СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Современное состояние науки и техники требует от инженеров знания основ численных методов и применения этих знаний к решению научных и технических задач.

Курсовая работа по дисциплине «Численные методы» – форма внеаудиторной самостоятельной работы студентов, целью которой являются систематизация теоретических знаний и практических навыков, полученных при изучении дисциплины.

Методические указания являются руководством к выполнению курсовой работы по решению систем уравнений, составлены в соответствии с рабочими учебными программами для студентов всех форм обучения направлений подготовки 27.03.04 «Управление в технических системах» и 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», включают четыре раздела и приложение.

Раздел 1 содержит прямые методы решения (метод обратной матрицы, метод Крамера, методы Гаусса) и численные методы решения (метод простой итерации, метод Зейделя, метод уточнения корней) для решения систем линейных уравнений (СЛУ).

Раздел 2 содержит численные методы для решения систем нелинейных уравнений (СНУ) (метод Ньютона, метод итераций и метод Зейделя).

Раздел 3 содержит численные методы для решения задачи Коши систем дифференциальных уравнений (СДУ) и дифференциальных уравнений (ДУ) высших порядков (методы Эйлера, Рунге-Кутта, многошаговые методы Адамса), а также метод решения краевой задачи для ДУ второго порядка.

Раздел 4 содержит сведения о порядке организации выполнения и защиты курсовой работы.

Приложение содержит требования к оформлению пояснительной записки к курсовой работе согласно ДСТУ 3008-95.

1 РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1 Постановка задачи

Общий вид системы из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \tag{1.1}$$

Систему (1.1) можно записать в матрично-векторном виде:

$$AX = B. \tag{1.2}$$

A – квадратная матрица коэффициентов системы (1.1) порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

X и B – векторы неизвестных и правых частей размером n соответственно:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Совокупность чисел $x_i\ i = 1,2,\ldots,n$ (значения вектора X), превращающие СЛУ (1.1) в тождество, называется **решением системы**, а сами числа $x_i\ i = 1,2,\ldots,n$ – **корнями системы**.

Методы решения СЛУ делятся на две группы – прямые и итерационные.

Прямые (точные) методы используют конечные соотношения (формулы) для вычисления неизвестных. Они дают решение после выполнения заранее известного числа операций. К ним относятся, например, метод обратной матрицы, метод Крамера, метод Гаусса.

Итерационные методы – методы последовательных приближений, требующие начального приближения. С помощью определенного алгоритма проводится один цикл вычислений, который называется итерацией. После выполнения итерации будет найдено новое приближение. Итерации проводятся до получения решения с необходимой точностью. К этой группе методов относятся, например, метод простой итерации и метод Зейделя.

1.2 Проверка существования решения

Для существование единственного решения СЛУ (1.1) необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы A не равнялся нулю: $\det A \neq 0$.

Для квадратной матрицы A порядка n определитель порядка n равен

$$\det A = \sum (-1)^{\kappa} \cdot a_{1\alpha} a_{2\beta} \cdot \ldots \cdot a_{n\omega}, \tag{1.3}$$

где α, β, ω пробегают все возможные *n!* перестановок номеров *1,2,…,n*,
k – число инверсий в данной перестановке: *k=0,* если перестановка четная;
k=1, если перестановка нечетная.

На практике для вычисления определителей высших порядков применяют метод понижения порядка или метод Гаусса.

Метод понижения порядка заключается в вычислении n определителей $(n-1)$-го порядка:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}. \tag{1.4}$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется соответствующий минор M_{ij}, взятый с определенным знаком:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, который образуется из заданного определителя путем вычеркивания i-го строки и j-го столбца.

Метод Гаусса заключается в сведении матрицы A к верхнему треугольному, нижнему треугольному или диагональному виду, и вычислению определителя как произведение элементов, стоящих на главной диагонали.

Для верхней треугольной:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Для нижней треугольной:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Для диагональной:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

1.3 Прямые методы решения

1.3.1 Метод обратной матрицы

Решение СЛУ (1.2) представляют в матрично-векторном виде:

$$X = A^{-1}B \tag{1.5}$$

где A^{-1} – матрица, обратная матрице A.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}...A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}...A_{2n} \\ & ... \\ A_{n1} & A_{n2}...A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

Пример 1.1: Решить СЛУ методом обратной матрицы с $\Delta = 0{,}01$.

$$\begin{cases} 0{,}87x_1 - 0{,}22x_2 + 0{,}33x_3 - 0{,}07x_4 = 0{,}11 \\ 0{,}55x_2 + 0{,}23x_3 - 0{,}07x_4 = -0{,}33 \\ 0{,}11x_1 - 1{,}08x_3 + 0{,}18x_4 = -0{,}85 \\ 0{,}08x_1 + 0{,}09x_2 - 0{,}33x_3 - 0{,}79x_4 = 1{,}7 \end{cases}$$

Решение.

Вычислим $\det A$:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 0{,}87 & -0{,}22 & 0{,}33 & -0{,}07 \\ 0 & 0{,}55 & 0{,}23 & -0{,}07 \\ 0{,}11 & 0 & -1{,}08 & 0{,}18 \\ 0{,}08 & 0{,}09 & -0{,}33 & -0{,}79 \end{pmatrix} = 0{,}455$$

Вычислим A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}87 & -0{,}22 & 0{,}33 & -0{,}07 \\ 0 & 0{,}55 & 0{,}23 & -0{,}07 \\ 0{,}11 & 0 & -1{,}08 & 0{,}18 \\ 0{,}08 & 0{,}09 & -0{,}33 & -0{,}79 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}097 & 0{,}445 & 0{,}441 & -0{,}036 \\ -0{,}044 & 1{,}812 & 0{,}393 & -0{,}067 \\ 0{,}121 & 0{,}082 & -0{,}810 & -0{,}202 \\ 0{,}056 & 0{,}217 & 0{,}428 & -1{,}193 \end{pmatrix}$$

Вычислим X по (1.5) с $\Delta = 0{,}01$:

$$X = \begin{pmatrix} 1{,}097 & 0{,}445 & 0{,}441 & -0{,}036 \\ -0{,}044 & 1{,}812 & 0{,}393 & -0{,}067 \\ 0{,}121 & 0{,}082 & -0{,}810 & -0{,}202 \\ 0{,}056 & 0{,}217 & 0{,}428 & -1{,}193 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0{,}11 \\ -0{,}33 \\ -0{,}85 \\ 1{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}46 \\ -1{,}05 \\ 0{,}33 \\ -2{,}46 \end{pmatrix}$$

Выполним проверку полученного результата подстановкой в исходную СЛУ:

$$\begin{cases} 0,87*(-0,46)+(-0,22)*(-1,05)+0,33*0,33+(-0,07)*(-2,46)=0,112 \\ 0*(-0,46)+0,55*(-1,05)+0,23*0,33+(-0,07)*(-2,46)=-0,329 \\ 0,11*(-0,46)+0*(-1,05)+(-1,08)*0,33+0,18*(-2,46)=-0,850 \\ 0,08*(-0,46)+0,09*(-1,05)+(-0,33)*0,33+(-0,79)*(-2,46)=1,703 \end{cases}$$

Абсолютные погрешности решения СЛУ составляют для первого уравнения 0,002, для второго – 0,001, для третьего – 0,000, для четвертого – 0,003 и являются меньшими значения $\Delta = 0,01$.

