

## Индивидуальное домашнее задание (3 модуль)

- В условиях задачи 10 ИДЗ 1 (2 модуль) найдите:
  - Математическое ожидание и дисперсию случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$
  - Математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $\mu$ , математическое ожидание и ковариацию случайных величин  $\mu_1$  и  $\mu_2$
- В условиях задачи 12 ИДЗ 1 (2 модуль) найдите:
  - Математическое ожидание и дисперсию случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - Математическое ожидание случайной величины  $\mu$ .
- В условиях задачи 10 ИДЗ 1 (2 модуль) найдите:
  - условное математическое ожидание с.в.  $\xi$  при условии  $\eta$ ;
  - условное математическое ожидание с.в.  $\eta$  при условии  $\xi$ ;
- В условиях задачи 12 ИДЗ 1 (2 модуль) найдите условное математическое ожидание с.в.  $\eta$  при условии  $\xi$  и условное математическое ожидание с.в.  $\xi$  при условии  $\eta$ .
- Выполните следующие задания:
  - По заданным плотностям  $p_\xi(x)$  и  $p_\eta(y)$  найдите характеристические функции  $f_\xi(t)$  и  $f_\eta(t)$  случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ ; характеристическую функцию  $f_\mu(t)$  случайной величины  $\mu = \xi + \eta$
  - По заданной характеристической функции  $f_\xi(t)$  вычислите математическое ожидание случайной величины  $\xi$  и дисперсию случайной величины  $\xi$ .
- Посетитель тира платит  $a$  рублей за выстрел. При попадании в девятку получает выигрыш  $b$  рублей, при попадании в десятку получает выигрыш  $c$  рублей. Если стрелок не попадает ни в девятку, ни в десятку, то деньги ему не выплачиваются. Вероятности попадания в девятку, десятку и промаха равны  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  соответственно. Число посетителей равно  $n$ .  
С помощью **неравенства Чебышева**:
  - найдите границы, в которых будет лежать суммарная прибыль владельца тира с вероятностью не менее  $\alpha$ ;
  - найдите число посетителей тира, чтобы вероятность отклонения суммарной прибыли от среднего размера суммарной прибыли на величину не меньше  $\beta$  % (от средней суммарной прибыли) равнялась  $p$С помощью **центральной предельной теоремы** оцените вероятность того, что
  - размер убытка у владельца тира будет лежать в пределах от  $m_1$  до  $m_2$  рублей;
  - что суммарная прибыль окажется в пределах от  $n_1$  до  $n_2$  рублей.
- По заданным выборкам  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  объема  $n = 50$  найти и построить:
  - минимальный и максимальный элементы выборки, разброс выборки, статистический ряд;
  - гистограмму, полигон относительных частот, эмпирическую функцию распределения (для выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$ );
  - выборочные характеристики: среднее, дисперсию (смещенную и несмещенную) (по выборке и по статистическому ряду), медиану.
- Известно, что выборка  $X_1, X_2, \dots, X_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданную плотностью  $p_\xi(x)$  с неизвестным параметром. Найдите оценку неизвестного параметра методом моментов.
- а) Известно, что выборка  $X_1, X_2, \dots, X_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданную плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\left(x\sqrt{a}-\frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами  $(a, b)$ .

б) Известно, что выборка  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданную плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a\pi x^2}} e^{-\frac{(\ln x - b)^2}{2a}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами  $(a, b)$ .

Найдите оценку максимального правдоподобия этих параметров

**10.** С помощью критерия отношения правдоподобия проверьте:

- 1) гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  о принадлежности выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  дискретному распределению с заданными параметрами.
- 2) гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  о принадлежности выборки  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  непрерывному распределению с заданными параметрами.

**11.** С помощью критерия  $\chi^2$  проверьте:

- 1) гипотезу о принадлежности выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  к заданному дискретному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).
- 2) гипотезу о принадлежности выборки  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  заданному непрерывному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).

