# ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставить поля 4–5 см для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, группа, номер варианта, шифр зачетной книжки, название дисциплины. В конце работы следует поставить дату ее выполнения.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго согласно варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи, а также задачи не своего варианта, не засчитываются.

4. Решения задач должны располагаться в порядке возрастания номеров задач.

5. Перед решением каждой из задач необходимо полностью выписать ее условие.

6. . Номер варианта контрольной работы определяется по последним двум цифрам номера зачетной книжки студента и соответствует этим двум цифрам, если они образуют число от 01 до 25. Если же число больше 25, то номер варианта равен остатку после деления этого числа на 25. Если же в остатке получился 0, тогда ваш вариант 25.

Например:

Шифр 235602, следовательно, вариант №2.

Шифр 235613, следовательно, вариант №13.

Шифр 235600, следовательно, вариант №25.

Шифр 235697, следовательно, $\frac{97}{25} = 3\frac{22}{25}$, остаток 22, вариант №22.

7. Если после проверки работа не зачтена, студент должен исправить все ошибки и сдать исправленную работу на повторную проверку.

8. Работы принимают на кафедре «Высшая математика» 6 корпус НГТУ, ауд.6201

**9. Студенты не получившие зачет по контрольной работе к экзамену (зачету) не допускаются.**

## ЗАДАНИЕ 1.

**1.1.** Найти угол между градиентами функций $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)$ в точке $M$ .

**1.** $u=\dfrac{yz^2}{x^2}$, $v=\dfrac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}\,z^3$, $M\left(\sqrt{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

**2.** $u=x^2yz^3$, $v=\dfrac{4\sqrt{6}}{x}-\dfrac{\sqrt{6}}{9y}+\dfrac{3}{z}$, $M\left(2,\dfrac{1}{3},\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

**3.** $u=\dfrac{z^3}{xy^2}$, $v=9\sqrt{2}\,x^3-\dfrac{y^3}{2\sqrt{2}}-\dfrac{4z^3}{\sqrt{3}}$, $M\left(\dfrac{1}{3},2,\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

**4.** $u=\dfrac{z}{x^3y^2}$, $v=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{\sqrt{6}\,z}$, $M\left(1,2,\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

**5.** $u=\dfrac{x^2}{yz^2}$, $v=\dfrac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}\,z^3$, $M\left(\sqrt{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

**6.** $u=\dfrac{z^2}{xy^2}$, $v=3\sqrt{2}\,x^2-\dfrac{y^2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}\,z^2$, $M\left(\dfrac{1}{3},2,\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

**7.** $u=\dfrac{xz^2}{y}$, $v=6\sqrt{6}x^3-6\sqrt{6}y^3+2z^3$, $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},1\right)$.

**8.** $u=\dfrac{yz^2}{x}$, $v=\dfrac{\sqrt{6}}{2x}-\dfrac{\sqrt{6}}{2y}+\dfrac{2}{3z}$, $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

**9.** $u=\dfrac{xy^2}{z^2}$, $v=3\sqrt{2}\,x^2-\dfrac{y^2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{2}\,z^2$, $M\left(\dfrac{1}{3},2,\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

**10.** $u=\dfrac{x^3y^2}{z}$, $v=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{\sqrt{6}\,z}$, $M\left(1,2,\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

**11.** $u=\dfrac{1}{x^2yz}$, $v=-\dfrac{4\sqrt{2}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{9y}+\dfrac{1}{\sqrt{3}\,z}$, $M\left(2,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

**12.** $u=\dfrac{x^2}{y^2z^3}$, $v=\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\,z}$, $M\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**13.** $u=xyz$, $v=x^2+9y^2+6z^2$, $M\left(1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

**14.** $u=\dfrac{y^3}{x^2z}$, $v=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{2y}-\dfrac{\sqrt{6}}{4z}$, $M\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}},\sqrt{\dfrac{3}{2}},\dfrac{1}{2}\right)$.

**15.** $u=x\,y^2\,z$, $v=\sqrt{2}x^2-\dfrac{3y^2}{\sqrt{2}}-6\sqrt{2}z^2$, $M\left(1,\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

**16.** $u=\dfrac{x}{y\,z^2}$, $v=-\dfrac{\sqrt{6}}{2x}+\dfrac{\sqrt{6}}{2y}-\dfrac{2}{3z}$, $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

**17.** $u=\dfrac{y^2\,z^3}{x^2}$, $v=\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\,z}$, $M\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**18.** $u=\dfrac{y^2\,z^3}{x}$, $v=\dfrac{1}{\sqrt{2}x}-\dfrac{2\sqrt{2}}{y}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2z}$, $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**19.** $u=\dfrac{y}{x\,z^2}$, $v=6\sqrt{6}x^3-6\sqrt{6}y^3+2\,z^3$, $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},1\right)$.

**20.** $u=\dfrac{y\,z^2}{x}$, $v=x^2-y^2-3z^2$, $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

**21.** $u=\dfrac{z^2}{x^2y^2}$, $v=\dfrac{3x^2}{\sqrt{2}}-\dfrac{y^2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\,z^2$, $M\left(\dfrac{2}{3},2,\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

**22.** $u=\dfrac{x^2}{y^2\,z^3}$, $v=\dfrac{x^3}{\sqrt{2}}-\dfrac{y^3}{\sqrt{2}}-\dfrac{8z^3}{\sqrt{3}}$, $M\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**23.** $u=x^2y\,z^3$, $v=\dfrac{3}{2}x^2+3y^2-2z^2$, $M\left(2,\dfrac{1}{3},\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

**24.** $u=\dfrac{x\,y^2}{z^3}$, $v=9\sqrt{2}\,x^3-\dfrac{y^3}{2\sqrt{2}}-\dfrac{4z^3}{\sqrt{3}}$, $M\left(\dfrac{1}{3},2,\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

**25.** $u=\dfrac{1}{x\,y^2z}$, $v=\sqrt{2}x^2-\dfrac{3y^2}{\sqrt{2}}-6\sqrt{2}z^2$, $M\left(1,\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

**1.2.** Исследовать функцию $z=z(x,y)$ на экстремум.

**1.** $z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y$.

**2.** $z=x^3+8y^3-6xy+5$.

**3.** $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$.

**4.** $z=1+6x-x^2-xy-y^2$.

**5.** $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$.

**6.** $z=x^2+3(y+2)^2$.

**7.** $z = xy - 3x^2 - 2y^2$.

**8.** $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

**9.** $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

**10.** $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$.

**11.** $z = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y$.

**12.** $z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10$.

**13.** $z = (x-5)^2 + y^2 + 1$.

**14.** $z = x^3 + y^3 - 2x^2 - 4y^2$.

**15.** $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

**16.** $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$.

**17.** $z = xy(12 - x - y)$.

**18.** $z = xy - x^2 + y^2 + 9$.

**19.** $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

**20.** $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

**21.** $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

**22.** $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$.

**23.** $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

**24.** $z = xy(6 - x - y)$.

**25.** $z = 2(x + y) - x^2 - y^2$.

**1.3.** Экспериментально получены значения функции $y = f(x)$, которые представлены в таблице. Методом наименьших квадратов найти функцию вида $y = ax^2 + bx + c$ (для нечетных вариантов) и $y = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c$ (для четных вариантов), аппроксимирующую функцию $y = f(x, y)$. Сделать чертеж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат изобразить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции.

