План УМД 2000/2001 уч.г.

Лабораторные работы №№ 2, 4

ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Составитель Постников С.А.

Издание утверждено советом ОТФ-1. Протокол № 8 от 20 апреля 2000 г.

Рецензент Каган В.Л.

1. ЦЕЛЬ РАБОТ

Целью настоящих работ является ознакомление с законами движения материальной точки и твердого тела. Причем в работе рассматривается случай простейшего движения твердого тела - тела, закрепленного на оси.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

При описании движения механической системы значительную роль играют такие физические величины, как импульс, момент импульса и энергия. В том случае, когда эти величины от времени не зависят, движение системы носит особенно простой характер, отражающий свойства пространства-времени. Поэтому полезно знать, при каких условиях выполняются законы сохранения этих величин и каким образом они могут применяться.

3. ПЛАН ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

1. Изучение теоретического материала необходимо начать с ознакомления с физическими величинами, описывающими движение материальной точки, т.е. такого тела, размерами которого можно пренебречь по сравнению с размерами, характеризующими движение этого тела. Для описания движения материальной точки пользуются системой отсчета, т.е. системой координат, жестко связанной с твердым телом, относительно которого рассматривается движение (телом отсчета), в которой задан способ измерения времени.

Положение точки в системе координат определяется радиус-вектором $\vec{R}$, т.е. вектором, проведенным из начала системы отсчета в то место, где находится материальная точка. Проекции радиуса-вектора на оси координат системы отсчета называются координатами материальной точки x, y, z. Обратите внимание, что для описания движения точки вводятся две величины:

скорость материальной точки

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} = \frac{d\vec{R}}{dt}, \qquad (1)$$

где $\frac{d\vec{R}}{dt}$ - производная радиуса-вектора по времени;

и ускорение материальной точки

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}. \qquad (2)$$

2. После того, как будет выяснено, каким образом описывается движение точки, необходимо разобраться в причинах этого движения. Для этого удобно рассмотреть взаимодействие материальной точки с телом. Заметьте, что если поместить вблизи движущейся точки тело, то влияние тела на точку проявляется в изменении характера движения точки, т.е. точка приобретает добавочное ускорение, исчезающее по мере удаления тела на бесконечно большое расстояние от материальной точки.

Пусть тело 1 сообщает при взаимодействии материальной точке дополнительное ускорение $\Delta\vec{a}_1$, а если материальная точка взаимодействует с телом 2, то она приобретает дополнительное ускорение $\Delta\vec{a}_2$; опыт показывает, что если тело 1 и тело 2 будут одновременно действовать на материальную точку, то она получит дополнительное ускорение $\Delta\vec{a}$, равное просто векторной сумме ускорений $\Delta\vec{a}_1$ и $\Delta\vec{a}_2$, другими словами, ускорения $\Delta\vec{a}_1$ и $\Delta\vec{a}_2$ независимы.

Итак, на основании многочисленных опытов можно сделать следующие выводы:

тело может воздействовать на материальную точку, причем это воздействие проявляется в приобретении точкой ускорения;

ускорения, сообщаемые разными телами данной материальной точке, независимы.

Поэтому для характеристики взаимодействия вводится векторная величина, направление которой совпадает с направлением добавочного ускорения, вызванного этим взаимодействием, а величина определяется из сравнения с неким эталонным значением. Эта векторная величина называется силой $\vec{F}$.

Так как ускорения, вызываемые взаимодействием с двумя различными телами $\Delta\vec{a}_1$ и $\Delta\vec{a}_2$, независимы, то таким же свойством обладает и сила, т.е., если первое тело действует на материальную точку с силой $\vec{F}_1$, а второе тело действует на точку с силой $\vec{F}_2$, то оба тела будут взаимодействовать с точкой одновременно с силой $\vec{F}$, которая равна векторной сумме сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Кроме того, многочисленные опыты показывают, что в любой системе отсчета отношение силы, действующей на материальную точку, к добавочному ускорению точки, вызванному этой силой, является величиной постоянной для данной материальной точки. Эту постоянную называют инертной массой или просто массой m .

