Метод разделения переменных для решения одномерного волнового уравнения и уравнения теплопроводности.

Рассмотрим реализацию метода разделения переменных для решения одномерных уравнений - волнового и теплопроводности. ($U = U(x,t)$, $x \in (0,l)$, $t \in (0,\infty)$).

Уравнение колебаний струны	Уравнение теплопроводности	
$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x,t),$	$U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t)$	(1)
$U(x,0) = \varphi(x), U_t(x,0) = \psi(x),$	$U(x,0) = \varphi(x)$	(2)
$U(0,t) = 0, \quad U(l,t) = 0$	$U(0,t) = 0, \quad U(l,t) = 0$	(3)

Рассмотрим соответствующие однородные уравнения

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} \quad , \qquad U_t = a^2 U_{xx} \tag{4}$$

Будем искать решение уравнений (4) в виде произведения функций, каждая из которых является функцией только одной переменной

$$U(x,t) = X(x)T(t) \tag{5}$$

Подставляя выражение (5) в уравнения (4), получим

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t), \qquad X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t) \tag{6}$$

Разделим оба уравнения на $a^2 X(x)T(t)$, получим равенства

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \qquad \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \tag{7}$$

В левой части равенств (7) присутствуют функции, зависящие только от независимой переменной t, в правой - только от независимой переменной x, следовательно эти отношения равны некоторой константе. Обозначим эту константу λ. Рассмотрим вторую часть равенств (7). Оба равенства дают одинаковое однородное уравнение

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \tag{8}$$

Из граничных условий (3) следуют граничные условия для обыкновенного дифференциального уравнения(ОДУ) (8)

$$U(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Longrightarrow X(0) = 0, \quad U(l,t) = X(l)T(t) = 0 \Longrightarrow X(l) = 0 \tag{9}$$

Таким образом, получили хорошо вам известную задачу Штурма-Лиувилля

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{10}$$

решение которой представляется бесконечным набором собственных функций, ортогональных с весом "1"на промежутке $x \in [0,l]$

$$X_k = sin(\frac{k\pi x}{l}), \quad k = 1,2,3...\infty, \quad \lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2. \tag{11}$$

Решения неоднородных уравнений (1) представим в виде разложения по найденным собственным функциям $X_k(x)$

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x). \tag{12}$$

Здесь $T_k(t)$ неизвестные функции-коэффициенты, которые мы должны определить.

Подставим представление решения (12) в исходные неоднородные уравнения (1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t)X_k(x) = a^2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k''(x) + f(x,t), \quad \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t)X_k(x) = a^2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k''(x) + f(x,t). \qquad (13)$$

Разложим функцию $f(x,t)$ в ряд по собственным функциям $X_k(x)$

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)X_k(x), \quad f_k(t) = \frac{\int\limits_0^l f(x,t)X_k(x)dx}{\int\limits_0^l X_k^2(x)dx}, \; k = 1,2,3,...,\infty \qquad (14)$$

Из соотношений (10),(11) следует, что

$$X_k''(x) = \lambda_k X_k(x) = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 X_k(x). \qquad (15)$$

Подставим в (13) $f(x,t)$ из (14) и $X_k''(x)$ из (15), перенесем все слагаемые в левую часть и вынесем за скобки $X_k(x)$, получим следующие равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t) - f_k(t)\right)X_k(x) = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k'(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t) - f_k(t)\right)X_k(x) = 0. \qquad (16)$$

Из ортогональности функций $X_k(x)$ следует, что каждый множитель(выражение в скобках) при $X_k(x)$ должен обращаться в НОЛЬ, т.е.

$$T_k''(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t) = f_k(t), \quad T_k'(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t) = f_k(t). \qquad (17)$$

Решение ОДУ (17) строится как обычно. Ищутся общие решения однородных уравнений ($\beta_k = \dfrac{ak\pi}{l}$)

$T_k''(t) + \beta_k^2 T_k(t) = 0, \qquad T_k'(t) + \beta_k^2 T_k(t) = 0,$

$T_k(t) = A_k\cos(\beta_k t) + B_k\sin(\beta_k t), \quad T_k(t) = A_k e^{-\beta_k^2 t}.$

И к ним прибавляются частные решения $T_k^{part}(t)$ неоднородных уравнений (17), найденные, например, методом подбора или вариации произвольных постоянных. Таким образом, общее решение неоднородных уравнений имеет вид

$T_k(t) = A_k\cos(\beta_k t) + B_k\sin(\beta_k t) + T_k^{part}(t), \quad T_k(t) = A_k e^{-\beta_k^2 t} + T_k^{part}(t).$

