

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Кузбасский государственный технический университет  
имени Т.Ф. Горбачева»

Кафедра информационных и автоматизированных  
производственных систем

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Методические указания к лабораторной работе по дисциплине  
"Информационная теория управления" для студентов  
направления подготовки бакалавров 230400.62  
"Информационные системы и технологии"  
профиль "Информационные системы и технологии"

Составители Г. А. Алексеева  
И. В. Чичерин  
И. С. Сыркин

Утверждены на заседании кафедры  
Протокол № от

Рекомендованы к печати  
учебно-методической комиссией  
направления подготовки бакалавров  
230400.62  
Протокол № от

Электронная копия находится  
в библиотеке главного корпуса  
ГУ КузГТУ

Кемерово 2012

## 1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы – изучение методов построения математических моделей элементов и систем автоматического управления (САУ) во временной и частотной области и приобретение практических навыков в построении, преобразовании и упрощении структурных схем и в получении математических моделей САУ.

## 2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Исчерпывающим математическим описанием элементов и САУ являются дифференциальные уравнения во временной области и передаточные функции в частотной области. В работе рассматриваются только линейные САУ, которые описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Для элемента (системы) с одним входом и одним выходом дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = \\ = b_0 v^{(m)}(t) + b_1 v^{(m-1)}(t) + \dots + b_{m-1} v'(t) + b_m v(t) \end{aligned}, \quad (2.1)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$  – коэффициенты дифференциального уравнения;

$v(t)$  – входная переменная элемента (системы);

$y(t)$  – выходная переменная элемента (системы).

### 2.1 Получение передаточной функции по дифференциальному уравнению

Передаточные функции элементов (САУ) получают на основе операторного метода, который базируется на преобразовании Лапласа. Преобразование Лапласа задаётся интегралом вида:

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt, \quad (2.2)$$

Интеграл Лапласа (2.2) устанавливает соответствие между функциями действительной переменной  $t$  ( $x(t)$ ) и функциями комплексной переменной  $p$  ( $X(p)$ ).

$$p = \sigma + j\omega, \quad (2.3)$$

где  $j$  – мнимая единица,  $j = \sqrt{-1}$ ;

$\omega$  – круговая частота.

Функция  $x(t)$  называется оригиналом, а функция  $X(p)$  её изображением по Лапласу.

Из основных свойств преобразования Лапласа в работе используются следующие:

– свойство линейности:

$$а) \ x(t) = ax_1(t) \rightarrow X(p) = aX_1(p), \quad (2.4)$$

$$б) \ x_1(t) \pm x_2(t) \rightarrow X_1(p) \pm X_2(p); \quad (2.5)$$

– свойство дифференцирования оригинала:

$$L\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = p^n X(p), \quad (2.6)$$

– свойство интегрирования оригинала:

$$L\left\{\int_0^t x(t)dt\right\} = \frac{X(p)}{p}, \quad (2.7)$$

– теорема запаздывания:

$$L\{x(t - \tau)\} = e^{-p\tau} X(p), \quad (2.8)$$

где  $\tau$  – время чистого запаздывания.

Передаточной функцией  $W(p)$  называется отношение изображения по Лапласу выходной переменной к изображению по Лапласу входной переменной при нулевых начальных условиях, т. е.

$$W(p) = \frac{Y(p)}{V(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}, \quad (2.9)$$

Выражение (2.9) показывает, что передаточная функция САУ является правильной дробно-рациональной функцией, у ко-

торой  $m \leq n$ . Для отдельных элементов САУ это условие может не выполняться.

Для получения передаточной функции исходное дифференциальное уравнение (2.1) записывается в операторной форме с учётом свойств преобразования Лапласа, т. е. выражение (2.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} a_0 p^n Y(p) + a_1 p^{n-1} Y(p) + \dots + a_{n-1} p Y(p) + a_n Y(p) = \\ = b_0 p^m V(p) + b_1 p^{m-1} V(p) + \dots + b_{m-1} p V(p) + b_m V(p) \end{aligned}, \quad (2.10)$$

После этого изображения переменных выносятся за скобки, т. е.

$$\begin{aligned} Y(p)(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) = \\ = V(p)(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) \end{aligned}, \quad (2.11)$$

Передаточная функция  $W(p)$  (2.9) получается делением полинома правой части в формуле (2.11) на полином левой части.

Получение дифференциального уравнения по передаточной функции  $W(p)$  осуществляется в обратной последовательности.

## 2.2 Структурные схемы систем автоматического управления

Структурная схема – это графическое изображение системы, отображающее системы дифференциальных уравнений, описывающих процессы, протекающие в системе. Основными элементами структурной схемы САУ являются динамическое звено, суммирующее звено (сумматор) и узел.

Динамическое звено представляет собой математическую модель элемента системы (или части сложного элемента), которая отображает его динамические свойства, а не физическую сущность происходящих в них процессов. Динамическое звено является звеном однонаправленного действия, т. е. воздействия передаются только в одном направлении от входа к выходу и имеет по одной входной и выходной переменных.

Динамическое звено на структурной схеме изображается в виде прямоугольника (рисунок 2.1), внутри которого записывает-

ся передаточная функция. Изображение выходной переменной динамического звена определяется по выражению:

$$X_2(p) = W(p)X_1(p). \quad (2.12)$$

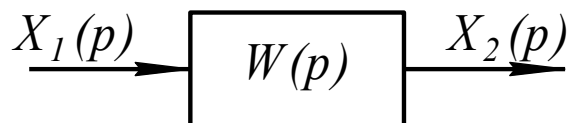


Рисунок 2.1 – Динамическое звено

Сумматор предназначен для суммирования (вычитания) нескольких переменных. Изображается в виде окружности, разделённой на сектора (рисунок 2.2). При этом используются два способа указания знака слагаемых. В первом случае отрицательные слагаемые отмечаются знаком «-» у острия стрелки (рисунок 2.2а), а во втором закрашивание сектора черным цветом, к которому подходит стрелка (рисунок 2.2б). В работе рекомендуется использовать второй способ.

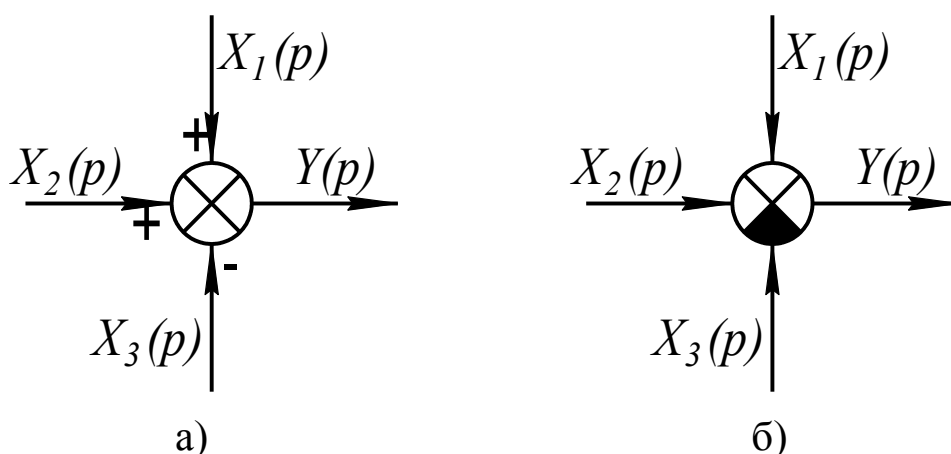


Рисунок 2.2 – Сумматор

Выходная переменная сумматора, представленного на рисунке 2.2 определяется по формуле:

$$Y(p) = X_1(p) + X_2(p) - X_3(p). \quad (2.13)$$

Узел (точка разветвления) изображается на структурной схеме в виде точки (рисунок 2.3). Всем отходящим от узла стрелкам соответствует одна и та же величина.

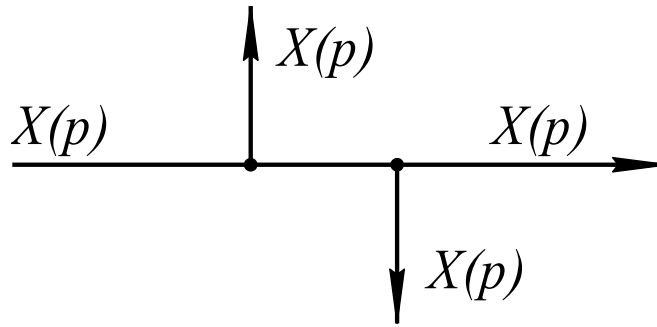


Рисунок 2.3 – Узел

Связи на структурных схемах изображаются стрелками, отходящими от узлов или выходов и подходящими к сумматорам или входам.