Таким образом, корнями СЛУ с $\Delta = 0,01$ являются

$$x_1 = -0,46; \quad x_2 = -1,05; \quad x_3 = 0,33; \quad x_4 = -2,46.$$

1.3.2 Метод Крамера

Каждое неизвестное СЛУ (1.1) представляется в виде отношения соответствующих определителей.

Для системы из двух уравнений ($n = 2$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

Пример 1.2: Решить СЛУ из примера 1.1 методом Крамера с $\Delta = 0,01$.

Решение.

Вычислим D=$\det A$:

$$D = \begin{vmatrix} 0{,}87 & -0{,}22 & 0{,}33 & -0{,}07 \\ 0 & 0{,}55 & 0{,}23 & -0{,}07 \\ 0{,}11 & 0 & -1{,}08 & 0{,}18 \\ 0{,}08 & 0{,}09 & -0{,}33 & -0{,}79 \end{vmatrix} = 0{,}455$$

Вычислим D_1:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0{,}11 & -0{,}22 & 0{,}33 & -0{,}07 \\ -0.33 & 0{,}55 & 0{,}23 & -0{,}07 \\ -0{,}85 & 0 & -1{,}08 & 0{,}18 \\ 1.70 & 0{,}09 & -0{,}33 & -0{,}79 \end{vmatrix} = -0.210$$

Вычислим D_2

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0{,}87 & 0{,}11 & 0{,}33 & -0{,}07 \\ 0 & -0{,}33 & 0{,}23 & -0{,}07 \\ 0{,}11 & -0{,}85 & -1{,}08 & 0{,}18 \\ 0{,}08 & 1.70 & -0{,}33 & -0{,}79 \end{vmatrix} = -0{,}478$$

Вычислим D_3:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0{,}87 & -0{,}22 & 0{,}11 & -0{,}07 \\ 0 & 0{,}55 & -0{,}33 & -0{,}07 \\ 0{,}11 & 0 & -0{,}85 & 0{,}18 \\ 0{,}08 & 0{,}09 & 1{,}70 & -0{,}79 \end{vmatrix} = 0{,}150$$

Вычислим D_4:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 0{,}87 & -0{,}22 & 0{,}33 & 0{,}11 \\ 0 & 0{,}55 & 0{,}23 & -0{,}33 \\ 0{,}11 & 0 & -1{,}08 & -0{,}85 \\ 0{,}08 & 0{,}09 & -0{,}33 & 1{,}70 \end{vmatrix} = -1{,}117$$

Вычислим значения неизвестных x_i $i = \overline{1{,}4}$ с $\Delta = 0{,}01$:

$$x_1 = -0{,}210 / 0{,}455 = -0{,}46$$

$$x_1 = -0{,}478 / 0{,}455 = -1{,}05$$

$$x_1 = 0{,}150 / 0{,}455 = 0{,}33$$

$$x_1 = -1{,}117 / 0{,}455 = -2{,}45$$

Выполним проверку полученного результа подстановкой в исходную СЛУ:

$$\begin{cases} 0{,}87 * (-0{,}46) + (-0{,}22) * (-1{,}05) + 0{,}33 * 0{,}33 + (-0{,}07) * (-2{,}45) = 0{,}111 \\ 0 * (-0{,}46) + 0{,}55 * (-1{,}05) + 0{,}23 * 0{,}33 + (-0{,}07) * (-2{,}45) = -0{,}330 \\ 0{,}11 * (-0{,}46) + 0 * (-1{,}05) + (-1{,}08) * 0{,}33 + 0{,}18 * (-2{,}45) = -0{,}848 \\ 0{,}08 * (-0{,}46) + 0{,}09 * (-1{,}05) + (-0{,}33) * 0{,}33 + (-0{,}79) * (-2{,}45) = 1{,}695 \end{cases}$$

Абсолютные погрешности решения СЛУ составляют для первого уравнения 0,001, для второго – 0,000, для третьего – 0,002, для четвертого – 0,005 и являются меньшими значения $\Delta = 0{,}01$.

Таким образом, корнями СЛУ с $\Delta = 0{,}01$ являются

$$x_1 = -0{,}46; \quad x_2 = -1{,}05; \quad x_3 = 0{,}33; \quad x_4 = -2{,}45.$$

1.3.3 Метод Гаусса

Метод Гаусса состоит из прямого и обратного хода.

Прямой ход состоит в приведении матрицы *A* к верхнему треугольному виду путем последовательного исключения неизвестных из уравнений системы.

С помощью первого уравнения исключается x_1 из второго и всех последующих уравнений системы.

С помощью второго уравнения исключается x_2 из третьего и всех последующих уравнений системы и т.д. до тех пор, пока в левой части последнего *n*-го уравнения останется лишь один член с неизвестным x_n.

Обратный ход состоит в вычислении неизвестных, что достигается последовательным решением преобразованной системы уравнений с треугольной матрицей коэффициентов.

Решая последнее уравнение, находим единственное неизвестное x_n. Используя это значение, из предшествующего уравнения вычисляем x_{n-1} и т.д. Последнм находим x_1 из первого уравнения.

Для СЛУ из трех уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Прямой ход:

1. $a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \quad i = 2,3\,,\ j = 2,3$

$$b'_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1 \qquad i = 2,3$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases}$$

2. $a''_{33} = a'_{33} - \dfrac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{23}$

$$b''_3 = b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad a''_{33}x_3 = b''_3 \end{cases}$$

Обратный ход:

$$x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$$

$$x_2 = \frac{1}{a'_{22}}(b'_2 - a'_{23}\,x_3)$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$$

Аналогично строится вычислительный алгоритм метода Гаусса для СЛУ с произвольным числом уравнений.

Метод Гаусса по схеме единственного деления состоит в удовлетворении на этапе прямого хода требования неравенства нулю коэффициентов $a_{11}\,, a'_{22}\,, a''_{33}$. В противном случае необходимо предварительно переставить уравнения системы.

Метод Гаусса с выбором главного элемента состоит в в удовлетворении на этапе прямого хода требования, чтобы коэффициенты $a_{11}\,, a'_{22}\,, a''_{33}$ являлись максимальными по модулю из всех оставшихся в соответствующем столбце элементов. В противном случае необходимо предварительно переставить уравнения системы.

Пример 1.3: Решить СЛУ из примера 1.1 методом Гаусса с выбором главного элемента с $\Delta = 0{,}01$.