Если материальная точка изолирована, т.е. если она находится на достаточно больших расстояниях от всех прочих тел, то в этом случае ускорения, вызываемые телами за счет взаимодействия, будут исчезающе малыми. Однако полное ускорение материальной точки, вообще говоря, будет отлично от нуля и будет зависеть от выбора системы отсчета. Система отсчета, относительно которой изолированная материальная точка либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно из любого начального положения при любом направлении скорости, называется инерциальной системой отсчета, а ускорение изолированной точки равно нулю.

Первый закон механики Ньютона утверждает, что существуют инерциальные системы отсчета. Второй закон механики Ньютона утверждает, что произведение массы любой материальной точки m на ее ускорение $\vec{a}$ относительно инерциальной системы отсчета равно сумме всех сил $\vec{F}$, действующих на данную точку со стороны других тел:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \qquad (3)$$

Второй закон Ньютона позволяет найти положение и скорость точки в любой момент времени, если известны масса точки m и силы, действующие на точку $\vec{F}$. Силы, действующие на точку, вообще говоря, могут зависеть от положения и скорости точки и от времени, т.е. сила является функцией $\vec{R}$, $\vec{v}$ и t . Следует также отметить, что под действием одной и той же силы одинаковое изменение скорости, как видно из второго закона, происходит у точки с большей массой за более длительный промежуток времени. Способность тела сохранять свою скорость принято называть инерцией, поэтому можно сказать, что масса тела является мерой его инерции.

В третьем законе Ньютона утвержается, что силы, с которыми взаимодействуют две любые материальные точки, равны по величине и направлены в противоположные стороны по прямой, соединяющей точки. Если $\vec{F}_{12}$ - сила, с которой точка 1 действует на точку 2, а $\vec{F}_{21}$ - сила, с которой точка 2 действует на точку 1, то по третьему закону $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Для характеристики движения материальной точки удобно пользоваться такими физическими величинами, как импульс материальной точки $\vec{p}$:

$$\vec{p} = m\vec{v},$$

где m - масса материальной точки, а $\vec{v}$ - ее скорость и момент импульса $\vec{L}$:

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p},$$

где $\vec{R}$ - радиус-вектор материальной точки.

С помощью литературы выведите закон изменения импульса материальной точки

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{4}$$

и закон изменения момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{R} \times \vec{F} = \vec{M}, \tag{5}$$

где $\vec{F}$ - сумма всех сил, действующих на материальную точку, а величина $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$ называется моментом сил $\vec{F}$. Обратите внимание на то, что законы (4) и (5) справедливы лишь в инерциальных системах отсчета.

3. Рассмотрев поведение одной материальной точки, необходимо перейти к рассмотрению динамики системы материальных точек. Для описания системы материальных точек используются такие величины, как импульс системы $\vec{p}$, равный сумме всех импульсов материальных точек системы, и момент импульса системы $\vec{L}$, равный сумме моментов импульсов всех материальных точек. Рассмотрев вывод законов изменения и сохранения импульса и момента импульса системы, следует обратить внимание на то, что

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{6}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \tag{7}$$

где $\vec{F}$ - сумма только внешних сил, действующих на систему, т.е. сил, действующих на материальные точки системы со стороны тел, не входящих в систему, $\vec{M}$ - сумма моментов внешних сил. Сумма внут-

ренних сил, т.е. сил, действующих на материальные точки системы со стороны точек системы, равна нулю по третьему закону Ньютона. Аналогично необходимо доказать, что сумма моментов внутренних сил тоже равна нулю.

Следует отметить, что положение системы в пространстве принято характеризовать радиусом-вектором некой точки, которая называется центром масс системы. Радиус-вектор этой точки $\vec{R}_m$ определяется следующим образом:

$$\vec{R}_m = \frac{\sum_i m_i \vec{R}_i}{m}, \tag{8}$$

где m - общая масса всех точек системы. Уравнение движения центра масс системы получается дифференцированием равенства (8) и имеет вид:

$$m\frac{d\vec{v}_m}{dt} = m\vec{a}_m = \vec{F}, \tag{9}$$

где $\vec{v}_m$ - скорость, а $\vec{a}_m$ - ускорение центра масс системы, $\vec{F}$ - сумма всех внешних сил, действующих на систему.