Общие правила составления структурных схем:

1. Структурная схема обязательно должна иметь входные и выходные внешние переменные (связи), задаваемые из физических соображений.
2. Каждая входная переменная является независимой функцией и должна иметь только один вход в структурную схему.
3. Выходная переменная может замыкаться внутри структурной схемы и иметь выход в виде ответвления или не замыкаться внутри структурной схемы.
4. Все внутренние связи, определяемые системой должны обязательно иметь входы и выходы.

Структурные схемы получаются либо на основе функциональных схем САУ и математических моделей функциональных элементов, либо только из математических моделей (системы дифференциальных уравнений) САУ.

### *2.2.1 Построение структурной схемы по системе дифференциальных уравнений САУ*

Последовательность построения структурной схемы по исходной системе дифференциальных уравнений:

1. Для каждого уравнения системы условно выбираются входные и выходные переменные. Каждое уравнение имеет только одну выходную переменную, а входных может быть и несколько. При выборе входных и выходных переменных уравнения учитываются следующие рекомендации:

- входные переменные системы являются входными во всех уравнениях, где они встречаются;
- выходная переменная системы может быть выходной только в одном уравнении;
- промежуточные переменные могут быть выходными только в одном уравнении;
- в качестве выходной рекомендуется выбирать переменную, имеющую старшую производную.

2. Исходная система дифференциальных уравнений записывается в операторной форме на основе преобразования Лапласа с учётом его свойств.

3. Для каждого уравнения строится его графическое изображение. Построение начинается с изображения сумматора и указания его входных и выходных переменных.

4. Структурная схема системы строится как совокупность графических изображений отдельных уравнений, путём исключения промежуточных переменных.

Пример построения структурной схемы по системе дифференциальных уравнений приведён в разделе 3.

### 2.2.2 Построение структурной схемы по функциональной схеме

Пример функциональной схемы САУ приведён на рисунке 2.4. На функциональной схеме приводятся математические модели функциональных элементов (усилителей, регуляторов, объектов управления и т.д.) в форме дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

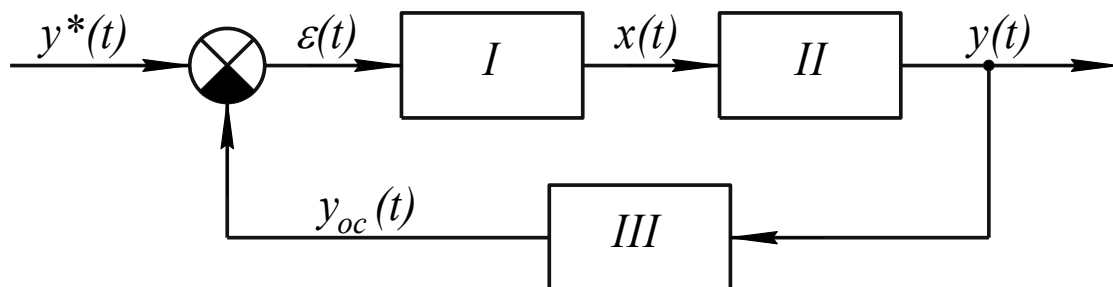


Рисунок 2.4 – Функциональная схема САУ

Для перехода от функциональной к структурной схеме необходимо:

- получить передаточные функции элементов системы на основе и с учётом свойств преобразования Лапласа;
- входные и выходные переменные САУ заменяются их изображениями по Лапласу;
- промежуточные переменные (за редким исключением) не приводятся на структурной схеме.

Структурная схема, соответствующая функциональной схеме на рисунке 2.4 приведена на рисунке 2.5.

Структурные схемы САУ используются для получения математических моделей (передаточных функций) САУ на основе передаточных функций отдельных элементов системы.

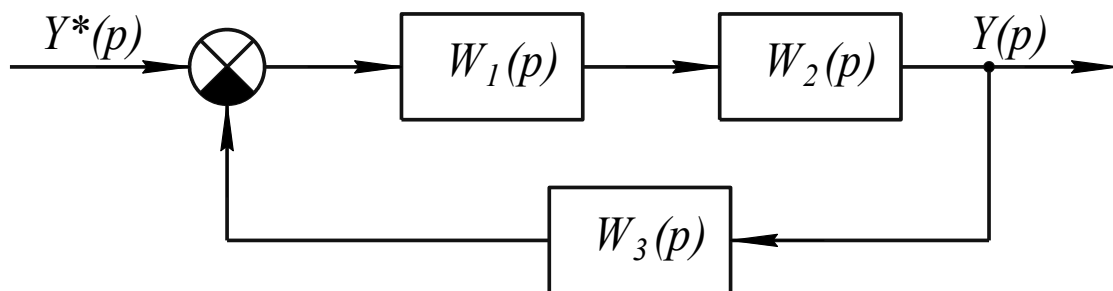


Рисунок 2.5 – Структурная схема САУ

### 2.3 Типовые структуры связей между элементами системы

К типовым структурам связей между элементами САУ относятся последовательное и параллельное соединения, а также соединение с обратной связью.

Последовательное соединение звеньев приведено на рисунке 2.6.

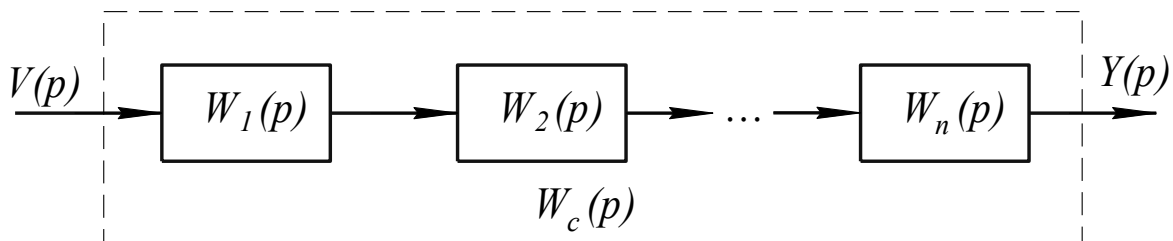


Рисунок 2.6 – Последовательное соединение звеньев.

Передаточная функция последовательного соединения звеньев, определяемая по формуле:



$$W_c(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p). \quad (2.14)$$

Изображение по Лапласу выходной переменной определяется как произведение передаточной функции на изображение по Лапласу входной переменной:

$$Y(p) = W_c(p)V(p). \quad (2.15)$$

Параллельное соединение звеньев приведено на рисунке 2.7, а передаточная функция параллельного соединения звеньев, определяется по формуле 2.16.

$$W_c(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p). \quad (2.16)$$

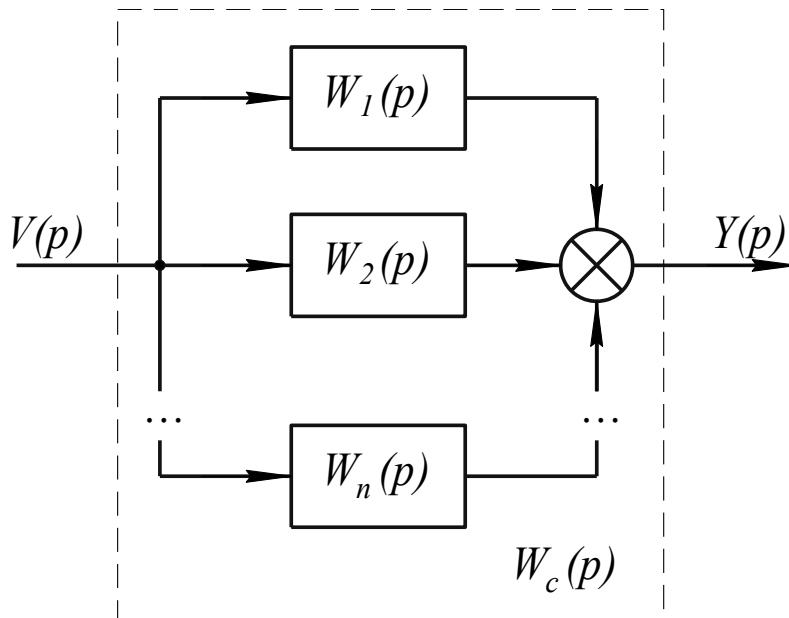


Рисунок 2.7 – Параллельное соединение звеньев

Передаточная функция соединения с положительной обратной связью (рисунок 2.8) определяется по следующей формуле:

$$W_c(p) = \frac{W_p(p)}{1 - W_{oc}(p)W_p(p)}, \quad (2.17)$$

где  $W_p(p)$  – передаточная функция разомкнутой части системы;

$W_{oc}(p)$  – передаточная функция цепи обратной связи.

