### ***Лабораторная работа № 1***

###  ***«Применение базовых средств пакета MATHCAD для решения нелинейных уравнений»***

#### **1.1. Вопросы, подлежащие изучению**

1. Постановка задачи численного решения нелинейных уравнений.
2. Этапы численного решения уравнения.
3. Аналитический и графический методы отделения корней.
4. Уточнение корня методами половинного деления, итерации, Ньютона и хорд.
5. Графическая иллюстрация методов половинного деления, итерации, Ньютона и хорд.
6. Условие окончания вычислений при использовании методов половинного деления, итерации, Ньютона и хорд.
7. Сходимость метода итерации, выбор начального значения корня, правило выбора итерирующей функции и оценка погрешности метода итерации.
8. Теорема о сходимости метода Ньютона и оценка погрешности метода.
9. Правило выбора неподвижной точки, начальной точки и условие сходимости метода хорд.
10. Условия окончания вычислений в методах итерации, Ньютона и хорд.
11. Сравнение методов половинного деления, итерации, Ньютона и хорд.
12. Алгоритмы и программы решения нелинейных уравнений на языке программирования.
13. Решение нелинейных уравнений средствами математических пакетов

#### **1.2. Задание**

1. **Выбрать индивидуальное задание** (нелинейное уравнение)из таблицы.1-1**.**
2. **Отделить корни уравнения.**
3. **Уточнить корень уравнения 4-мя численными методами, для чего для каждого метода**:
* проверить выполнение условий сходимости вычислительного процесса, в случае расходящегося процесса – сделать необходимые преобразования для обеспечения сходимости;
* выбрать начальное приближение;
* сформулировать условия окончания этапа уточнения корня.
1. **Провести расчет** трех итераций (без использования панели инструментов «Программирование»).
2. **Оценить погрешность** результата расчета.
3. **Решить нелинейное уравнение встроенными средствами математического пакета.**

**1.3. Варианты задания**

 Таблица 1-1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Уравнение** | **№** | **Уравнение** |
| **1** | **tg(0,36x +0,4) = x2** | **19** | **ex + ln(x) – x = 0** |
| **2** | **x + ln(4x) – 1 = 0** | **20** | **1–x+sin(x)–ln(1+x) = 0** |
| **3** | **ex – 4 e-x – 1 = 0**  | **21** |  **– cos(1–x) = 0** |
| **4** | **x ex – 2 = 0** | **22** | **sin(x2)+cos(x2)–10x = 0** |
| **5** | **4 (x2 + 1) ln(x) – 1 = 0**  | **23** | **x2 – ln(1 + x) – 3 = 0** |
| **6** | **2 – x – sin(x / 4) = 0** | **24** | **cos(x / 2) ln(x – 1) = 0** |
| **7** | **x2 + ln(x) – 2 = 0** | **25** | **cos(x/5) – x = 0** |
| **8** | **cos(x)–(x + 2)1/2 + 1 = 0** | **26** | **3x – e-x = 0** |
| **9** | **4 (1 + x1/2) ln(x) – 1 = 0** | **27** | **4(1+) ln(x)–10 = 0** |
| **10** | **5 ln(x) –  = 0** | **28** | **(x-3)2 lg(x-2) = -2** |
| **11** | **ex + x3 – 2 = 0** | **29** | **x – 1 / (3 + sin(3.6x)) = 0** |
| **12** | **3 sin () + x – 3 = 0** | **30** | **0.25x3 + cos(x / 4) = 0** |
| **13** | **0.1x2 – x ln(x) = 0** | **31** | **2 – x = ln x** |
| **14** | **cos(1 + 0.2x2) – x = 0** | **32** | **x2 + 4sinx = 0** |
| **15** | **3 x – 4 ln(x) – 5 = 0** | **33** | **0,5x -3 = (x+2)2** |
| **16** | **sin(1 – 0.2x2) – x = 0** | **34** | **1 + lgx = 0,5** |
| **17** | **ex – e-x – 2 = 0** | **35** | **2 lgx – x/2+ 1 = 0** |
| **18** | **x – sin(1 / x) = 0** | **36** | **x – sinx = 0,25** |

#### **1.4. Содержание отчета**

1. Индивидуальное задание (уравнение, метод решения).
2. Результаты этапа отделения корней (интервалы изоляции корня уравнения).
3. Результаты исследования задания:
* условие сходимости вычислительного процесса;
* начальное приближение;
* условие окончания процесса уточнения.
1. Результаты расчета, представленные по форме табл. 1-2а для метода половинного деления и по форме табл. 1-2б для остальных методов.