4. После рассмотрения движения системы материальных точек можно перейти к рассмотрению движения твердого тела. Причем, нужно ограничиться изучением твердого тела, закрепленного на оси. При выводе законов движения надо использовать тот факт, что твердое тело представляет собой систему материальных точек, расстояние между которыми при его движении не меняется. При вращении твердого тела вокруг оси с угловой скоростью ω вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ будет направлен вдоль оси вращения, поэтому для описания движения тела выбрать систему координат удобно таким образом, чтобы ось OZ совпадала с осью вращения и была направлена в ту же сторону, что и вектор $\vec{\omega}$. В этом случае для описания движения достаточно записать проекцию уравнения (7) на ось OZ :

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \tag{10}$$

где L_z - проекция момента импульса на ось OZ, а M_z - проекция момента внешних сил на ось OZ. Так как расстояние между точками твердого тела остается неизменным, то это означает, что $|\vec{R}_i| = const$. В этом случае проекция момента импульса твердого тела на ось вращения примет довольно простой вид:

$$L_z = \sum_i m_i \, (\vec{R}_i \times \vec{v}_i)_z = \omega \sum_i m_i \, \ell_i^2 \,, \qquad (11)$$

где ℓ_i - расстояние i-ой точки тела от оси вращения, а величина

$$J_{oz} = \sum_i m_i \, \ell_i^2 \qquad (12)$$

называется моментом инерции твердого тела относительно оси вращения OZ. Эта величина зависит от размеров тела и от распределения массы относительно оси вращения. Например, момент инерции сплошного диска относительно оси, проходящей через его середину, будет

$$J_o = \frac{1}{2} M R_o^2 \,, \qquad (13)$$

где M - масса диска, а R_o - его радиус.

С помощью момента инерции (12) уравнение (10) движения твердого тела, закрепленного на оси, примет вид:

$$J_{oz} \, \frac{d\omega}{dt} = M_z \,. \qquad (14)$$

5. Так как значение момента инерции твердого тела относительно той или иной оси имеет большое значение для описания движения тела, необходимо рассмотреть способы его вычисления. Значительную роль в процессе вычисления момента инерции играет теорема Штейнера, вывод которой необходимо рассмотреть.

Теорема Штейнера связывает момент инерции $J_{o'}$ относительно произвольной заданной оси $O'Z'$ с моментом инерции J_o относительно оси OZ, проходящей через центр масс параллельно оси $O'Z'$:

$$J_{o'} = J_o + M d^2 \,, \qquad (15)$$

где M - масса тела, а d - расстояние между осями $O'Z'$ и OZ.

4. ЛАБОРАТОРНАЯ УСТАНОВКА РАБОТЫ № 2 И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Установка состоит из двух грузов одинаковой массы m, соединенных нитью, которую можно считать и невесомой, и нерастяжимой (рис. 1). Нить перекинута через блок, момент инерции которого J_o и радиус R_o. На один из грузов m кладется дополнительный груз массой Δm. Система уравнений движения, описывающая данную задачу, имеет вид:

$$\begin{aligned} m_1 a_{1x} &= m_1 g - T_1 \,, \\ m_2 a_{2x} &= m_2 g + N - T_2 \,, \\ \Delta m \, a_{2x} &= \Delta m g - N \,, \\ J_o \beta &= T_2 R_o - T_1 R_o - M_{\text{тр}Z} \,, \\ m_1 &= m_2 = m \,, \end{aligned} \qquad (16)$$

где $M_{\text{тр}Z}$ - проекция момента сил трения на ось вращения OZ. К этим уравнениям необходимо добавить еще два, связывающих между собой ускорения

$$a_{1x} = -a_{2x} \,,$$

$$a_{2x} = \beta R_o \,.$$

Решая совместно систему этих уравнений, мы получаем, что

$$a_{2x} = \frac{\Delta m g - M_{\text{тр}Z} / R_o}{2m + \Delta m + J_o / R_o^2} \,. \qquad (17)$$