| $x_i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | $x_i$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 5,2 | 5,7 | 5,3 | 4,9 | 3,6 | 1,8 | **2** | 2,5 | 0,8 | 0,4 | 0,3 | 0,0 |
| **3** | -0,3 | -0,9 | -0,1 | 0,6 | 2,2 | 5,0 | **4** | 2,7 | 0,8 | 0,5 | 0,4 | 0,3 |
| **5** | 1,2 | 1,7 | 1,2 | 0,4 | -0,7 | -2,8 | **6** | 1,1 | -1,1 | -1,2 | -1,5 | -1,6 |
| **7** | -0,5 | -0,7 | -0,4 | 0,4 | 2,3 | 4,2 | **8** | 2,3 | 0,6 | 0,5 | 0,2 | 0,2 |
| **9** | 1,2 | 1,6 | 1,5 | 0,6 | -1,2 | -3,2 | **10** | 4,1 | 1,7 | 1,3 | 1,2 | 0,7 |
| **11** | -0,1 | -1,3 | -1,2 | -0,2 | 1,4 | 3,9 | **12** | 0,6 | -1,2 | -1,6 | -1,7 | -1,7 |
| **13** | 1,0 | 1,6 | 1,5 | 0,4 | -1,3 | -3,7 | **14** | 2,5 | 0,8 | 0,4 | 0,4 | 0,3 |
| **15** | -0,2 | -1,2 | -1,5 | -1,4 | 0,3 | 2,0 | **16** | 1,4 | -0,3 | -0,8 | -0,7 | -1,0 |
| **17** | -1,6 | -0,2 | 0,0 | -0,7 | -2,5 | -5,5 | **18** | 4,0 | 1,8 | 1,4 | 1,2 | 0,9 |
| **19** | -1,5 | -2,8 | -2,6 | -1,6 | 0,4 | 3,1 | **20** | 3,8 | 1,8 | 1,3 | 1,1 | 1,0 |
| **21** | -0,3 | -2,4 | -2,8 | -1,8 | -0,3 | 2,6 | **22** | 2,2 | -0,2 | -0,5 | -0,7 | -0,8 |
| **23** | -0,5 | -1,5 | -1,8 | -0,8 | 1,6 | 4,5 | **24** | 2,5 | 0,8 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |
| **25** | -0,3 | 0,6 | 1,3 | 2,0 | 1,7 | 1,2 | | | | | | |