 Таблица 1-2а

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **к** | **a** | **b** | **f(a)** | **f(b)** | **(a+b)/2** | **f( (a+b)/2)** | **b-a** |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |  |

 Таблица 1-2б

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **к** | **x** | **f(x)** |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |

1. Оценки погрешностей результатов расчета.
2. Результат решения задачи, полученный с помощью математического пакета.

####

#### **1.5. Пример выполнения задания**

**1. Задание для решения нелинейных уравнений:**

* уравнение **;**
* методы решения нелинейных уравнений – половинного деления, итерации, Ньютона и хорд;
1. **Отделение корней с использованием MathCad**

Отделение корней производим графическим методом (график функции) с обязательным подтверждением результата аналитически (таблица).

|  |
| --- |
|  |

На отрезке [0; 1] функция f(x) меняет знак, т.е. ***существует***, по крайней ере, один ***корень***. Поскольку знак первой производной f1(x)=–sin(x)–3<0 на выбранном отрезке остается постоянным, то можно сказать, что ***функция*** на этом отрезке ***монотонна***. Знакопостоянство второй производной

f2(x)=–cos(x)<0 на выбранном отрезке является необходимым условием применения метода Ньютона и метода хорд. Следовательно, уравнение

1–3х+cos(x)=0 имеет ***единственный*** корень на отрезке [0;1].

**3.** **Уточнение корня с использованием MathCad**

***Метод половинного деления***

1. **Исследование задания**
* Метод половинного деления сходится, если на выбранном отрезке отделен ***один*** корень. Так как на отрезке [0;1] функция ** *меняет знак*** () ***и монотонна*** (f′(x)<0), то условие сходимости выполняется.
* **Выберем за начальное приближение** середину отрезка

 =0.5.

* **Условие окончания процесса уточнения корня**. Для оценки погрешности метода половинного деления справедливо условие

|bn – an|<ε , т.е. длина отрезка, полученного на n-ом шаге должна быть меньше заданной точности - 

1. **Результаты «ручного расчета» трех итераций**

|  |
| --- |
| *1 итерация*    f(x0)=0.377  следовательно,   *2 итерация*     f(x1)=-0.5  следовательно,   *3 итерация*    f(x2)=-0.064 следовательно,    и т.д. |

Результаты вычислений представлены в форме табл. 1-2а.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **n** | **a**n | **b**n | **f(a**n**)** | **f(b**n**)** | **(a**n**+b**n**)/2** | **f( (a**n**+b**n**)/2)** | **b**n**-a**n |
| 0 | 0 | 1 | 2 | -1.459 | 0.5 | 0.377 | 1 |
| 1 | 0.5 | 1 | 0.377 | -1.459 | 0.75 | -0.518 | 0.5 |
| 2 | 0.5 | 0.75 | 0.377 | -0.518 | 0.625 | -0.064 | 0.25 |
| 3 | 0.5 | 0.625 |  |  |  |  | 0.125 |

 После трех итераций приближение к корню – середина отрезка [a3, b3] – x3=0.5625.

**3) Погрешность численного решения нелинейных уравнений**

 Оценим погрешность результата после трех итераций: r = | b3 – a3 |=0.125 . Округлим eё в б**о**льшую(!) сторону – до первой слева ненулевой цифры –

| b3 – a3 |=0.2

Согласуем/округлим решение (x3) по числу знаков в погрешности. Получим:

***ОТВЕТ: после 3-х итераций корень уравнения равен x3 r = 0,6 0,2***

***Метод итераций***

**1) Исследование задания~~.~~**

* Приведем уравнение f(x)=0 к виду . Тогда рекуррентная формула  . **Для сходимости процесса итерации** необходимо, чтобы  при **.** Если  то сходимость не обеспечена.

Приведем уравнение  к виду x = (cos(x)+1)/3и проведем исследование.

|  |
| --- |
|  |

В приведенном примере условие сходимости выполняется и можно использовать итерирующую/итерационную функцию  в рекуррентной формуле для уточнения корня методом итераций, что и будет показано ниже. Однако, в случаях, когда свободный х выразить не удается, или когда  целесообразно воспользоваться следующим приемом, позволяющим обеспечить выполнение условий сходимости.

Построим функцию  где параметр  может быть определен по правилу:

если то 

если  то  где .

Приведем пример выбора параметра λ и итерирующей функции. Для заданного уравнения исследовано, что

f ′(x)<0, тогда .

f ′ (0)=­­-3, f ′ (1)=-3.841,

*r* = max{ |-3|, |-3.841| }=3.841, тогда 0<λ<0.26.

