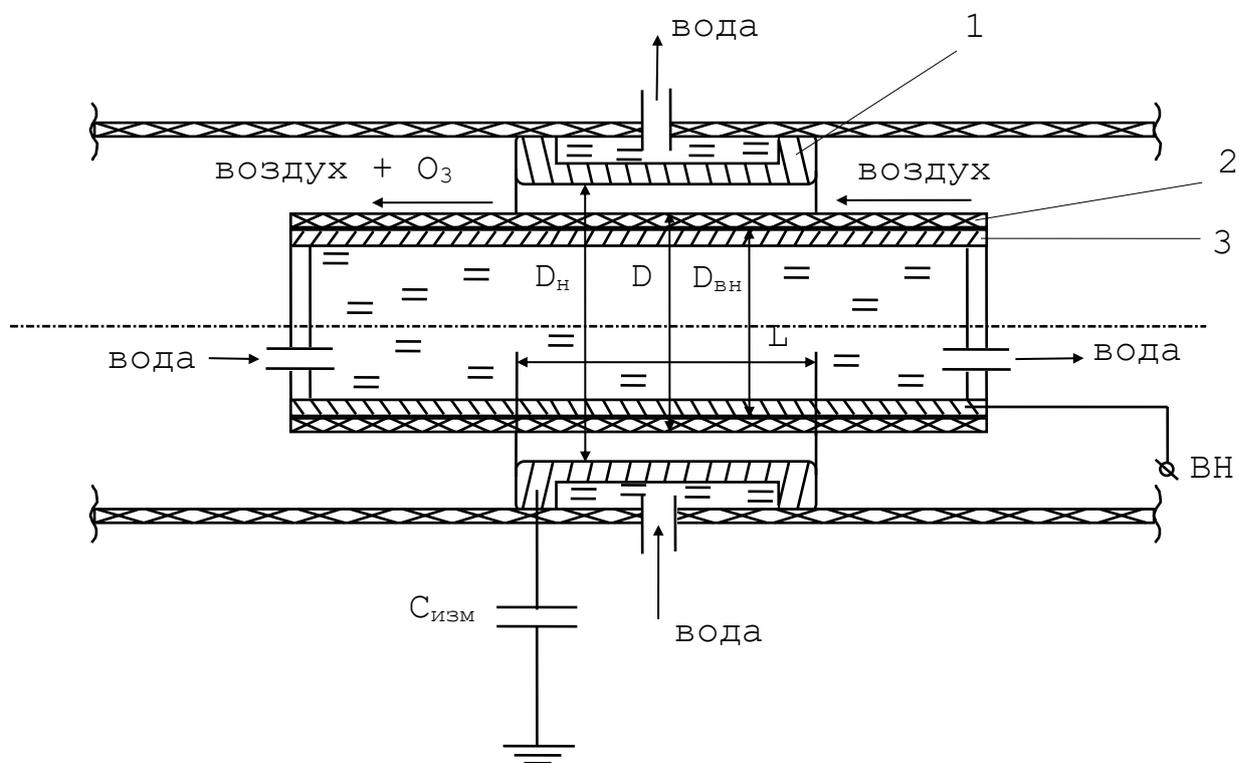


Рисунок 6 — Трубчатый барьерный озонатор

1 - наружный электрод; 2 - барьер из стеклоэмали; 3 - внутренний электрод.

Для выноса образовавшегося озона из разрядного промежутка необходимо создать равномерный поток газа через разрядную зону. Наиболее удобно это осуществляется в коаксиальной системе электродов так называемого трубчатого озонатора (рис. 6).

От скорости протекания газа через озонатор, или от расхода газа V_T (л/мин) зависит время пребывания каждого единичного объема газа в зоне разряда. Это означает, что число разрядов, развивающихся в каждом единичном объеме газа при движении его вдоль озонатора зависит от U_T , т.е. концентрация озона на выходе из озонатора зависит от расхода газа.

С расходом газа связана производительность озонатора

$$G = C_{O_3} \cdot V_T, \quad (15)$$

Измеряемая в граммах (или килограммах) озона в час и являющаяся основной характеристикой озонатора.

Второй важной величиной, определяющей эффективность работы озонатора, являются затраты энергии на получение озона

$$W = \frac{P}{G}, \text{ кВт.ч/кг,}$$

Эта величина имеет особо важное значение для промышленных озонаторов с производительностью до 50 - 60 кг/час.

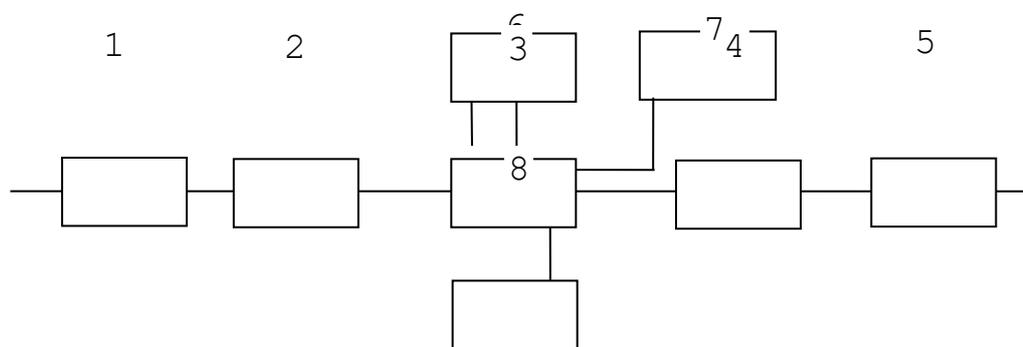


Рисунок 7 — Блок - схема установки

1 - компрессор; 2 - осушитель воздуха; 3 - озонатор; 4 - измеритель концентрации O_3 ; 5 - разложитель озона; 6 - источник высокого напряжения; 7 - блок электрических измерений; 8 - водяное охлаждение.

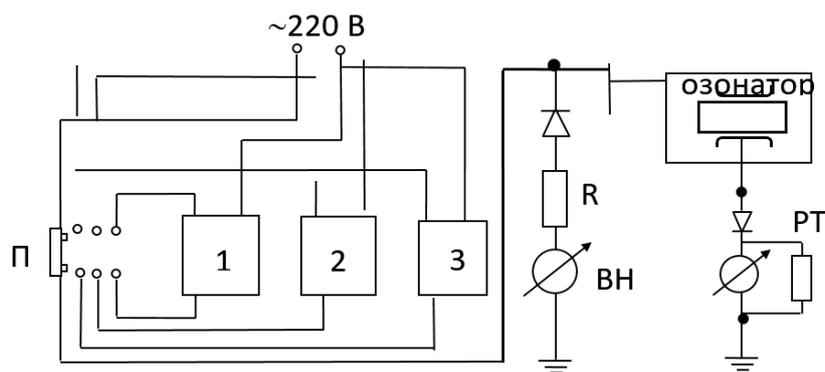


Рисунок 8 — Электрическая схема измерений и коммутации источников питания

1 - ИП - 600 Гц; 2 - ИП - 1000 Гц; 3 - ИП - 1500 Гц.