Решение.

Выполним прямой ход.

Первый шаг преобразований.

Максимальный по модулю элемент 1-го столбца $a_{11} = 0{,}87$. Перестановка уравнений местами не требуется.

Вычислим значения $a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \quad i = 2, 3, 4\,,\ j = 2, 3, 4$ и $b'_i = b_i - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} b_1 \quad i = 2, 3, 4$.

Для второго уравнения $a_{21} = 0$. Поэтому

$$a'_{22} = a_{22} = 0{,}55$$

$$a'_{23} = a_{23} = 0{,}23$$

$$a'_{24} = a_{24} = -0{,}07$$

$$b'_2 = b_2 = -0{,}33$$

Для третьего уравнения:

$$a'_{32} = a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12} = 0 - \frac{0{,}11}{0{,}87} * (-0{,}22) = 0{,}028$$

$$a'_{33} = a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13} = -1{,}08 - \frac{0{,}11}{0{,}87} * 0{,}33 = -1{,}122$$

$$a'_{34} = a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{14} = 0{,}18 - \frac{0{,}11}{0{,}87} * (-0{,}07) = 0{,}189$$

$$b'_3 = b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} b_1 = -0{,}85 - \frac{0{,}11}{0{,}87} * 0{,}11 = -0{,}864$$

Для четвертого уравнения:

$$a'_{42} = a_{42} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{12} = 0{,}09 - \frac{0{,}08}{0{,}87} * (-0{,}22) = 0{,}110$$

$$a'_{43} = a_{43} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{13} = -0{,}33 - \frac{0{,}08}{0{,}87} * 0{,}33 = -0{,}360$$

$$a'_{44} = a_{44} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{14} = -0{,}79 - \frac{0{,}08}{0{,}87} * (-0{,}07) = -0{,}784$$

$$b'_4 = b_4 - \frac{a_{41}}{a_{11}} b_1 = 1{,}70 - \frac{0{,}08}{0{,}87} * 0{,}11 = 1{,}690$$

Таким образом после первого шага преобразований СЛУ примет вид:

$$\begin{cases} 0,87x_1 - 0,22x_2 + 0,33x_3 - 0,07x_4 = 0,11 \\ \qquad 0,55x_2 + 0,23x_3 - 0,07x_4 = -0,33 \\ \qquad 0,028x_2 - 1,122x_3 + 0,189x_4 = -0,864 \\ \qquad 0,110x_2 - 0,360x_3 - 0,784x_4 = 1,690 \end{cases}$$

Второй шаг преобразований.

Максимальный по модулю элемент 2-го столбца $a'_{22} = 0,55$. Перестановка уравнений местами не требуется. Вычислим значения $a''_{ij} = a'_{ij} - \frac{a'_{i2}}{a'_{22}} a'_{2j}$ $\quad i = 3,4$, $j = 3,\ 4$ и $b''_i = b'_i - \frac{a'_{i2}}{a'_{22}} b'_2$ $\quad i = 3,4$.

Для третьего уравнения:

$$a''_{33} = a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{23} = -1,122 - \frac{0,028}{0,55} * 0,23 = -1,134$$

$$a''_{34} = a'_{34} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{24} = 0,189 - \frac{0,028}{0,55} * (-0,07) = 0,193$$

$$b''_3 = b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2 = -0,864 - \frac{0,028}{0,55} * (-0,33) = -0,847$$

Для четвертого уравнения:

$$a''_{43} = a'_{43} - \frac{a'_{42}}{a'_{22}} a'_{23} = -0,36 - \frac{0,11}{0,55} * 0,23 = -0,406$$

$$a''_{44} = a'_{44} - \frac{a'_{42}}{a'_{22}} a'_{24} = -0,784 - \frac{0,11}{0,55} * (-0,07) = -0,770$$

$$b''_4 = b'_4 - \frac{a'_{42}}{a'_{22}} b'_2 = 1,690 - \frac{0,11}{0,55} * (-0,33) = 1,756$$

Таким образом после второго шага преобразований СЛУ примет вид:

$$\begin{cases} 0,87x_1 - 0,22x_2 + 0,33x_3 - 0,07x_4 = 0,11 \\ \qquad 0,55x_2 + 0,23x_3 - 0,07x_4 = -0,33 \\ \qquad\qquad -1,134x_3 + 0,193x_4 = -0,847 \\ \qquad\qquad -0,406x_3 - 0,770x_4 = 1,756 \end{cases}$$

Третий шаг преобразований.

Вычислим значения:

$$a'''_{44} = a''_{44} - \frac{a''_{43}}{a''_{33}} a''_{34} = -0,77 - \frac{-0,406}{-1,134} * 0,193 = -0,839$$

$$b'''_4 = b''_4 - \frac{a''_{42}}{a''_{33}} b''_3 = 1,756 - \frac{-0,406}{-1,134} * (-0,847) = 2,059$$

Таким образом после третьего шага преобразований СЛУ примет вид:

$$\begin{cases} 0,87x_1 - 0,22x_2 + 0,33x_3 - 0,07x_4 = 0,11 \\ \qquad\quad 0,55x_2 + 0,23x_3 - 0,07x_4 = -0,33 \\ \qquad\qquad\quad -1,134x_3 + 0,193x_4 = -0,847 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -0,839x_4 = 2,059 \end{cases}$$

Матрица коэффициентов полученной СЛУ имеет треугольный вид.

Выполним обратный ход:

$$x_4 = \frac{b'''_4}{a'''_{44}} = \frac{2,059}{-0,839} = -2,454$$

$$x_3 = \frac{1}{a''_{33}}(b''_3 - a''_{34}x_4) = \frac{1}{-1,134}(-0,847 - 0,193 * (-2,454)) = 0,329$$

$$x_2 = \frac{1}{a'_{22}}(b'_2 - a'_{23}x_3 - a'_{24}x_4) = \frac{1}{0,55}(-0,33 - 0,23 * 0,329 - (-0,07) * (-2,454)) = 1,050$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4) = \frac{1}{0,87}(0,11 - (-0,22) * 1,050 - 0,33 * 0,329 -$$
$$- (-0,07) * (-2,454)) = -0,461$$

Запишем результаты обратного хода с $\Delta = 0,01$:

$$x_1 = -0,46; \quad x_2 = -1,05; \quad x_3 = 0,33; \quad x_4 = -2,45.$$

Выполним проверку полученного результа подстановкой в исходную СЛУ:

$$\begin{cases} 0,87 * (-0,46) + (-0,22) * (-1,05) + 0,33 * 0,33 + (-0,07) * (-2,45) = 0,111 \\ 0 * (-0,46) + 0,55 * (-1,05) + 0,23 * 0,33 + (-0,07) * (-2,45) = -0,330 \\ 0,11 * (-0,46) + 0 * (-1,05) + (-1,08) * 0,33 + 0,18 * (-2,45) = -0,848 \\ 0,08 * (-0,46) + 0,09 * (-1,05) + (-0,33) * 0,33 + (-0,79) * (-2,45) = 1,695 \end{cases}$$

Абсолютные погрешности решения СЛУ составляют для первого уравнения 0,001, для второго – 0,000, для третьего – 0,002, для четвертого – 0,005 и являются меньшими значения $\Delta = 0{,}01$.

