

## Задание №4. Вычисление определенного интеграла

**Цель задания:** практическое освоение методов управления численным процессом с целью обеспечения заданной точности вычисления определенного интеграла за приемлемое время, используя составные квадратурные формулы с методами оценки погрешности и выбора оптимального разбиения

$$J(F) = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b p(x) \cdot f(x) dx$$

### Часть №1: Квадратурные формулы Ньютона-Кот(е)са и Гаусса

1.1. Реализовать методы вычисления определенного интеграла с использованием составных квадратурных формул: *средних и левых прямоугольников, трапеции, Симпсона*. В качестве подынтегральной функции взять функцию  $f(x)$  Вашего варианта (т.е. положить весовую функцию  $p(x) \equiv 1$ ):

$$J(F) = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b f(x) dx$$

1.2. Реализовать методы вычисления определенного интеграла с использованием составных квадратурных формул на базе 3-х-точечных формул Ньютона-Кот(е)са и Гаусса.

В качестве подынтегральной функции взять функцию  $F(x) = p(x) \cdot f(x)$ , где  $f(x)$  и  $p(x) = (x - a)^{-\alpha} \cdot (b - x)^{-\beta}$  — функции в Вашем варианте задания:

$$J(F) = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \frac{f(x)}{(x - a)^{\alpha} \cdot (b - x)^{\beta}} dx$$

**Примечание:** узлы каждой малой 3-х-точечной квадратурной формулы Гаусса находить с помощью формул Кардано.

1.3. Для каждой квадратурной формулы из пп.1.1-2 представить график зависимости абсолютной погрешности от количества разбиений интервала интегрирования.

## **Часть №2: Методы оценки погрешности составных квадратурных формул**

- 2.1. Вычислить определенный интеграл с заданной точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$  с использованием составной 3-х-точечной квадратурной формулы Ньютона-Кот(е)са. Погрешность оценивать методом Ричардсона. На каждых последовательных трех точках оценивать скорость сходимости по правилу Эйткена. Указать длину шага  $h$  разбиения интервала интегрирования, при котором была достигнута требуемая точность  $\varepsilon$ .
- 2.2. Выполнить всё, что указано в п. 2.1, используя 3-х-точечные формулы Гаусса вместо формул Ньютона-Кот(е)са.
- 2.3. Проведя вычисления (для одной из построенных квадратурных формул из п.2.1-2) по трем сеткам с малым числом шагов (например, 1, 2 и 4) и используя оценку скорости сходимости по Эйткену, выбрать шаг  $h_{opt}$ . Начать расчет с полученного шага и снова довести вычисления интеграла до требуемой точности  $\varepsilon$ . Указать шаг разбиения интервала интегрирования, при котором достигнута требуемая точность, и сравнить его с шагом, вычисленным в 2.1 или 2.2 (в зависимости от того, какую квадратурную формулу Вы выбрали для выполнения задания в п. 2.3).