3. Описание установки

На рис.7 представлена блочная схема установки, включающая, помимо электрической части вспомогательные устройства для осушки газа, водяного охлаждения, компрессор, разложитель озона и измеритель концентрации озона. Измерение концентрации озона осуществляется по спектру поглощения при пропускании света ртутной лампы через специальную кварцевую кювету, внутри которой проходит поток газа с озоном. Выходным прибором измерителя концентрации служит микроамперметр, пересчет показаний которого дает значение концентрации озона. Вся шкала прибора (100 делений) соответствует концентрации озона в газе 20 мг/л или примерно 1 % объемный.

Осушка газа осуществляется пропусканием воздуха через осушитель с силикагелем. Расход газа измеряется ротаметром в делениях, пересчитываемых затем в л/мин.

Для уничтожения озона в выходящем из озонатора потоке газа, что необходимо в целях безопасности для предотвращения отравления (озон является мощным окислителем, и вдыхание воздуха с высокой концентрацией озона приводит к ожогу дыхательных путей) используется разложитель с цианитом, при взаимодействии с которым происходит разложение озона.

Электрическая схема установки приведена на рис. 8 , где 1, 2 и 3 - источники питания с частотой 500, 1000 и 1500 Гц соответственно; ВН - блок

измерения высокого напряжения; РТ - блок измерения разрядного тока; П - переключатель источников питания.

Измерение высокого напряжения осуществляется по выпрямленному току через добавочное сопротивление $R=27$ мОм. Шкала прибора, установленного на пульте, отградуирована в максимальных значениях напряжения соответствующей частоты.

Измерение тока через озонатор производится с помощью выпрямительной схемы, последовательно с которой включен микроамперметр М-906 с шунтом. Для определения тока необходимо показание N прибора (мкА) умножить на коэффициент $K_I = 0.168$, имеющее размерность мА/мкА, тогда значение тока $I = N \cdot K_I$ имеет размерность мА.

В работе используется трубчатый барьерный озонатор с диэлектрическим барьером из эмали типа 13 ДЗ, имеющей значение диэлектрической проницаемости $\epsilon_6 = 6$. Диаметр наружного электрода $D_H = 43$ мм, диаметр внутреннего, покрытого эмалью электрода $D=40$ мм, что дает длину воздушного зазора $l = 1.5$ мм. Толщина слоя эмали 1 мм. Длина наружного электрода 4 см длина рабочей части, где горит разряд, 3.5 см.

4. Задание на предварительную подготовку

1. Ознакомиться с данным описанием.

2. Рассчитать максимальное значение переменного напряжения на электродах озонатора, при котором произойдет пробой промежутка. Озонатор представляет собой коаксиальную систему электродов с диаметром электродов $D_H = 43$ мм и $D = 40$ мм; это создает промежуток длиной 1.5 мм. Электрическое поле в воздушном промежутке можно считать однородным. Для такого поля максимальное значение пробивного напряжения в кВ,

$$U_{пр} = 24.5 \cdot \delta l + 6.4 \sqrt{\delta l}, \quad (16)$$

где δ - относительная плотность воздуха; l - расстояние между электродами, см.

3. Рассчитать энергозатраты на получение озона в следующем режиме работы озонатора: объемный расход газа 1 л/мин, концентрация озона $C_{O_3} = 20 \text{ г/м}^3$, активная мощность разряда $P = 15 \text{ Вт}$.

5. Задание на проведение работы

Внимание! Первое включение установки на высокое напряжение и переключение с одной частоты на другую осуществляется только преподавателем!

1. Убедиться в том, что установка готова к работе: на пульт подано напряжение и горит сигнальная лампа Л1, включен компрессор и ротаметр, показывает расход воздуха 40 делений, что соответствует 1 л/мин, включено водяное охлаждение озонатора, включен измеритель концентрации озона и его выходной прибор показывает "0".

2. Убедиться в том, что переключатель источников питания находится в положении 1000 Гц, закрыта дверца на левой боковой панели пульта, горит сигнальная лампа источника 1000 Гц, его переключатель напряжения П1 находится в крайнем левом положении, включен рубильник "видимого разрыва" на правой боковой панели пульта.

Включить кнопку "ВКЛ" магнитного пускателя. На пульте загорается лампа Л2 "высокое напряжение". Установка готова к работе.

3. Записать значение тока через озонатор и напряжения при первом положении переключателя П2. Убедиться в том, что концентрация озона равна "0". Поставить переключатель в положение 2, записать значения напряжения и тока и проверить значение концентрации озона. Если концентрация начала расти, убедиться в наличии разряда, посмотрев в торец озонатора через окошко на пульте. Выждать, пока не установится неизменное значение концентрации (примерно 1 мин.) и записать его.

4. Повторить п.3 переключив переключатель П2 в положение 3, 4, 5. При каждом напряжении записывать значения концентрации озона после того, как показания микроамперметра М1 перестанут изменяться. Записать значения тока

и напряжения при каждом положении переключателя.

5. Для одного из значений напряжения (например в 4-ом положении переключателя) изменить расход газа и убедиться, что происходит изменение концентрации озона. Записать значение расхода газа и соответствующее значение концентрации озона.

6. Перевести переключатель П2 в первое положение и нажать кнопку "ВЫКЛ". Высокое напряжение отключается от озонатора.

7. Выключить рубильник "видимого разрыва", и перейти к работе с источником 600 Гц.

После подключения источника 600 Гц включить "видимый разрыв". Включить кнопку высокого напряжения. Повторить измерения по пункту 4 в положениях 1, 2, 3 переключателя П1.

8. Повторить пункты 5 и 6 задания для частоты 1500 Гц.

9. По найденным значениям токов и напряжений для частоты 1000 Гц построить кривую $I_{\text{ср}} = f(U)$ в виде двух пересекающихся прямых. Найти значения $I_{\text{кр}}$ и $U_{\text{гор}}$. С помощью полученной кривой рассчитать значения активной мощности разряда и построить кривую зависимости концентрации озона от мощности разряда.

