§ 2. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА
для одномерного волнового уравнения на полуоси

Простейшей после задачи Коши краевой задачей для одномерного волнового уравнения является смешанная задача на полуоси (задача для полубесконечной струны):

$$\frac{1}{a^2}u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \quad x > 0, \qquad t > 0; \tag{I}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \ge 0; \tag{II}$$

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \ge 0; \tag{III}$$

$$u\big|_{x=0} = \chi(t), \quad t \ge 0. \tag{IV}$$

Для существования классического решения (из $C^2(x \ge 0, t \ge 0)$) необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия гладкости:

$$\varphi(x) \in C^2(x \ge 0), \psi(x) \in C^1(x \ge 0), \chi(t) \in C^2(t \ge 0),$$

$$f(x,t) \in C(x \ge 0, t \ge 0)$$

и условия согласования:

$$\varphi(0) = \chi(0), \quad \psi(0) = \chi'(0), \quad \frac{1}{a^2}\chi''(0) - \varphi''(0) = f(0,0).$$

Граничное условие (IV) жесткого закрепления конца струны часто заменяется условием его пружинного закрепления:

$$(u_x - \sigma u)\big|_{x=0} = \chi(t), \quad t \ge 0, \tag{IV*}$$

где $\sigma \ge 0$; условие неотрицательности коэффициента σ — чисто физическое условие; при $\sigma = 0$ условие (IV*) — условие свободного конца. В этом случае условия согласования выглядят так:

$$\varphi'(0) - \sigma\varphi(0) = \chi(0), \quad \psi'(0) - \sigma\psi(0) = \chi'(0).$$

Классические решения задачи (I), (II), (III), (IV) и задачи (I), (II), (III), (IV*) единственны.

Наряду с классическими решениями указанных задач рассматривают и обобщенные решения этих задач.

Не напоминая здесь определения обобщенного решения, скажем лишь, что принадлежащая $C^1(x \ge 0, t \ge 0)$ функция $u(x,t)$, удовлетворяющая начальным и граничным условиям (II), (III), (IV) или (II), (III), (IV*) и при любой финитной в $\{(x,t) : x \ge 0, t \ge 0\}$ функции $g(x,t) \in C^2(x \ge 0, t \ge 0)$, удовлетворяющая равенству

$$\iint\limits_{x\geq 0,t\geq 0} u(x,t)\left[\frac{1}{a^2}g_{tt}(x,t)-g_{xx}(x,t)\right]dxdt = \iint\limits_{x\geq 0,t\geq 0} f(x,t)g(x,t)\,dxdt$$

($u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (I) в смысле обобщенных функций), является обобщенным решением задачи (I), (II), (III), (IV) или задачи (I), (II), (III), (IV*). Обобщенное решение каждой из этих задач единственно. Существование обобщенных решений, естественно, устанавливается при меньших ограничениях на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(t)$ и, в частности, на условия их согласования.

Рассмотрим решения некоторых задач.

Пример 1. Решить задачу

$$9u_{tt} = u_{xx} + 6t\sin x\,, \quad x>0\,,\ t>0\,; \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = e^{3x}\,, \quad u_t\big|_{t=0} = 9x^2 + 6\sin x\,, \quad x\geq 0\,; \tag{2}$$

$$u_x\big|_{x=0} = 3+6t\,, \quad t\geq 0\,. \tag{3}$$

Δ 1. Так как уравнение является неоднородным, то найдем какое-нибудь частное решение этого уравнения.

В нашем случае ищем частное решение уравнения (1) в виде

$$w(x,t) = (At+B)\sin x\,. \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнение (1), получаем

$$0 = -(At+B)\sin x + 6t\sin x\,, \quad A=6,\quad B=0\,.$$

Таким образом, функция

$$w(x,t) = 6t\sin x$$

есть частное решение уравнения (1).

2. Введем новую искомую функцию $\upsilon(x,t)$ такую, что

$$\upsilon(x,t) = u(x,t) - w(x,t)\,,$$

$$\upsilon(x,t) = u(x,t) - 6t\sin x\,,$$

и запишем задачу (1), (2), (3) для функции $\upsilon(x,t)$:

$$9\upsilon_{tt} = \upsilon_{xx}\,, \quad x>0\,, \quad t>0\,; \tag{5}$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = e^{3x}\,, \quad \upsilon_t\big|_{t=0} = 9x^2\,, \quad x\geq 0\,; \tag{6}$$

$$\upsilon_x\big|_{x=0} = 3\,, \quad t\geq 0\,. \tag{7}$$

Общим решением волнового уравнения

$$\upsilon_{tt} = a^2\upsilon_{xx}\,, \ a\in R,\quad a>0\,,$$

является функция

$$\upsilon(x,t)=f(x+at)+g(x-at),$$

где $f(\xi)$ и $g(\eta)$ — любые функции класса C^2.

