**РАЗДЕЛ № 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

**Задача 1**

Определить собственные значения и собственные векторы матрицы третьего порядка.



**Решение**

Дана матрица третьего порядка:



Найдем характеристическое уравнение:



Вычислим определитель:



Раскроем скобки:



Теперь найдем собственные значения: λ1 = 3, λ2 = 3, λ3 = 9

Теперь найдем собственные векторы для каждого собственного значения.

1) λ1 = 3:



2) λ2 = 3:



3) λ3 = 9:

Собственные значения и соответствующие им собственные векторы:



Таким образом, собственные значения матрицы *A* равны λ1 = 3, λ2 = 3 и λ3 = 9, а соответствующие им собственные векторы равны

,  и .

**Задача 2**

Доказать совместность системы и решить её тремя способами: по формулам Крамера, методом Гаусса и средствами матричного исчисления.



**Решение**

Дана система уравнений:



**Метод Крамера**

Для применения метода Крамера, вычислим определитель матрицы коэффициентов и проверим, не равен ли он нулю:



Определитель равен нулю, поэтому метод Крамера не может быть применен.

**Метод Гаусса**

Приведем систему уравнений к треугольному виду:



Теперь решим систему обратным ходом:







Таким образом, общее решение системы:



**Матричный метод**

Запишем систему уравнений в виде *AX* = *B*, где *A* - матрица коэффициентов, *X* - вектор переменных, *B* - вектор свободных членов:



Так как определитель матрицы *A* равен нулю, мы не можем найти обратную матрицу и использовать формулу *X* = *A*-1*B*. Вместо этого найдем ранг матрицы коэффициентов *A* и расширенной матрицы [*A* | *B*].



Так как ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы и меньше числа переменных, система совместна и имеет бесконечно много решений. Решение совпадает с решением, найденным методом Гаусса:



**Задача 3**

Исследовать и найти общее решение системы линейных однородных уравнений



**Решение**

Исследуем и найдем общее решение системы линейных однородных уравнений:



Сначала приведем систему уравнений к треугольному виду с помощью метода Гаусса:



Теперь можно выразить *x*3 и *x*2 через *x*4:





Подставим найденные выражения для *x*2 и *x*3 в первое уравнение и выразим *x*1 через *x*4:



Общее решение системы имеет вид:



**РАЗДЕЛ № 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА**

**Задача 1**

Составить уравнение плоскости *Р*, проходящей через точку *А* перпендикулярно вектору. Написать ее общее уравнение, а также нормальное уравнение плоскости и уравнение плоскости в отрезках. Составить уравнение плоскости *P*1, проходящей через точки *А*, *В*, *С*. Найти угол между плоскостями *Р* и *P*1. Найти расстояние от точки *D* до плоскости *Р*.

Координаты точки *А*: (4; -3; -2)

Координаты точки *В*: (2; 2; 3)

Координаты точки *С*: (-1; -2; 3)

Координаты точки *D*: (2; -2; -3)

**Решение**

Даны точки *A*(4; -3; -2), *B*(2; 2; 3), *C*(-1; -2; 3) и *D*(2; -2; -3).

**Плоскость *P***

1) Общее уравнение плоскости *P* имеет вид *A*x + *B*y + *C*z = *D*. Найдем нормальный вектор  к плоскости *P*, который совпадает с вектором :



Теперь найдем *D*, подставив координаты точки *A* в уравнение плоскости:



Таким образом, общее уравнение плоскости *P* имеет вид:



2) Нормальное уравнение плоскости имеет вид



где  и .

Тогда нормальное уравнение плоскости *P*:



3) Уравнение плоскости в отрезках:



**Плоскость *P*1**

4) Уравнение плоскости *P*1, проходящей через точки *A*, *B*, *C*, можно найти через векторное произведение векторов  и :





Теперь найдем *D*, подставив координаты точки *A* в уравнение плоскости:



Таким образом, уравнение плоскости *P*1 имеет вид:



**Угол между плоскостями *P* и *P*1**

5) Угол между плоскостями равен углу между их нормалями  и Используем формулу скалярного произведения:



Таким образом, угол между плоскостями *P* и *P*1 равен



**Расстояние от точки *D* до плоскости *P***

6) Расстояние от точки *D*(2; -2; -3) до плоскости *P* можно найти с помощью формулы: 

Таким образом, расстояние от точки *D* до плоскости *P* равно 2.

**Задача 2**

Прямая *l* задана в пространстве общими уравнениями. Написать её каноническое и параметрическое уравнения. Составить уравнение прямой *l*1, проходящей через точку *М* параллельно прямой *l*, и вычислить расстояние между ними. Найти проекцию точки *М* на прямую *l* и точку пересечения прямой *l* и плоскости *Р*.