10. Для одного значения напряжения на озонаторе построить кривую зависимости концентрации озона от частоты напряжения.

11. Для частоты 1000 Гц, расхода газа 1 л/мин и максимального напряжения рассчитать производительность озонатора и затраты энергии на получение озона. Оценить полученные результаты.

5. Контрольные вопросы

1. Как объясняется увеличение выхода озона с ростом приложенного к озонатору напряжения? При каких условиях рост выхода озона прекращается?

2. Почему растет выход озона с частотой приложенного напряжения?

3. Что такое напряжение горения разряда?

4. Какие основные величины характеризуют работу озонатора?

Задание для самостоятельной работы № 3. Исследование работы барьерного озонатора

Магнитно - импульсная обработка металлов

1. Цель работы

Ознакомление с принципом деформирования проводящих заготовок в импульсном магнитном поле, с узлами и элементами установок для магнитно-импульсной обработки металлов, а также ознакомление с методами расчетов процессов в разрядной цепи установки.

2. Предварительные сведения

Магнитно-импульсная обработка основана на преобразовании электрической энергии, накопленной в конденсаторной батарее, при разряде на индуктор или непосредственно на заготовку в энергию импульсного магнитного поля, совершающего работу деформирования электропроводной заготовки.

Известно, что на единицу длины проводника с током $\dot{\mathbf{I}}$, помещенном в магнитное поле с напряженностью $\dot{\mathbf{H}}$, действует сила

$$\mathbf{F} = \mu_0 \mu [\dot{\mathbf{I}} \times \dot{\mathbf{H}}], \quad (1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная; μ - магнитная проницаемость окружающей среды.

Магнитное поле, действующее на проводник с током, может быть создано током, протекающим в другом проводнике. Величина напряженности магнитного поля в пространстве вокруг проводника с током может быть определена из закона полного тока

$$\oint_{\mathbf{l}} \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{l} = \sum \mathbf{I}, \quad (3.2)$$

где \mathbf{l} - контур интегрирования.

На расстоянии \mathbf{r} от уединенного проводника

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{I}}{2\pi r} \quad (3)$$

В случае двух бесконечно тонких прямых проводников, расположенных на расстоянии Δr друг от друга, электродинамическая сила, действующая на единице длины проводников,

$$\mathbf{F} = \mu\mu_0 \frac{\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2}{2\pi \Delta r}, \quad (4)$$

Направление силы зависит от направления токов \mathbf{I}_1 и \mathbf{I}_2 в проводниках: при одинаково направленных токах проводники притягиваются друг к другу, при противоположно направленных - отталкиваются.

Для двух бесконечно тонких плоских шин шириной a , расположенных на небольшом расстоянии ($\Delta r \ll a$) друг от друга, напряженность магнитного поля в объеме между шинами без учета краевых эффектов

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{I}}{a} \quad (5)$$

Давление магнитного поля на шины численно равно удельной плотности энергии поля

$$\mathbf{P} = \mu\mu_0 \frac{\mathbf{H}^2}{2} = \mu\mu_0 \frac{\mathbf{I}^2}{2a^2} \quad (6)$$

Из-за влияния эффекта близости и поверхностного эффекта ток по сечению шин распределяется неравномерно. Поэтому при распределения силы или давления по толщине обрабатываемой заготовки и для определения индуктивности системы следует использовать не геометрическое расстояние Δr

, а некоторое эквивалентное расстояние

$$\Delta_{\text{ЭК В}} = \Delta r + 2\Delta, \quad (7)$$

где $\Delta = \sqrt{2\rho / \mu\mu_0\omega}$ - глубина проникновения электромагнитного поля в материал шин; ρ - удельное сопротивление материала шин; ω - круговая частота тока.

Известно, что в проводящем теле, расположенном вблизи проводника с переменным током, возникают вихревые токи. Взаимодействие тока в проводнике с наведенным в теле (заготовке) током сопровождается появлением отталкивающей силы

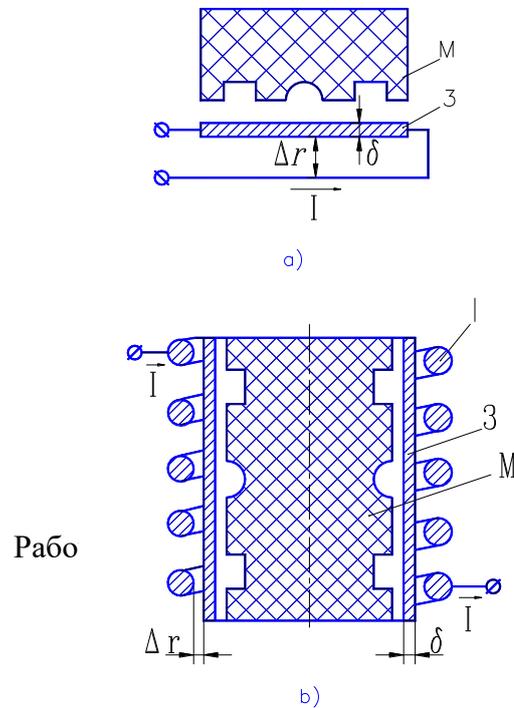
$$F = \frac{I^2}{2} \frac{dL}{dx}, \quad (8)$$

где $\frac{dL}{dx}$ - изменение индуктивности системы проводник-заготовка в направлении X .

Среднее давление на проводник и заготовку равно силе F , деленной на площадь проводника S .

Величина давления на заготовку толщиной δ может быть определена по формуле (3.6), если электромагнитное поле не проникает сквозь заготовку ($\Delta \ll \delta$). В случае проникновения поля ($\Delta \approx \delta$) давление определяется разностью удельных плотностей энергии на поверхностях заготовки

$$P = \mu\mu_0 \frac{H_1^2 - H_2^2}{2} \quad (9)$$



В установках для магнитно-импульсной обработки используются два способа получения давления электромагнитного поля на заготовку. При первом способе импульсный ток пропускается по заготовке 3 (рис. 1,а). При втором способе в заготовке наводятся вихревые токи под действием импульсного магнитного поля, возникающего вокруг проводника или системы проводников (индуктора И), через который пропускается импульсный ток (рис. 1,б). Для придания заготовке требуемой формы на пути ее перемещения устанавливается матрица М.

При первом способе по заданным электрофизическим свойствам заготовки и требуемой величине давления можно по (3.6) определить параметры тока, необходимые для деформирования заготовки. Таким же образом можно решить и обратную задачу.

При втором способе: если известен закон изменения индуктивности

системы индуктор-заготовка от радиуса заготовки, для определения силы можно воспользоваться формулой (3.8).