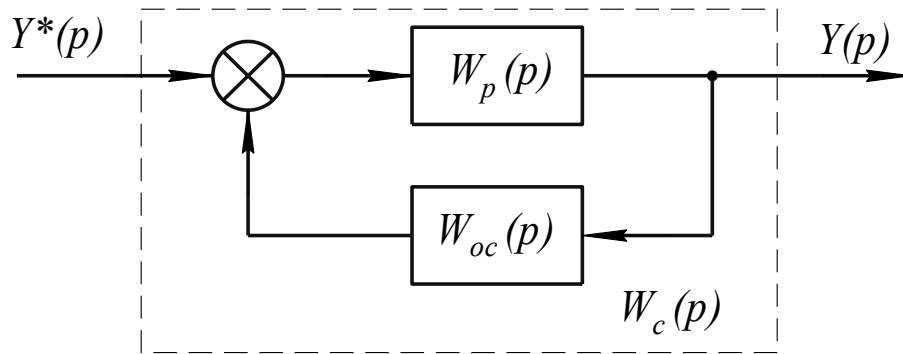


Рисунок 2.8 – Соединение звеньев с положительной обратной связью

Передаточная функция соединения с отрицательной обратной (рисунок 2.9):

$$W_c(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_{oc}(p)W_p(p)}. \quad (2.18)$$

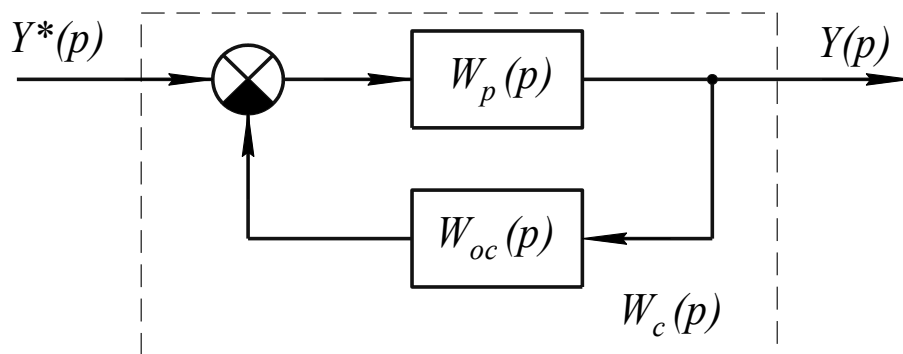


Рисунок 2.9 – Соединение звеньев с отрицательной обратной связью

Типовые соединения звеньев используются для получения передаточных функций САУ. При сложных структурах используются правила эквивалентных преобразований структурных схем с целью их упрощения и сведения к типовым соединениям.

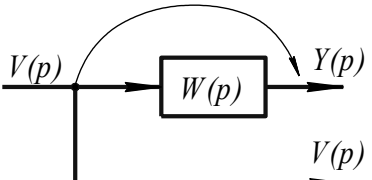
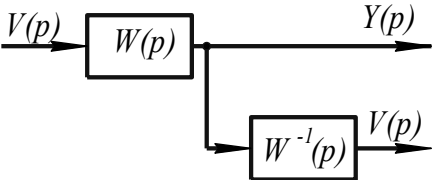
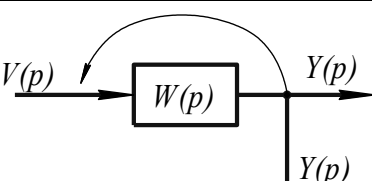
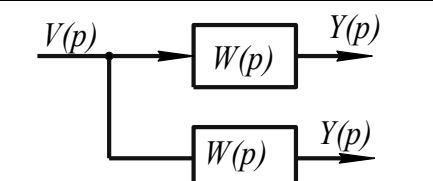
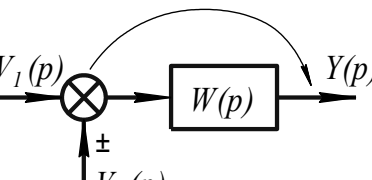
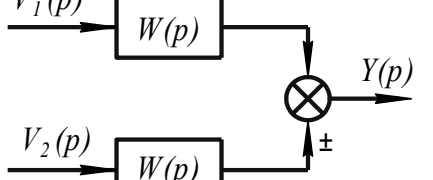
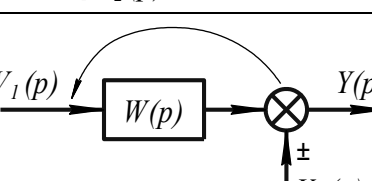
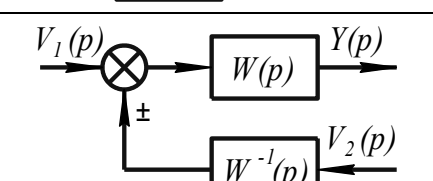
## 2.4 Преобразование структурных схем

Преобразования структурных схем состоят в изменении взаимного расположения элементов схемы (звеньев, узлов, сумматоров) таким образом, чтобы, не изменяя входных и выходных величин преобразуемого участка схемы, изменить (упростить) характер соединения звеньев. При этом полученная структурная

схема будет эквивалентна исходной, если в ней указанные величины будут иметь такую же зависимость от внешних воздействий, как в исходной. Правила эквивалентных преобразований структурных схем приведены в таблице 2.1, где стрелками показано направление переноса.

Правила эквивалентных преобразований структурных схем, приведённые в таблице 2.1, являются основными и достаточными для преобразования любых схем. Аппарат эквивалентных преобразований требует практических навыков при его использовании, так как готовых решений при преобразовании структурных схем не существует.

Таблица 2.1 – Правила эквивалентных преобразований структурных схем.

№ по порядку	Преобразование	Структурная схема	
		исходная	эквивалентная
1	Перенос узла через звено		
			
2	Перенос сумматора через звено		
			

Продолжение таблицы 2.1

№ по порядку	Преобразования	Структурная схема	
		исходная	эквивалентная
3	Перенос узла через сумматор		
4	Перестановка звеньев		
5	Перестановка узлов		
6	Перестановка сумматоров		

### 3 ПРИМЕРЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ, ПОСТРОЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ

Пример 1. Получить передаточную функцию элемента, описываемого интегро-дифференциальным уравнением

$$T_1 \frac{dy(t)}{dt} + T_2 \int_0^t y(t) dt = kv(t). \quad (3.1)$$

*Решение:*

В соответствии со свойством дифференцирования преобразования Лапласа (2.6) имеем, что

$$L\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = p^n X(p),$$

а со свойством интегрирования (2.7)

$$L\left\{\int_0^t x(t) dt\right\} = \frac{X(p)}{p}.$$

Тогда уравнение (3.1) в операторной форме имеет вид

$$T_1 p Y(p) + T_2 \frac{Y(p)}{p} = kV(p).$$

После преобразования получим следующее уравнение

$$T_1 p^2 Y(p) + T_2 Y(p) = kpV(p)$$

или

$$(T_1 p^2 + T_2) Y(p) = kpV(p).$$

Тогда передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{Y(p)}{V(p)} = \frac{kp}{T_1 p^2 + T_2}. \quad (3.2)$$

Пример 2. Получить дифференциальное уравнение элемента системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{\tau_1 p + \tau_2}{T_1 p^2 + T_2 + 1}. \quad (3.3)$$

*Решение:*

Так как

$$W(p) = \frac{Y(p)}{V(p)},$$

то можно записать, что

$$Y(p) = W(p)V(p) = \frac{\tau_1 p + \tau_2}{T_1 p^2 + T_2 p + 1} V(p). \quad (3.4)$$

Умножим левую и правую часть выражения (3.4) на знаменатель в правой части. В итоге имеем что

$$Y(p)(T_1 p^2 + T_2 p + 1) = V(p)(\tau_1 p + \tau_2).$$

Раскрыв скобки, получим уравнение в операторной форме

$$T_1 p^2 Y(p) + T_2 p Y(p) + Y(p) = \tau_1 p V(p) + \tau_2 V(p). \quad (3.5)$$

Перейдя во временную область с учётом свойства дифференцирования оригинала (2.5) получим следующее дифференциальное уравнение

$$T_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \tau_1 \frac{dv(t)}{dt} + \tau_2 v(t). \quad (3.6)$$