**ЗАДАНИЕ 2.**

**2.1.** Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения. Решить задачу Коши.

**1.** $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}, \quad y(1) = 0.$

**2.** $xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx, \quad y(1) = 1.$

**3.** $x^2 y' = xy + y^2 e^{-x/y}, \quad y(1) = -1.$

**4.** $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0, \quad y(1) = 0.$

**5.** $x\cos\dfrac{y}{x}dy + (x - y\cos\dfrac{y}{x})dx = 0,$
$y(1) = \pi.$

**6.** $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx,$
$y(1) = 0.$

**7.** $xy'\ln(\dfrac{y}{x}) = x + y\ln(\dfrac{y}{x}), \quad y(1) = 1.$

**8.** $(4y^2 + x^2)y' = xy, \quad y(1) = 1.$

**9.** $xy'\sin(\dfrac{y}{x}) + x = y\sin(\dfrac{y}{x}), \quad y(1) = 0.$

**10.** $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y', \quad y(1) = 1.$

**11.** $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y(2) = 2.$

**12.** $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}, \quad y(1) = 2.$

**13.** $y = xy' - xe^{\frac{y}{x}}, \quad y(1) = 2.$

**14.** $xy' - y(\ln y - \ln x) = 0, \quad y(1) = e^2.$

**15.** $y' = \dfrac{y + 2\sqrt{xy}}{x}, \quad y(1) = 4.$

**16.** $(x + y)dx + (y - x)dy = 0,$
$y(1) = \sqrt{3}.$

**17.** $y' = \dfrac{x + 2y}{2x - y}, \quad y(1) = 1.$

**18.** $y - xy' = 2(x + yy'), \quad y(1) = 1.$

**19.** $xy' + xtg\dfrac{y}{x} = y, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}.$

**20.** $y' - \dfrac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x) = 0,$
$y(1) = e.$

**21.** $(3x^2 - y^2)y' = 2xy, \quad y(0) = 1.$

**22.** $y' - 1 = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}, \quad y(1) = 0.$

**23.** $(y - x)dx + (y + x)dy = 0,$
$y(0) = 0.$

**24.** $y'\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x} + 1 = 0,$
$y(1) = \pi/2.$

**25.** $\sqrt{y}(2\sqrt{x} - \sqrt{y})dx + xdy = 0,$
$y(1) = 9.$

**2.2.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

**1.** $x^4 y'' + x^3 y' = 4.$

**2.** $xy''' - y'' = x^3.$

**3.** $xy''' + y'' = x + 1.$

**4.** $(x+2)y''' - y'' = x(x+2)^2.$

**5.** $(1 - x^2)y'' - xy' = 2.$

**6.** $xy'' - y' = x^2 \sin x.$

**7.** $y''' tgx = y'' + 1.$

**8.** $(x+1)y'' - y' = e^x (x+1)^2.$

**9.** $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3.$

**10.** $xy'' - y' = -2\ln x.$

**11.** $xy''' + y'' = 1.$

**12.** $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 2x^2.$

**13.** $(x-1)y'' - y' = x(x-1)^2.$

**14.** $xy'' + y' = e^x (x+1).$

**15.** $x^3 y''' + x^2 y'' = 1.$

**16.** $x^3 y''' - x^2 y'' = -12.$

**17.** $xy''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}.$

**18.** $xy''' + 2y'' = x^4.$

**19.** $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0.$

**20.** $xy''' + y'' = 3x^2.$

**21.** $x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}.$

**22.** $(1 + x^2)y''' - 2xy'' = (1 + x^2)^2.$

**23.** $x^5 y''' + x^4 y'' = 1.$

**24.** $xy''' + y'' = \sqrt{x}.$

**25.** $x^2 y'' + xy' = 1.$

**2.3.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

**1.** $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98e^{7x}.$

**2.** $y''' - 81y' = 162e^{9x} + 81\sin 9x.$

**3.** $y'' + 100y = 20\sin 10x - 200e^{10x} - 30\cos 10x.$

**4.** $y''' - 64y' = 128\cos 8x - 64e^{8x}.$

**5.** $y'' + 81y = 9\sin 9x + 3\cos 9x + 162e^{9x}.$

**6.** $y''' - 49y' = 14e^{7x} - 49(\cos 7x + \sin 7x).$

**7.** $y'' + 64y = 16\sin 8x - 16\cos 8x - 64e^{10x}.$

**8.** $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x).$

**9.** $y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x.$

**10.** $y''' - y' = \cos x + 2e^{x}$.

**11.** $y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}$.

**12.** $y''' - y' = 10\sin x + 6\cos x + 4e^{x}$.

**13.** $y'' + 9y = -18\sin 3x - 18e^{3x}$.

**14.** $y''' - 4y' = 24e^{2x} - 4\cos 2x + 8\sin 2x$.

**15.** $y'' + 16y = 16\left(\cos 4x - e^{4x}\right)$.

**16.** $y''' - 9y' = -9e^{3x} - 9\cos 3x + 18\sin 3x$.

**17.** $y'' + 25y = -10\sin 5x + 20\cos 5x + 50e^{5x}$.

**18.** $y''' - 16y' = 64(-\sin 4x + \cos 4x) + 48e^{4x}$.

**19.** $y'' + 36y = 24\sin 6x - 12\cos 6x + 36e^{6x}$.

**20.** $y''' - 25y' = -50e^{5x} + 25(\cos 5x + \sin 5x)$.

**21.** $y'' - y' = e^{x} + e^{-x}$.

**22.** $y''' - 100y' = 100\cos 10x + 20e^{10x}$.

**23.** $y'' + y' = e^{x} - e^{-x}$.

**24.** $y'' - 5y' = 25\left(e^{5x} + e^{-5x}\right)$.

**25.** $y'' + 3y' = e^{3x} - e^{-3x}$.

**2.4.** Указать структуру общего решения дифференциального уравнения, не находя коэффициентов его частных решений.

$y''' + 8y = 2x^{3} - \left(x^{2} + 1\right)e^{-2x} + 5\cos\left(\sqrt{3}\cdot x\right) + 1$.

$y^{(\mathrm{V})} + 10y^{(3)} + 9y' = 7\sin 3x + (2 - x)e^{x} + 5x^{2} + 1 + e^{x}\cos 3x$.

$y^{(\mathrm{V})} - 8y''' + 16y' = 2 + e^{2x}\cos 5x + x\sin 5x + e^{-2x} + 10x$.

$y^{\mathrm{IV}} + 25y'' = -5 - x + e^{x}\sin 5x + 2\cos 5x + xe^{-5x}$.

$y^{\mathrm{IV}} + 2y'' = \sin\left(\sqrt{2}\cdot x\right) - 3\cos\left(\sqrt{2}\cdot x\right) + 5x^{2} - 3 + e^{\sqrt{2}\cdot x}$.

$y^{\mathrm{IV}} - y' = e^{x}\sin x + e^{\sqrt{3}x} - x - \cos x + \dfrac{1}{3}$.

$y^{\text{V}}+9y'''=-3x^2+1+e^x\sin 3x-x\cos 3x+e^{3x}$.

$y'''-y'=e^x\left(x-x^2+x^3\right)+5-\sin 2x-3x\cos x$.

$y^{\text{IV}}+5y'''+6y''=e^{-2x}x+8e^{-3x}\cos 2x-5\sin 2x+\dfrac{1}{2}$.

$y'''+4y''+4y'=e^{2x}+e^{-2x}\cos x-14x^2+2+x\sin x$.

$y'''-8y=x^2+e^{-x}\cos\sqrt{3}\,x-2\sin\sqrt{3}\,x-e^{2x}$.

$y^{\text{V}}+27y''=2x^2-xe^{-3x}+x\sin 3x+e^{3x}\sin 3x$.

$y^{\text{IV}}+7y'''+10y''=-1+8x-e^{-5x}\sin 2x-4e^{-2x}+\cos 2x$.

$y'''-2y''+y'=-e^x\sin x+7xe^x-1+x^2+\cos x$.

$y^{\text{V}}+2y^{\text{IV}}+y'''=x\sin x-e^{-x}+2+3x-e^{-x}\cos x$.

$y^{\text{VI}}+y^{\text{V}}=3x\cos x-e^x(x-3)+1-e^{2x}\sin x$.

$y'''+64y=\cos 4x-e^{4x}-x^2-2\sin 4x$.

$y'''+2y''+y'=-2+e^x+e^x\cos x-\sin x$.

$y^{\text{IV}}-8y'''+15y''=5x-e^{3x}-e^{3x}\cos 5x$.

$y^{\text{V}}+4y'''=-8-e^{2x}\cos 2x+x\sin 2x$.

$y^{\text{IV}}+16y''=-\cos 2x+4e^{2x}-x+\ln 5$.

$y^{\text{IV}}-6y'''+9y''=-x+5e^{3x}-x\sin 3x+\cos 3x$.

$y^{\text{VI}}+y^{\text{IV}}=1-e^x(-2x+1)+x\cos x+2x\sin x$.

$y'''-49y'=2e^{7x}-7x^2-3e^{7x}\cos x+5e^{7x}\sin x$.

$y^{\text{IV}}+5y'''=5x+\cos 5x-e^{-5x}+x\sin 5x$.

## ЗАДАНИЕ 3.

**3.1.** Исследовать числовой ряд на сходимость.

**1.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{3^n\cdot n!}$.

**2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n\cdot n^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$.

**3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n+3)}\cdot n^3$.

**4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^{n^2-3}}{3^n\cdot n^{n^2+5}}$.

**5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n \cdot 2^n}{5^n \cdot n!}$.

**6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2-n}}$.

**7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+1}}{\left(3n^2+5\right)\cdot n!\cdot e^n}$.

**8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{n^2+2n}}{e^n \cdot 2^{n^2+5n}}$.

**9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n+2)}{(2n+1)!!\cdot n^2}$.

**10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2-n}}$.

**11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\cdot 3^n}{n^n \cdot \sqrt{n^3}}$.

**12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n+3)^{n/3}}{3n+5}$.

**13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\cdot e^n}{n^{n+10}}$.

**14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot 3^n}{(2e)^n}$.

**15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\cdot (n!)^2\cdot n}$.

**16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{3n+5}\right)^{n^2}$.

**17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^3\cdot 30^n}{(3n)!\cdot n}$.

**18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^{n^2}$.

**19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n \cdot 2^n}{3^n \cdot n!\cdot n}$.

**20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5n-1}{6n+2}\right)^{n}$.

**21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\cdot 2^n}{n^n \cdot n^2}$.

**22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n \cdot (3n-1)^{n/2}}{(2n)^n \cdot (5n+5)^{n/3}}$.

**23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

**24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{2n}}{(2n+3)^{n+1}\cdot (2n-1)^{n+30}}$.

**25.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^{n^2+2n}\cdot 2^{n^2-5n}}{5^{n^2+3n}\cdot 3^{n^2-2n}}$.

**3.2.** Найти область сходимости степенного ряда.

**1.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-5)^n}{(3n+8)\cdot 2^n}$.

**2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cdot (x+4)^n}{(n+1)\cdot 3^n}$.

**3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n \cdot 3^{n-1}}{n^n}$.

**4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x+6)^n}{(3n+1)\cdot 3^n}$.

**5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\cdot (x+5)^n}{9^n}$.

**6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{2^{n+1}\cdot (n+2)^n}$.

**7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x+2)^n}{(4n-1)\cdot 2^n}$.

**8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^n \cdot (x-7)^n}{n!}$.

**9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2\cdot(x+1)^n}{(n+2)!}.$

**10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot(x+1)^n}{n\cdot 2^n}.$

**11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^n\cdot(x-2)^n}{(2n+1)^n}.$

**12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\cdot(x-3)^n}{2^{n+1}}.$

**13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x+3)^n}{(3n-1)\cdot 3^n}.$

**14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!\cdot(x+7)^n}{3^{n-1}}.$

**15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}.$

**16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(x-3)^n}{\sqrt{n}\cdot 2^n}.$

**17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n\cdot 3^n}{\sqrt[3]{n^4}\cdot 4^n}.$

**18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+5)^n}{3^{n+1}\cdot n}.$

**19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot(x-4)^n}{(n+1)\cdot 2^n}.$

**20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cdot(x-2)^n}{n^2+1}.$

**21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-6)^n}{(n+2)\cdot 3^n}.$

**22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot(x+2)^n}{(n+1)\cdot 3^n}.$

**23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\cdot(x-1)^n}{7^n}.$

**24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\cdot(x+5)^n}{3^{n+1}}.$

**25.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(x+1)^n}{(n+1)^2\cdot e^{n+1}}.$

**3.3.** Вычислить определенный интеграл с точностью $\alpha=0{,}001$, представив подынтегральную функцию в виде степенного ряда.