Энергия импульсного электромагнитного поля при осуществлении деформации заготовки расходуется не только на выполнение механической работы, но также на нагрев проводников, изменение их внутренней структуры и т.д. Точный учет этих процессов является сложной задачей, выходящей за рамки данной работы.

В установках для магнитно-импульсной обработки металлов в зависимости от формы и размеров заготовки и от характера проводимой операции используются различные индукторные системы. По конструктивному выполнению их можно разделить на следующие типы: одновитковые, спиральные, коаксиальные, петлевые, конические и с концентраторами магнитного потока. Для изготовления индукторов применяются хорошо проводящие электрический ток механически прочные металлы и их сплавы. Изоляционные материалы в индукторе выполняют две основные функции: обеспечение электрической прочности промежутков между витками и между индуктором и заготовкой, корпусом установки, а также обеспечение механического крепления витков индуктора.

Требования, предъявляемые к индукторам, следующие:

- высокий коэффициент преобразования энергии источника питания в работу деформации заготовки;
- высокая механическая стойкость к воздействию динамических усилий, возникающих в процессе деформации заготовки;
- обеспечение необходимого распределения или концентрации магнитного поля на заданном участке обрабатываемой заготовки;
- обеспечение электрической прочности изоляции;
- удобное и надежное присоединение к источнику питания.

Источник питания магнитно-импульсной установки должен обеспечить необходимую величину и скорость изменения тока в индукторе с заготовкой. Для осуществления деформации металлических заготовок требуется получать

большую плотность тока в заготовке. Из известных в настоящее время источников импульсных токов наиболее подходящими для магнитно-импульсных установок являются генераторы с емкостным накопителем энергии. Величина запасаемой энергии, рабочее напряжение накопителя и параметры элементов разрядного контура определяются требуемыми величиной и скоростью изменения тока. В существующих установках для магнитно-импульсной обработки металлов рабочее напряжение составляет 1 - 50 кВ, запасаемая энергия изменяется от 0,1 до 300 кДж. Для обработки таких материалов, как золото, серебро, медь, алюминий и их сплавы эффективно используются установки с частотой колебаний разрядного тока 10 - 20 кГц. Для обработки материалов с низкой электропроводностью (нержавеющая сталь, титановые сплавы и др.) необходимо использовать установки с высокой рабочей частотой 60 - 100 кГц или “спутники” (промежуточные прокладки с высокой электропроводностью), размещаемые между индуктором и обрабатываемой заготовкой.

Магнитно-импульсный метод может быть использован для самых разнообразных видов обработки металлов давлением: вырубки отверстий, развальцовки, неглубокой штамповки, отбортовки, напрессовки, калибровки, сборки узлов, уплотнения и т.д. Он позволяет выполнять технологические операции, не осуществляемые другими методами (напрессовка металлических деталей на хрупкие изделия из стекла и керамики, обработка давлением деталей, заключенных в герметические оболочки из стекла или пластмасс, обработки сплавов, труднодеформируемых обычными способами). Возможность точного дозирования энергии, запасаемой в емкостном накопителе, позволяет получать детали с большой точностью повторения их формы.

В тех случаях, когда магнитно-импульсная обработка осуществляется за счет взаимодействия тока в индукторе и наведенного тока в деформируемой заготовке, необходимо, чтобы конструкция заготовки обеспечивала непрерывность пути наведенного тока (отсутствовали прорезы или большие отверстия).

3. Описание установки

Работа выполняется на стенде, принципиальная электрическая схема которого приведена на рис. .2.

Стенд состоит из следующих элементов: система индуктор-заготовка 3, коммутатор 2, емкостной накопитель энергии 6, зарядное устройство 5, блок поджигающих импульсов 1 и пульт управления 4. Питание установки осуществляется от сети переменного тока напряжением 220 В через предохранители ПР и пакетный выключатель П. Регулирование напряжения на первичной обмотке трансформатора Т осуществляется автотрансформатором АТ. Зарядка емкостного накопителя энергии осуществляется от вторичной обмотки Т через выпрямитель В и ограничивающие резисторы R_3 и R_p . Включение коммутатора 2 осуществляется от блока 1 после нажатия кнопки K_3 . Сигнализация о наличии напряжения питания стенда, на первичной обмотке АТ и блока 1 осуществляется лампами L_1 и L_2 соответственно. Контроль напряжения на выходе АТ осуществляется по вольтметру V. Величина зарядного напряжения накопителя 6 определяется по прибору, проградуированному в киловольтах и включенному через делитель напряжения $R_1 - R_2$. Регистрация тока в разрядной цепи накопителя осуществляется при