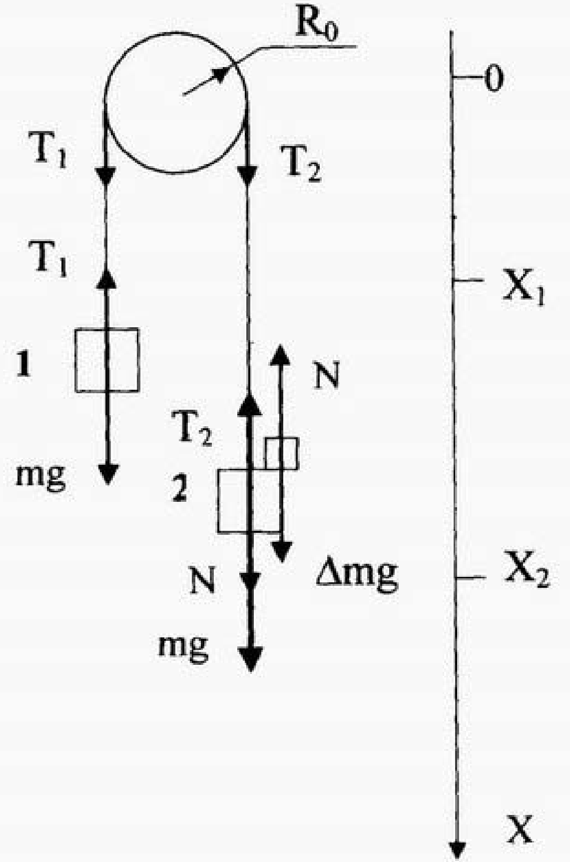

Рис. 1

Легко видеть, что если $\Delta m \ll m$, то в этом случае a_{2x} зависит от Δm практически линейно. Для того, чтобы определить момент силы трения, достаточно знать величину Δm_o, при которой $a_{2x} = 0$, в этом случае

$$M_{\text{тр}Z} = \Delta m_o R_o g \,, \qquad (18)$$

где R_o - радиус блока.

5. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ № 2

5.1. Положить на груз 2 один дополнительный груз.

5.2. Выбрать положение X_1 на вертикальной шкале, до которого будет опускаться груз 2. Расстояние между этим местом и верхним положением груза 2 должно быть не менее 15 см.

5.3. Переместить тело 1 в крайнее нижнее положение.

5.4. Опустить груз 1 и определить время движения тела 2 до положения X_1 .

5.5. Повторить три-пять раз п. 5.4.

5.6. Установить новое положение X_2 на вертикальной шкале, до которого будет опускаться груз 2.

5.7. Повторить пп. 5.3 - 5.5.

5.8. Положить на груз 2 еще один дополнительный груз и повторить пп. 5.2 - 5.7.

5.9. Повторить п. 5.8 для всех оставшихся дополнительных грузов.

6. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ РАБОТЫ № 2

6.1. Вычислить среднее время движения $\langle t_1 \rangle$ груза 2 с одним дополнительным грузом до положения X_1 .

6.2. Вычислить среднее время движения $\langle t_2 \rangle$ груза 2 с одним дополнительным грузом до положения X_2 .

6.3. Определить ускорение груза 2 с одним дополнительным грузом по формуле:

$$a = \frac{2\,(X_2 - X_1)}{\langle t_2\rangle^2 - \langle t_1\rangle^2} .$$

6.4. Вычислить погрешность в определении ускорения.

6.5. Повторить пп. 6.1 - 6.4 для других дополнительных грузов.

6.6. Построить график зависимости ускорения от массы Δm всех дополнительных грузов, находящихся на грузе 2.

6.7. Проведите через экспериментальные точки на графике прямую линию, которую экстраполируйте (продолжите) до пересечения с осью „Δm". Определите таким образом значение массы Δm_0, при которой a = 0.

6.8. Определите момент силы трения по формуле:

$$M_{тр} = \Delta m_0 R_0 g .$$

7. ЛАБОРАТОРНАЯ УСТАНОВКА РАБОТЫ № 4 И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Схема установки работы № 4 показана на рис. 2. Система уравнений движения данной задачи будет:

$$ma_x = mg - T ,$$

$$J\beta_z = TR_0 ,$$

$$a_x = \beta_z R_0 ,$$

где $J = J_0 + 4\Delta m\, \ell^2$, а J_0 - момент инерции крестовины без дополнительных грузов Δm . Решая систему уравнений, находим ускорение a_x , с которым опускается вниз груз m :

$$a_x = \frac{R_0^2 mg}{mR_0^2 + J} ,$$

где R_0 - радиус диска, на который намотана нить.