**1.** $\int\limits_0^{1/2}\dfrac{\sin 3x^2}{x^2}dx.$

**2.** $\int\limits_0^{1/3}\dfrac{dx}{\sqrt{1+5x^3}}.$

**3.** $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{\cos x^4-1}{x^8}dx.$

**4.** $\int\limits_0^{1/2}\sqrt{1+x^4}\,dx.$

**5.** $\int\limits_0^{1}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{1+x^5}}.$

**6.** $\int\limits_0^{1/4}\dfrac{\cos x-1}{x^2}dx.$

**7.** $\int\limits_0^{1/3}\dfrac{\sin 3x^2-3x^2}{7x^6}dx.$

**8.** $\int\limits_0^{1/2}\dfrac{e^{-x^4}-1}{x^4}dx.$

**9.** $\int\limits_0^{1/3}\dfrac{\cos 4x^2-1}{5x^4}dx.$

**10.** $\int\limits_0^{1/5}\dfrac{\mathrm{arctg}x-\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2}dx.$

**11.** $\int\limits_0^{0,5}\cos\dfrac{x^2}{4}dx.$

**12.** $\int\limits_0^{0,25}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx.$

**13.** $\int\limits_0^{1}\dfrac{\sin x}{x}dx.$

**14.** $\int\limits_0^{1/3}\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$

**15.** $\int\limits_0^{0,2}e^{-3x^2}dx.$

**16.** $\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$ **17.** $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}.$ **18.** $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx.$

**19.** $\int\limits_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x} dx.$ **20.** $\int\limits_0^{0,5} \cos 4x^2 dx.$ **21.** $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}.$

**22.** $\int\limits_0^{1} \frac{1-\cos x}{x} dx.$ **23.** $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin 2x}{x} dx.$ **24.** $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^3}.$

**25.** $\int\limits_0^{0,2} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx.$

**3.4.** Функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье: а) в нечетных вариантах по косинусам кратных дуг; б) в четных вариантах по синусам кратных дуг.

**1.** $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & 0<x<1,\\ 2, & 1\le x<2.\end{cases}$ **2.** $f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0x\le 1,\\ \frac{1}{2}(x-1), & 1<x<3.\end{cases}$

**3.** $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x\le \frac{\pi}{2},\\ 1, & \frac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$ **4.** $f(x)=\begin{cases}-\cos x, & 0<x\le \frac{\pi}{2},\\ x-\frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$

**5.** $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x\le 1,\\ (x-2)^2, & 1<x<2.\end{cases}$ **6.** $f(x)=\begin{cases}-\sin\frac{\pi x}{2}, & 0<x\le 1,\\ x-2, & 1<x<2.\end{cases}$

**7.** $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x, & 0<x<2,\\ \frac{1}{2}(x-2), & 2\le x<4.\end{cases}$ **8.** $f(x)=\begin{cases}2-2x^2, & 0<x<1,\\ 1, & 1\le x<2.\end{cases}$

**9.** $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le \pi,\\ -\sin x, & \pi<x<\frac{3\pi}{2}.\end{cases}$ **10.** $f(x)=\begin{cases}e^x, & 0<x\le 1,\\ 1, & 1<x<3.\end{cases}$

**11.** $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & 0<x<1,\\ 2x-1, & 1\le x<2.\end{cases}$ **12.** $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & 0<x<\frac{\pi}{4},\\ \frac{4}{\pi}x-2, & \frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

**13.** $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 1, \\ e^{1-x}, & 1<x<2. \end{cases}$

**14.** $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & 0<x\le 1, \\ -1, & 1<x<3. \end{cases}$

**15.** $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{6}, & 0<x\le 1, \\ \dfrac{1}{2}, & 1<x<2. \end{cases}$

**16.** $f(x)=\begin{cases} 2, & 0<x\le 1, \\ x^2, & 1<x<2. \end{cases}$

**17.** $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{2}+1, & 0<x\le 2, \\ 2(x-2), & 2<x<3. \end{cases}$

**18.** $f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1+\cos x, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

**19.** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}-x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

**20.** $f(x)=\begin{cases} 0, & 0<x\le 1, \\ -(x-1)^2, & 1<x<2. \end{cases}$

**21.** $f(x)=\begin{cases} 2-x^2, & 0<x<2, \\ -2, & 2\le x<3. \end{cases}$

**22.** $f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{2}x, & 0<x<2, \\ x-3, & 2\le x<4. \end{cases}$

**23.** $f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1, \\ -(x-2)^2, & 1\le x<2. \end{cases}$

**24.** $f(x)=\begin{cases} 1+\sin x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi-x, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$

**25.** $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<x<1, \\ \dfrac{1}{2}, & 1\le x<3. \end{cases}$

## Образец оформления решения
## ЗАДАНИЕ 1.

**1.1.** Найти угол $\varphi$ между градиентами функций $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)$

в точке $M$ .

$$u = x^2 y z\,, \quad v = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}\,z}\,, \quad M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

**Решение**.

**1)** Градиент функции $f = f(x, y, z)$ имеет вид:

$$\overrightarrow{grad}\, f = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}\right\}.$$

**а)** Найдем частные производные для функции $u = u(x, y, z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xyz\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 z\,, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^2 y$$

и вычислим их значения в точке $M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = \frac{4}{3\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M) = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(M) = \frac{4}{3}.$$

Следовательно, $\overrightarrow{grad}\, u(M) = \left\{\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \frac{4}{3}\right\}$.

**б)** Найдем частные производные для функции $v = v(x, y, z)$:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4\sqrt{2}}{x^2}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\sqrt{2}}{9y^2}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\sqrt{3}z^2}$$

и вычислим их значения в точке $M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(M) = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(M) = -\frac{\sqrt{2}\cdot 9}{9\cdot 1} = -\sqrt{2}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial z}(M) = -\frac{6}{\sqrt{3}\cdot 1} = -2\sqrt{3}.$$

Следовательно, $\overrightarrow{grad}\, v(M) = \left\{\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -2\sqrt{3}\right\}$.

**2)** Угол между двумя векторами определим по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{grad}\, u \cdot \overrightarrow{grad}\, v\right)}{\left|\overrightarrow{grad}\, u\right| \cdot \left|\overrightarrow{grad}\, v\right|}.$$

Найдем скалярное произведение векторов:

$$\left(\overrightarrow{grad}\, u \cdot \overrightarrow{grad}\, v\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}} = -\frac{32}{3\sqrt{3}}.$$

Найдем длины векторов:

$$\left|\overrightarrow{grad}\,u\right| = 2\sqrt{\frac{2}{27}+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}} = 2\sqrt{\frac{32}{27}} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}},$$
$$\left|\overrightarrow{grad}\,v\right| = \sqrt{2+2+12} = \sqrt{16} = 4.$$

Тогда $\cos\varphi = \dfrac{-32\cdot 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{2}\cdot 4} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, а значит, $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$.