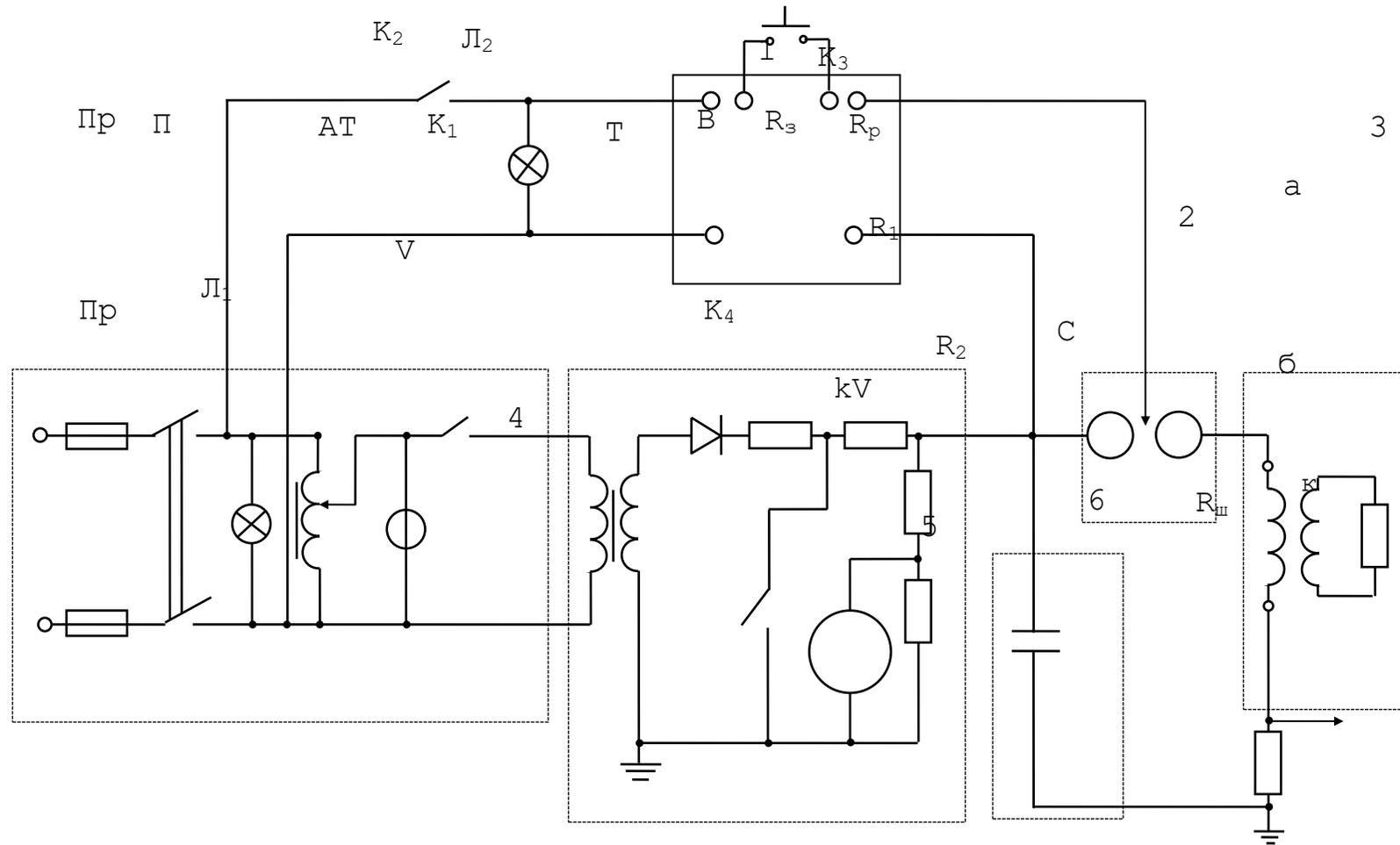


Рисунок 2 Электрическая схема лабораторного стенда

помощи шунта $R_{ш}$. Аварийный разряд накопителя энергии и снятие остаточного напряжения после отключения установки производится включением короткозамыкателя K_4 с электромагнитным приводом.

4. Задание на самостоятельную подготовку

1. Изучить описание лабораторной работы, рекомендуемую литературу.
2. Рассчитать максимальное значение тока разряда магнитно-импульсной установки при следующих параметрах разрядной цепи: $C = 300$ мкФ; $U = 4$ кВ; индуктивность установки $L_y = 0,05$ мкГн; сопротивление $R_y = 5$ мОм.

3. Рассчитать глубину проникновения магнитного поля, изменяющегося по синусоидальному закону с $\omega = 3 \cdot 10^5$ с⁻¹, в материал с $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м и расстоянии между ними $\Delta r = 1$ мм. Определить погонную индуктивность этой системы. Найти погонную dL/dx .

5. Определить электродинамическую силу взаимодействия двух проводников с током длиной 100 мм, шириной $a = 40$ мм при максимальном значении тока, вычисленном в п.2. Рассчитать давление магнитного поля в данной системе проводников ($\Delta r \ll a$).

5. Задание на проведение работы

1. Установить заготовку между клеммами а - б в разрядной цепи установки (рис. 2). При зарядном напряжении $U = 4$ кВ получить осциллограмму тока в разрядной цепи. Рассчитать индуктивность установки L_y .

2. Установить между клеммами а - б индуктор. Снять осциллограмму тока разряда. По осциллограмме с учетом результатов п.1 определить величину индуктивности индуктора.

3. Поместить в индуктор заготовку №1. По осциллограмме тока разряда определить индуктивность системы индуктор-заготовка №1.

4. Прodelать такие же эксперименты с заготовками №2, №3, №4 и №5.

5. Построить зависимость индуктивности системы индуктор-заготовка, определенной в п.4, от величины радиуса заготовки.

6. Установить между клеммами а-б систему из двух проводников для магнитно-импульсной обработки с пропусканьем тока по заготовке. Установить матрицу рядом с обрабатываемым проводником. При зарядном напряжении $U = 4$ кВ произвести деформирование заготовки. По осциллограмме тока определить величину тока и рассчитать давление магнитного поля на заготовку. Сравнить полученный результат с рассчитанным в п.5 предварительной подготовки.

6. Контрольные вопросы

1. Какие электрофизические явления используются в установках для магнитно-импульсной обработки материалов?
2. Как рассчитывается электродинамическая сила в системе проводников с токами?
3. Чем определяется глубина проникновения электромагнитного поля в материал?
4. Как определяется давление импульсного магнитного поля на проводящую преграду?
5. Чем определяются требования к параметрам магнитно- импульсных установок?
6. Как рассчитывается механическая работа при перемещении проводников с током?

Нанесение порошковых полимерных покрытий в камерах с электрическим кипящим слоем

1. Цель работы

Ознакомление с технологией и устройствами для нанесения порошковых полимерных покрытий в электрическом поле. Изучение процесса нанесения покрытий на изделия в камерах с электрическим кипящим слоем.

2. Предварительные сведения

Технология нанесения порошковых покрытий в электрическом поле находит широкое применение практически во всех областях промышленного производства, где нужно получать защитные, декоративные, электроизоляционные, химстойкие и др. покрытия. Технологический процесс получения покрытий из порошков заключается в сообщении электрического заряда частицам диэлектрического порошкового материала, осаждение их под действием электрических сил из аэрозольного облака, окружающего заземленное изделие и закрепление нанесенного слоя. Сформированное порошковое покрытие в результате последующей термообработки расплавляется, спекается или полимеризуется и превращается в монолитную пленку.

Порошковые покрытия дают экономическую выгоду производителю до 30 % по сравнению с покрытиями, получаемыми с помощью жидких лакокрасочных материалов. Они существенно улучшают эксплуатационные характеристики изделий с покрытиями. Преимущества обеспечиваются за счет:

- практически полного отсутствия потерь покрывного материала;
- исключения из технологии окраски дорогостоящих и загрязняющих окружающую среду растворителей;
- возможности получения покрытия толщиной 40 мкм и выше за один цикл напыления;
- возможности получения покрытий с новыми, более высокими эксплуатационными характеристиками за счет применения в качестве

покрывного материала веществ и соединений, которые переработать в покрытие можно только с использованием порошковой технологии;
- высокой производительности, улучшения условий труда и др.

В технологии напыления порошковых покрытий в настоящее время используются следующие материалы: эпоксидные смолы, эпоксиполиэфиры, полиэтилены, пентапласты, фторопласты, акрилы, поливинилбутираль, стеклоэмали и др.

