

Задание №5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СОДУ

Цель задания: практическое освоение методов управления численным процессом с целью обеспечения заданной точности решения задачи Коши для СОДУ за приемлемое время, используя явные методы Рунге-Кутты (ЯМРК) с методами оценки полной и локальной погрешности.

Рассмотрим задачу Коши (1):

$$\begin{aligned}\frac{dy_1(x)}{dx} &= Ay_2(x), \\ \frac{dy_2(x)}{dx} &= -By_1(x), \\ y_1(0) &= B\pi, \quad y_2(0) = A\pi. \\ x_k &= \pi, y_i(x_k) = ?, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

Часть №1. Расчетные схемы метода Рунге-Кутты с постоянным шагом

1.1. Используя условия порядка для 2-х-этапного ЯМРК 2-го порядка постройте расчетную схему второго порядка при значении параметра $c_2 = \xi$ (параметр ξ указан в Вашем варианте задания).

1.2. Постройте и программно реализуйте алгоритм решения задачи Коши (1) с заданной точностью ($\varepsilon = 10^{-4}$) с *постоянным* шагом интегрирования и оценкой *полной* погрешности по методу Рунге. Параметры А, В указаны в Вашем варианте. Начальный шаг выбирать согласно алгоритму выбора начального шага (стр. 15 методического пособия).

Часть №2. Расчетные схемы метода Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага

2.1. Реализуйте алгоритм решения задачи Коши (1) на базе построенной Вами (см. п. 1.1.) схемы 2-х-этапного ЯМРК 2-го порядка с *автоматическим* выбором шага с заданной максимально допустимой *локальной* погрешностью ($\rho = 10^{-5}$) и оценкой *локальной* погрешности по методу Рунге. Начальный шаг выбирать так же, как и в п. 1.2.

Часть №3. Анализ эффективности методов Рунге-Кутты

3.1. Реализуйте алгоритмы решения задачи Коши с *постоянным* и *автоматическим* выбором шага на базе одной из классических расчетных схем интегрирования 3 или 4 порядка точности: формулы (36), (37), (39), (40).

3.2. Для выбранного метода (схемы оппонента) из п. 3.1 и реализованного Вами в п.1.2 2-х этапного ЯМРК 2-го порядка для решения задачи Коши (1) с *постоянным* шагом определите величину шага интегрирования h , обеспечивающего вычисление

приближенного решения с заданной точностью ($\varepsilon = 10^{-4}$). Постройте графики зависимости истинной полной погрешности от значения независимой переменной x при интегрировании с полученным шагом h .

3.3. Для схемы оппонента из п. 3.1 и реализованного Вами в п.2.1 2-х этапного ЯМРК 2-го порядка для решения задачи Коши (1) с *автоматическим* выбором шага интегрирования постройте:

3.3.1 графики зависимости величины шага интегрирования от значения независимой переменной x ;

3.3.2 графики зависимости отношения истинной локальной погрешности к полученной оценке локальной погрешности от значения независимой переменной x (см. формулу (91)).

3.3.3 графики зависимости количества вычислений правой части системы от заданной точности ε (например, $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$).

На основании полученных результатов сделайте вывод о *надежности* и *экономичности* реализованных алгоритмов.

ВАРИАНТЫ ПАРАМЕТРОВ:

- Вариант 1. а) $\xi = 1/20$; б) $A = 1/30, B = 1/15$;
Вариант 2. а) $\xi = 1/19$; б) $A = 1/20, B = 1/25$;
Вариант 3. а) $\xi = 1/18$; б) $A = 1/25, B = 1/20$;
Вариант 4. а) $\xi = 1/17$; б) $A = 1/35, B = 1/10$;
Вариант 5. а) $\xi = 1/16$; б) $A = 1/15, B = 1/20$;
Вариант 6. а) $\xi = 1/15$; б) $A = 1/10, B = 1/12$;
Вариант 7. а) $\xi = 1/14$; б) $A = 1/14, B = 1/15$;
Вариант 8. а) $\xi = 1/12$; б) $A = 1/12, B = 1/20$;
Вариант 9. а) $\xi = 1/11$; б) $A = 1/15, B = 1/25$;
Вариант 10. а) $\xi = 1/10$; б) $A = 1/10, B = 1/20$;
Вариант 11. а) $\xi = 1/9$; б) $A = 2/11, B = 3/13$;
Вариант 12. а) $\xi = 1/8$; б) $A = 1/15, B = 1/20$;
Вариант 13. а) $\xi = 2/9$; б) $A = 2/15, B = 3/14$;
Вариант 14. а) $\xi = 9/14$; б) $A = 5/14, B = 7/15$;
Вариант 15. а) $\xi = 7/12$; б) $A = 7/12, B = 5/12$;
Вариант 16. а) $\xi = 6/11$; б) $A = 17/15, B = 19/25$;
Вариант 17. а) $\xi = 9/10$; б) $A = 3/10, B = 7/20$;
Вариант 18. а) $\xi = 4/9$; б) $A = 9/11, B = 10/13$;
Вариант 19. а) $\xi = 3/8$; б) $A = 7/15, B = 11/20$;
Вариант 20. а) $\xi = 4/9$; б) $A = 4/15, B = 13/14$;
Вариант 21. а) $\xi = 5/7$; б) $A = 5/3, B = 7/12$;
Вариант 22. а) $\xi = 7/11$; б) $A = 7/13, B = 5/4$;
Вариант 23. а) $\xi = 9/11$; б) $A = 17/15, B = 19/25$;
Вариант 24. а) $\xi = 9/17$; б) $A = 13/10, B = 17/20$;
Вариант 25. а) $\xi = 5/9$; б) $A = 9/17, B = 11/13$;