Ответ: $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$.

**1.2.** Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

**Решение**.

Необходимым условием экстремума является равенство нулю частных производных функции. Так как в данном случае частные производные первого порядка всегда существуют, то для нахождения стационарных (критических) точек решим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases},$$

откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

Таким образом, получили две стационарные точки: $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 1)$.

Находим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Для точки $M_1(0, 0)$ получаем:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 0,\ B == \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = -3,\ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1} = 0,\ D = AC - B^2 = -9 < 0,$$

то есть, в этой точке **экстремума нет**.

Для точки $M_2(1, 1)$ получаем:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 6,\ B == \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_2} = -3,\ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_2} = 6,\ D = AC - B^2 = 27 > 0,$$

и $A > 0$, следовательно, в этой точке данная функция достигает локального **минимума** и $z_{\min} = z(1,1) = 1^3 + 1^3 - 3\cdot 1\cdot 1 = -1$.

Ответ: $z_{\min} = -1$ в точке $M_2(1,1)$.

**1.3.**

**1)** Экспериментально получены шесть значений функции $y = f(x)$, которые представлены в таблице.

| **x** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **y** | 0,7 | 0,5 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 4,3 |

Методом наименьших квадратов найти функцию вида $y = ax^2 + bx + c$, выражающую приближенно функцию $y = f(x)$. Сделать чертеж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции $y = ax^2 + bx + c$.

**Решение.**

Будем искать функцию $y = f(x)$ в виде квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.

Составим функцию $F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{6} \left(y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right)^2$.

Необходимое условие экстремума этой функции – равенство нулю частных производных по переменным *a*, *b* и *c*. Это система трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{6} \left(y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right)x_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^{6} \left(y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right)x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{6} \left(y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right) = 0. \end{cases}$$

В развернутой форме система для определения параметров *a*, *b* и *c* будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{6} y_i x_i^2 - a\sum_{i=1}^{6} x_i^4 - b\sum_{i=1}^{6} x_i^3 - c\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^{6} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{6} x_i^3 - b\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - c\sum_{i=1}^{6} x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{6} y_i - a\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{6} x_i - 6c = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15,$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55,$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225,$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^4 = 0^4 + 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = 979,$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_i = 0{,}7 + 0{,}5 + 1{,}5 + 2{,}0 + 2{,}5 + 4{,}3 = 11{,}5,$$

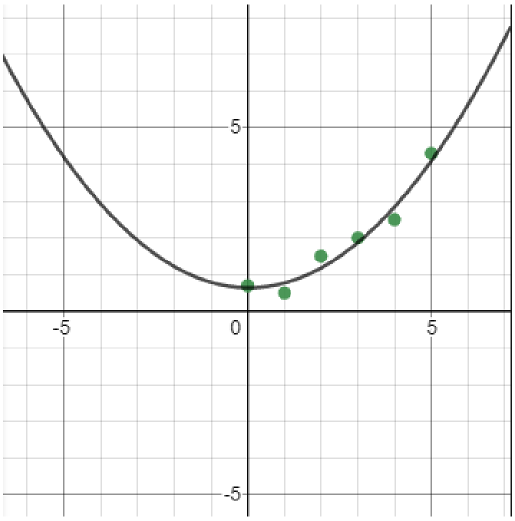
$$\sum_{i=1}^{6} y_i x_i = 0 \cdot 0{,}7 + 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 2{,}0 + 4 \cdot 2{,}5 + 5 \cdot 4{,}3 = 41,$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_i x_i^2 = 0 \cdot 0{,}7 + 1 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 1{,}5 + 9 \cdot 2{,}0 + 16 \cdot 2{,}5 + 25 \cdot 4{,}3 = 172,$$

получим: $\begin{cases} 172 - 979a - 225b - 55c = 0, \\ 41 - 225a - 55b - 15c = 0, \\ 11{,}5 - 55a - 15b - 6c = 0. \end{cases}$

Решая эту систему, находим: $a = 0{,}14$, $b = -0{,}01$, $c = 0{,}64$.

Уравнение искомой функции имеет вид: $y = 0{,}14x^2 - 0{,}01x + 0{,}64$.




**2)** Экспериментально получены пять значений функции $y = f(x)$, которые представлены в таблице.

| **x** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **y** | 0,8 | -0,1 | -1,2 | -1,3 | -1,4 |

Методом наименьших квадратов найти функцию вида $y = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c$, выражающую приближенно функцию $y = f(x)$. Сделать чертеж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции $y = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c$.

**Решение.**

Будем искать функцию $y = f(x)$ в виде функции $y = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c$.

Составим функцию $F(a,b,c)=\sum_{i=1}^{5}\left(y_i-(\frac{a}{x_i^2}+\frac{b}{x_i}+c)\right)^2.$

Необходимое условие экстремума этой функции – равенство нулю частных производных по переменным $a$, $b$ и $c$. Это система трех линейных уравнений:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{5}\left(y_i-(\frac{a}{x_i^2}+\frac{b}{x_i}+c)\right)\frac{1}{x_i^2}=0,\\ \sum_{i=1}^{5}\left(y_i-(\frac{a}{x_i^2}+\frac{b}{x_i}+c)\right)\frac{1}{x_i}=0,\\ \sum_{i=1}^{5}\left(y_i-(\frac{a}{x_i^2}+\frac{b}{x_i}+c)\right)=0.\end{cases}$$

В развернутой форме система для определения параметров $a$, $b$ и $c$ будет иметь вид:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{5}\frac{y_i}{x_i^2}-a\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i^4}-b\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i^3}-c\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i^2}=0,\\ \sum_{i=1}^{5}\frac{y_i}{x_i}-a\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i^3}-b\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i^2}-c\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i}=0,\\ \sum_{i=1}^{5}y_i-a\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i^2}-b\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i}-5c=0.\end{cases}$$

Учитывая, что

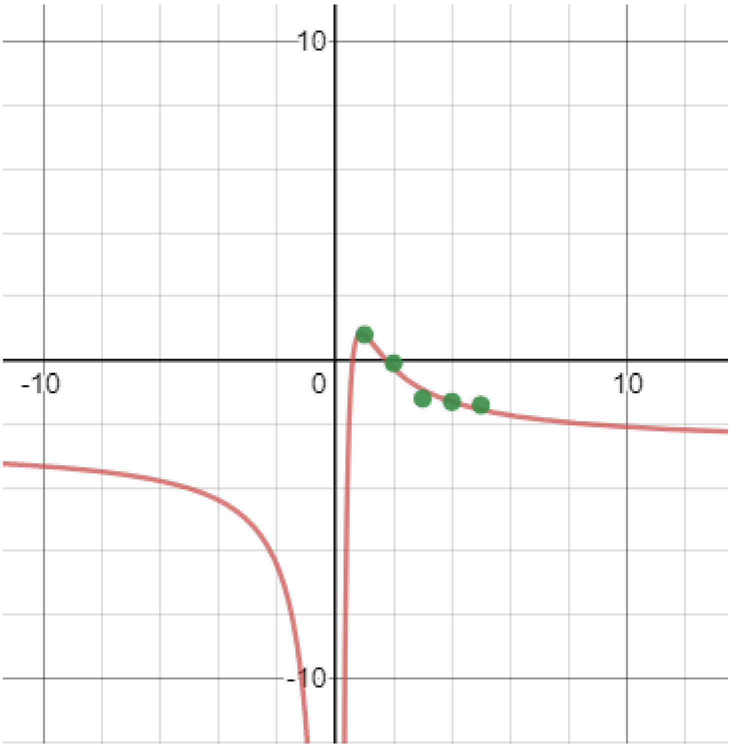
$$\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i}=2{,}283,\quad \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i^2}=1{,}464,\quad \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i^3}=1{,}186,\quad \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i^4}=1{,}08,$$

$$\sum_{i=1}^{5}y_i=-3{,}2,\quad \sum_{i=1}^{5}\frac{y_i}{x_i}=-0{,}255,\quad \sum_{i=1}^{5}\frac{y_i}{x_i^2}=0{,}5,$$