Зарядку частиц порошкового материала в установках для напыления осуществляют, используя два метода: ионную зарядку (осаждение ионов из объема газа в поле коронного разряда) и статическую электризацию (обмен зарядами между самими частицами и другими телами при их контактировании).

Коронный разряд возникает в электродных системах с резконеоднородным полем игла - плоскость и др.). Зона ионизации, в которой сосредоточены электроны и ионы, занимает небольшой объем вблизи электрода с малым радиусом закругления. Основную часть межэлектродного пространства занимает внешняя зона коронного разряда, в которой сосредоточены ионы одного знака, отсутствует ионизация и происходит зарядка частиц диэлектрического (например, полимерного) порошка.

Существует два вида устройств для напыления порошков в электрическом поле: с помощью распылителей (рис. 1) и с помощью камер с электрическим кипящим слоем (рис. 2).

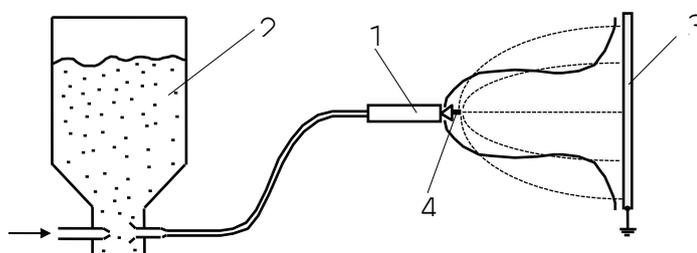


Рисунок 1 — Нанесение покрытия с помощью распылителя.

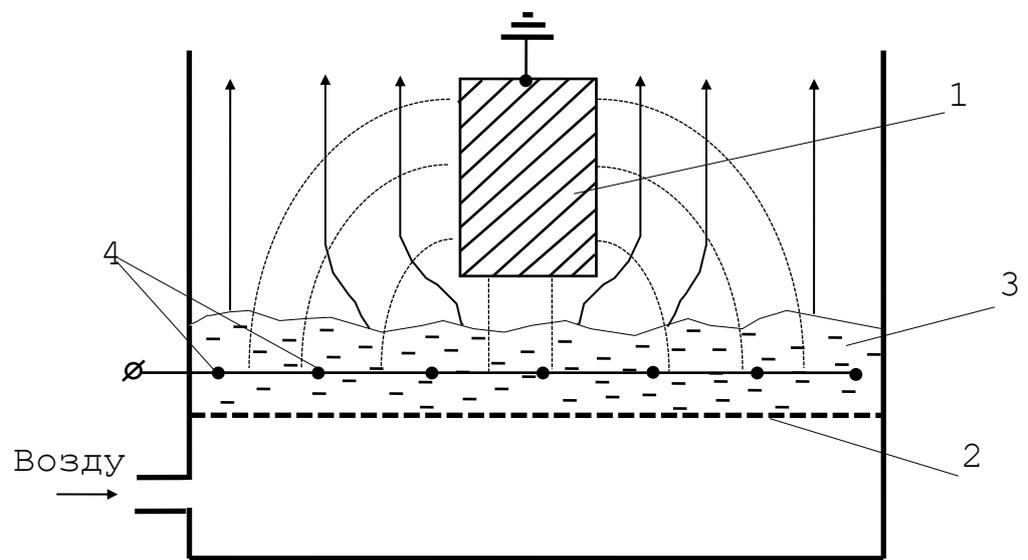


Рисунок 2 — Нанесение покрытия в камере с кипящим слоем.

В первом варианте (рис. 1) основным элементом установки является ручной или стационарный распылитель. Порошок подхватывается из дозатора 2 потоком воздуха, транспортируется по шлангам, проходит распылитель 1 с распылительным соплом. На выходе распылителя образуется аэрозольное облако. Заземленное изделие 3 помещают в вытяжном шкафу таким образом, чтобы аэрозольное облако достигало его поверхности. Внутри распылителя или в зоне распылительного сопла устанавливаются коронирующие электроды 4. Наиболее часто коронирующий электрод изготавливается в виде иглы. После подачи постоянного высокого напряжения (преимущественно отрицательной полярности) на коронирующий электрод 4 происходит зарядка порошка и осаждение заряженных частиц из облака на заземленном изделии. Электрическое поле, возникающее между иглой и заземленным изделием обеспечивает силовое воздействие на заряженные частицы и является основным фактором, обеспечивающим осаждение их из факела на изделие и формирование слоя покрытия. Большую роль в этом процессе играют также силы электростатического рассеяния самого облака заряженных частиц.

Во втором варианте (рис. 2) для нанесения используется камера с электрическим кипящим слоем. Заземленное изделие 1 помещают в диэлектрическую камеру, содержащую пористую перегородку 2, на которую насыпают порошковый материал 3. Внутри слоя порошка установлены высоковольтные электроды 4. Порошок переводится во взвешенное состояние при избыточном давлении воздуха под пористой перегородкой. Частицы, находящиеся в вихревом движении в кипящем слое, получают заряд в основном при контакте с высоковольтными электродами. В электрическом поле между высоковольтными электродами и изделием происходит разделение частиц по знакам зарядов (заряды противоположного знака образуются в слое за счет соударения частиц между собой и со стенками камеры), вынос заряженных частиц в объем камеры над поверхностью кипящего слоя. Таким образом весь объем камеры от поверхности пористой перегородки до изделия оказывается заполненным взвешенным порошком.

Такое состояние порошка в камере называется электрическим кипящим слоем. Под воздействием электрического поля происходит осаждение заряженных частиц на изделия и формирование покрытия.

На практике электростатические распылители используются чаще, т.к. они являются универсальными устройствами, для них не существует ограничений по габаритам, степени сложности профиля поверхности изделия. Камеры кипящего слоя в силу условия выноса заряженных частиц к изделию под действием электрического поля имеют ограничения по высоте покрываемого изделия. Высота не должна превышать ~5 см. Эти устройства используют для нанесения покрытия на малогабаритные детали типа корпусов радиоэлектронных элементов, получения пазовой изоляции электрических машин малой мощности и др. Преимуществами камер с кипящим слоем являются простота, низкие капитальные затраты, возможность получения покрытий до 100-200 мкм за время 1 - 3 с (высокая производительность).

Рассмотрим основные процессы, сопровождающие нанесение порошковых покрытий.