Пример 3. Построить структурную схему двигателя постоянного тока с независимым возбуждением при управлении по цепи якоря (рис. 3.1), описываемого системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{я}}(t) &= C_E \omega_{\text{Д}}(t) + R_{\text{я}} i_{\text{я}}(t) + L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}(t)}{dt} \\ M_{\text{Д}}(t) &= M_{\text{С}}(t) + F_{\text{С}} \omega_{\text{Д}}(t) + J \frac{d\omega_{\text{Д}}(t)}{dt} \\ M_{\text{Д}}(t) &= C_M i_{\text{я}}(t) \end{aligned} \right\}, \quad (3.7)$$

где  $u_{\text{я}}(t)$  – напряжение, приложенное к цепи якоря;

$i_{\text{я}}(t)$  – ток в цепи якоря;

$R_{\text{я}}, L_{\text{я}}$  – активное сопротивление и индуктивность цепи якоря;

$C_E$  – коэффициент Э.Д.С. двигателя;  
 $\omega_D(t)$  – угловая скорость вращения ротора двигателя;  
 $M_D(t)$  – вращающий момент двигателя;  
 $C_M$  – коэффициент момента двигателя;  
 $M_C(t)$  – момент сопротивления от сил сухого трения;  
 $F_C$  – коэффициент вязкого трения;  
 $J$  – момент инерции вращающихся частей.

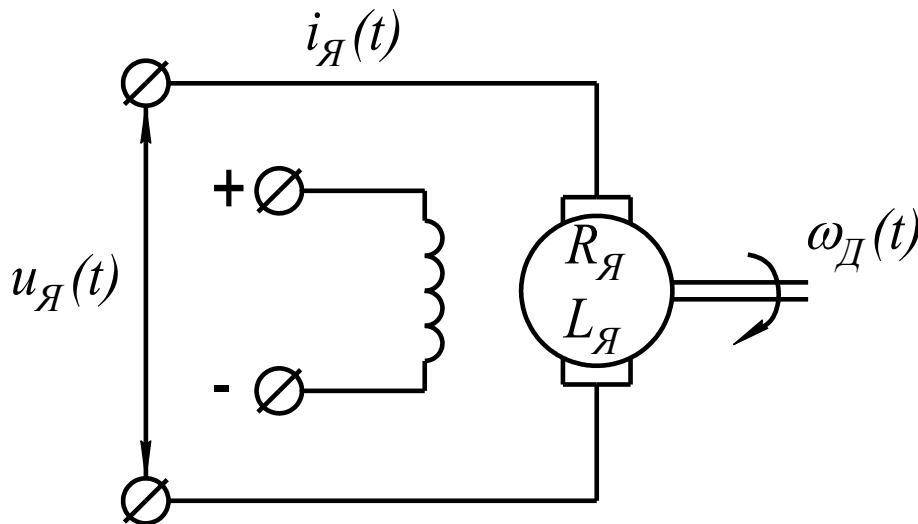


Рисунок 3.1 – Схема двигателя постоянного тока

*Решение:*

1. Выделим условно входные и выходные переменные в каждом уравнении:

*Первое уравнение:* Так как старшую производную содержит переменная  $i_Я(t)$ , то она и будет выходной. Входные переменные  $u_Я(t)$  (входная переменная всей системы) и  $\omega_D(t)$ .

*Второе уравнение:* В этом уравнении выходной переменной будет  $\omega_D(t)$  (выходная переменная системы), т. к. она не является выходной в первом уравнении. Соответственно входными переменными будут  $i_Я(t)$  и  $M_C(t)$  (вторая входная переменная системы).

2. Запишем уравнения (3.7) в операторной форме:

$$\left. \begin{aligned} U_Я(p) &= C_E \omega_D(p) + R_Я I_Я(p) + L_Я p I_Я(p) \\ C_M I_Я(p) &= M_C(p) + F_C \omega_D(p) + J p \omega_D(p) \end{aligned} \right\}, \quad (3.8)$$

так как

$$M_D(p) = C_M I_Я(p).$$

3. Разрешим эти уравнения относительно изображений по Лапласу выходных переменных со старшей производной. В итоге имеем:

$$\left. \begin{aligned} L_{\text{Я}} p I_{\text{Я}}(p) &= U_{\text{Я}}(p) - C_E \omega_{\text{Д}}(p) - R_{\text{Я}} I_{\text{Я}}(p) \\ J p \omega_{\text{Д}}(p) &= C_M I_{\text{Я}}(p) - M_C(p) - F_C \omega_{\text{Д}}(p) \end{aligned} \right\}. \quad (3.9)$$

4. Строим графические изображения каждого уравнения, при этом основная входная переменная всегда изображается слева, а выходные переменные справа. Графическое изображение первого уравнения приведено на рисунке 3.2, а второго уравнения на рисунке 3.3.

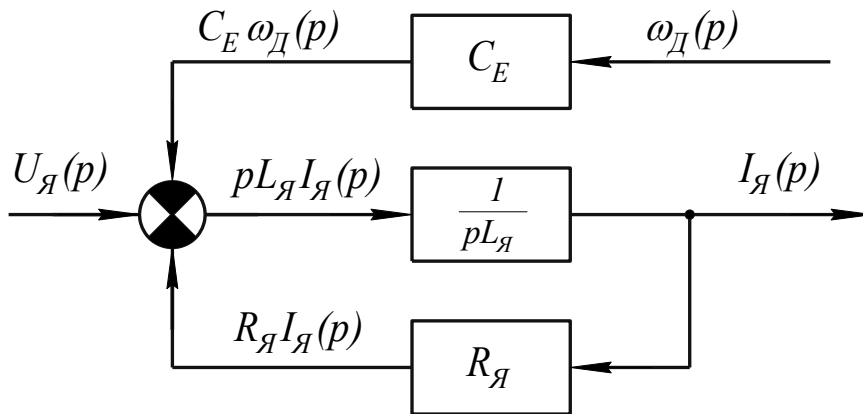


Рисунок 3.2 – Графическое изображение первого уравнения

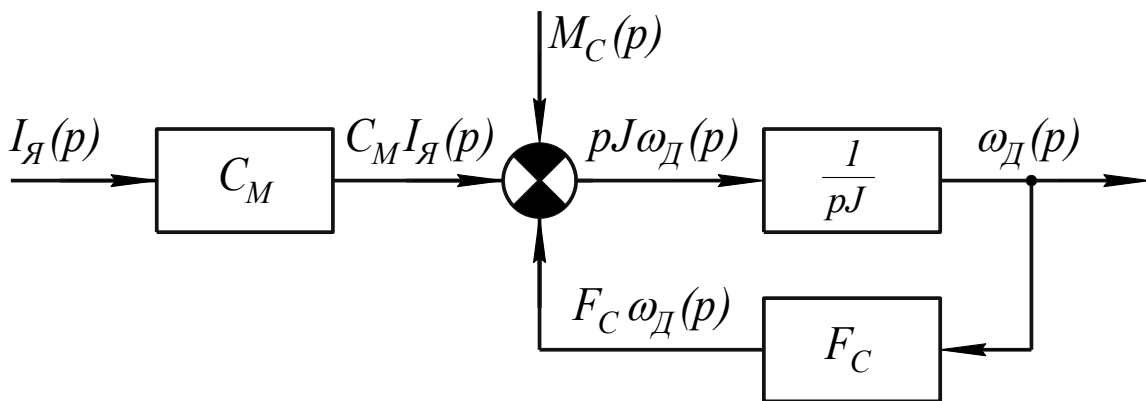


Рисунок 3.3 – Графическое изображение второго уравнения

5. Строим структурную схему системы, исключив промежуточные переменные. Структурная схема данной системы приведена на рисунке 3.4.