Таким образом, корнями СЛУ с $\Delta = 0{,}01$ являются

$$x_1 = -0{,}46; \quad x_2 = -1{,}05; \quad x_3 = 0{,}33; \quad x_4 = -2{,}45.$$

Метод Гаусса по схеме Жордана состоит в том, что матрица системы A на этапе прямого хода приводится к диагональному виду.

Алгоритм решения СЛУ методом Гаусса по схеме Жордана.

1. Пусть $k = 1$.

2. Проверяем, отличается ли диагональный элемент от нуля.

3. Если отличается, то k-я строка становится **рабочей строкой**. Если $a_{kk} = 0$, то заменяем k-ю строку на l-ю ($l > k$), в которой $a_{lk} \neq 0$.

4. Для $i = 1, \ldots, k-1,\ k+1, \ldots, n$ вычисляем новые матричные элементы:

$$a'_{ij} = 0, \qquad \text{если } j = k,$$

$$a'_{ij} = a_{ij} + q_i a_{kj}, \qquad \text{если } j \neq k,$$

$$b'_i = b_i + q_i b_k$$

где $q_i = -\,a_{ik} / a_{kk}$.

5. Увеличиваем k на единицу. Если $k \le n - 2$, переходим к пункту 2.

Таким образом все элементы k-го столбца, за исключением диагонального элемента, будут равны нулю.

В результате получим диагональную матрицу коэффициентов преобразованной СЛУ:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

6. Вычисляем вектор решения $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$:

$x = (b_1'/a_{11}', ..., b_n'/a_{nn}')^T$.

1.4 Численные методы решения

1.4.1 Метод простой итерации

Коэффициенты $a_{ii}, i = \overline{1,n}$ должны удовлетворять условию (1.6). При этом хотя бы для одного уравнения неравенство должно выполняются строго.

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1,n} \tag{1.6}$$

Преобразуем СЛУ (1.1). Для этого разрешим *i*-ое уравнение системы относительно неизвестного x_i , $i = \overline{1,n}$.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - ... - a_{2n}x_n) \\ \qquad ... \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - ... - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases} \tag{1.7}$$

В качестве начального (нулевого) приближения неизвестных $x_i^{(0)}$, $i = \overline{1,n}$ выбираем:

– значения, полученные путем решения системы прямым методом;

– столбец свободных членов преобразованной системы, $\dfrac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,n}$;

– нулевые значения;

– произвольные значения.

Используя (1.8) последовательно выполняем итерации $k = 1,2,...$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - ... - a_{1n}x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - ... - a_{2n}x_n^{(k-1)}) \\ \qquad ... \\ x_n^{(k)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - a_{n2}x_2^{(k-1)} - ... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k-1)}) \end{cases} \tag{1.8}$$

Первая итерация $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - ... - a_{1n}x_n^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - ... - a_{2n}x_n^{(0)}) \\ \qquad ... \\ x_n^{(1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(0)} - a_{n2}x_2^{(0)} - ... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(0)}) \end{cases}$$

Вторая итерация $k = 2$:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - ... - a_{1n}x_n^{(1)}) \\ x_2^{(2)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - ... - a_{2n}x_n^{(1)}) \\ \qquad ... \\ x_n^{(2)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(1)} - a_{n2}x_2^{(1)} - ... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(1)}) \end{cases}$$

Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока на *k*-ой итерации выполнится критерий по абсолютным погрешностям:

$$\max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < \Delta \tag{1.9}$$

где Δ – заданная предельная абсолютная погрешность неизвестных.

При выполнении условия (1.9) за искомое решения принимаем значения, вычисленные на последней *k*-ой итерации.

Пример 1.4: Уточнить полученное прямым методом решение СЛУ

$$\begin{cases} 0,87x_1 - 0,22x_2 + 0,33x_3 - 0,07x_4 = 0,11 \\ 0,55x_2 + 0,23x_3 - 0,07x_4 = -0,33 \\ 0,11x_1 - 1,08x_3 + 0,18x_4 = -0,85 \\ 0,08x_1 + 0,09x_2 - 0,33x_3 - 0,79x_4 = 1,7 \end{cases}$$

методом простой итерации с $\Delta = 0,001$.

Решение.

Проверим условие (1.6) для

– первого уравнения: $0,87 > |-0,22| + 0,33 + |-0,07| = 0,62$;

–второго уравнения: $0,55 > 0,23 + |-0,07| = 0,30$;

–третьего уравнения: $|-1,08| > 0,11 + 0,18 = 0,29$;

–четвертого уравнения: $|-0,79| > 0,08 + 0,09 + |-0,33| = 0,50$.

Условие (1.6) строго выполняется для каждого уравнения СЛУ.

Преобразуем исходную СЛУ по (1.7).

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{0,87}(0,11 + 0,22x_2 - 0,33x_3 + 0,07x_4) \\ x_2 = \dfrac{1}{0,55}(-0,33 - 0,23x_3 + 0,07x_4) \\ x_3 = \dfrac{1}{-1,08}(-0,85 - 0,11x_1 - 0,18x_4) \\ x_4 = \dfrac{1}{-0,79}(1,70 - 0,08x_1 - 0,09x_2 + 0,33x_3) \end{cases}$$

В качестве нулевого приближения неизвестных $x_i^{(0)}$, $i = \overline{1,4}$ выберем значения, полученные решением СЛУ прямым методом с $\Delta = 0,01$:

$$x_1^{(0)} = -0,46; \quad x_2^{(0)} = -1,05; \quad x_3^{(0)} = 0,33; \quad x_4^{(0)} = -2,45.$$

Используя (1.8) последовательно выполняем итерации $k = 1,2,...$

Первая итерация $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{0,87}(0,11 + 0,22 * (-1,05) - 0,33 * 0,33 + 0,07 * (-2,45)) = -0,4614 \\ x_2 = \dfrac{1}{0,55}(-0,33 - 0,23 * 0,33 + 0,07 * (-2,45)) = -1,0498 \\ x_3 = \dfrac{1}{-1,08}(-0,85 - 0,11 * (-0,46) - 0,18 * (-2,45)) = 0,3319 \\ x_4 = \dfrac{1}{-0,79}(1,70 - 0,08 * (-0,46) - 0,09 * (-1,05) + 0,33 * 0,33) = -2,4559 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|-0,4614 - (-0,46)| = 0,0014$;

–второго уравнения: $|-1,0498 - (-1,05)| = 0,0002$;

–третьего уравнения: $|0,3319 - 0,33| = 0,0019$;

–четвертого уравнения: $|-2,4559 - (-2,45)| = 0,0059$.