1. Зарядка частиц. При напылении распылителями следует иметь отчетливое представление, как должна регулироваться и от каких факторов зависит величина заряда. Заряд Q , приобретаемый в поле коронного разряда частицей радиусом a из материала с диэлектрической проницаемостью ϵ_m , определяется из выражения

$$Q = Q_m \cdot \xi \quad (1)$$

где Q_m - предельный заряд

$$Q_m = 4\pi\epsilon_0 \frac{3 \cdot \epsilon_m}{\epsilon_m + 2} \cdot a^2 \cdot E \quad (2)$$

ξ - коэффициент степени недозарядки частиц, указывающий, на сколько недозаряжен порошок по сравнению с теоретическим предельным зарядом для

используемой конфигурации межэлектродного промежутка, при выбранной напряженности электрического поля E , выбранном времени зарядки t при реальной плотности тока j .

$$\xi = \frac{j \cdot t}{4\epsilon_0 \cdot E + j \cdot t} \quad (3)$$

Анализируя представленные выражения, можно установить, что для увеличения заряда частиц необходима увеличивать напряженность электрического поля, плотность тока коронного разряда и время зарядки.

2. Процессы в осажденном слое порошка. По мере нарастания толщины слоя порошка на поверхности изделия напряженность электрического поля в слое возрастает до пробивных значений. Возникающие разрядные явления в слое порошка носят название "обратный коронный разряд". Время до возникновения обратной короны находится из условия накопления заряда в слое и вычисляется по формуле:

$$t_{ок} = \frac{8\epsilon_0 \cdot \epsilon_{сл} \cdot E_{пр}}{j}, \quad (4)$$

где $\epsilon_{сл}$ - относительная диэлектрическая проницаемость порошкового слоя, вычисляемая по формуле:

$$\epsilon_{сл} = \epsilon_m \cdot K_{уп}, \quad (5)$$

где $K_{уп}$ - коэффициент упаковки, характеризующий пористость слоя, равен отношению толщины оплавленного покрытия к толщине неоплавленного слоя.

$$K_{уп} = \frac{h_{опл}}{h_{сл}} = \frac{\Delta m_{ос}}{h_{сл} \cdot \gamma_m \cdot \Delta S}, \quad (6)$$

где γ_m - плотность материала порошка; B - коэффициент, изменяющийся от $B = 1$ для камер с кипящим слоем и трибоэлектрических распылителей до B

= 2 для электростатических распылителей с внешней зарядкой порошка.

При обратном коронном разряде из порошкового слоя внешним электрическим полем в пространство над слоем порошка вытягиваются ионы, противоположные по знаку зарядам осаждающихся частиц. Ионы обратной короны разряжают подлетающие к изделию частицы, в результате падает плотность потока массы порошка, осаждающегося на изделие, и замедляется рост толщины слоя. Кроме того, появление развитого обратного коронного разряда вызывает образование кратеров в порошковом слое, что ухудшает качество получаемого оплавленного покрытия.

При освоении основ организации процесса напыления в камерах с кипящим слоем практический интерес представляет сопоставление процессов, протекающих в камере с характеристиками получаемого покрытия. В течение 1-2 с в камере преобладает направленное движение по траекториям, близким к силовым линиям электрического поля. Покрытие в это время получается ровным. С увеличением времени напыления в периферийных участках объема камеры возникает вихревое движение и, спустя примерно 5 - 6 с такое движение становится преобладающим, и на поверхности порошкового слоя на изделии можно наблюдать местные отрывы порошка, кратеры, т.е. имеет место интенсивная обратная корона. Вблизи покрываемого изделия можно наблюдать свечение, связанное с процессами рекомбинации положительных и отрицательных зарядов. Время прохождения указанных стадий процесса уменьшается при увеличении напряженности электрического поля.

Результаты сопоставления этих процессов используются при отработке на практике технологических режимов напыления в камерах с электрическим кипящим слоем.

Параметры режимов напыления, наиболее характерные для камер:

- расстояние между электродами 8 - 15 см;
- высота напыляемого изделия - не более 30 мм (без вращения);
- средняя напряженность электрического поля 3,5 - 5 кВ/см;

- глубина погружения электродов в кипящий слой 1 - 3 см;
- время напыления 2 - 30 с;
- толщина покрытия не менее 70 мкм.

3. Описание установки

Лабораторный стенд, схема которого приведена на рис. 4.3, включает камеру с электрическим кипящим слоем 1, выполненную из оргстекла и установленную в вытяжном боксе стенда. Под воздухопроницаемой крышкой камеры установлено заземленное изделие - круг из алюминия \varnothing 115 мм. Высокое напряжение в камеру 1 подается от высоковольтного источника 2, включаемого через реле времени 3. Источник 2 снабжен регистрирующими приборами напряжения и тока нагрузки и регулятором этих параметров. Воздух в камеру 1 подается от компрессора 4 марки С0-45Б, который установлен под лабораторным стендом. Воздух из вытяжного бокса установки забирается пылесосом 5.