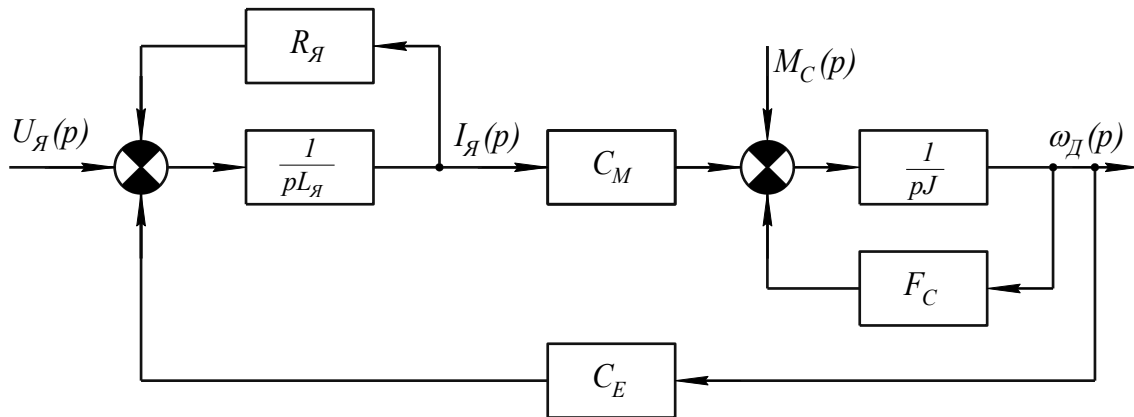


Рисунок 3.4 – Структурная схема двигателя постоянного тока

Пример 4. Построить структурную схему по функциональной схеме, приведённой на рисунке 3.5, где элементы I и II описываются дифференциальными уравнениями:

$$\text{I)} \quad T_1 x_1'(t) + x_1(t) = \tau_1 \varepsilon(t);$$

$$\text{II)} \quad T_2 y''(t) + y(t) = \tau_2 x_2(t).$$

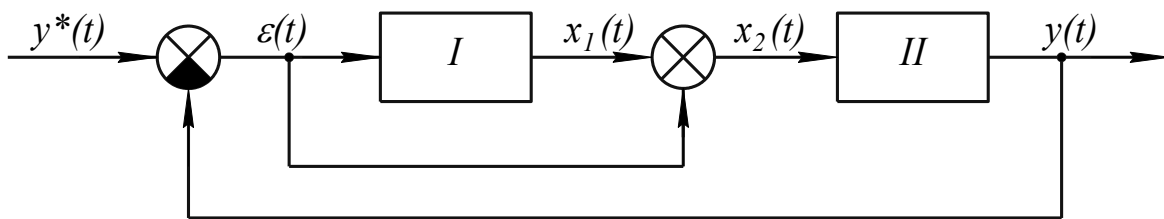


Рисунок 3.5 – Функциональная схема САУ

*Решение:*

Получим передаточные функции элементов:

Первый элемент:

$$T_1 p X_1(p) + X_1(p) = \tau_1 p \varepsilon(p).$$

$$X_1(p)(T_1 p + 1) = \tau_1 p \varepsilon(p).$$

Отсюда, передаточная функция первого элемента

$$W_1(p) = \frac{X_1(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{\tau_1 p}{T_1 p + 1}. \quad (3.11)$$

Второй элемент:

$$T_2 p^2 Y(p) + Y(p) = \tau_2 X_2(p).$$

$$Y(p)(T_2 p^2 + 1) = \tau_2 X_2(p)$$

Тогда передаточная функция второго элемента имеет вид

$$W_2(p) = \frac{Y(p)}{X_2(p)} = \frac{\tau_2}{T_2 p^2 + 1}. \quad (3.12)$$

Структурная схема САУ, полученная по функциональной схеме (рис. 3.5) приведена на рисунке 3.6.

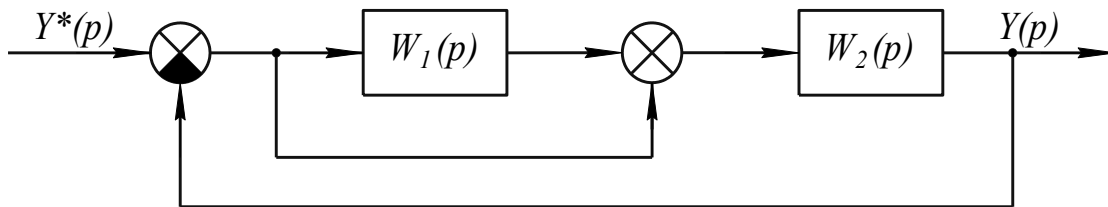


Рисунок 3.6 – Структурная схема САУ

Сопоставляя схемы на рисунках 3.5 и 3.6 делаем вывод, что структуры у них одинаковые, а отличие состоит в математических моделях элементов (дифференциальные уравнения и передаточные функции) и в переменных (оригиналы и их изображения по Лапласу).

Пример 5. Получить передаточную функцию и дифференциальное уравнение САУ, приведённый на рисунке 3.6.

*Решение:*

Для получения передаточной функции САУ воспользуемся правилами получения передаточных функций для типовых соединений звеньев. Выделим на структурной схеме САУ контур I (рис. 3.7), представляющий собой параллельное соединение, передаточная функция которого, определяется по выражению:

$$W_I(p) = W_1(p) + 1 = \frac{\tau_1 p}{T_1 p + 1} = \frac{\tau_1 p + T_1 p + 1}{T_1 p + 1} = \frac{(\tau_1 + T_1)p + 1}{T_1 p + 1}.$$

И так

$$W_I(p) = \frac{(\tau_1 + T_1)p + 1}{T_1 p + 1}. \quad (3.13)$$

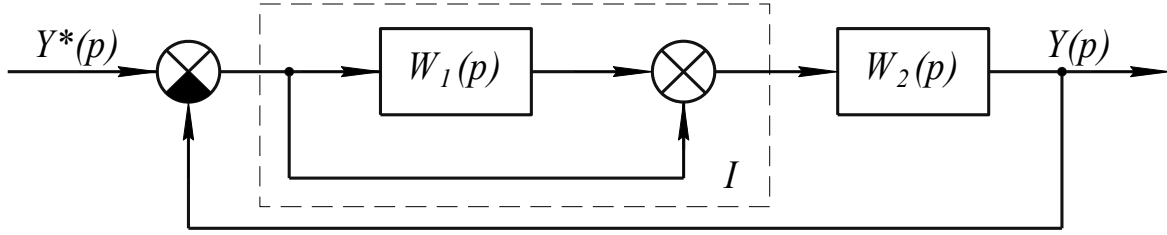


Рисунок 3.7 – Структурная схема САУ с выделенным контуром параллельного соединения.

Тогда структурная схема САУ примет вид представленный на рисунке 3.8, где контур II представляет собой последовательное соединение с передаточной функцией:

$$W_{II}(p) = W_I(p)W_2(p) = \frac{(\tau_1 + T_1)p + 1}{T_1 p + 1} \cdot \frac{\tau_2}{T_2 p + 1} = \frac{\tau_2(\tau_1 + T_1)p + \tau_2}{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + T_1 p + 1}$$

Передаточная функция  $W_{II}(p)$  называется передаточной функцией разомкнутой части системы и обозначается  $W_p(p)$ :

$$W_p(p) = W_{II}(p) = \frac{\tau_2(\tau_1 + T_1)p + \tau_2}{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + T_1 p + 1}. \quad (3.14)$$

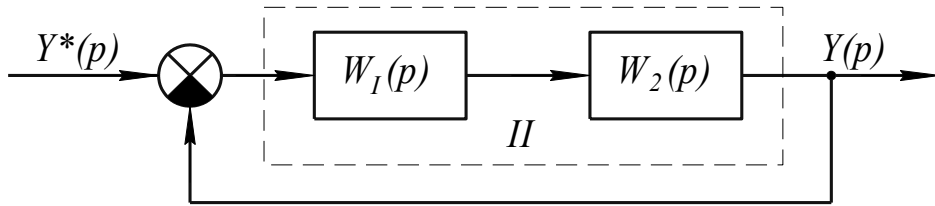


Рисунок 3.8 – Структурная схема САУ с выделенным контуром последовательного соединения.