получим: $\begin{cases}0{,}5-1{,}08a-1{,}186b-1{,}464c=0,\\ -0{,}255-1{,}186a-1{,}464b-2{,}283c=0,\\ -3{,}2-1{,}464a-2{,}283b-5c=0.\end{cases}$

Решая эту систему, находим: $a=-2{,}73$, $b=6{,}21$, $c=-2{,}68$.

Уравнение искомой функции имеет вид: $y=-\frac{2{,}73}{x^2}+\frac{6{,}21}{x}-2{,}68$.




**ЗАДАНИЕ 2.**

**2.1.** Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения. Решить задачу Коши.

$$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y, \quad y(1) = 0.$$

**Решение.**

**1)** Определим тип дифференциального уравнения. Для данного уравнения это можно сделать двумя способами (на выбор).

**1 способ.**

Разрешим уравнение относительно производной $y' = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} + \dfrac{y}{x}$.

Рассмотрим функцию $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} + \dfrac{y}{x}$, стоящую в правой части уравнения.

Это однородная функция нулевого измерения, так как $f(tx, ty) = \dfrac{\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}}{tx} + \dfrac{ty}{tx} = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} + \dfrac{y}{x} = t^0 \cdot f(x, y)$.

Следовательно, данное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с однородной функцией нулевого измерения в правой части, то есть уравнением вида $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

**2 способ.**

Запишем уравнение в дифференциалах (т.е. приведем к виду $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ или $Q(x,y)dy=-P(x,y)dx$).

$$xdy=\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)dx.$$

Здесь $Q(x,y)=x$, $P(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+y$.

$Q(tx,ty)=t\cdot x=t^1\cdot Q(x,y); P(tx,ty)=\sqrt{(tx)^2+(ty)^2}+ty=t\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)=t^1\cdot P(x,y).$

Следовательно, $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции 1-го измерения, а значит, $xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y$ – однородное дифференциальное уравнение. Любое однородное уравнение можно привести к виду $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$. Сделаем это, разрешив исходное уравнение относительно производной.

**2) Решение уравнения.**

$$y'=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}+\frac{y}{x},\quad y'=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}.$$

Уравнение этого типа сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены переменной: $\frac{y}{x}=t.$

Выполним данную замену для нашего уравнения.

$$\frac{y}{x}=t,\ \Rightarrow\ y=x\cdot t,\ \Rightarrow\ y'=t+x\cdot t'.$$

Подставим в уравнение: $t+x\cdot t'=\sqrt{1+t^2}+t$.

Получим $x\cdot\frac{dt}{dx}=\sqrt{1+t^2}$ – уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные: $\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{dx}{x}$. Проинтегрируем обе части уравнения. Константу запишем в удобном виде под знаком логарифма:

$$\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|=\ln|x|+\ln|c| \text{ или } \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|=\ln|xc|,\ \Rightarrow\ t+\sqrt{1+t^2}=xc.$$

Вернёмся к старым переменным: $\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=xc$. Преобразуем, получим $\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}=c$ – общий интеграл.

**3)** Решим задачу Коши. Подставим начальные условия $y(1)=0$ в общий интеграл, чтобы определить значение константы ***c***.

$$\frac{0+\sqrt{1^2+0}}{1^2}=c, \Rightarrow \ c=1.$$

Тогда решение задачи Коши будет иметь вид: $y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2$.

**2.2.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$\cos x\cdot y'''=\cos^3 x-y''\cdot\sin x$.

**Решение.**

**1)** $\cos x\cdot y'''=\cos^3 x-y''\cdot\sin x$ – дифференциальное уравнение 3-го порядка, допускающее понижение порядка. Это уравнение вида $F(x,y'',y''')=0$, которое явно не содержит ***y*** (т.е. искомую функцию). Порядок такого уравнения можно понизить.

Полагая $y''=p$, $y'''=p'$, получим уравнение первого порядка:

$$\cos x\cdot p'=\cos^3 x-p\cdot\sin x \quad \text{или} \quad p'+p\cdot tgx=\cos^2 x \quad (*).$$

Это линейное неоднородное уравнение. Решим его методом Лагранжа (методом вариации произвольной постоянной).

**2)** Рассмотрим линейное однородное уравнение: $\frac{dp}{dx}+p\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=0$. Разделим переменные: $\frac{dp}{p}=-\frac{\sin x\,dx}{\cos x}$, $\int\frac{dp}{p}=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}$, проинтегрируем, получим общее решение однородного уравнения:

$$\ln|p|=\ln|c\cdot\cos x|, \Rightarrow \ p_{o.o.}=c\cdot\cos x.$$

**3)** Решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$p_{o.н.}=c(x)\cdot\cos x.$$

Чтобы найти функцию $c(x)$, подставим это решение в уравнение $(*)$.

$c'(x)\cdot\cos x-c(x)\cdot\sin x+c(x)\cdot\cos x\cdot tgx=\cos^2 x, \quad \Rightarrow \quad c'(x)=\cos x, \quad \Rightarrow$
$c(x)=\sin x+c_1, \Rightarrow \ p_{o.н.}=\sin x\cdot\cos x+c_1\cdot\cos x$.

**4)** Возвращаемся к старой переменной: $y''=p=\frac{1}{2}\sin 2x+c_1\cdot\cos x$. Интегрируем, получаем: $y'=-\frac{1}{4}\cos 2x+c_1\cdot\sin x+c_2$.

Интегрируем еще раз и находим общее решение уравнения:

$$y=-\frac{1}{8}\sin 2x-c_1\cdot\cos x+c_2\cdot x+c_3.$$

**2.3.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$y'' - 3y' = 10\cos x - 9x^2 - 1$.

**Решение.**

**1)** $y'' - 3y' = 10\cos x - 9x^2 - 1$ – это линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_ч.$$

Найдем решение $y_{о.о.}$ однородного уравнения $y'' - 3y' = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 3$. Следовательно, $y_{о.о.} = c_1 + c_2 \cdot e^{3x}$.

**2)** Найдем частное решение $y_ч$.

Т.к. уравнение имеет правую часть специального вида, значит, она представима как $f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right]$. Тогда частное решение будет иметь вид:

$$y_ч = e^{ax}\left[T_N(x)\cos bx + S_N(x)\sin bx\right]x^k \qquad (**),$$

где $N = \max\{m, n\}$, $T_N(x)$ и $S_N(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами, $k$ – кратность корня $a \pm ib$ характеристического уравнения.