Полагаем λ=0.25. Тогда рекуррентная формула: φ(x)= 0.25(1 - 3x + cos x) + x = 0.25(1+x+cos x).

* **Выбор начального приближения к корню.** В методе итераций x0– произвольное значение из отрезка [a;b]**,** например, x0=0
* **Условие окончания процесса уточнения корня**. Для оценки погрешности метода итерации справедливо соотношение:

. Итерации следует продолжать до тех пор, пока не выполнится условие останова:, где q=max |φ′(x)| на выбранном отрезке, ε – заданная точность. В нашем случае

q=max |φ′(x)|==0.28. Тогда условие останова будет . Если *q*<1/2, то можно использовать условие 

**2) «Ручной расчет» трех итераций**

Для получения решения уравнения методом итерации необходимо воспользоваться следующей рекуррентной формулой: ,

|  |
| --- |
|  |

 Результаты вычислений представлены в форме табл. 1-2б.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **к** | **Xк** | **f(xк)** |
| 0 | 0 | 2 |
| 1 | 0.667 | -0.214 |
| 2 | 0.595 |  0.042 |
| 3 | 0.609 | -7.95 • 10-3 |

Сходимость итерационного процесса подтверждается принадлежностью всех **Xк** выбранному исходному отрезку изоляции корня [0;1] и стремлением **f(xк)** к нулю.

*Примечание: Если свободный* ***х*** *выразить не удается или когда  то применяется формула с использованием* **λ**.

**3) Погрешность численного решения нелинейного уравнения**

 Оценим погрешность результата после трех итераций:

 

.

Аналогично предыдущему методу, округлим погрешность решения

(0.0054 ≤ r=0.006). Здесь погрешность возникает уже в 3-ем знаке после запятой.

Округлим/согласуем решение (x3) по числу знаков после запятой в погрешности. Окончательно получим:

***ОТВЕТ: после 3-х итераций корень уравнения равен x3 * r** ***=* 0,609  0,006*.***

 ***В условиях задачи метод точнее предыдущего на 2 порядка.***

***Метод Ньютона***

**1) Исследование задания.**

* **Необходимые и достаточные условия сходимости** метода Ньютона:

непрерывна на [a;b] и ;

 и отличны от нуля и сохраняют знаки для .

В нашем случае на отрезке [0;1] требования сходимости выполняются.

* **Начальное приближение**  должно удовлетворять условию: , т.е. за начальное приближение следует принять тот конец отрезка, где знак функции и знак второй производной совпадают. Поскольку  < 0 и  < 0, то выберем начальное приближение к корню: =1.
* **Условие окончания процесса уточнения корня**. Для оценки погрешности метода Ньютона справедливо соотношение: , где *M2* – наибольшее значение  , *m1* –наименьшее значение  на отрезке[a;b]. Из требования обеспечения точности ε следует условие окончания вычислений 

**2) Расчет трех итераций**

Для получения решения уравнения методом Ньютона воспользуемся следующей рекуррентной формулой: 

В нашем случае , =1.

|  |
| --- |
|      |

 Представим вычисления в виде следующей табл. 1-2б.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **k** | **Xk** | **f(xk)** |
| 0 | 1 | -1.4597 |
| 1 | 0.62 | -0.046 |
| 2 | 0.607121 | -6. 788 •10-5 |
| 3 | 0.60710164814 | -1.484 •10-10 |

**3) Погрешность численного решения нелинейных уравнений**

Оценим погрешность после трех итераций:



***ОТВЕТ: после 3-х итераций корень уравнения равен***

 ***. В условиях задачи метод точнее***

 ***предыдущего на 8 порядков.***

***Метод хорд***

**1) Исследование задания~~.~~**

* **Необходимые и достаточные условия сходимости** аналогичны методу Ньютона, а именно:

непрерывна на [a;b] и ;

 и отличны от нуля и сохраняют знаки для .

В нашем случае на отрезке [0;1] требования сходимости выполняются.

* **Выбор начального приближения.** Видрекуррентной формулы зависит от того, какая из точек aили bявляется неподвижной. Неподвижен тот конец отрезка [a;b**]**, для которого знак функции f(x**)**совпадает со знаком ее второй производной. Тогда второй конец отрезка можно принять за начальное приближение к корню, то есть точку х0**.**

Рекуррентная формула метода хорд:

 где  - неподвижная точка.