Условие (1.9) не выполняется, т.к. $0,0059 > 0,001$.

Вторая итерация $k = 2$:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{0,87}(0,11 + 0,22 * (-1,0498) - 0,33 * 0,3319 + 0,07 * (-2,4559)) = -0,4625 \\ x_2 = \dfrac{1}{0,55}(-0,33 - 0,23 * 0,3319 + 0,07 * (-2,4559)) = -1,0514 \\ x_3 = \dfrac{1}{-1,08}(-0,85 - 0,11 * (-0,4614) - 0,18 * (-2,4559)) = 0,3307 \\ x_4 = \dfrac{1}{-0,79}(1,70 - 0,08 * (-0,4614) - 0,09 * (-1,0498) + 0,33 * 0,3319) = -2,4569 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|-0,4625 - (-0,4614)| = 0,0011$;

–второго уравнения: $|-1,0514 - (-1,0498)| = 0,0016$;

–третьего уравнения: $|0,3307 - 0,3319| = 0,0012$;

–четвертого уравнения: $|-2,4569 - (-2,4559)| = 0,0010$.

Условие (1.9) не выполняется, т.к. $0{,}0016 > 0{,}001$.

Третья итерация $k = 3$:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{0{,}87}(0{,}11 + 0{,}22*(-1{,}0514) - 0{,}33*0{,}3307 + 0{,}07*(-2{,}4569)) = -0{,}4626 \\ x_2 = \dfrac{1}{0{,}55}(-0{,}33 - 0{,}23*0{,}3307 + 0{,}07*(-2{,}4569)) = -1{,}0510 \\ x_3 = \dfrac{1}{-1{,}08}(-0{,}85 - 0{,}11*(-0{,}4625) - 0{,}18*(-2{,}4569)) = 0{,}3304 \\ x_4 = \dfrac{1}{-0{,}79}(1{,}70 - 0{,}08*(-0{,}4625) - 0{,}09*(-1{,}0514) + 0{,}33*0{,}3307) = -2{,}4567 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $\left|-0{,}4626 - (-0{,}4625)\right| = 0{,}0001$;

–второго уравнения: $\left|-1{,}0510 - (-1{,}0514)\right| = 0{,}0004$;

–третьего уравнения: $\left|0{,}3304 - 0{,}3307\right| = 0{,}0003$;

–четвертого уравнения: $\left|-2{,}4567 - (-2{,}4569)\right| = 0{,}0002$.

Условие (1.9) выполняется, т.к. $0{,}0004 < 0{,}001$.

Запишем результаты третьей итерации с требуемой $\Delta = 0{,}001$:

$x_1 = -0{,}463$; $x_2 = -1{,}051$; $x_3 = 0{,}330$; $x_4 = -2{,}457$.

Выполним проверку полученного результа подстановкой в исходную СЛУ:

$$\begin{cases} 0{,}87*(-0{,}463) + (-0{,}22)*(-1{,}051) + 0{,}33*0{,}330 + (-0{,}07)*(-2{,}457) = 0{,}1093 \\ 0*(-0{,}463) + 0{,}55*(-1{,}051) + 0{,}23*0{,}330 + (-0{,}07)*(-2{,}457) = -0{,}3302 \\ 0{,}11*(-0{,}463) + 0*(-1{,}051) + (-1{,}08)*0{,}330 + 0{,}18*(-2{,}457) = -0{,}8496 \\ 0{,}08*(-0{,}463) + 0{,}09*(-1{,}051) + (-0{,}33)*0{,}330 + (-0{,}79)*(-2{,}457) = 1{,}7005 \end{cases}$$

Абсолютные погрешности решения СЛУ составляют для первого уравнения 0,0007, для второго – 0,0002, для третьего – 0,0004, для четвертого – 0,0005 и являются меньшими заданного значения $\Delta = 0{,}001$.

Таким образом, корнями СЛУ с $\Delta = 0{,}001$ являются

$x_1 = -0{,}463; \quad x_2 = -1{,}051; \quad x_3 = 0{,}330; \quad x_4 = -2{,}457.$

Решение получено за три итерации.

1.4.2 Метод Зейделя

Требования к коэффициентам $a_{ii}, i = \overline{1,n}$, преобразование СЛУ (1.1) к виду (1.7) и выбор нулевого приближения неизвестных $x_i^{(0)}$, $i = \overline{1,n}$ аналогичны соответствующим действиям метода итераций.

Используя (1.10) последовательно выполняем итерации $k = 1,2,...$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - ... - a_{1n}x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - ... - a_{2n}x_n^{(k-1)}) \\ \qquad ... \\ x_n^{(k)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - ... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases} \tag{1.10}$$

Первая итерация $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - ... - a_{1n}x_n^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{11}x_1^{(1)} - ... - a_{1n}x_n^{(0)}) \\ \qquad ... \\ x_n^{(1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(1)} - a_{n2}x_2^{(1)} - ... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(1)}) \end{cases}$$

Вторая итерация $k = 2$:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - ... - a_{1n}x_n^{(1)}) \\ x_2^{(2)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{11}x_1^{(2)} - ... - a_{1n}x_n^{(1)}) \\ \qquad ... \\ x_n^{(2)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(2)} - a_{n2}x_2^{(2)} - ... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(2)}) \end{cases}$$

Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока на *k*-ой итерации выполнится критерий (1.9).

При выполнении условия (1.9) за искомое решения принимаем значения, вычисленные на последней *k*-ой итерации.

Пример 1.5: Уточнить полученное прямым методом решение СЛУ из примера 1.1 методом Зейделя с $\Delta = 0{,}001$.

Решение.

Проверка условия (1.6), преобразование СЛУ к виду (1.7) и выбор нулевого приближения неизвестных $x_i^{(0)}$, $i = \overline{1, n}$ аналогичны соответствующим действиям метода итераций в примере 1.4.

Используя (1.10) последовательно выполняем итерации $k = 1{,}2{,}...$

Первая итерация $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{0{,}87}(0{,}11 + 0{,}22 * (-1{,}05) - 0{,}33 * 0{,}33 + 0{,}07 * (-2{,}45)) = -0{,}4614 \\ x_2 = \dfrac{1}{0{,}55}(-0{,}33 - 0{,}23 * 0{,}33 + 0{,}07 * (-2{,}45)) = -1{,}0498 \\ x_3 = \dfrac{1}{-1{,}08}(-0{,}85 - 0{,}11 * (-0{,}4614) - 0{,}18 * (-2{,}45)) = 0{,}3317 \\ x_4 = \dfrac{1}{-0{,}79}(1{,}70 - 0{,}08 * (-0{,}4614) - 0{,}09 * (-1{,}0498) + 0{,}33 * 0{,}3317) = -2{,}4568 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $\left| -0{,}4614 - (-0{,}46) \right| = 0{,}0014$;

–второго уравнения: $\left| -1{,}0498 - (-1{,}05) \right| = 0{,}0002$;

–третьего уравнения: $|0{,}3317-0{,}33|=0{,}0017$;

–четвертого уравнения: $|-2{,}4568-(-2{,}45)|=0{,}0068$.