В итоге получена упрощенная структурная схема САУ, приведённая на рисунке 3.9, которая представляет собой типовое соединение с единичной отрицательной обратной связью. Тогда передаточная функция системы в соответствии с выражением (2.18) принимает вид:

$$W_c(z) = \frac{Y(p)}{Y^*(p)} = \frac{W_p(p)}{1 + 1 \cdot W_p(p)} = \frac{\frac{\tau_2(\tau_1 + T_1)p + \tau_2}{T_1 T_2 p^3 + T_2 p^2 + T_1 p + 1}}{1 + \frac{\tau_2(\tau_1 + T_1)p + \tau_2}{T_1 T_2 p^3 + T_2 p^2 + T_1 p + 1}}.$$

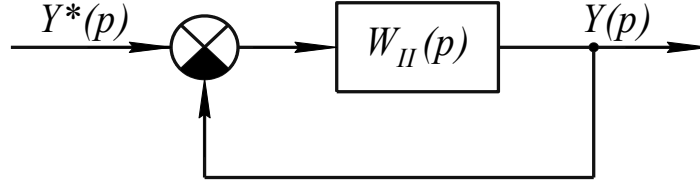


Рисунок 3.9 – Упрощенная структурная схема САУ

После преобразования имеем, что

$$W_c(p) = \frac{\tau_2(\tau_1 + T_1)p + \tau_2}{T_1 T_2 p^3 + T_2 p^2 + (\tau_2(\tau_1 + T_1) + T_1)p + 2}. \quad (3.15)$$

Для получения дифференциального уравнения САУ запишем уравнение связи выходной переменной с входной, т. е.

$$Y(p) = W_c(p)Y^*(p). \quad (3.16)$$

Тогда

$$Y(p) = \frac{b_0 p + b_1}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}, \quad (3.17)$$

где

$$b_0 = \tau_2(\tau_1 + T_1); \quad b_1 = \tau_2;$$

$$a_0 = T_1 T_2; \quad a_1 = T_2; \quad a_2 = \tau_2(\tau_1 + T_1) + T_1; \quad a_3 = 2.$$

Умножив левую и правую части выражения (3.17) на знаменатель, получим уравнение САУ в операторной форме

$$\begin{aligned} a_0 p^3 Y(p) + a_1 p^2 Y(p) + a_2 p Y(p) + a_3 Y(p) = \\ = b_1 p Y^*(p) + Y^*(p) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Тогда с учётом свойства дифференцирования (2.6) дифференциальное уравнение САУ примет вид:

$$\begin{aligned}
 T_1 T_2 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + T_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (\tau_2(\tau_1 + T_1) + T_1) \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \\
 = \tau_2(\tau_1 + T_1) \frac{dy^*(t)}{dt} + \tau_2 y^*(t)
 \end{aligned}
 \quad (3.19)$$

**Пример 6.** Получить передаточную функцию САУ с использованием эквивалентных преобразований структурной схемы. Структурная схема САУ приведена на рисунке 3.10.

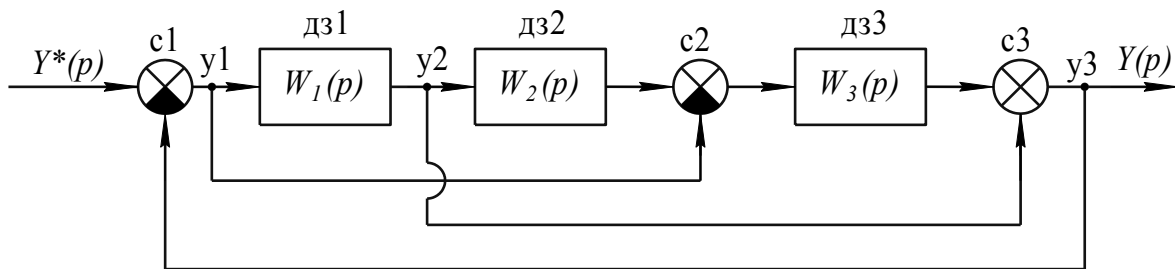


Рисунок 3.10 – Структурная схема САУ с перекрёстными связями

*Решение:*

Наличие перекрёстных связей не позволяет применить здесь правила нахождения передаточных функций для типовых соединений. Для этого необходимо с помощью эквивалентных преобразований привести схему на рисунке 3.10 к типовым соединениям звеньев.

Перенесём узел y2 через звено dz1 против направления движения сигнала. Тогда схема примет вид представленный на рисунке 3.11.

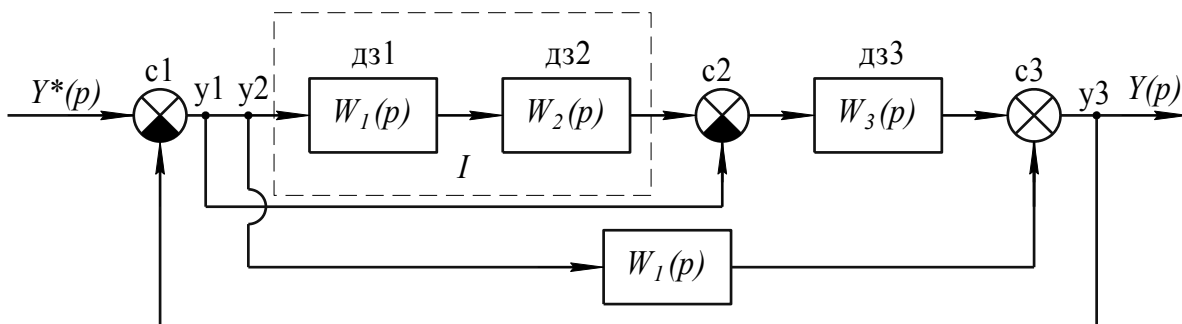


Рисунок 3.11 – Структурная схема САУ после первого этапа преобразования.

Полученное последовательное соединение звеньев заменим эквивалентной передаточной функцией

$$W_I(p) = W_1(p)W_2(p). \quad (3.20)$$

Переставив узлы  $y_1$  и  $y_2$  местами получим следующую структурную схему приведенную на рисунке 3.12.

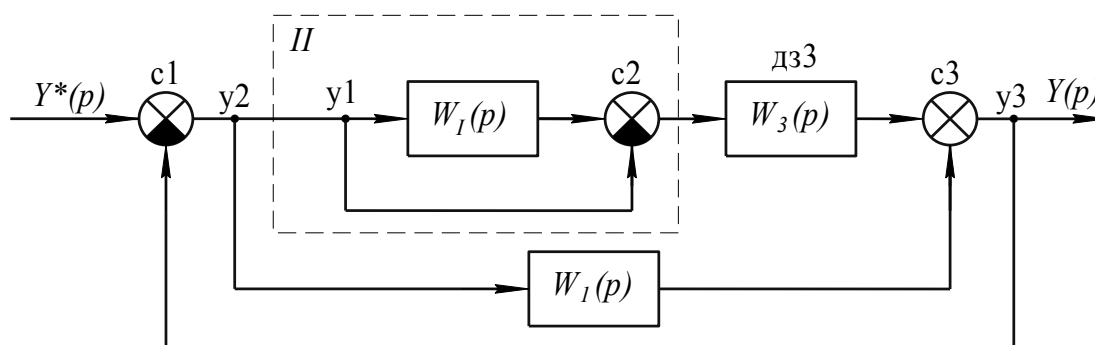


Рисунок 3.12 – Структурная схема САУ после второго этапа преобразования.

Заменив выделенный контур, представляющий собой параллельное соединение, эквивалентным звеном  $W_{II}(p)$  получим структурную схему на рисунке 3.13.

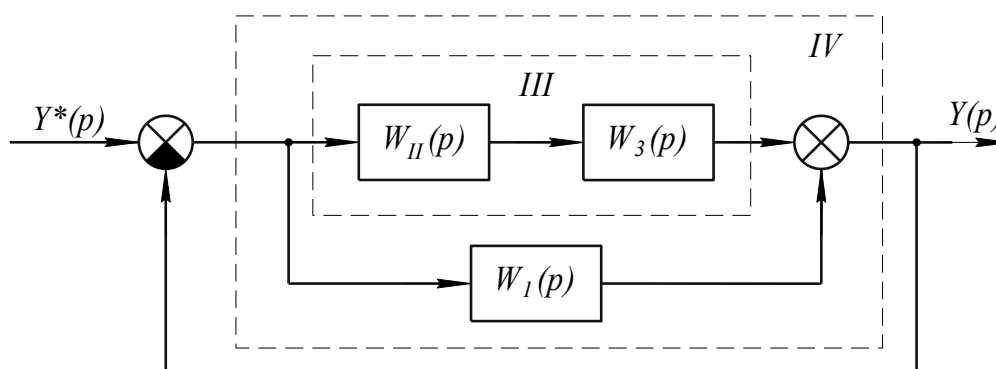


Рисунок 3.13 – Структурная схема САУ после третьего этапа преобразования.

$$W_{II}(p) = W_I(p) - 1 = W_1(p)W_2(p) - 1. \quad (3.21)$$

Заменив внутренний контур III эквивалентным звеном (последовательное соединение) получим

$$W_{III}(p) = W_{II}(p)W_3(p) = W_3(p)(W_1(p)W_2(p) - 1). \quad (3.22)$$

Второй контур IV (параллельное соединение) заменим звеном с передаточной функцией

$$W_p(p) = W_{III}(p) + W_1(p) = W_1(p) + W_3(p)(W_1(p)W_2(p) - 1), \quad (3.23)$$

где  $W_p(p)$  – передаточная функция разомкнутой части САУ.

