Метод разделения переменных для решения двумерных волнового уравнения и уравнения теплопроводности.

Рассмотрим реализацию метода разделения переменных для решения двумерных уравнений - волнового и теплопроводности в прямоугольной области ($U = U(x, y, t), \ \ x \in (0, l), \ \ y \in (0, b), \ \ t \in (0, \infty)$), Δ - оператор Лапласа, $\Delta U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}$.

Волновое уравнение	Уравнение теплопроводности	
$U_{tt} = a^2 \Delta U + f(x, y, t)$,	$U_t = a^2 \Delta U + f(x, y, t)$	(1)
$U(x, y, 0) = \varphi(x, y), U_t(x, y, 0) = \psi(x, y)$,	$U(x, y, 0) = \varphi(x, y)$	(2)
$U(x, y, t)\Big\|_{\Gamma} = 0$,	$U(x, y, t)\Big\|_{\Gamma} = 0$,	(3)

Рассмотрим соответствующие однородные уравнения

$$U_{tt} = a^2 \Delta U \quad , \qquad\qquad U_t = a^2 \Delta U \tag{4}$$

Будем искать решение уравнений (4) в виде произведения двух функций следующего вида

$$U(x, y, t) = T(t) V(x, y) \tag{5}$$

Подставляя выражение (5) в уравнения (4), получим

$$T''(t) V(x, y) = a^2 T(t) \Delta V(x, y), \qquad T'(t) V(x, y) = a^2 T(t) \Delta V(x, y) \tag{6}$$

Разделим оба уравнения на $a^2 T(t) V(x, y)$, получим равенства

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\Delta V(x, y)}{V(x, y)} = \lambda \qquad \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\Delta V(x, y)}{V(x, y)} = \lambda \tag{7}$$

В левой части равенств (7) присутствуют функции, зависящие только от независимой переменной t, в правой - только от пространственных переменных x, y, следовательно эти отношения равны некоторой константе. Обозначим эту константу λ. Рассмотрим вторую часть равенств (7). Оба равенства дают одинаковое однородное уравнение

$$\Delta V(x, y) - \lambda V(x, y) = 0 \tag{8}$$

Из граничных условий (3) следуют граничные условия для дифференциального уравнения в частных производных (8)

$$U(x, y, t)\Big|_{\Gamma} = T(t) V(x, y)\Big|_{\Gamma} = 0 \Longrightarrow V(x, y)\Big|_{\Gamma} = 0 \Longrightarrow V(0, y) = V(l, y) = V(x, 0) = V(x, b) = 0 \tag{9}$$

Рассмотрим теперь краевую задачу для уравнения в частных производных (8) с граничными условиями (9). Представим функцию $V(x, y)$ в виде произведения двух функций

$$V(x, y) = X(x) Y(y), \tag{10}$$

И подставим это представление в уравнение (8), получим

$$X''(x) Y(y) + X(x) Y''(y) - \lambda X(x) Y(y) = 0.$$

Разделим последнее равенство $X(x) Y(y)$ и перенесем константу λ вправо за знак равенства

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

Откуда следует, что должны выполняться два равенства

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \mu \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \nu, \;\; \mu + \nu = \lambda \qquad (11),$$

где μ и ν константы.

Добавляя к уравнениям (11) граничные условия для функций $X(x), Y(y)$, которые следуют из соотношений (9)-(10), а именно

$$X(0) = 0, \;\; X(l) = 0, \quad Y(0) = 0, \;\; Y(b) = 0, \qquad (12)$$

получаем две задачи Штурма-Лиувилля для определения функций $X(x)$ и $Y(y)$. Найденные собственные функции имеют вид

$$X_k(x) = sin(\frac{k\pi x}{l}), \;\; k = 1, 2, 3...\infty, \;\; \mu_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \qquad (13)$$

$$Y_n(y) = sin(\frac{n\pi y}{b}), \;\; n = 1, 2, 3...\infty, \;\; \nu_n = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \qquad (14)$$