Условие (1.9) не выполняется, т.к. $0{,}0068>0{,}001$.

Вторая итерация $k=2$:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{0{,}87}(0{,}11+0{,}22*(-1{,}0498)-0{,}33*0{,}3317+0{,}07*(-2{,}4568))=-0{,}4625 \\ x_2=\dfrac{1}{0{,}55}(-0{,}33-0{,}23*0{,}3317+0{,}07*(-2{,}4568))=-1{,}0514 \\ x_3=\dfrac{1}{-1{,}08}(-0{,}85-0{,}11*(-0{,}4625)-0{,}18*(-2{,}4568))=0{,}3305 \\ x_4=\dfrac{1}{-0{,}79}(1{,}70-0{,}08*(-0{,}4625)-0{,}09*(-1{,}0514)+0{,}33*0{,}3305)=-2{,}4566 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|-0{,}4625-(-0{,}4614)|=0{,}0011$;

–второго уравнения: $|-1{,}0514-(-1{,}0498)|=0{,}0016$;

–третьего уравнения: $|0{,}3305-0{,}3317|=0{,}0012$;

–четвертого уравнения: $|-2{,}4566-(-2{,}4568)|=0{,}0002$.

Условие (1.9) не выполняется, т.к. $0{,}0016>0{,}001$.

Третья итерация $k=3$:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{0{,}87}(0{,}11+0{,}22*(-1{,}0514)-0{,}33*0{,}3305+0{,}07*(-2{,}4566))=-0{,}4625 \\ x_2=\dfrac{1}{0{,}55}(-0{,}33-0{,}23*0{,}3305+0{,}07*(-2{,}4567))=-1{,}0509 \\ x_3=\dfrac{1}{-1{,}08}(-0{,}85-0{,}11*(-0{,}4625)-0{,}18*(-2{,}4566))=0{,}3305 \\ x_{4n}=\dfrac{1}{-0{,}79}(1{,}70-0{,}08*(-0{,}4625)-0{,}09*(-1{,}0509)+0{,}33*0{,}3305)=-2{,}4565 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|-0{,}4625-(-0{,}4625)|=0{,}0000$;

–второго уравнения: $|-1{,}0509-(-1{,}0514)|=0{,}0008$;

–третьего уравнения: $|0{,}3305-0{,}3305|=0{,}0000$;

–четвертого уравнения: $|-2{,}4565-(-2{,}4566)|=0{,}0001$.

Условие (1.9) выполняется, т.к. $0{,}0008<0{,}001$.

Запишем результаты третьей итерации с требуемой $\Delta=0{,}001$:

$x_1=-0{,}463;\quad x_2=-1{,}051;\quad x_3=0{,}331;\quad x_4=-2{,}457.$

Выполним проверку полученного результа подстановкой в исходную СЛУ:

$$\begin{cases} 0{,}87*(-0{,}463)+(-0{,}22)*(-1{,}051)+0{,}33*0{,}331+(-0{,}07)*(-2{,}457)=0{,}1096 \\ 0*(-0{,}463)+0{,}55*(-1{,}051)+0{,}23*0{,}331+(-0{,}07)*(-2{,}457)=-0{,}3299 \\ 0{,}11*(-0{,}463)+0*(-1{,}051)+(-1{,}08)*0{,}331+0{,}18*(-2{,}457)=-0{,}8507 \\ 0{,}08*(-0{,}463)+0{,}09*(-1{,}051)+(-0{,}33)*0{,}331+(-0{,}79)*(-2{,}457)=1{,}7002 \end{cases}$$

Абсолютные погрешности решения СЛУ составляют для первого уравнения 0,0004, для второго – 0,0001, для третьего – 0,0007, для четвертого – 0,0002 и являются меньшими заданного значения $\Delta=0{,}001$.

Таким образом корнями СЛУ с $\Delta=0{,}001$ являются

$x_1=-0{,}463;\quad x_2=-1{,}051;\quad x_3=0{,}331;\quad x_4=-2{,}457.$

Решение получено за три итерации.

1.4.3 Метод уточнения корней

Решим систему (5.1) прямым методом.

В качестве нулевого приближения неизвестных $x_i^{(0)}$, $i=\overline{1,n}$ выберем значения, полученные путем решения системы прямым методом.

Далее последовательно выполняем итерации $k=1,2,\ldots$.

Первая итерация $k=1$:

– подставляем $x_i^{(0)}$, $i=\overline{1,n}$ в (1.1) и вычисляем $b_i^{(0)}$, $i=\overline{1,n}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(0)} = b_1^{(0)} \\ a_{21}x_1^{(0)} + a_{22}x_2^{(0)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(0)} = b_2^{(0)} \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1^{(0)} + a_{n2}x_2^{(0)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(0)} = b_n^{(0)} \end{cases}$$

– составляем СЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}\Delta_1^{(0)} + a_{12}\Delta_2^{(0)} + \ldots + a_{1n}\Delta_n^{(0)} = r_1^{(0)} \\ a_{21}\Delta_1^{(0)} + a_{22}\Delta_2^{(0)} + \ldots + a_{2n}\Delta_n^{(0)} = r_2^{(0)} \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}\Delta_1^{(0)} + a_{n2}\Delta_2^{(0)} + \ldots + a_{nn}\Delta_n^{(0)} = r_n^{(0)} \end{cases} \tag{1.11}$$

где $\Delta_i^{(0)}$, $i=\overline{1,n}$ – погрешность значений неизвестных $x_i^{(0)}$, $i=\overline{1,n}$;

$r_i^{(0)} = b_i - b_i^{(0)}$ – невязка решения.

– решая СЛУ (1.11) прямым методом, находим значения погрешностей $\Delta_i^{(0)}$, $i=\overline{1,n}$, и вычисляем первое приближение неизвестных $x_i^{(1)}$, $i=\overline{1,n}$. :

$$x_i^{(1)} = x_i^{(0)} + \Delta_i^{(0)}$$

Вторая итерация $k=2$:

– подставляем $x_i^{(1)}$, $i=\overline{1,n}$ в (1.1) и вычисляем $b_i^{(1)}$, $i=\overline{1,n}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(1)} + a_{12}x_2^{(1)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(1)} = b_1^{(1)} \\ a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(1)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(1)} = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1^{(1)} + a_{n2}x_2^{(1)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(1)} = b_n^{(1)} \end{cases}$$

– составляем СЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}\Delta_1^{(1)} + a_{12}\Delta_2^{(1)} + ... + a_{1n}\Delta_n^{(1)} = r_1^{(1)} \\ a_{21}\Delta_1^{(1)} + a_{22}\Delta_2^{(1)} + ... + a_{2n}\Delta_n^{(1)} = r_2^{(1)} \\ \qquad\qquad ... \\ a_{n1}\Delta_1^{(1)} + a_{n2}\Delta_2^{(1)} + ... + a_{nn}\Delta_n^{(1)} = r_n^{(1)} \end{cases} \tag{1.12}$$

где $\Delta_i^{(1)}$, $i=\overline{1,n}$ – погрешность значений неизвестных $x_i^{(1)}$, $i=\overline{1,n}$;

$r_i^{(1)} = b_i - b_i^{(1)}$ – невязка решения.

