

1 Постановка задачи

В области $D = \{a \leq x \leq b, |y^i - y_0^i| \leq b_i\} \in R^{n+1}$ определена функция

$$f \equiv f(x, y^1, \dots, y^n), \quad (x, y) \in D.$$

Необходимо найти решение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

4 Явные методы Рунге–Кутты

Рунге, Хойн и Кутта предложили подход, основанный на построении φ , которая максимально близка к Δ и не содержит производных от функции $f(x, y)$. Этот процесс "подгонки" рядов Тейлора и называется принципом или методом Рунге–Кутты. Кутта дал его общую схему.

Определение 1. Пусть m — целое положительное число («число стадий», или «этапов») и $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{m,m-1}, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_m$ — вещественные коэффициенты. Тогда метод

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) &\approx z_1 = y(x_0) + \sum_{i=1}^m b_i k_i(h), \\ k_1(h) &= hf(x_0, y(x_0)), \\ k_j(h) &= hf(x_0 + c_j h, y(x_0) + \sum_{\nu=1}^{j-1} a_{j\nu} k_\nu(h)), \quad j = 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (13)$$

называется m -этапным явным методом Рунге–Кутты (ЯМРК) для задачи Коши (1), (2).

Любой ЯМРК характеризуется числом этапов (дает представление о требуемых вычислительных затратах) и порядком.

Определение 2. ЯМРК (13) имеет порядок q (порядок точности на шаге), если для достаточно гладких задач (1), (2)

$$\|y(x_0 + h) - z_1\| \leq Ch^{q+1}. \quad (14)$$

Иначе говоря, если ряды Тейлора для точного решения $y(x_0 + h)$ и полученного приближения к нему z_1 совпадают до члена h^q включительно

ЯМРК идеально приспособлен для практического расчета: он не требует вычисления дополнительных начальных значений и позволяет легко менять шаг интегрирования. Причем в отличие от метода Тейлора здесь не требуется вычисления полных производных точного решения. И приращение ищется в виде линейной комбинации вычислений правой части исходного дифференциального уравнения на шаге интегрирования. Для изложения алгоритма построения m -этапного ЯМРК q -порядка введем в рассмотрение функцию

$$\Psi(h) = y(x + h) - y(x) - \sum_{i=1}^m b_i k_i(h), \quad (15)$$

которую в дальнейшем будем называть **методической (локальной) погрешностью одношагового метода**.

Предполагаем, что в рассматриваемой области $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до некоторого порядка q . Тогда искомое решение будет иметь непрерывные производные до порядка $q + 1$. Выбор постоянных (параметров метода) b_i, c_i, a_{ij} производится так, чтобы разложение методической погрешности (15) по степеням h в ряд Тейлора

$$\Psi(h) = \sum_{i=0}^q \frac{\Psi^{(i)}(0)}{i!} h^i + \frac{\Psi^{(q+1)}(\theta h)}{(q+1)!} h^{q+1}, \quad \text{где } 0 < \theta < 1, \quad (16)$$

начиналось со степени $q + 1$ при произвольной функции $f(x, y)$ и произвольном шаге h , т.е.

$$\Psi(h) = \frac{\Psi^{(q+1)}(\theta h)}{(q+1)!} h^{q+1}, \quad \text{где } 0 < \theta < 1. \quad (17)$$

А это возможно тогда и только тогда, когда параметры метода b_i, c_i, a_{ij} обеспечивают выполнение равенств

$$\Psi'(0) = \Psi''(0) = \dots = \Psi^{(q)}(0) = 0. \quad (18)$$

Фиксируя число этапов m , в рамках определенной структуры ЯМРК (13) мы фактически фиксируем количество параметров метода b_i, c_i, a_{ij} , подлежащих определению. Задавая же порядок q метода, с учетом требования выполнения равенств (18) формируем систему нелинейных алгебраических уравнений связывающую параметры m -этапного ЯМРК q -го порядка — *условия порядка*. Любое частное решение этой системы (условий порядка) дает расчетную схему m -этапного ЯМРК q -го порядка.

Пример построения двухэтапного метода Рунге-Кутты. Количество вычислений правой части на шаге интегрирования равно двум $m = 2$. Метод интегрирования имеет вид:

$$y(x+h) \approx y(x) + b_1 k_1(h) + b_2 k_2(k), \quad (21)$$

$$\text{где } k_1(h) = hf(x, y(x)),$$

$$k_2(k) = hf(x + c_2 h, y(x) + a_{21} k_1(h)).$$

Методическая (локальная) погрешность определяется равенством

$$\Psi(h) = y(x+h) - y(x) - b_1 k_1(h) - b_2 k_2(h). \quad (22)$$

Для того, чтобы производные функции $\Psi(h)$ при значении $h = 0$:

$$\Psi'(0) = (1 - b_1 - b_2)f(x, y). \quad (26)$$

$$\Psi''(0) = (1 - 2c_2 b_2)f'_x(x, y(x)) + (1 - 2a_{21} b_2)f'_y(x, y(x))f(x, y(x)), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Psi'''(0) = & (1 - 3c_2^2 b_2)f_{xx}(x, y(x)) + (2 - 6c_2 a_{21} b_2)f_{xy}(x, y(x))f(x, y(x)) + \\ & + (1 - 3c_{21}^2 b_2)f_{yy}(x, y(x))[f(x, y(x))]^2 + f_y(x, y(x))y''(x). \end{aligned} \quad (28)$$