Произвольные постоянные A_k, B_k определяются из начальных условий. Для этого функции $\varphi(x), \psi(x)$, задающие начальные условия, необходимо разложить в ряд по собственным функциям $X_k(x)$. Из формул (12),(2) следует для волнового уравнения и уравнения теплопроводности

$$U(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k + T_k^{part}(0)\right)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k X_k(x) = \varphi(x), \qquad (18)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых $X_k(x)$ находим коэффициент A_k

$$A_k = \varphi_k - T_k^{part}(0) \qquad (19)$$

Для определения коэффициента B_k для волнового уравнения действуем аналогично, используя заданную начальную скорость

$$U_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k\beta_k + T'^{part}_k(0)\right)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k X_k(x) = \psi(x) \qquad (20)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых $X_k(x)$ находим коэффициент B_k

$$B_k = \frac{\psi_k - T'^{part}_k(0)}{\beta_k} \tag{21}$$

Коэффициенты разложения функций, задающих начальные условия определяются по формулам

$$\varphi_k = \frac{\int\limits_0^l \varphi(x)X_k(x)dx}{\int\limits_0^l X_k^2(x)dx}, \quad \psi_k = \frac{\int\limits_0^l \psi(x)X_k(x)dx}{\int\limits_0^l X_k^2(x)dx}, \ k = 1, 2, 3, ..., \infty \tag{22}$$

Для случая уравнения теплопроводности имеем одно начальное условие и соответственно, одну произвольную постоянную A_k, ее значение определяется по формуле (19).

Самостоятельная работа №2 от 05.03.2021

Решить волновое уравнение методом разделения переменных

$$U_{tt} = a^2U_{xx} + f(x,t), \ \ U(x,0) = \varphi(x), \ \ U_t(x,0) = \psi(x), \ \ U(0,t) = 0, \quad U_x(l,t) = 0$$

где

$$\varphi(x) = \sin(l - x), \ \ \psi(x) = \cos(x - l), \ \ f(x,t) = x\sin(\omega t).$$

Домашнее задание №2

Методом разделения переменных решить следующие начально-краевые задачи $\big(x \in (0,l), t \geq 0\big)$

——————————————————————————————————————-

1. $U_{tt} = a^2U_{xx} + f(x,t), \ \ U(x,0) = \varphi(x), \ \ U_t(x,0) = \psi(x), \ \ U_x(0,t) = 0, \quad U_x(l,t) = 0$

$$\varphi(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right), \ \ \psi(x) = 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \ \ f(x,t) = \cos\left(\frac{5\pi x}{l}\right)\cos(\omega t).$$

——————————————————————————————————————-

2. $U_t = a^2U_{xx} + f(x,t), \ \ U(x,0) = \varphi(x), \ \ U_x(0,t) = 0, \quad U(l,t) = 0$

$$\varphi(x) = \cos\left(\frac{3\pi x}{2l}\right), \ \ f(x,t) = \cos\left(\frac{5\pi x}{2l}\right)e^{-\alpha t}.$$

——————————————————————————————————————-

3. $U_{tt} = a^2U_{xx} + f(x,t), \ \ U(x,0) = \varphi(x), \ \ U_t(x,0) = \psi(x), \ \ \dfrac{U(0,t)}{l} - U_x(0,t) = 0, \quad U(l,t) = 0$

$$\varphi(x) = l - x, \ \ \psi(x) = 0, \ \ f(x,t) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos(\omega t).$$

——————————————————————————————————————-

———-

$$4.\ \ U_{tt} = a^2U_{xx} + f(x,t),\ \ U(x,0) = \varphi(x),\ \ U_t(x,0) = \psi(x),\ \ U(0,t) = \mu_1(t),\quad U(l,t) = \mu_2(t) \qquad (23$$

$$\varphi(x) = 0,\ \ \psi(x) = 0,\ \ f(x,t) = 0, \mu_1(t) = \cos(\omega_1 t),\ \ \mu_2(t) = \sin(\omega_2 t)$$

Комментарий к 4-й задаче. Для того, чтобы свести задачу к задаче Штурма-Лиувилля необходимо обеспечить нулевые граничные условия по переменной x. Предлагается "ПРИДУМАТЬ"функцию $\chi(x,t)$, такую, что $\chi(0,t) = \mu_1(t),\ \ \chi(l,t) = \mu_2(t)$. Таких функций бесконечное множество, можно взять, например, линейную по x

$$\chi(x,t) = \frac{l-x}{l}\mu_1(t) + \frac{x}{l}\mu_2(t) \qquad (24)$$

Теперь введем новую искомую функцию

$$V(x,t) = U(x,t) - \chi(x,t) \qquad (25)$$

Для нее уже будут выполняться нулевые граничные условия $V(0,t) = V(l,t) = 0$. Из (25) следует

$$U(x,t) = V(x,t) + \chi(x,t) \qquad (26)$$

Подставим $U(x,t)$ из (26) в формулы (23), получим задачу для определения $V(x,t)$ с нулевыми краевыми условиями. При этом, естественно, изменятся начальные условия и дифференциальное уравнение. После решения задачи относительно функции $V(x,t)$ искомое решение $U(x,t)$ находится по формуле (26).

———-