– решая СЛУ (1.12) прямым методом, находим значения погрешностей $\Delta_i^{(1)}$, $i=\overline{1,n}$, и вычисляем второе приближение неизвестных $x_i^{(2)}$, $i=\overline{1,n}$:

$$x_i^{(2)} = x_i^{(1)} + \Delta_i^{(1)}$$

Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока на k-ой итерации выполнится условие:

$$\max_{1\le i\le n}\left|\Delta_i^{(k-1)}\right| < \Delta \tag{1.13}$$

где Δ – заданная предельная абсолютная погрешность неизвестных.

При выполнении условия (1.13) за искомое решения принимаются значения, вычисленные на последней k-ой итерации.

Пример 1.6: Уточним полученное прямым методом решение СЛУ из примера 1.1 методом уточнения корней с $\Delta = 0{,}001$.

Решение.

В качестве нулевого приближения неизвестных $x_i^{(0)}$, $i=\overline{1,4}$ выберем значения, полученные решением СЛУ прямым методом с $\Delta = 0{,}01$:

$$x_1^{(0)} = -0{,}46; \quad x_2^{(0)} = -1{,}05; \quad x_3^{(0)} = 0{,}33; \quad x_4^{(0)} = -2{,}45.$$

Первая итерация $k=1$:

– подставляем $x_i^{(0)}$, $i=\overline{1,4}$ в исходную СЛУ и вычисляем $b_i^{(0)}$, $i=\overline{1,4}$:

$$\begin{cases} 0,87*(-0,46)+(-0,22)*(-1,05)+0,33*0,33+(-0,07)*(-2,45)=0,1112 \\ 0*(-0,46)+0,55*(-1,05)+0,23*0,33+(-0,07)*(-2,45)=-0,3301 \\ 0,11*(-0,46)+0*(-1,05)+(-1,08)*0,33+0,18*(-2,45)=-0,8480 \\ 0,08*(-0,46)+0,09*(-1,05)+(-0,33)*0,33+(-0,79)*(-2,45)=1,6953 \end{cases}$$

– составляем СЛУ по (1.12):

$$\begin{cases} 0,87*\Delta_1^{(0)}+(-0,22)*\Delta_2^{(0)}+0,33*\Delta_3^{(0)}+(-0,07)*\Delta_4^{(0)}=-0,0012 \\ 0*\Delta_1^{(0)}+0,55*\Delta_2^{(0)}+0,23*\Delta_3^{(0)}+(-0,07)*\Delta_4^{(0)}=0,0001 \\ 0,11*\Delta_1^{(0)}+0*\Delta_2^{(0)}+(-1,08)*\Delta_3^{(0)}+0,18*\Delta_4^{(0)}=-0,0020 \\ 0,08*\Delta_1^{(0)}+0,09*\Delta_2^{(0)}+(-0,33)*\Delta_3^{(0)}+(-0,79)*\Delta_4^{(0)}=0,0047 \end{cases}$$

где невязка решения $r_i^{(0)}$, $i=\overline{1,n}$ равна

$$r_1^{(0)}=0,11-0,1112=-0,0012$$
$$r_2^{(0)}=-0,33-(-0,3301)=0,0001$$
$$r_3^{(0)}=-0,85-(-0,8480)=-0,0020$$
$$r_4^{(0)}=1,7-1,6953=0,0047$$

– решая полученную СЛУ прямым методом, находим значения погрешностей $\Delta_1^{(0)}=-0,0024;$ $\Delta_2^{(0)}=-0,0009;$ $\Delta_3^{(0)}=0,0004;$ $\Delta_4^{(0)}=-0,0066$, и вычисляем первое приближение неизвестных $x_i^{(1)}$, $i=\overline{1,4}$:

$$x_1^{(1)}=-0,46+(-0,0024)=-0,4624$$
$$x_2^{(1)}=-1,05+(-0,0009)=-1,0509$$
$$x_3^{(1)}=0,33+0,0004=0,3304$$
$$x_4^{(1)}=-2,45+(-0,0066)=-2,4566$$

Условие (1.13) не выполняется, т.к. $|-0,0066|=0,0066>0,001$.

Вторая итерация $k=2$:

– подставляем $x_i^{(1)}$, $i=\overline{1,n}$ в (1.1) и вычисляем $b_i^{(1)}$, $i=\overline{1,n}$:

$$\begin{cases} 0,87*(-0,4624)+(-0,22)*(-1,0509)+0,33*0,3304+(-0,07)*(-2,4566)=0,1099 \\ 0*(-0,4624)+0,55*(-1,0509)+0,23*0,3304+(-0,07)*(-2,4566)=-0,3300 \\ 0,11*(-0,4624)+0*(-1,0509)+(-1,08)*0,3304+0,18*(-2,4566)=-0,8499 \\ 0,08*(-0,4624)+0,09*(-1,0509)+(-0,33)*0,3304+(-0,79)*(-2,4566)=1,7001 \end{cases}$$

– составляем СЛУ по (1.12):

$$\begin{cases} 0{,}87*\Delta_1^{(0)}+(-0{,}22)*\Delta_2^{(0)}+0{,}33*\Delta_3^{(0)}+(-0{,}07)*\Delta_4^{(0)}=-0{,}0001\\ 0*\Delta_1^{(0)}+0{,}55*\Delta_2^{(0)}+0{,}23*\Delta_3^{(0)}+(-0{,}07)*\Delta_4^{(0)}=0{,}0000\\ 0{,}11*\Delta_1^{(0)}+0*\Delta_2^{(0)}+(-1{,}08)*\Delta_3^{(0)}+0{,}18*\Delta_4^{(0)}=-0{,}0001\\ 0{,}08*\Delta_1^{(0)}+0{,}09*\Delta_2^{(0)}+(-0{,}33)*\Delta_3^{(0)}+(-0{,}79)*\Delta_4^{(0)}=0{,}0001 \end{cases}$$

где невязка решения $r_i^{(1)}$, $i=\overline{1,n}$ равна

$$r_1^{(0)}=0{,}11-0{,}1099=-0{,}0001$$
$$r_2^{(0)}=-0{,}33-(-0{,}3300)=0{,}0000$$
$$r_3^{(0)}=-0{,}85-(-0{,}8499)=-0{,}0001$$
$$r_4^{(0)}=1{,}7-1{,}7001=0{,}0001$$