Из формулы (10) следует, что функция

$$V_{kn}(x, y) = X_k(x)Y_n(x)$$

Заметим, что функции $V_{kn}(x, y)$ ортогональны в рассматриваемой области пространственных переменных x, y. Их можно называть, по аналогии с задачей Штурма-Лиувилля, собственными функциями для краевой задачи (8)-(9). Теперь перейдем к решению исходной неоднородной задачи относительно функции $U(x, y, t)$. Представим это решение в виде разложения по ортогональной системе функций $V_{kn}(x, y)$

$$U(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{kn}(t)V_{kn}(x, y) \qquad (15)$$

Здесь $T_{kn}(t)$ неизвестные функции-коэффициенты, которые мы должны определить.

Подставим представление решения (15) в исходные неоднородные уравнения (1), получим для волнового уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T''_{kn}(t)V_{kn}(x, y) = a^2 \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{kn}(t)\Delta V_{kn}(x, y) + f(x, y, t), \qquad (16)$$

и для уравнения теплопроводности

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T'_{kn}(t)V_{kn}(x, y) = a^2 \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{kn}(t)V_{kn}(x, y) + f(x, y, t). \qquad (17)$$

Разложим функцию $f(x,y,t)$ в ряд по собственным функциям $V_{kn}(x)$

$$f(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_{kn}(t)V_{kn}(x,y),\ f_{kn}(t)=\frac{\int\limits_0^l\int\limits_0^b f(x,y,t)V_{kn}(x,y)dxdy}{\int\limits_0^l\int\limits_0^b V_{kn}^2(x,y)dxdy},\ k=1,2,...,\infty,\ n=1,2,...,\infty \quad (18)$$

Из соотношений (8),(13),(14) следует, что

$$\Delta V_{kn}(x,y)=\lambda_{kn}V_{kn}(x,y)=(\mu_k+\nu_n)V_{kn}(x,y). \quad (19)$$

Обозначим $\beta_{kn}^2=-a^2\lambda_{k,n}=a^2\left(\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)$, подставим в (16),(17) $f(x,y,t)$ из (18) и $\Delta V_{kn}(x,y)$ из (19), перенесем все слагаемые в левую часть и вынесем за скобки $V_{kn}(x,y)$, получим следующее равенство для волнового уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(T_{kn}''(t)+\beta_{kn}^2T_{kn}(t)-f_{kn}(t)\Big)V_{kn}(x,y)=0, \quad (20)$$

и для уравнения теплопроводности

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(T_{kn}'(t)+\beta_{kn}^2T_{kn}(t)-f_{kn}(t)\Big)V_{kn}(x,y)=0. \quad (21)$$

Из ортогональности функций $V_{kn}(x)$ следует, что каждый множитель(выражение в скобках) при $V_{kn}(x)$ должен обращаться в НОЛЬ, т.е.

$$T_{kn}''(t)+\beta_{kn}^2T_{kn}(t)=f_{kn}(t), \qquad T_{kn}'(t)+\beta_{kn}^2T_{kn}(t)=f_{kn}(t). \quad (22)$$

Решение ОДУ (22) строятся как обычно. Ищутся общие решения однородных уравнений

$$T_{kn}''(t)+\beta_{kn}^2T_{kn}(t)=0, \qquad T_{kn}'(t)+\beta_{kn}^2T_{kn}(t)=0,$$

$$T_{kn}(t)=A_{kn}\cos(\beta_{kn}t)+B_{kn}\sin(\beta_{kn}t), \quad T_{kn}(t)=A_{kn}e^{-\beta_{kn}^2t}.$$

И к ним прибавляются частные решения $T_{kn}^{part}(t)$ неоднородных уравнений (22), найденные, например, методом подбора или вариации произвольных постоянных. Таким образом, общее решение неоднородных уравнений имеет вид

$$T_{kn}(t)=A_{kn}\cos(\beta_{kn}t)+B_{kn}\sin(\beta_{kn}t)+T_{kn}^{part}(t), \quad T_{kn}(t)=A_{kn}e^{-\beta_{kn}^2t}+T_{kn}^{part}(t).$$