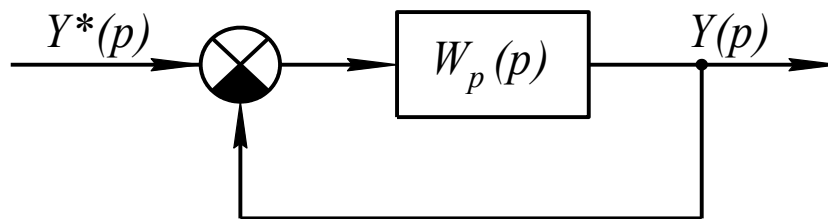


Рисунок 3.14 – Упрощенная структурная схема САУ

Упрощённая структурная схема САУ приведена на рисунке 3.14 и представляет соединение с обратной связью, передаточная функция которого определяется следующим образом:

$$W_c(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{W_1(p) + W_3(p)(W_1(p)W_2(p) - 1)}{1 + W_1(p) + W_3(p)(W_1(p)W_2(p) - 1)}. \quad (3.24)$$

#### 4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с методами получения передаточных функций, построения, преобразования и упрощения структурных схем.

2. Построить структурные схемы системы по заданным системам дифференциальных уравнений, приведённым в таблице 4.1, в соответствии с вариантом, указанным преподавателем.

Таблица 4.1 – Системы дифференциальных уравнений

№ варианта	Переменные		Системы дифференциальных уравнений
	входные	выходные	
1	$x(t)$	$y(t)$	$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = k_1 x(t) - k_2 x_{oc1}(t) + k_3 x_{oc2}(t); \\ c_1 \frac{dx_{oc1}(t)}{dt} + c_2 x_{oc1}(t) = c_3 \frac{dy(t)}{dt}; \\ x_{oc2}(t) = \frac{1}{T} \int_0^t y(t) dt. \end{cases}$
2	$v_1(t)$ $v_2(t)$	$y(t)$	$\begin{cases} a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = \\ = b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t); \\ c_0 \frac{dx_1(t)}{dt} + c_1 x_1(t) = k_1 \frac{dy(t)}{dt} + k_2 v_1(t); \\ c_2 \frac{dx_2(t)}{dt} = k_3 \frac{dv_2(t)}{dt} - k_4 v_1(t). \end{cases}$
3	$u_1(t)$	$u_2(t)$	$\begin{cases} R_1 c_1 \frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t) = c_1 \frac{du_1(t)}{dt}; \\ R_2 c_2 \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) = c_2 \frac{du_1(t)}{dt}; \\ c_2 \frac{du_2(t)}{dt} = i_2(t) - R_1 c_2 \frac{di_1(t)}{dt}. \end{cases}$
4	$v_1(t)$ $v_2(t)$	$y(t)$	$\begin{cases} a_0 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} = b_0 \frac{dx(t)}{dt} + b_1 v_1(t); \\ c_0 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} - c_1 \frac{dx(t)}{dt} + c_2 x(t) = k \frac{dv_2(t)}{dt}. \end{cases}$



Продолжение таблицы 4.1

№ вариан-та	Переменные		Системы дифференциальных уравнений
	вход-ные	выход-ные	
5	$\omega^*(t)$ $M_H(t)$	$\omega(t)$	$\begin{cases} T_0 \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = k_0 y(t) - k_1 M_H(t); \\ T_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \\ = k_2 (\omega^*(t) - \omega(t)); \\ \frac{dy(t)}{dt} = k_3 x(t). \end{cases}$
6	$v_1(t)$ $v_2(t)$	$y(t)$	$\begin{cases} a_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_0 x(t) + k_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + v_1(t); \\ c_0 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c_1 \frac{dx(t)}{dt} + c_2 x(t) = \\ = k_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + k_3 \frac{dv_2(t)}{dt}. \end{cases}$
7	$v(t)$	$y_1(t)$ $y_2(t)$	$\begin{cases} a_0 \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} = b_0 \frac{dv(t)}{dt} + b_1 v(t) + k_1 x(t); \\ c_0 \frac{d^3 y_2(t)}{dt^3} + c_1 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + c_2 y_2(t) = k_2 v(t); \\ \frac{dx(t)}{dt} = k_3 y_1(t) + k_4 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2}. \end{cases}$
8	$v_1(t)$ $v_2(t)$	$y(t)$	$\begin{cases} a_0 \frac{dx_1(t)}{dt} = k_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + v_1(t); \\ b_0 \frac{dx_2(t)}{dt} = k_2 \frac{dv_2(t)}{dt} + k_3 v_2(t); \\ c_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_4 x_1(t) + k_5 x_2(t). \end{cases}$

Продолжение таблицы 4.1

№ варианта	Переменные		Системы дифференциальных уравнений
	входные	выходные	
9	$v(t)$	$y_1(t)$ $y_2(t)$	$\begin{cases} a_0 \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + a_1 y_1(t) = k_1 x(t) + b_0 \frac{dv(t)}{dt}; \\ x(t) = k_2 y_1(t) - k_3 y_2(t); \\ c_0 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + c_1 \frac{dy_2(t)}{dt} = k_4 \frac{dx(t)}{dt} + b_1 v(t). \end{cases}$
10	$v_1(t)$ $v_2(t)$	$y(t)$	$\begin{cases} y(t) = a_0 \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t) + b_0 \frac{dx_2(t)}{dt}; \\ c_0 \frac{d^3 x_1(t)}{dt^3} = k_1 v_1(t); \\ c_1 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} - c_2 x_2(t) = k_2 \frac{dv_2(t)}{dt} + k_3 v_1(t). \end{cases}$
11	$v(t)$	$y_1(t)$ $y_2(t)$	$\begin{cases} a_0 \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy_1(t)}{dt} + a_2 y_1(t) = b_0 \frac{dv(t)}{dt}; \\ b_1 v(t) + k y_1(t) = \\ = c_0 \frac{d^4 y_2(t)}{dt^4} + c_1 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + c_2 y_2(t). \end{cases}$
12	$v(t)$	$y(t)$	$\begin{cases} a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = \\ = k_0 (x(t) - v(t)); \\ b_0 \frac{dx(t)}{dt} + b_1 x(t) = c_0 \frac{dy(t)}{dt} + c_1 y(t) + \\ + c_2 \frac{dv(t)}{dt} + c_3 v(t). \end{cases}$

Продолжение таблицы 4.1

№ варианта	Переменные		Системы дифференциальных уравнений
	входные	выходные	
13	$v_1(t)$ $v_2(t)$ $v_3(t)$	$y(t)$	$\left\{ \begin{aligned} &a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = \\ &= k_0 \frac{dx_1(t)}{dt} + k_1 x_2(t); \\ &b_0 \frac{dx_1(t)}{dt} + b_1 x_1(t) = c_0 \frac{dv_1(t)}{dt} + \\ &+ c_1 \frac{d^2 v_2(t)}{dt^2} + c_2 v_2(t); \\ &d_0 \frac{dx_2(t)}{dt} + d_1 x_2(t) = \ell_0 \frac{dv_1(t)}{dt} + \\ &+ \ell_1 \frac{dv_2(t)}{dt} - \ell_2 v_3(t). \end{aligned} \right.$
14	$v_1(t)$ $v_2(t)$	$y(t)$	$\left\{ \begin{aligned} &a_0 y(t) = b_0 \frac{dx_1(t)}{dt} + b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t); \\ &c_0 \frac{dx_1(t)}{dt} = k_1 \frac{dy(t)}{dt} + k_2 \frac{dv_1(t)}{dt} + k_3 \frac{dv_2(t)}{dt}; \\ &c_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + c_2 x_2(t) = k_4 v_2(t). \end{aligned} \right.$

3. Построить структурную схему САУ по её функциональной схеме и определить передаточную функцию и дифференциальное уравнение системы по схемам, приведённым в таблице 4.2, дифференциальным уравнениям элементов (таблица 4.3) и значениям коэффициентов (таблица 4.4) в соответствии с заданным вариантом.