**Распределение баллов (15 баллов)**

<b>Задача 1</b>	<b>Задача 2</b>	<b>Задача 3</b>	<b>Задача 4</b>	<b>Задача 5</b>	<b>Задача 6</b>
<b>1, 5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1 балл</b>	<b>1 балл</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>

<b>Задача 7</b>	<b>Задача 8</b>	<b>Задача 9</b>	<b>Задача 10</b>	<b>Задача 11</b>
<b>1,5 балл</b>	<b>1 балл</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>

5.	<p>Независимые непрерывные случайные величины <math>\xi</math> и <math>\eta</math> имеют плотности распределения</p> $p_{\xi}(x) = \begin{cases} \ln 4 \cdot 4^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad p_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{2}{21}(3+y), & -1 \leq y \leq 2 \\ 0, & y < -1, y > 2 \end{cases}$ $f(t) = \frac{\cos^2 4t}{e^{t^2}}$																																																																																																				
6.	<p><math>a = 600, b = 1000, c = 2500, \quad p_1 = 0,2, p_2 = 0,15, p_3 = 0,65, \quad n = 400,</math>  <math>\alpha = 0,85, \quad \beta = 10, \quad p = 0.1</math>  <math>m_1 = 0, \quad m_2 = 1000, \quad n_1 = 5000, n_2 = 13000</math></p>																																																																																																				
7.	<p>Выборка <math>X_1, \dots, X_n</math></p> <table border="1" data-bbox="347 477 798 660"> <tr><td>0</td><td>6</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>0</td><td>13</td><td>9</td><td>3</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>8</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>5</td><td>5</td><td>11</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>7</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>5</td><td>6</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>6</td><td>4</td><td>3</td></tr> </table> <p>Выборка <math>Y_1, \dots, Y_n</math></p> <table border="1" data-bbox="327 705 1061 896"> <tr><td>0.05</td><td>3.62</td><td>1.42</td><td>5.44</td><td>2.15</td><td>3.70</td><td>0.04</td><td>0.49</td><td>0.17</td><td>0.51</td></tr> <tr><td>3.07</td><td>7.76</td><td>3.72</td><td>0.24</td><td>1.16</td><td>0.57</td><td>9.31</td><td>2.50</td><td>10.10</td><td>0.82</td></tr> <tr><td>2.51</td><td>2.43</td><td>4.39</td><td>8.56</td><td>2.65</td><td>6.40</td><td>7.85</td><td>7.63</td><td>0.31</td><td>6.72</td></tr> <tr><td>5.25</td><td>4.29</td><td>1.38</td><td>5.82</td><td>4.65</td><td>0.55</td><td>2.22</td><td>0.23</td><td>3.95</td><td>12.42</td></tr> <tr><td>0.77</td><td>2.24</td><td>2.26</td><td>0.98</td><td>4.66</td><td>3.23</td><td>1.74</td><td>0.94</td><td>0.48</td><td>1.99</td></tr> </table>	0	6	1	1	4	0	13	9	3	0	1	8	0	1	0	0	3	2	3	0	1	1	8	9	10	0	2	1	1	1	0	5	5	11	2	1	1	3	7	2	1	1	5	6	0	1	0	6	4	3	0.05	3.62	1.42	5.44	2.15	3.70	0.04	0.49	0.17	0.51	3.07	7.76	3.72	0.24	1.16	0.57	9.31	2.50	10.10	0.82	2.51	2.43	4.39	8.56	2.65	6.40	7.85	7.63	0.31	6.72	5.25	4.29	1.38	5.82	4.65	0.55	2.22	0.23	3.95	12.42	0.77	2.24	2.26	0.98	4.66	3.23	1.74	0.94	0.48	1.99
0	6	1	1	4	0	13	9	3	0																																																																																												
1	8	0	1	0	0	3	2	3	0																																																																																												
1	1	8	9	10	0	2	1	1	1																																																																																												
0	5	5	11	2	1	1	3	7	2																																																																																												
1	1	5	6	0	1	0	6	4	3																																																																																												
0.05	3.62	1.42	5.44	2.15	3.70	0.04	0.49	0.17	0.51																																																																																												
3.07	7.76	3.72	0.24	1.16	0.57	9.31	2.50	10.10	0.82																																																																																												