Общие уравнения прямой *l*:



Координаты точки *М*(-1; 1; 0)

Общее уравнение плоскости *P*: *x* + 2*y* - *z* + 5 = 0

**Решение**

Даны общие уравнения прямой *l*:



Точка *M*(-1; 1; 0) и плоскость *P*: *x* + 2*y* - *z* + 5 = 0.

**Каноническое и параметрическое уравнения прямой *l***

1) Из уравнений системы найдем *z* в виде *z* = -2*x* - 3*y* - 6. Подставим это значение во второе уравнение:



Из последнего уравнения получаем, что 

Теперь найдем *z*:



Таким образом, каноническое уравнение прямой *l* имеет вид:



А параметрическое уравнение прямой *l*:



Уравнение прямой *l*1 и расстояние между *l* и *l*1

2) Прямая *l*1 проходит через точку *M*(-1; 1; 0) и параллельна прямой *l*. Из параметрического уравнения *l* получаем направляющий вектор прямой *l*:



Тогда параметрическое уравнение прямой *l*1:



3) Для нахождения расстояния между прямыми *l* и *l*1 воспользуемся формулой для расстояния между двумя параллельными прямыми:



где  - направляющий вектор прямых,

 - вектор между любой парой точек на каждой из прямых.

Возьмем точку *A*(0; 1; -5) на прямой *l* и точку *M*(-1; 1; 0) на прямой *l*1:



Теперь найдем векторное произведение :



Теперь найдем норму векторов  и :





Теперь можно найти расстояние между прямыми *l* и *l*1:



Проекция точки *M* на прямую *l* и точка пересечения прямой *l* и плоскости *P*

4) Проекция точки *M* на прямую *l* может быть найдена через формулу:



где *A*(0; 1; -5) - точка на прямой l, *M*(-1; 1; 0), а  - направляющий вектор прямой *l*.

Подставим значения:







Таким образом, проекция точки *M* на прямую *l* равна



5) Точка пересечения прямой *l* и плоскости *P* удовлетворяет обоим уравнениям. Подставим параметрическое уравнение прямой *l* в уравнение плоскости *P*:



Решая это уравнение относительно *t*, получаем:



Теперь подставим значение *t* в параметрическое уравнение прямой *l*:



Таким образом, точка пересечения прямой *l* и плоскости *P* равна:



Точка пересечения прямой *l* и плоскости *P* равна 

**РАЗДЕЛ № 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

**Задача 1**

Даны координаты вершин треугольника *АВС*. Составить уравнения сторон треугольника. Составить уравнения медианы, высоты и биссектрисы угла *А*, найти их длины. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника и параллельных его сторонам.

Координаты точки *А* (5; 0)

Координаты точки *В* (2; 2)

Координаты точки *С* (-2; 3)

**Решение**

1)Уравнения сторон треугольника можно найти, используя две точки на каждой стороне:

Уравнение стороны *AB*:



Уравнение стороны *BC*:



Уравнение стороны *CA*:



2) Уравнения медианы, высоты и биссектрисы угла *A*:

Медиана *AM* проходит через середину стороны *BC*. Найдем координаты точки *M*:



Теперь найдем уравнение медианы *AM*:



Высота *AH* перпендикулярна стороне *BC*. Уравнение высоты можно записать в виде:



где *k* - коэффициент, который мы найдем, используя условие перпендикулярности:



Теперь найдем уравнение высоты *AH*:



Биссектриса угла A делит угол между сторонами *AB* и *CA* пополам. Уравнение биссектрисы можно записать в виде:



Упростим уравнение биссектрисы:



3) Длины медианы, высоты и биссектрисы угла *A*:

Длина медианы *AM*:



Длина высоты *AH*:



Длина биссектрисы *l*A:



4) Уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника и параллельных его сторонам:

Прямая через вершину *A* и параллельная стороне *BC*:



Прямая через вершину *B* и параллельная стороне *AC*:



Прямая через вершину *C* и параллельная стороне *AB*:



**Задача 2**

Координатам вершин пирамиды *АВСD* средствами векторной алгебры

найти:

1) длины ребер *АВ* и *АС*;

2) угол между ребрами АВ и АС;

3) площадь грани АВС;

4) проекцию вектора  на ;

5) объем пирамиды

Координаты точки *А* (2; 0; 3)

Координаты точки *В* (1; 0; 7)

Координаты точки *С* (0; 1; 3)

Координаты точки *D* (2; 2; 4)

**Решение**

1) Для нахождения длин ребер *AB* и *AC* воспользуемся формулой расстояния между двумя точками:





2) Чтобы найти угол между ребрами *AB* и *AC*, сначала найдем их векторы:





Теперь воспользуемся формулой для нахождения угла между двумя векторами:





3) Для нахождения площади грани *ABC* используем векторное произведение и найдем площадь треугольника:





4) Найдем проекцию вектора  на :



5) Для нахождения объема пирамиды *ABCD* используем скалярное произведение:



Сначала найдем вектор :



Теперь найдем скалярное произведение 



Теперь найдем объем пирамиды:



**РАЗДЕЛ № 4. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

**Задача 1**

Построить графики функций

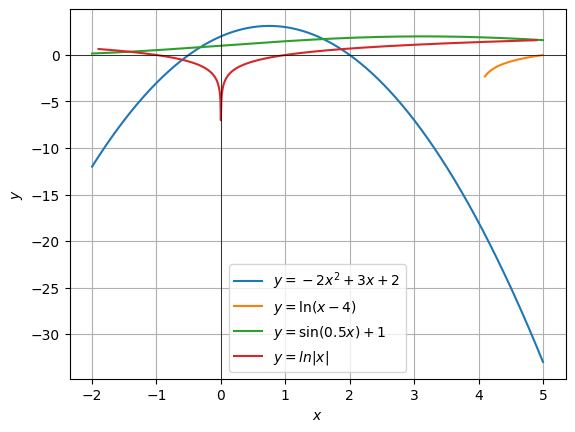
*y* = -2*x*2 + 3*x* + 2, *y* = ln(*x* - 4), *y* = sin 0,5*x* + 1, *y* = ln |*x*|

**Решение**

Даны функции:

*y* = -2*x*2 + 3*x* + 2, *y* = ln(*x* - 4), *y* = sin 0,5*x* + 1, *y* = ln |*x*|

Создадим область определения функций, после чего вычислим значения функций и отобразим их на графиках. Ниже представлены графики заданных функций:



**Задача 2**

Записать уравнения кривых в полярных координатах и построить их



**Решение**

Запись уравнений кривых в полярных координатах:

1. :

При переходе к полярным координатам , поэтому . Решая относительно *r*, получаем уравнение кривой:

*r*=π/2cosθ

1. *x*2 + *y*2 = 64:

Здесь *x*2 + *y*2 = *r*2, поэтому уравнение кривой в полярных координатах:

*r*2=64

1. *x*2 + *y*2 = -8*x*:

Перепишем уравнение, используя полярные координаты: Решая относительно *r*, получаем уравнение кривой:

*r*=−8cos*θ*

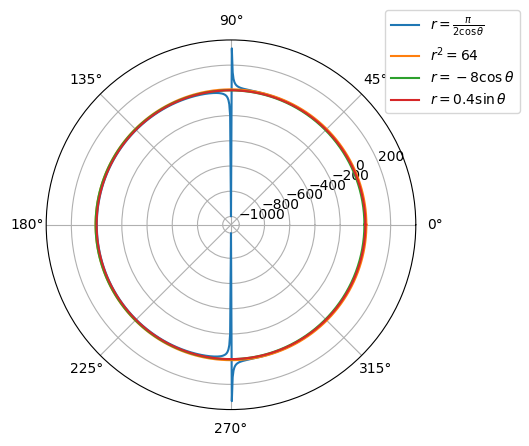
1. x2 + y2 = 0,4y:

Перепишем уравнение, используя полярные координаты:

. Решая относительно *r*, получаем уравнение кривой:

*r*=0,4sinθ

Теперь построим графики кривых в полярных координатах



**Задача 3**

Вычислить пределы функций, не пользуясь средствами дифференциального исчисления.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

**Решение**











**Задача 4**

Исследовать на непрерывность функции, найти точки разрыва и определить их тип. Построить схематические графики функций.



**Решение**

1)

Функция непрерывна на всей области определения, кроме точки *x* = 4. В этой точке функция имеет разрыв первого рода.

2)

Функция непрерывна на всей области определения, кроме точки *x* = 7. В этой точке функция имеет разрыв второго рода.

3)

Функция непрерывна на всей области определения, кроме точек *x* = 0 и *x* = 1. В обеих точках функция имеет разрыв первого рода.

1) График функции  представляет собой параболу с разрывом в точке *x* = 4.

2) График функции  представляет собой две горизонтальные прямые *y* = 1 и *y* = -1 с разрывом в точке *x* = 7.

3) График функции состоит из трех частей: прямой 4*x* + 1 на интервале (-Ꝏ, 0), параболы (*x* + 1)2 на интервале [0, 1) и горизонтальной прямой *y* = 4 на интервале [1, Ꝏ). В точках *x* = 0 и *x* = 1 имеются разрывы первого рода.