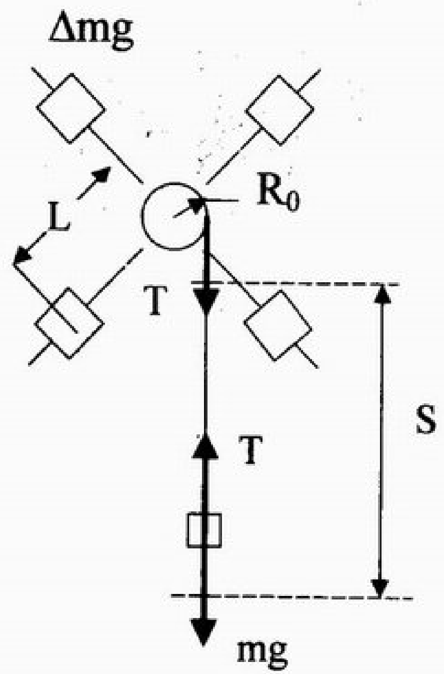

Рис. 2

8. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ № 4

8.1. Снять с крестовины дополнительные грузы Δm .

8.2. Закрепить на нити груз m . Намотать нить на диск и определить расстояние S , на которое опускается груз m .

8.3. Определить время t_1 , в течение которого груз m проходит расстояние S и опускается в нижнее положение.

8.4. Повторить три-пять раз п. 8.3.

8.5. Заменить груз m и повторить пп. 8.3, 8.4 для всех имеющихся грузов.

8.6. Закрепить на нити один из имеющихся грузов.

8.7. Дополнительные грузы Δm установить на крестовине на равном расстоянии ℓ от оси.

8.8. Убедиться в безразличном равновесии крестовины с дополнительными грузами Δm и измерить расстояния ℓ от оси крестовины до этих грузов.

8.9. Определить время движения t_2 груза m в нижнее положение.

8.10. Повторить три-пять раз п. 8.9.

8.11. Изменить расстояния ℓ между дополнительными грузами и осью крестовины.

8.12. Повторить пп. 8.8 - 8.11.

8.13. Повторить пп. 8.11 и 8.12 еще четыре раза.

9. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ РАБОТЫ № 4

9.1. Определить среднее время движения $\langle t_1 \rangle$ груза m, полученное в пп. 8.3 и 8.4.

9.2. Вычислить ускорение, с которым движется груз m, по формуле:

$$a_1 = \frac{2S}{\langle t_1 \rangle^2} .$$

9.3. Вычислить момент инерции J_0 крестовины без грузов по формуле:

$$J_0 = \frac{mR_0^2(g - a_1)}{a_1} .$$

9.4. Повторить пп. 9.1 - 9.3 для других грузов m, когда на крестовине нет грузов.

9.5. Полученные в п. 9.3 значения момента инерции J_0 крестовины без дополнительных грузов усреднить и найти среднее значение момента инерции $\langle J_0 \rangle$.

9.6. Построить теоретическую зависимость ускорения a груза от расстояния ℓ между дополнительными грузами и осью крестовины по формуле:

$$a = \frac{m R_0^2 g}{mR_0^2 + \langle J_0 \rangle + 4 \Delta m \ell^2} ,$$

где m - масса груза, выбранного в п. 8.6, Δm - масса дополнительных грузов, а $\langle J_0 \rangle$ - средний момент инерции крестовины, найденный в п. 9.5.

9.7. Определить среднее время $\langle t_2 \rangle$ движения груза m, измеренное в п. 8.9.

9.8. Вычислить ускорение a_2, с которым движется груз m при определенном расстоянии ℓ между дополнительными грузами Δm и осью крестовины, по формуле:

$$a_2 = \frac{2S}{\langle t_2 \rangle^2} .$$

9.9. Повторить вычисления п. 9.8 для других значений ℓ по данным, полученным в п. 8.12.

9.10. Результаты, полученные в пп. 9.9 и 9.8, нанести на график, построенный в п. 9.6.

10. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение силы и массы.
2. Какие системы отсчета называются инерциальными?
3. Сформулируйте второй закон Ньютона, в каких системах отсчета и для каких тел он справедлив?
4. Как определить положение центра масс системы материальных точек?
5. Сформулируйте закон движения центра масс.
6. Что такое момент инерции тела и момент силы?
7. Докажите теорему Штейнера.
8. Напишите уравнение движения твердого тела, закрепленного на оси.

11. ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. - М.: Наука, 1982. - Гл. 1; гл. II, § 6-9; гл. V, § 36-39.