2.51	2.43	4.39	8.56	2.65	6.40	7.85	7.63	0.31	6.72																																																																																												
5.25	4.29	1.38	5.82	4.65	0.55	2.22	0.23	3.95	12.42																																																																																												
0.77	2.24	2.26	0.98	4.66	3.23	1.74	0.94	0.48	1.99																																																																																												
8.	<p>Выборка <math>X_1, \dots, X_n</math> – имеет плотность распределения</p> $f(x) = \begin{cases} p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ <p>При заданных значениях параметров <math>\lambda_1 = 0,2</math> и <math>\lambda_2 = 0,4</math> найти оценку параметра <math>p</math>.</p> <p>Таблица частот</p> <table border="1" data-bbox="443 1108 1401 1227"> <tr> <td>интервалы</td> <td>0-1</td> <td>1-2</td> <td>2-3</td> <td>3-4</td> <td>4-5</td> <td>5-6</td> <td>6-7</td> <td>7-8</td> <td>8-9</td> <td>9-10</td> </tr> <tr> <td>частоты</td> <td>105</td> <td>70</td> <td>63</td> <td>42</td> <td>28</td> <td>19</td> <td>15</td> <td>9</td> <td>7</td> <td>15</td> </tr> </table>	интервалы	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	частоты	105	70	63	42	28	19	15	9	7	15																																																																														
интервалы	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10																																																																																											
частоты	105	70	63	42	28	19	15	9	7	15																																																																																											
9.	<p>По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров <math>a</math> и <math>b</math></p> <table border="1" data-bbox="566 1288 1276 1411"> <tr> <td>интервалы</td> <td>1.2-</td> <td>1.8-</td> <td>2.4-</td> <td>3-</td> <td>3.6-</td> <td>4.2-</td> <td>4.8-</td> </tr> <tr> <td></td> <td>1.8</td> <td>2.4</td> <td>3</td> <td>3.6</td> <td>4.2</td> <td>4.8</td> <td>5.4</td> </tr> <tr> <td>частоты</td> <td>36</td> <td>114</td> <td>144</td> <td>71</td> <td>56</td> <td>51</td> <td>28</td> </tr> </table> <p>По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров <math>a</math> и <math>b</math></p> <table border="1" data-bbox="316 1489 1532 1608"> <tr> <td>интервалы</td> <td>0.0-1.5</td> <td>1.5-3.0</td> <td>3.0-4.5</td> <td>4.5-6.0</td> <td>6.0-7.5</td> <td>7.5-9.0</td> <td>9.0-10.5</td> <td>10.5-12.0</td> <td>12.0-13.5</td> <td>13.5-15.0</td> </tr> <tr> <td>частоты</td> <td>6</td> <td>176</td> <td>329</td> <td>227</td> <td>150</td> <td>59</td> <td>30</td> <td>13</td> <td>7</td> <td>3</td> </tr> </table>	интервалы	1.2-	1.8-	2.4-	3-	3.6-	4.2-	4.8-		1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4	частоты	36	114	144	71	56	51	28	интервалы	0.0-1.5	1.5-3.0	3.0-4.5	4.5-6.0	6.0-7.5	7.5-9.0	9.0-10.5	10.5-12.0	12.0-13.5	13.5-15.0	частоты	6	176	329	227	150	59	30	13	7	3																																																						
интервалы	1.2-	1.8-	2.4-	3-	3.6-	4.2-	4.8-																																																																																														
	1.8	2.4	3	3.6	4.2	4.8	5.4																																																																																														
частоты	36	114	144	71	56	51	28																																																																																														
интервалы	0.0-1.5	1.5-3.0	3.0-4.5	4.5-6.0	6.0-7.5	7.5-9.0	9.0-10.5	10.5-12.0	12.0-13.5	13.5-15.0																																																																																											
частоты	6	176	329	227	150	59	30	13	7	3																																																																																											