В данном уравнении правая часть специального вида является суперпозицией двух функций, т.е. $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, поэтому частное решение имеет вид: $y_ч = y_1 + y_2$, где каждая из функций находится по формуле $(**)$. Найдем $y_1$ и $y_2$ для соответствующих $f_1$ и $f_2$.

**2.1)** $f_1 = 10\cos x = e^{0x}(10\cos x + 0 \cdot \sin x)$.

Здесь $P_n(x) = 10$, $n = 0$; $Q_m(x) = 0$, $m = 0$, $\Rightarrow$ $N = 0$.

$a = 0$, $b = 1$, $\Rightarrow$ $a \pm ib = \pm i$. Эти значения не являются корнями характеристического уравнения, т.е. $k = 0$, поэтому $y_1$ будем искать в виде:

$$y_1 = A\cos x + B\sin x.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A$ и $B$ подставляем $y_1$ в левую часть исходного уравнения и приравниваем соответствующей функции $f_1$.

Имеем: $y' = -A\sin x + B\cos x$, $y'' = -A\cos x - B\sin x$.

Получаем: $-A\cos x - B\sin x + 3A\sin x - 3B\cos x = 10\cos x$.

Отсюда: $\begin{cases} 3A - B = 0 \\ -A - 3B = 10. \end{cases}$

Решая систему, получаем: $A = -1$, $B = -3$, следовательно,

$$y_1 = -\cos x - 3\sin x.$$

**2.2)** $f_2 = -9x^2 - 1 = e^{0x}\left(-9x^2 - 1\right)$. Это частный случай правой части специального вида, когда $b = 0$.

Здесь: $P_n(x) = -9x^2 - 1$, $n = 2$.

$a=0$, $b=0$, $\Rightarrow$ $a\pm ib=0$ – это корень характеристического уравнения, $k=1$, поэтому $y_2$ следует искать в виде:

$$y_2=\left(Dx^2+Ex+F\right)\cdot x \text{ или } y_2=Dx^3+Ex^2+Fx.$$

Подставляем $y_2$ в уравнение, в правой части – только $f_2$.

Имеем: $y'=3Dx^2+2Ex+F$, $y''=6Dx+2E$.

Получаем: $6Dx+2E-9Dx^2-6Ex-3F=-9x^2-1$.

Преобразуем: $-9Dx^2+(6D-6E)x+(2E-3F)=-9x^2-1$.

Отсюда имеем: $\begin{cases}-9D & =-9\\ 6D-6E & =0\\ 2E-3F & =-1.\end{cases}$

Из системы находим: $D=1,\ E=1,\ F=1$, поэтому $y_2=x^3+x^2+x$.

**2.3)** $y_ч=y_1+y_2$, $\Rightarrow$ $y_ч=x^3+x^2+x-\cos x-3\sin x$.

**3)** Окончательно получаем:

$$y_{о.н.}=c_1+c_2e^{3x}+x^3+x^2+x-\cos x-3\sin x.$$

**2.4.** Указать структуру общего решения дифференциального уравнения, не находя коэффициентов его частных решений.

$y^{\mathrm{V}}+y''=x+e^{x/2}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-x^3\cdot e^{x/2}-x\cdot e^{x/2}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+5.$

**Решение.**

**1)** $y^{\mathrm{V}}+y''=x+e^{x/2}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-x^3\cdot e^{x/2}-x\cdot e^{x/2}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+5$ – это линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_{о.н.}=y_{о.о.}+y_ч.$$

Найдем решение $y_{о.о.}$ однородного уравнения: $y^{\mathrm{V}}+y''=0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^5+\lambda^2=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=0$, $\lambda_3=-1$ и $\lambda_{4,5}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Следовательно,

$$y_{о.о.}=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+e^{x/2}\left(c_4\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_5\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

**2)** Найдем вид частного решения $y_ч$.

После объединения соответствующих слагаемых получаем правую часть специального вида $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$, где $f_1=x+5$, $f_2=-x^3e^{x/2}$, $f_3=e^{x/2}\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-x\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. Тогда $y_ч=y_1+y_2+y_3$.

Укажем вид каждого решения $y_1$, $y_2$, $y_3$.

**2.1)** $f_1=x+5=e^{0x}(x+5)$ – частный случай.

Здесь: $P_n(x)=x+5$, $n=1$.
$a=0$, $b=0$, $\Rightarrow$ $a\pm ib=0$ – это корень характеристического уравнения. Таких корней два, $\Rightarrow$ $k=2$, $\Rightarrow$

$$y_1=e^{0x}(A_1x+B_1)\cdot x^2=(A_1x+B_1)\cdot x^2.$$

**2.2)** $f_2=-x^3e^{x/2}$ – частный случай.

$P_n(x)=-x^3$, $n=3$.
$a=\frac{1}{2}$, $b=0$, $\Rightarrow$ $a\pm ib=\frac{1}{2}$ – не является корнем характеристического уравнения, $\Rightarrow$ $k=0$, $\Rightarrow$

$$y_2=e^{x/2}\left(A_2x^3+B_2x^2+D_2x+E_2\right)\cdot x^0=e^{x/2}\left(A_2x^3+B_2x^2+D_2x+E_2\right).$$

**2.3)** $f_3=e^{x/2}\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-x\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

$P_n(x)=-x$, $n=1$; $Q_m(x)=1$, $m=0$, $\Rightarrow$ $N=\max\{m,n\}=1$.
$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\Rightarrow$ $a\pm ib=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ – это корни характеристического уравнения, $\Rightarrow$ $k=1$, $\Rightarrow$

$$y_3=e^{x/2}\left((A_3x+B_3)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+(D_3x+E_3)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\cdot x^1.$$

**3)** $y_{о.н.}=y_{о.о.}+y_1+y_2+y_3$.

## ЗАДАНИЕ 3.

**3.1.** Исследовать числовой ряд на сходимость.

**а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

**Решение.**

Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot n^n}{n!\cdot(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1,$$ следовательно,

ряд сходится по признаку Даламбера.

**б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

**Решение.**

Воспользуемся радикальным признаком Коши.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{3n^2+5} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{3n^2} = \dfrac{2}{3} < 1$, следовательно, ряд сходится по радикальному признаку Коши.

**3.2.** Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n (x-3)^n}{n\,5^n}$.

**Решение.**

**1)** Степенной ряд сходится абсолютно в интервале $|x-x_0| < R$. Вне этого интервала ряд расходится. На границах требуются дополнительные исследования.

Радиус сходимости $R$ может быть найден по формулам:

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ или $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Имеем: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n\,5^n}{|\,(-1)^n\,|}} = 5$, следовательно, ряд сходится абсолютно в области $|x-3| < 5$ или $-2 < x < 8$.

**2)** Исследуем сходимость ряда на границах области.

**2.1)** $x = -2$.

Подставляя это значение в исходный ряд, получим

$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(-5)^n}{n\,5^n} = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(-1)^n 5^n}{n\,5^n} = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{2n} 5^n}{n\,5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – гармонический ряд, он расходится.

**2.2)** $x = 8$.

В этой точке имеем $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 5^n}{n\,5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ – знакочередующийся ряд.

Исследуем данный ряд на абсолютную сходимость.

Составим ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Так как данный ряд расходится, то знакочередующийся ряд абсолютно не сходится.

Проверим условную сходимость, воспользовавшись признаком Лейбница.