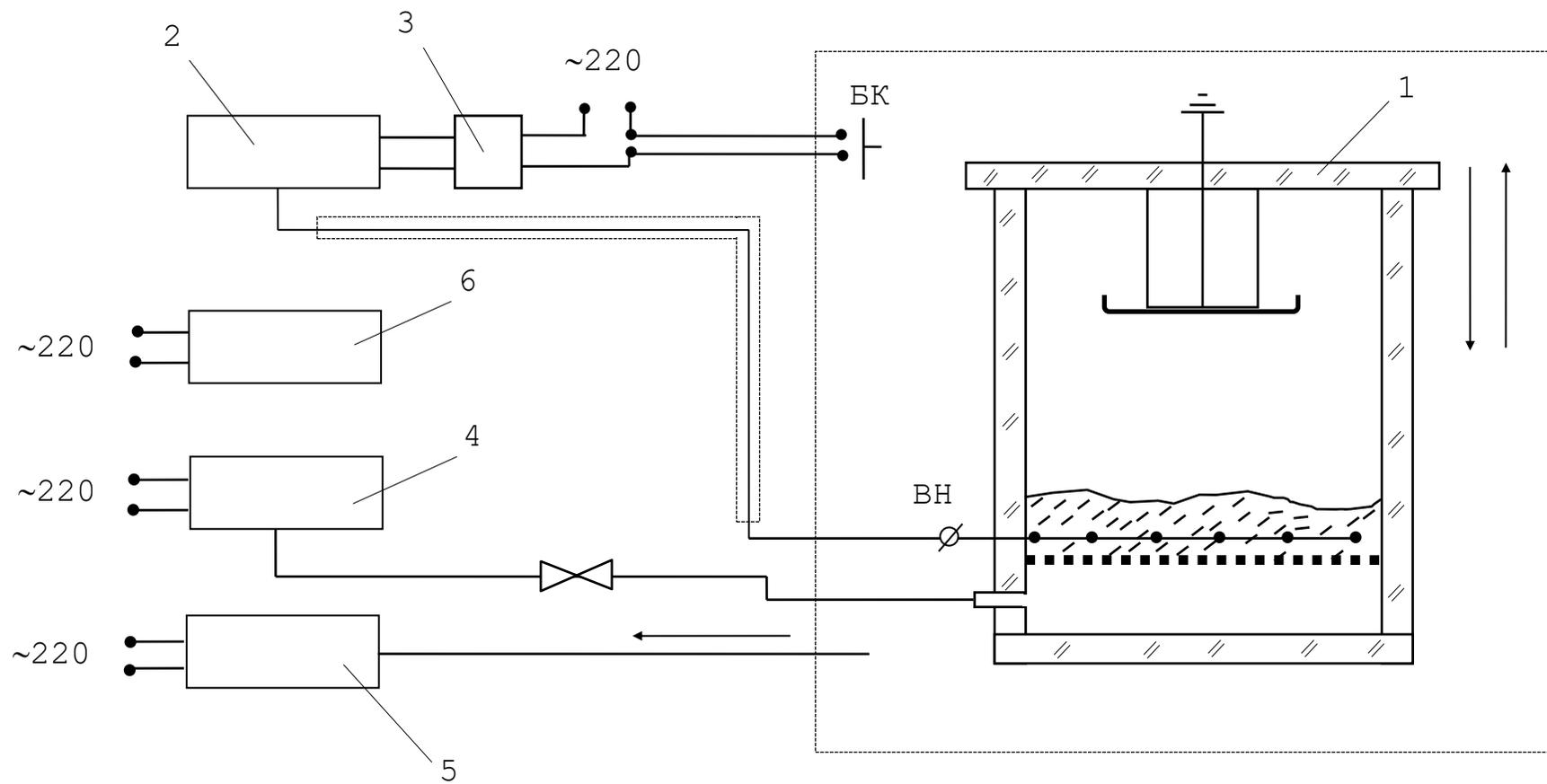


Рисунок 3 — Схема лабораторного стенда

Для оплавления покрытий в установке предусмотрена электропечь 6 марки СНОЛ 2.5×2.5×2.5.

На пульте управления установки смонтированы коммутирующие аппараты, а также аппаратура контроля включения отдельных электрических цепей в соответствии с ПУЭ.

4. Задание на предварительную подготовку

1. Ознакомиться с данным описанием.

2. Какие виды зарядки частиц используются при электростатическом напылении?

3. Рассчитать время возникновения обратного коронного разряда для распылителя с плотностью тока $j = 20 \text{ мкА/м}^2$ и камеры, с плотностью тока 15 мкА/м^2 . Порошок марки П-ЭП-219, диэлектрическая проницаемость материала $\epsilon_m = 4$, $\gamma_m = 1.4 \text{ г/см}^3$. Считать $K_{уп} = 0.4$.

5. Задание на проведение работы

1. Ознакомиться с лабораторным стендом, изучить инструкцию по эксплуатации. Включить печь.

2. Изучить наглядные пособия. Определить, для каких изделий, выпускаемых известными вам производствами и предприятиями целесообразно использовать технологию порошкового напыления.

3. Открыть вытяжной бокс, снять верхнюю крышку камеры, замерить высоту h порошкового слоя. Если $h < 2 \text{ см}$, досыпать порошок в камеру.

4. Включить компрессор. Отрегулировать зажимом расход воздуха таким образом, чтобы в камере существовал кипящий слой порошка. Обратить внимание на следующие показатели кипения порошка:

- объем, заполненный порошком при кипении должен составить 1.3 - 1.5 от первоначального;
- на поверхности кипящего слоя должны отсутствовать местные локальные прорывы воздуха;
- при покачиваниях камеры порошок в ней должен легко "переливаться",

сохраняя поверхность практически горизонтальной.

5. Выключить компрессор.

6. Установить деталь на заземленном держателе, закрыть камеру, дверцу вытяжного бокса, включить источник высокого напряжения, нажать кнопку РВ и держать ее одной рукой. Другой рукой установить напряжение 25 - 30 кВ, ток 0 - 1 мкА. Отпустить кнопку.

7. Произвести пробное напыление, включив для этого пылесос, компрессор, источник высокого напряжения, нажать кнопку РВ и держать ее в нажатом положении до загорания лампочки, установленной над кнопкой РВ. Кнопку отпустить, отключить все цепи, кроме печи и пылесоса. Снять верхнюю крышку камеры, счистить щеткой порошок с держателя детали в камеру. Запомнить какого вида был напыленный слой.

8. Установить съемную деталь $\varnothing 115$ мм на систему крепления. Произвести все операции по п. 7. Изделие аккуратно снять и поместить в печь покрытием вверх. Засечь время. Через 15 минут деталь с покрытием вынуть из печи.

9. Установить новую деталь и выполнить п. 7 и 8, установив время напыления (время нажатия кнопки РВ) 10 с. Зафиксировать изменение внешнего вида покрытия до и после оплавления для каждой напыляемой детали.

10. Напылить покрытие на деталь в течение 10 - 30 с. Визуально определить, каким образом меняется характер движения частиц а объеме камеры, когда возникает и как распространяется свечение в камере, каким образом меняются ток и напряжение в различные моменты времени напыления. Оценить время возникновения обратной короны. Счистить порошок с образца обратно в камеру.

11. Увеличить напряжение до 30 - 36 кВ, ток 5 - 10 мкА и проанализировать по приборам, как изменяются во времени электрические параметры процесса, как изменяется внешний вид покрытия при фиксированных $t = 1; 2; 4; 6; 10$ с.

12. Измерить толщины покрытия δ микрометром в 6 точках для каждой

детали, определить среднее значение толщины покрытия и среднеквадратичное отклонение.

13. Оформить результаты измерений и визуальных исследований в виде отчета.

6. Контрольные вопросы

1. Возможно ли сочетание различных методов зарядки порошкового материала в устройствах для нанесения покрытий?

2. Как меняется коэффициент упаковки слоя порошка при возникновении в нем обратного коронного разряда?

3. Существуют ли ограничения по габаритам изделия при нанесении покрытия в камерах с электрическим кипящим слоем?

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ.
УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

для обучающихся по направлению подготовки 35.04.06 Агроинженерия,
профиль «Электротехнологии и электрооборудование»

Марина Михайловна Беззубцева
Владимир Сергеевич Волков

Корректор Ахутина С.А.