Таблица 4.2 – Функциональные схемы

№ варианта	Функциональные схемы
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Продолжение таблицы 4.2

№ варианта	Функциональные схемы
7	
8	
9	
10	
11	
12	

Продолжение таблицы 4.2

№ варианта	Функциональные схемы
13	
14	

Таблица 4.3 – Дифференциальные уравнения элементов системы

Номер варианта	Дифференциальные уравнения
1	$I) \quad T_1 x_1'(t) + x_1(t) = k_1 \varepsilon'(t) + \varepsilon(t);$ $II) \quad T_2 x_2''(t) + T_3 x_2'(t) + x_2(t) = k_2 x_1(t);$ $III) \quad T_4 x_3'(t) + x_3(t) = k_3 x_1(t).$
2	$I) \quad T_1 x'(t) + x(t) = k_1 \varepsilon'(t) + \varepsilon(t);$ $II) \quad T_2 y''(t) + y(t) = k_2 x(t);$ $III) \quad T_3 y_{oc}'(t) = k_3 y(t).$
3	$I) \quad T_1 y_1'(t) = k_1 y(t);$ $II) \quad T_2 y_{oc}''(t) + T_3 y_{oc}'(t) = k_2 \varepsilon'(t) + \varepsilon(t);$ $III) \quad T_4 y_2'(t) = k_3 y_{oc}'(t) + y_{oc}(t).$
4	$I) \quad T_1 y'(t) + y(t) = k_1 \varepsilon(t);$ $II) \quad T_2 y_{oc}'(t) = k_2 \varepsilon_1'(t) + \varepsilon_1(t);$ $III) \quad T_3 y_1'(t) + y_1(t) = k_3 y_{oc}'(t).$

Продолжение таблицы 4.3

Номер варианта	Дифференциальные уравнения
5	$I) \quad T_1 x_1'(t) = k_1 \varepsilon_1(t);$ $II) \quad T_2 x_2''(t) + T_3 x_2'(t) + x_2(t) = k_2 x_1(t);$ $III) \quad T_4 y'(t) + y(t) = k_3 x_2'(t) + k_4 x_2(t).$
6	$I) \quad T_1 x_1''(t) + T_2 x_1'(t) + x_1(t) = k_1 v(t);$ $II) \quad T_3 x_2'(t) + x_2(t) = k_2 \varepsilon(t);$ $III) \quad T_4 x_3''(t) + x_3(t) = k_3 x_1'(t) + x_1(t).$
7	$I) \quad T_1 y_1'(t) + y_1(t) = k_1 v(t);$ $II) \quad T_2 y_2''(t) + T_3 y_2'(t) + y_2(t) = k_2 \varepsilon(t);$ $III) \quad T_4 y_{oc}'(t) = k_3 y_2(t).$
8	$I) \quad T_1 x''(t) + T_2 x'(t) = k_1 \varepsilon'(t) + \varepsilon(t);$ $II) \quad T_3 y(t) = k_2 x'(t) + k_3 x(t);$ $III) \quad T_4 y_{oc}'(t) + y_{oc}(t) = k_4 y_1'(t - \tau).$
9	$I) \quad T_1 x_1'(t) = k_1 \varepsilon_1'(t) + \varepsilon(t);$ $II) \quad T_2 y''(t) + T_3 y'(t) + y(t) = k_2 x_2(t - \tau);$ $III) \quad T_4 y_{oc}'(t) + y_{oc}(t) = k_3 y(t).$
10	$I) \quad T_1 x_1'(t) + T_2 x_1(t) = k_1 \varepsilon_1'(t);$ $II) \quad T_3 y''(t) + y(t) = k_2 x_2'(t) + k_3 x_2(t);$ $III) \quad T_4 x_3'(t) + x_3(t) = k_4 y(t - \tau).$
11	$I) \quad T_1 x_1'(t) + x_1(t) = k_1 \varepsilon_1'(t) + k_2 \varepsilon_1(t);$ $II) \quad T_2 x_2''(t) + x_2(t) = k_3 x_1'(t) + x_1(t);$ $III) \quad T_3 y'(t) = k_4 x_2'(t) + x_2(t).$

Продолжение таблицы 4.3

Номер варианта	Дифференциальные уравнения
12	$I) \quad T_1 x_1'(t) + x_1(t) = k_1 v_1'(t) + v(t);$ $II) \quad x_2(t) = k_3 v_1'(t) + k_4 v(t);$ $III) \quad T_2 x_4''(t) + T_3 x_4'(t) + x_4(t) = k_2 x_1(t).$
13	$I) \quad T_1 x_1'(t) + x_1(t) = k_1 \varepsilon(t - \tau);$ $II) \quad T_2 x_2'(t) + T_3 x_2(t) = k_2 \varepsilon'(t) + \varepsilon(t);$ $III) \quad T_4 x_3''(t) + x_3(t) = k_3 x_2'(t).$
14	$I) \quad T_1 x_1''(t) + x_1'(t) = k_1 \varepsilon'(t);$ $II) \quad T_2 y'(t) + y(t) = x_2(t - \tau);$ $III) \quad T_3 x_{oc}'(t) = k_2 y'(t) + y(t).$

Таблица 4.4 – Значения коэффициентов дифференциальных уравнений

№ варианта	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$\tau$
1	2	0,8	1,2	1,5	0,5	1,4	1,2	—	—
2	0,6	1,6	0,8	—	0,9	1,9	1,7	—	—
3	0,7	2,1	1,6	0,4	1,7	1,2	2,0	—	—
4	2,4	0,5	0,9	—	2,5	1,3	1,7	—	—
5	0,8	1,2	1,4	2,1	0,6	1,9	2,6	1,7	—
6	0,8	1,4	0,9	0,2	2,8	1,6	1,1	—	—
7	2,5	1,7	0,4	0,9	1,9	1,8	1,4	—	—
8	0,5	1,8	0,2	2,1	0,3	1,4	1,3	0,8	1,2
9	1,2	0,7	1,9	1,0	2,0	2,5	1,7	—	1,5
10	0,8	1,4	2	2,1	0,9	1,9	1,3	2,4	1,7
11	0,9	0,6	2,4	—	1,4	2,7	2	1,2	—
12	2,4	0,8	2,3	—	0,5	1,4	0,9	2,1	—
13	0,6	1,2	2,1	0,9	1,5	1,8	0,7	—	2,1
14	2,9	0,4	0,5	—	1,3	1,8	—	—	1,9



4. Получить передаточную функцию САУ по структурным схемам, приведённым в табл. 4.5 с использованием эквивалентных преобразований в соответствии с заданным вариантом.

5. Оформить и защитить отчёт по лабораторной работе.

Таблица 4.5 – Структурная схема САУ

№ варианта	Структурные схемы
1	
2	
3	
4	

Продолжение таблицы 4.5

№ варианта	Структурные схемы
5	
6	
7	
8	
9	

Продолжение таблицы 4.5

№ варианта	Структурные схемы
10	
11	
12	
13	
14	

## 5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте понятие передаточной функции.
2. Что представляют собой структурные схемы САУ?
3. Что такое динамическое звено?
4. Назовите общие правила составления структурных схем.
5. Назовите рекомендации, используемые при выборе входных и выходных переменных отдельных уравнений при построении структурных схем.
6. Как определяется передаточная функция для соединения с обратной связью?
7. Для чего используются эквивалентные преобразования структурных схем?
8. Приведите эквивалентные схемы при переносе узла через динамическое звено.

## 6 СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Макаров И. М., Менский Б.М. Линейные автоматические системы. – М.: Машиностроение, 1982. – 504с.
2. Лукас В. А. Теория автоматического управления. – М.: Недра, 1990. – 416с.
3. Ключев А. С. Автоматическое регулирование. – М.: Высшая школа, 1986. – 351с.
4. Котов К. Н., Шершевер Н. А. Автоматическое регулирование и регуляторы. – М.: Металлургия, 1987. – 384с.
5. Штефан И. А., Карташов. В. Я. Структурные преобразования в системах оценивания и управления. – Кемерово: КемГУ, 1989. – 38с.

## СОДЕРЖАНИЕ

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ.....	1
2 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ.....	1
2.1 Получение передаточной функции по дифференциальному уравнению .....	1
2.2 Структурные схемы систем автоматического управления.....	3
2.3 Типовые структуры связей между элементами системы .....	7
2.4 Преобразование структурных схем.....	9
3 ПРИМЕРЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ, ПОСТРОЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ .....	12
4 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ .....	22
5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	35
6 СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	35
СОДЕРЖАНИЕ.....	36

Составители

Галина Алексеевна Алексеева  
Иван Владимирович Чичерин  
Илья Сергеевич Сыркин

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ  
СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Методические указания к лабораторной работе по дисциплине  
"Информационная теория управления" для студентов  
направления подготовки бакалавров 230400.62  
"Информационные системы и технологии"  
профиль "Информационные системы и технологии"

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать    Формат 60×84/16.

Бумага офсетная. Отпечатано на ризографе. Уч.-изд. л.

Тираж    экз. Заказ

ГУ КузГТУ. 650026, Кемерово, ул. Весенняя, 28.

Типография ГУ КузГТУ. 650099, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4 А.