### Варианты заданий для самостоятельного выполнения

1.  $f(x) = 2 \cos(2.5x) \exp(x/3) + 4 \sin(3.5x) \exp(-3x) + x$  ,  
 $a = 1.5, b = 3.3, \alpha = 1/3, \beta = 0$ ;
2.  $f(x) = 3 \cos(0.5x) \exp(x/4) + 5 \sin(2.5x) \exp(-x/3) + 2x$  ,  
 $a = 1.7, b = 3.2, \alpha = 0, \beta = 1/4$ ;
3.  $f(x) = 2.5 \cos(2x) \exp(2x/3) + 4 \sin(3.5x) \exp(-3x) + 3x$  ,  
 $a = 0.1, b = 2.3, \alpha = 1/5, \beta = 0$ ;
4.  $f(x) = 3 \cos(3.5x) \exp(4x/3) + 2 \sin(3.5x) \exp(-2x/3) + 4x$  ,  
 $a = 1, b = 3, \alpha = 0, \beta = 1/6$ ;
5.  $f(x) = \cos(1.5x) \exp(2x/3) + 3 \sin(5.5x) \exp(-2x) + 2$  ,  
 $a = 2.5, b = 4.3, \alpha = 2/7, \beta = 0$ ;
6.  $f(x) = 4 \cos(0.5x) \exp(-5x/4) + 2 \sin(4.5x) \exp(x/8) + 2$  ,  
 $a = 1.3, b = 2.2, \alpha = 0, \beta = 5/6$ ;
7.  $f(x) = 4.5 \cos(7x) \exp(-2x/3) + 1.4 \sin(1.5x) \exp(-x/3) + 3$  ,  
 $a = 2.1, b = 3.3, \alpha = 2/5, \beta = 0$ ;
8.  $f(x) = 3.7 \cos(1.5x) \exp(-4x/3) + 2.4 \sin(4.5x) \exp(2x/3) + 4$  ,  
 $a = 1.8, b = 2.3, \alpha = 0, \beta = 3/5$ ;
9.  $f(x) = 3 \cos(1.5x) \exp(x/4) + 4 \sin(3.5x) \exp(-3x) + 4x$  ,  
 $a = 2.5, b = 3.3, \alpha = 2/3, \beta = 0$ ;
10.  $f(x) = 1.3 \cos(3.5x) \exp(2x/3) + 6 \sin(4.5x) \exp(-x/8) + 5x$  ,  
 $a = 0.7, b = 3.2, \alpha = 0, \beta = 1/4$ ;
11.  $f(x) = 0.5 \cos(2x) \exp(2x/5) + 2.4 \sin(1.5x) \exp(-6x) + 6x$  ,  
 $a = 1.1, b = 2.5, \alpha = 2/5, \beta = 0$ ;
12.  $f(x) = 4 \cos(2.5x) \exp(4x/7) + 2.5 \sin(5.5x) \exp(-3x/5) + 4.3x$  ,  
 $a = 1.8, b = 2.9, \alpha = 0, \beta = 4/7$ ;
13.  $f(x) = 2 \cos(3.5x) \exp(5x/3) + 3 \sin(1.5x) \exp(-4x) + 3$  ,  
 $a = 1.5, b = 2.3, \alpha = 1/5, \beta = 0$ ;

14.  $f(x) = 3 \cos(2.5x) \exp(7x/4) + 5 \sin(0.5x) \exp(3x/8) + 4$ ,  
 $a = 2.3, b = 2.9, \alpha = 0, \beta = 2/5$ ;
15.  $f(x) = 3.5 \cos(0.7x) \exp(-5x/3) + 2.4 \sin(5.5x) \exp(-3x/4) + 5$ ,  
 $a = 1.1, b = 2.3, \alpha = 4/5, \beta = 0$ ;
16.  $f(x) = 2.7 \cos(3.5x) \exp(-7x/3) + 4.4 \sin(2.5x) \exp(5x/3) + 2$ ,  
 $a = 2.8, b = 4.3, \alpha = 0, \beta = 3/7$ ;
17.  $f(x) = 6 \cos(1.5x) \exp(5x/3) + 2 \sin(0.5x) \exp(-1.3x) + 5.4x$ ,  
 $a = 3.5, b = 3.7, \alpha = 2/3, \beta = 0$ ;
18.  $f(x) = 4 \cos(2.5x) \exp(5x/4) + 2.5 \sin(1.5x) \exp(-2x/7) + 5x$ ,  
 $a = 2.7, b = 3.2, \alpha = 0, \beta = 3/4$ ;
19.  $f(x) = 0.5 \cos(3x) \exp(2x/5) + 4 \sin(3.5x) \exp(-3x) + 3x$ ,  
 $a = 1.1, b = 2.3, \alpha = 2/5, \beta = 0$ ;
20.  $f(x) = 1.5 \cos(3.7x) \exp(4x/7) + 3 \sin(2.5x) \exp(3x/4) + 3x$ ,  
 $a = 1.5, b = 3, \alpha = 0, \beta = 5/6$ ;
21.  $f(x) = 3 \cos(2.5x) \exp(4x/3) + 4 \sin(5.5x) \exp(-3.5x) + 3$ ,  
 $a = 2.5, b = 4.3, \alpha = 2/7, \beta = 0$ ;
22.  $f(x) = 5 \cos(0.3x) \exp(-7x/4) + 7 \sin(0.5x) \exp(2x/3) + 4$ ,  
 $a = 0.5, b = 2.2, \alpha = 0, \beta = 3/5$ ;
23.  $f(x) = 2.5 \cos(5.7x) \exp(-4x/3) + 2.4 \sin(2.5x) \exp(-3x/3) + 7$ ,  
 $a = 0.2, b = 3.1, \alpha = 3/5, \beta = 0$ ;
24.  $f(x) = 5.7 \cos(2.5x) \exp(-4x/7) + 4.4 \sin(4.3x) \exp(2x/7) + 5$ ,  
 $a = 0.8, b = 1.3, \alpha = 0, \beta = 4/7$ .