Произвольные постоянные A_{kn},B_{kn} определяются из начальных условий. Для этого функции $\varphi(x,y),\psi(x,y)$, задающие начальные условия, необходимо разложить в ряд по собственным функциям $V_{kn}(x)$. Из формул (12),(2) следует для волнового уравнения и уравнения теплопроводности

$$U(x,y,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}T_{kn}(0)V_{kn}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_{kn}+T_{kn}^{part}(0)\Big)V_{kn}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kn}V_{kn}(x,y)=\varphi(x,y), \quad (23)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых $V_{kn}(x)$ находим коэффициент A_{kn}

$$A_{kn}=\varphi_{kn}-T_{kn}^{part}(0) \quad (24)$$

Для определения коэффициента B_{kn} для волнового уравнения действуем аналогично, используя заданную начальную скорость

$$U_t(x,y,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}T'_{kn}(0)V_{kn}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(B_{kn}\beta_{kn}+T'^{part}_{kn}(0)\Big)V_{kn}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{kn}V_{kn}(x,y)=\psi(x,y) \quad (25)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых $V_{kn}(x)$ находим коэффициент B_{kn}

$$B_{kn}=\frac{\psi_{kn}-T'^{part}_{kn}(0)}{\beta_{kn}} \quad (26)$$

Коэффициенты разложения функций, задающих начальные условия определяются по формулам

$$\varphi_{kn}=\frac{\int\limits_0^l\int\limits_0^b\varphi(x,y)V_{kn}(x,y)dxdy}{\int\limits_0^l\int\limits_0^b V_{kn}^2(x,y)dxdy},\quad \psi_{kn}=\frac{\int\limits_0^l\int\limits_0^b\psi(x,y)V_{kn}(x)dxdy}{\int\limits_0^l\int\limits_0^b V_{kn}^2(x,y)dxdy},\ k=1,2,...,\infty,\ \ n=1,2,...,\infty \quad (27)$$

Для случая уравнения теплопроводности имеем одно начальное условие и соответственно, одну произвольную постоянную A_{kn}, ее значение определяется по формуле (24).

Самостоятельная работа №3 от 19.03.2021

Решить двумерное уравнение теплопроводности методом разделения переменных

$x\in(0,l),\ \ y\in(0,b),\ \ t\in(0,\infty),\ \ U=U(x,y,t)$

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t),$$

$$U\Big|_{t=0}=\varphi(x,y),\ \ \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\ \ \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=l}=0,\ \ U\Big|_{y=0}=0,\ \ U\Big|_{y=b}=0$$

где

$$\varphi(x,y)=\cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right),\ \ f(x,y,t)=\left(1+\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right)sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)e^{-\omega t}.$$

Домашнее задание №3 от 19.03.2021

Методом разделения переменных решить следующие начально-краевые задачи

$x\in(0,l),\ \ y\in(0,b),\ \ t\in(0,\infty),\ \ U=U(x,y,t)$

———————————————————————————————————-

No. 1.

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t),$$

$$U\Big|_{t=0}=\varphi(x,y),\ \ \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\ \ U\Big|_{x=l}=0,\ \ U\Big|_{y=0}=0,\ \ \frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{y=b}=0,$$

где

$$\varphi(x,y)=\cos\left(\frac{3\pi x}{2l}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2b}\right),\ \ f(x,y,t)=xe^{-\omega t}\sin\left(\frac{5\pi y}{2b}\right).$$

———————————————————————————————————-

No. 2.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t),$$

$$U\Big|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x,y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \quad U\Big|_{y=b} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0,$$

где

$$\varphi(x,y) = 0, \quad \psi(x,y) = (y-b)x, \quad f(x,y,t) = xy\cos(\omega t).$$

———————————————————————————————————————-

No. 3.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t),$$

$$U\Big|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x,y),$$

$$U\Big|_{\Gamma} = xy\sin(\omega t),$$

где Γ - граница области,

$$\varphi(x,y) = 0, \quad \psi(x,y) = 0, \quad f(x,y,t) = 0.$$

———————————————————————————————————————-