В нашем случае общее решение уравнения (5) запишется в виде

$$\upsilon(x,t)=f(3x+t)+g(3x-t). \tag{8}$$

3. Из (8) и условий (6) следует, что

$$\upsilon\big|_{t=0}=f(3x)+g(3x)=e^{3x},\quad x\ge 0;$$

$$\upsilon_t\big|_{t=0}=f'(3x)-g'(3x)=9x^2,\quad x\ge 0.$$

Сделав замену переменной $q=3x$ в обоих выше написанных соотношениях, получим

$$f(q)+g(q)=e^q,\ \ q\ge 0, \tag{9*}$$

$$f'(q)-g'(q)=q^2,\ \ q\ge 0. \tag{9**}$$

Продифференцировав правую и левую части равенства (9*) по q, получаем из (9*) и (9**)

$$f'(q)+g'(q)=e^q,\ \ q\ge 0, \tag{9***}$$

$$f'(q)-g'(q)=q^2,\ \ q\ge 0. \tag{9****}$$

Сложив (9***) и (9****), находим

$$f'(q)=\frac{1}{2}e^q+\frac{1}{2}q^2,\quad q\ge 0, \tag{10}$$

$$f(q)=\frac{1}{2}e^q+\frac{1}{6}q^3+C,\quad q\ge 0, \tag{11}$$

где C — произвольная постоянная. Подставляя $f(q)$ из равенства (11) в соотношение (9*), получаем

$$g(q)=\frac{1}{2}e^q-\frac{1}{6}q^3-C,\quad q\ge 0. \tag{12}$$

Из (8), (11) и (12) следует, что решение задачи в области $\{(x,t):3x+t\ge 0,3x-t\ge 0\}$ имеет вид

$$\upsilon(x,t)=\frac{1}{2}e^{3x+t}+\frac{1}{6}(3x+t)^3+\frac{1}{2}e^{3x-t}-\frac{1}{6}(3x-t)^3. \tag{13}$$

4. Из (8) и условия (7) имеем

$$\upsilon_x\big|_{x=0}=3f'(t)+3g'(-t)=3,\quad t\ge 0.$$

Разделив обе части этого равенства на 3, получим

$$f'(t)+g'(-t)=1,\quad t\ge 0.$$

Воспользовавшись соотношением (10), находим

$$\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}t^{2}+g'(-t)=1,\quad t\ge 0.$$

$$g'(-t)=1-\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}t^{2},\quad t\ge 0.$$

Положив $p=-t$, имеем

$$g'(p)=1-\frac{1}{2}e^{-p}-\frac{1}{2}p^{2},\quad p\le 0.$$

Следовательно,

$$g(p)=p+\frac{1}{2}e^{-p}-\frac{1}{6}p^{3}+C_1,\quad p\le 0, \qquad (14)$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Таким образом, решение задачи в области $\{(x,t):3x+t\ge 0,3x-t\le 0\}$ задается формулой

$$\upsilon(x,t)=\frac{1}{2}e^{3x+t}+\frac{1}{6}(3x+t)^{3}+(3x-t)+\frac{1}{2}e^{-(3x-t)}-\frac{1}{6}(3x-t)^{3}+C_1. \qquad (15)$$

5. Найдем связь постоянной C из формулы (12) и постоянной C_1 из формулы (14), требуя непрерывности решения задачи в области $\{(x,t):x>0,\ t>0\}$. Для этого осуществим «склейку» по непрерывности решений, задаваемых формулами (13) и (15) в соответствующих областях, на общей границе этих областей, то есть на характеристике $3x-t=0$ или, что то же самое, «склейку» по непрерывности функций $g(\eta)$, задаваемых (12) и (14) в нуле:

$$\frac{1}{2}-C=g(0+0)=g(0-0)=\frac{1}{2}+C_1.$$

Отсюда следует, что

$$C_1=-C.$$

Подставляя найденное значение C_1 в формулу (14), получаем

$$g(p)=p+\frac{1}{2}e^{-p}-\frac{1}{6}p^{3}-C,\quad p\le 0. \qquad (16)$$

Из (8), (11) и (16) следует, что решение задачи в области $\{(x,t):3x+t\ge 0,3x-t\le 0\}$ имеет вид

$$\upsilon(x,t)=\frac{1}{2}e^{3x+t}+\frac{1}{6}(3x+t)^3+(3x-t)+\frac{1}{2}e^{-(3x-t)}-\frac{1}{6}(3x-t)^3 \qquad (17)$$

Из (13) и (17) следует, что решением задачи (5), (6), (7) является функция

$$\upsilon(x,t)=\frac{1}{2}e^{3x+t}+\frac{1}{6}(3x+t)^3+\begin{cases}\frac{1}{2}e^{3x-t}-\frac{1}{6}(3x-t)^3, & 3x-t\ge 0;\\ (3x-t)+\frac{1}{2}e^{-(3x-t)}-\frac{1}{6}(3x-t)^3, & 3x-t\le 0.\end{cases}$$

Следовательно, функция

$$u(x,t)=\upsilon(x,t)+6t\sin x,$$

где функция $\upsilon(x,t)$ определена выше, будет решением задачи (1), (2), (3).

▲

ДЗ_2.1а Решить задачу

$$u_{tt}-4u_{xx}=6xt, \quad x>0, \quad t>0; \qquad (1)$$

$$u\big|_{t=0}=x^3, \quad u_t\big|_{t=0}=0, \quad x\ge 0; \qquad (2)$$

$$u\big|_{x=0}=t^3, \quad t\ge 0. \qquad (3)$$