обращались в нуль, необходимо и достаточно, чтобы параметры метода удовлетворяли системе уравнений:

$$b_1 + b_2 = 1, \quad (29)$$

$$c_2 b_2 = \frac{1}{2}, \quad (30)$$

$$a_{21} b_2 = \frac{1}{2}. \quad (31)$$

Решения системы алгебраических уравнений (29)-(31) образуют однопараметрическое семейство. Из последних двух уравнений системы (30), (31) следует, что $c_2 \neq 0$, $a_{21} \neq 0$, $b_2 \neq 0$. Принимая c_2 за свободный параметр, получим

$$a_{21} = c_2, \quad b_2 = \frac{1}{2c_2}, \quad b_1 = 1 - \frac{1}{2c_2}, \quad c_2 \neq 0. \quad (33)$$

Так, например, полагая $c_2 = 1$, получим двухэтапную расчетную схему ЯМРК второго порядка (Метод Хойна):

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{1}{2}[k_1(h) + k_2(h)], \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} k_1(h) &= hf(x, y(x)), \\ k_2(k) &= hf(x+h, y(x) + k_1(h)). \end{aligned}$$

Ниже приведем несколько наиболее употребительных расчетных схем интегрирования третьего и четвертого порядка точности.

Расчетные схемы третьего порядка трехэтапного ЯМРК:

Первая имеет вид:

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{1}{6}[k_1(h) + 4k_2(h) + k_3(h)], \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} k_1(h) &= hf(x, y(x)), \\ k_2(k) &= hf(x + \frac{1}{2}h, y(x) + \frac{1}{2}k_1(h)), \\ k_3(k) &= hf(x+h, y(x) - k_1(h) + 2k_2(h)). \end{aligned}$$

Вторая :

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{1}{4}[k_1(h) + 3k_3(h)], \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} k_1(h) &= hf(x, y(x)), \\ k_2(k) &= hf(x + \frac{1}{3}h, y(x) + \frac{1}{3}k_1(h)), \\ k_3(k) &= hf(x + \frac{2}{3}h, y(x) + \frac{2}{3}k_2(h)). \end{aligned}$$

Четырехэтапные методы Рунге-Кутты четвертого порядка.

Правило одной шестой(Классический метод Рунге-Кутты)

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{1}{6}[k_1(h) + 2k_2(h) + 2k_3(h) + k_4(h)], \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} k_1(h) &= hf(x, y(x)), \\ k_2(k) &= hf(x + \frac{1}{2}h, y(x) + \frac{1}{2}k_1(h)), \\ k_3(k) &= hf(x + \frac{1}{2}h, y(x) + \frac{1}{2}k_2(h)), \\ k_4(k) &= hf(x+h, y(x) + k_3(h)). \end{aligned}$$

Расчетная формула Гилла

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{1}{6}k_1(h) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_2(h) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_3(h) + \frac{1}{6}k_4(h), \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} k_1(h) &= hf(x, y(x)), \\ k_2(h) &= hf\left(x + \frac{1}{2}h, y(x) + \frac{1}{2}k_1(h)\right), \\ k_3(h) &= hf\left(x + \frac{1}{2}h, y(x) + \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)k_1(h) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_2(h)\right), \\ k_4(h) &= hf\left(x + h, y(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}k_2(h) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_3(h)\right). \end{aligned}$$

Методы Рунге-Кутты численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Необходимо найти решение

$$\frac{dy^i}{dx} = f_i(x, y^1, \dots, y^n), \quad i = \overline{1, n} \quad (83)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y^i(x_0) = y_0^i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (84)$$

Общая схема метода Рунге-Кутты численного решения задачи Коши (83),(84) имеет вид:

$$y^i(x+h) \approx y^i(x) + \sum_{j=1}^{m_i} b_{ij}k_{ij}(h), \quad i = \overline{1, n} \quad (85)$$

где корректирующие функции $k_{ij}(h)$ вычисляются по правилу:

$$k_{i1}(h) = f_i(x, y^1, \dots, y^n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (86)$$

а для $j = 2, \dots, m_i$:

$$k_{ij}(h) = f_i\left(x + c_{ij}h, y^1 + \sum_{\xi=1}^{j-1} a_{ij1\xi}k_{1\xi}(h), \dots, y^n + \sum_{\xi=1}^{j-1} a_{ijn\xi}k_{n\xi}(h)\right), \quad (87)$$

Методическая погрешность (85)-(87) $\Psi(h)$ — вектор-функция, каждая компонента которой

$$\Psi^i(h) = y^i(x+h) - y^i(x) - \sum_{j=1}^{m_i} b_{ij}k_{ij}(h), \quad i = \overline{1, n}. \quad (88)$$

По сравнению со случаем одного уравнения $n = 1$ при построении одношаговых правил типа Рунге-Кутты в случае системы ($n > 1$) обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка представляются еще большие возможности в получении различных расчетных схем одного и того же порядка точности, так как число свободных параметров при этом сильно возрастает. Эти возможности реализуют крайне редко. Все уравнения системы можно считать равноправными, параметры метода $b_{ij} = b_i$, $c_{ij} = c_i$, $a_{ij\eta\xi} = a_{ij}$ и число этапов $m_i = m$ выбирают одинаковыми для всех компонент искомой вектор-функции. Это сокращает число параметров, а значит сужает возможности в построении расчетных схем одного порядка точности. Но зато значительно упрощается как вывод самих расчетных схем, так и их практическая реализация.