10.	<p>Гипотеза <math>H_0</math> --- геометрическое распределение <math>Geom(p = 0.3)</math>  Гипотеза <math>H_1</math> --- геометрическое распределение <math>Geom(p = 0.25), \alpha = 0.054</math></p> <table border="1" data-bbox="347 1702 790 1892"> <tr><td>0</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>7</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>5</td><td>10</td><td>0</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>7</td><td>2</td><td>0</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>8</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>11</td><td>0</td><td>7</td><td>0</td><td>7</td><td>0</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr> </table> <p>Гипотеза <math>H_0</math> --- гамма-распределение <math>Gamma(\gamma = 5, \lambda = 0.4)</math>  Гипотеза <math>H_1</math> --- гамма-распределение <math>Gamma(\gamma = 5, \lambda = 0.5), \alpha = 0.052</math></p> <table border="1" data-bbox="327 1982 1125 2161"> <tr><td>3.81</td><td>4.59</td><td>13.19</td><td>13.81</td><td>9.63</td><td>12.12</td><td>5.24</td><td>5.33</td><td>11.75</td><td>10.72</td></tr> <tr><td>6.58</td><td>4.35</td><td>16.86</td><td>7.76</td><td>10.60</td><td>12.31</td><td>14.62</td><td>8.95</td><td>5.73</td><td>16.14</td></tr> <tr><td>13.84</td><td>6.57</td><td>13.79</td><td>12.49</td><td>12.09</td><td>11.57</td><td>6.28</td><td>7.03</td><td>12.39</td><td>14.79</td></tr> <tr><td>7.76</td><td>8.36</td><td>7.87</td><td>7.56</td><td>19.94</td><td>7.79</td><td>3.50</td><td>13.74</td><td>11.43</td><td>16.91</td></tr> <tr><td>8.55</td><td>15.05</td><td>19.53</td><td>9.56</td><td>6.85</td><td>12.70</td><td>4.41</td><td>14.18</td><td>4.29</td><td>10.81</td></tr> </table>	0	5	4	3	2	3	3	7	1	1	2	5	10	0	4	1	2	0	0	3	1	0	2	7	2	0	3	4	3	2	8	2	0	0	0	4	3	2	2	1	1	11	0	7	0	7	0	3	4	1	3.81	4.59	13.19	13.81	9.63	12.12	5.24	5.33	11.75	10.72	6.58	4.35	16.86	7.76	10.60	12.31	14.62	8.95	5.73	16.14	13.84	6.57	13.79	12.49	12.09	11.57	6.28	7.03	12.39	14.79	7.76	8.36	7.87	7.56	19.94	7.79	3.50	13.74	11.43	16.91	8.55	15.05	19.53	9.56	6.85	12.70	4.41	14.18	4.29	10.81
0	5	4	3	2	3	3	7	1	1																																																																																												
2	5	10	0	4	1	2	0	0	3																																																																																												
1	0	2	7	2	0	3	4	3	2																																																																																												
8	2	0	0	0	4	3	2	2	1																																																																																												
1	11	0	7	0	7	0	3	4	1																																																																																												
3.81	4.59	13.19	13.81	9.63	12.12	5.24	5.33	11.75	10.72																																																																																												
6.58	4.35	16.86	7.76	10.60	12.31	14.62	8.95	5.73	16.14																																																																																												
13.84	6.57	13.79	12.49	12.09	11.57	6.28	7.03	12.39	14.79																																																																																												
7.76	8.36	7.87	7.56	19.94	7.79	3.50	13.74	11.43	16.91																																																																																												
8.55	15.05	19.53	9.56	6.85	12.70	4.41	14.18	4.29	10.81																																																																																												

11.

Геометрическое распределение с неизвестным параметром  $p$ ,  $\alpha = 0.1$ Выборка  $X_1, \dots, X_n$ 

0	6	1	1	4	0	13	9	3	0
1	8	0	1	0	0	3	2	3	0
1	1	8	9	10	0	2	1	1	1
0	5	5	11	2	1	1	3	7	2
1	1	5	6	0	1	0	6	4	3

Экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda$ ,  $\alpha = 0.05$ Выборка  $Y_1, \dots, Y_n$ 

0.05	3.62	1.42	5.44	2.15	3.70	0.04	0.49	0.17	0.51
3.07	7.76	3.72	0.24	1.16	0.57	9.31	2.50	10.10	0.82
2.51	2.43	4.39	8.56	2.65	6.40	7.85	7.63	0.31	6.72
5.25	4.29	1.38	5.82	4.65	0.55	2.22	0.23	3.95	12.42
0.77	2.24	2.26	0.98	4.66	3.23	1.74	0.94	0.48	1.99