

## Практические способы оценки погрешности составной квадратурной формулы

1. Асимптотическое представление (разложение) погрешности составной квадратурной формулы по параметру  $h$  – шагу равномерного разбиения интервала интегрирования:

$$R_h(f) = C_m h^m + O(h^{m+1})$$

### Правило Рунге:

Проводим расчеты на 2-х сетках с шагом  $h_1$  и  $h_2 = \frac{h_1}{2}$ :

$$R_{h_1}(f) = J(f) - S_{h_1} = C_m h_1^m$$

$$R_{h_2}(f) = J(f) - S_{h_2} = C_m h_2^m$$

Пока  $R_{h_i}(f) > \text{eps}$ , продолжаем расчеты с уменьшающимся шагом:  $h_i$  и  $h_{i+1} = \frac{h_i}{2}$ .

2. Можно повысить точность оценки погрешности, если рассматривать ее асимптотическое представление в виде:

$$R_h(f) = J(f) - S_h = C_m h^m + C_{m+1} h^{m+1} + \dots + C_{m+r-1} h^{m+r-1} + O(h^{m+r})$$

### Метод Ричардсона:

$$h_{i+1} = \frac{h_i}{2}, i = 1, 2, 3 \dots$$

при  $r = 1$ :

$$R_{h_1}(f) = J(f) - S_{h_1} = C_m h_1^m$$

$$R_{h_2}(f) = J(f) - S_{h_2} = C_m h_2^m$$

$J(f), C_m - ?$

Пока  $R_{h_i}(f) > \text{eps}$ , продолжаем расчеты с уменьшающимся шагом:  $h_i$  и  $h_{i+1} = \frac{h_i}{2}$  при этом  $r = r + 1$ ;

при  $r = 2$ :

$$R_{h_1}(f) = J(f) - S_{h_1} = C_m h_1^m + C_{m+1} h_1^{m+1}$$

$$R_{h_2}(f) = J(f) - S_{h_2} = C_m h_2^m + C_{m+1} h_2^{m+1}$$

$$R_{h_3}(f) = J(f) - S_{h_3} = C_m h_3^m + C_{m+1} h_3^{m+1}$$

$$J(f), C_m, C_{m+1} - ?$$

Пока  $R_{h_i}(f) > \text{eps}$ , продолжаем расчеты с уменьшающимся шагом:  $h_i$  и  $h_{i+1} = \frac{h_i}{2}$  при этом  $r = r + 1$ ;

при  $r = 3$ :

$$\begin{aligned} R_{h_1}(f) &= J(f) - S_{h_1} = C_m h_1^m + C_{m+1} h_1^{m+1} + C_{m+2} h_1^{m+2} \\ R_{h_2}(f) &= J(f) - S_{h_2} = C_m h_2^m + C_{m+1} h_2^{m+1} + C_{m+2} h_2^{m+2} \\ R_{h_3}(f) &= J(f) - S_{h_3} = C_m h_3^m + C_{m+1} h_3^{m+1} + C_{m+2} h_3^{m+2} \\ R_{h_4}(f) &= J(f) - S_{h_4} = C_m h_4^m + C_{m+1} h_4^{m+1} + C_{m+2} h_4^{m+2} \end{aligned}$$

$$J(f), C_m, C_{m+1}, C_{m+2} - ?$$

Пока  $R_{h_i}(f) > \text{eps}$ , продолжаем расчеты с уменьшающимся шагом:  $h_i$  и  $h_{i+1} = \frac{h_i}{2}$  при этом  $r = r + 1$ ;

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} r=1 \quad r=2 \quad r=3 \\ \hline R_{h_1}(f) = J(f) - S_{h_1} = C_m h_1^m + C_{m+1} h_1^{m+1} + C_{m+2} h_1^{m+2} + \dots \\ R_{h_2}(f) = J(f) - S_{h_2} = C_m h_2^m + C_{m+1} h_2^{m+1} + C_{m+2} h_2^{m+2} + \dots \\ R_{h_3}(f) = J(f) - S_{h_3} = C_m h_3^m + C_{m+1} h_3^{m+1} + C_{m+2} h_3^{m+2} + \dots \\ R_{h_4}(f) = J(f) - S_{h_4} = C_m h_4^m + C_{m+1} h_4^{m+1} + C_{m+2} h_4^{m+2} + \dots \\ \dots \end{array} \end{array}$$

### 3. Процесс Эйткена:

Пусть  $h_1 = h, h_2 = \frac{h_1}{2}, h_3 = \frac{h_2}{2}$ .

Порядок главного члена погрешности  $m$  можно оценить по формуле:

$$m \approx - \frac{\ln \frac{S_{h_3} - S_{h_2}}{S_{h_2} - S_{h_1}}}{\ln 2}$$