Последовательность $b_n = \dfrac{1}{n}$ монотонно убывает, так как

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0$$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, следовательно, ряд сходится условно по признаку Лейбница.

**3)** Вывод: область сходимости степенного ряда $x \in (-2{,}8]$.

**3.3.** Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{1/5} \frac{\ln(1+4x)}{x}dx$ с точностью $\alpha = 0{,}001$, представив подынтегральную функцию в виде степенного ряда.

**Решение.** Обозначим: $t = 4x$. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Для этого в основном разложении функции

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}, \quad -1 < t \le 1$$

подставим $4x$ вместо $t$:

$$\ln(1+4x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(4x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4^n x^n}{n}, \quad -\frac{1}{4} < x \le \frac{1}{4}.$$

Тогда,

$$\frac{\ln(1+4x)}{x} == \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^n x^n}{nx} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^n x^{n-1}}{n}.$$

Интервал $[0; 1/5] \in$ области сходимости $(-1/4; 1/4]$, поэтому проинтегрируем ряд на отрезке $[0; 1/5]$:

$$\int\limits_0^{1/5}\frac{\ln(1+4x)}{x}dx = \int\limits_0^{1/5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^n}{n}x^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^n}{n}\left.\frac{x^n}{n}\right|_0^{1/5} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^n}{n^2 5^n} - 0.$$

Получен знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, поэтому для вычисления его суммы с точностью $\alpha$ возьмем столько членов ряда, чтобы модуль первого отброшенного был меньше заданной точности.

Замечаем, что одиннадцатый член ряда $a_{11} = \frac{4^{11}}{11^2 5^{11}} \approx 0{,}0007 < \alpha$.

Следовательно, чтобы вычислить интеграл с точностью до $\alpha = 0{,}001$, достаточно взять десять членов ряда.

$$\int\limits_0^{1/5}\frac{\ln(1+4x)}{x}dx \approx 0{,}8 - 0{,}16 + 0{,}056 - 0{,}025 + 0{,}013 - 0{,}007 + 0{,}004 - 0{,}003 +$$
$$+ 0{,}002 - 0{,}0012 \approx 0{,}678.$$

**Ответ:** $\int\limits_0^{1/5}\frac{\ln(1+4x)}{x}dx \approx 0{,}678$.

**3.4.** Функцию $y(x)=\begin{cases}-\sin\dfrac{\pi}{2}x, & 0<x\le 1,\\ x-2, & 1<x<2\end{cases}$ разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг.

**Решение.** Известно, что в ряд по синусам кратных дуг раскладываются нечетные функции, следовательно, необходимо доопределить нашу функцию в интервал $(-2;0)$ нечетным образом, т.е. симметрично относительно начала координат.

$$y(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l};\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l y(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,$$

тогда для нашей функции при $l=2$ имеем:

$$b_n=-\int_0^1\sin\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi nx}{2}dx+\int_1^2(x-2)\sin\frac{\pi nx}{2}dx.$$

Для вычисления первого интеграла воспользуемся формулой:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

во втором интеграле используем формулу интегрирования по частям

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu;\quad \left[\begin{aligned}&u=x-2\Rightarrow du=dx;\\ &dv=\sin\frac{\pi nx}{2}dx\Rightarrow v=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\end{aligned}\right].$$

Тогда,

$$b_n=-\frac{1}{2}\int_0^1\cos\frac{\pi x}{2}(1-n)dx+\frac{1}{2}\int_0^1\cos\frac{\pi x}{2}(1+n)dx-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}(x-2)\Big|_1^2+$$

$$+\frac{2}{\pi n}\int_1^2\cos\frac{\pi nx}{2}dx=-\frac{1}{\pi(1-n)}\sin\frac{\pi x}{2}(1-n)\Big|_0^1+\frac{1}{\pi(1+n)}\sin\frac{\pi x}{2}(1+n)\Big|_0^1-$$

$$-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{4}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_1^2=-\frac{1}{\pi(1-n)}\sin\frac{\pi}{2}(1-n)+\frac{1}{\pi(1+n)}\sin\frac{\pi}{2}(1+n)-$$

$$-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{4}{\pi^2n^2}\left(\sin\frac{2\pi n}{2}-\sin\frac{\pi n}{2}\right)=\left[\sin(\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=\cos\alpha;\sin\pi n=0\right]$$

$$=-\frac{1}{\pi(1-n)}\cos\frac{\pi}{2}n+\frac{1}{\pi(1+n)}\cos\frac{\pi}{2}n-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}-\frac{4}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{2}=$$

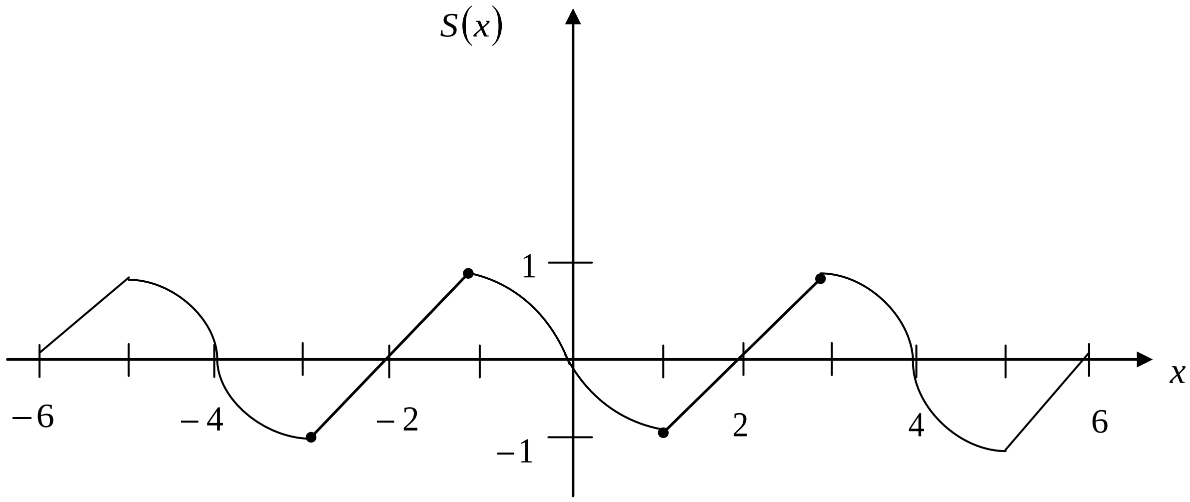
$$=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{n(1-n^2)}\cos\frac{\pi n}{2}-\frac{4}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Значит, $y(x)\sim\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(-\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{n(1-n^2)}\cos\dfrac{\pi n}{2}-\dfrac{4}{\pi^2n^2}\sin\dfrac{\pi n}{2}\right)\sin\dfrac{\pi nx}{2}.$

Ряд сходится к функции на промежутке $(-2;2)$, за пределами этого интервала к периодическому продолжению картины интервала $(-2;2)$ на всю числовую ось в граничных точках и точках разрыва к среднему арифметическому левого и правого пределов.

$S(2+4n)=0, \quad n \in Z;$

$S(1+4n)=-1, \quad n \in Z.$




**Ответ**: $y(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \left( -\frac{2}{\pi} \frac{1}{n(1-n^2)} \cos\frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin\frac{\pi n}{2} \right) \sin\frac{\pi n x}{2}.$