На этапе отделения корня было показано, что для функции f(x)=1–3x+cosx вторая производная <0 на отрезке [0;1] и, следовательно, неподвижной точкой является точка x=b=1, так как .

Таким образом, полагая =a=0, получим сходящуюся последовательность приближений к корню.

В рассматриваемой задаче рекуррентная формула принимает следующий вид

 

* **Условие окончания процесса уточнения корня**.Оценку погрешности можно проводить по любой из формул  или , где *m1* и *M1* – наименьшее и наибольшее значения  на отрезке. В случае, если *M*1<*m1*можно использовать правило останова 

**2) Расчет трех итераций**

Для получения решения уравнения методом хорд воспользуемся следующей рекуррентной формулой:

****= 0.

|  |
| --- |
|  |

 Результаты вычислений представлены в виде следующей таблицы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **n** | **Xn** | **f(xn)** |
| 0 | 0 | 2 |
| 1 | 0.5781 | 0.10325 |
| 2 | 0.6059 | 4.0808 •10-3 |
| 3 | 0.60706 | 1.59047•10-4 |

**3) Погрешность численного решения нелинейного уравнения**

 Погрешность результата, вычисленного методом хорд, оцениваем по формуле
 . Тогда после трех итераций

 

***ОТВЕТ: после 3-х итераций корень уравнения равен***

******

***В условиях задачи метод менее точен чем предыдущий на 7 порядков.***

**4. Решение уравнения встроенными средствами MathCad**

Для решения нелинейных уравнений вида **f(x) = 0** в **Mathcad** используется вариант встроенной функции **root(f(x), x, a, b)**, где **f(x)** – имя функции, стоящее в левой части решаемого уравнения, **x** – аргумент функции, **a** и **b** –границы отрезка с корнем. В приведенном ниже примере **z** - имя переменной, которой присваивается найденное значение корня.

|  |
| --- |
|  |

**1.6**. **Контрольные вопросы по теме**

### **«Методы решения нелинейных уравнений»**

**1.**Что представляет собой нелинейное уравнение?

**2.**Что является корнем нелинейного уравнения f(x)=0?

**3.**Чему равна функция в точке корня?

**4.**Как называется процесс нахождения возможно более узкого отрезка,

 содержащего только один корень уравнения?

**5.** Каково условие существования на отрезке [a;b] хотя бы одного корня?

**6.**При каких условиях корень xбудет единственным на отрезке [a;b]?

**7.**Процесс решения нелинейного уравнения состоит из...

**8.**Как называются этапы решения нелинейного уравнения?

**9.**В чем заключается этап «отделения корней» нелинейного уравнения?

**10.** Что такое начальное приближение к корню?

**11.** Что определяется на этапе уточнения корней?

**12.** Какие методы не относятся к методам отделения корня?

**13.** Какие методы не относятся к методам уточнения корня?

**14.** Какие методы используются на этапе отделения корней?

**15.** Что необходимо, чтобы выбрать **x0**в качестве начального приближения в

 методе Ньютона?

**16.** Что является необходимым условием существования корня на отрезке

 [a;b]?

**17.** Какой метод решения нелинейного уравнения требует более близкого к

 корню начального значения?

**18.** Назовите метод решения нелинейного уравнения, в результате которого

 получается последовательность вложенных отрезков?

**19.** Можно ли уточнить корень уравнения графическим методом?

**20.**Что является первым приближением к корню, отделенному на отрезке [a;b],

при решении нелинейного уравнения методом половинного деления?

**21.** При каких условиях метод половинного деления всегда находит корень

 уравнения f(x)=0?

**22.** Что означает термин - «метод расходится»?

**23.** Какой метод решения нелинейного уравнения обладает квадратичной

 сходимостью?

**24.** Каково правило выбора итерирующей функции при использовании метода

 итераций?

**25.** Что принимается за начальное приближение в методе итерации?

**26.** Каково правило выбора неподвижной точки при использовании метода

 хорд?

**27.** Какое значение выбирается в качестве начального приближения в методе

 хорд?

**28.** Почему необходим этап отделения корней?

**29.** При каких условиях метод хорд позволяет вычислить отделенный корень с

 заданной погрешностью?

**30.** Для каких функций не рекомендуется применять метод Ньютона?

**31.** Что можно сказать о методе итерации, если на заданном отрезке имеются

 два корня?

**32.** Как могут осуществляться итерации приближения к корню в процессе

 решения уравнения методом простой итерации?

**33.** Какой метод решения нелинейного уравнения обладает свойством

 «самокоррекции»?

**34.** Что относится к способам улучшения сходимости метода простой

 итерации?