– решая полученную СЛУ прямым методом, находим значения погрешностей $\Delta_1^{(1)}=-0{,}0000$; $\Delta_2^{(1)}=-0{,}0000$; $\Delta_3^{(1)}=0{,}0002$; $\Delta_4^{(1)}=-0{,}0000$, и вычисляем второе приближение неизвестных $x_i^{(2)}$, $i=\overline{1,4}$:

$$x_1^{(2)}=-0{,}4624+0{,}0000=-0{,}4624$$
$$x_2^{(2)}=-1{,}0509+0{,}0000=-1{,}0509$$
$$x_3^{(2)}=0{,}3304+0{,}0002=0{,}3306$$
$$x_4^{(2)}=-2{,}4566+0{,}0000=-2{,}4566$$

Условие (1.13) выполняется, т.к. $0{,}0002<0{,}001$.

Запишем результаты второй итерации с требуемой $\Delta=0{,}001$:

$$x_1=-0{,}462;\quad x_2=-1{,}051;\quad x_3=0{,}331;\quad x_4=-2{,}457.$$

Выполним проверку полученного результа подстановкой в исходную СЛУ:

$$\begin{cases} 0{,}87*(-0{,}462)+(-0{,}22)*(-1{,}051)+0{,}33*0{,}331+(-0{,}07)*(-2{,}457)=0{,}1105\\ 0*(-0{,}462)+0{,}55*(-1{,}051)+0{,}23*0{,}331+(-0{,}07)*(-2{,}457)=-0{,}3299\\ 0{,}11*(-0{,}462)+0*(-1{,}051)+(-1{,}08)*0{,}331+0{,}18*(-2{,}457)=-0{,}8506\\ 0{,}08*(-0{,}462)+0{,}09*(-1{,}051)+(-0{,}33)*0{,}331+(-0{,}79)*(-2{,}457)=1{,}7003 \end{cases}$$

Абсолютные погрешности решения СЛУ составляют для первого уравнения 0,0005, для второго – 0,0001, для третьего – 0,0006, для четвертого – 0,0003 и являются меньшими заданного значения $\Delta = 0{,}001$.

Таким образом корнями СЛУ с $\Delta = 0{,}001$ являются

$x_1 = -0{,}462; \quad x_2 = -1{,}051; \quad x_3 = 0{,}331; \quad x_4 = -2{,}457.$

Решение получено за две итерации.

1.5 Индивидуальные задания

Решить СЛУ, предварительно вычислив $\det A$:

– прямым методом с $\Delta = 0{,}01$;

– численным методом с $\Delta = 0{,}001$.

Варианты индивидуальных заданий выбираются из таблицы 1.1 в соответствии с номером студента в журнале преподавателя.

Таблица 1.1 – Системы линейных уравнений

№	Система уравнений	Методы
1	$\begin{cases} 0{,}77x_1 + 0{,}04x_2 - 0{,}21x_3 + 0{,}18x_4 = 1{,}24 \\ 0{,}45x_1 - 1{,}23x_2 + 0{,}06x_3 = 0{,}88 \\ 0{,}26x_1 + 0{,}34x_2 - 1{,}11x_3 = -0{,}62 \\ 0{,}05x_1 - 0{,}26x_2 + 0{,}34x_3 - 1{,}12x_4 = 1{,}17 \end{cases}$	1) метод Крамера; 2) метод уточнения корней.
2	$\begin{cases} 0{,}79x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}34x_3 + 0{,}16x_4 = -0{,}64 \\ 0{,}34x_1 - 1{,}08x_2 + 0{,}17x_3 - 0{,}18x_4 = -1{,}42 \\ 0{,}16x_1 + 0{,}34x_2 - 0{,}85x_3 - 0{,}31x_4 = 0{,}42 \\ 0{,}12x_1 - 0{,}26x_2 - 0{,}08x_3 - 0{,}75x_4 = -0{,}83 \end{cases}$	1) метод Крамера; 2) метод простой итерации.
3	$\begin{cases} 0{,}68x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}02x_3 - 0{,}21x_4 = 1{,}83 \\ 0{,}16x_1 - 0{,}88x_2 - 0{,}14x_3 + 0{,}27x_4 = 0{,}65 \\ 0{,}37x_1 + 0{,}27x_2 - 1{,}02x_3 - 0{,}24x_4 = -2{,}23 \\ 0{,}12x_1 + 0{,}21x_2 - 0{,}18x_3 - 0{,}75x_4 = 1{,}13 \end{cases}$	1) метод Крамера; 2) метод Зейделя.

№	Система уравнений	Методы
4	$\begin{cases} 0{,}58x_1+0{,}32x_2-0{,}03x_3=0{,}44 \\ 0{,}11x_1-1{,}26x_2-0{,}36x_3=-1{,}42 \\ 0{,}12x_1+0{,}08x_2-1{,}14x_3-0{,}24x_4=0{,}83 \\ 0{,}15x_1-0{,}35x_2-0{,}18x_3-x_4=1{,}42 \end{cases}$	1) метод обратной матрицы; 2) метод уточнения корней.
5	$\begin{cases} 0{,}82x_1+0{,}34x_2+0{,}12x_3-0{,}15x_4=-1{,}33 \\ 0{,}11x_1-0{,}77x_2-0{,}15x_3+0{,}32x_4=-0{,}84 \\ 0{,}05x_1-0{,}12x_2-0{,}86x_3-0{,}18x_4=1{,}16 \\ 0{,}12x_1+0{,}08x_2+0{,}06x_3-x_4=-0{,}57 \end{cases}$	1) метод обратной матрицы; 2) метод простой итерации.
6	$\begin{cases} 0{,}87x_1-0{,}23x_2+0{,}44x_3+0{,}05x_4=2{,}13 \\ 0{,}24x_1-x_2-0{,}31x_3+0{,}15x_4=0{,}18 \\ 0{,}06x_1+0{,}15x_2-x_3-0{,}23x_4=-1{,}44 \\ 0{,}72x_1-0{,}08x_2-0{,}05x_3-x_4=-2{,}42 \end{cases}$	1) метод обратной матрицы; 2) метод Зейделя.
7	$\begin{cases} 0{,}83x_1-0{,}31x_2+0{,}18x_3-0{,}22x_4=-1{,}71 \\ 0{,}21x_1+x_2-0{,}33x_3-0{,}22x_4=0{,}62 \\ 0{,}32x_1-0{,}18x_2-0{,}95x_3-0{,}19x_4=0{,}89 \\ 0{,}12x_1+0{,}28x_2-0{,}14x_3-x_4=-0{,}94 \end{cases}$	1) метод Гаусса по схеме единственного деления; 2) метод уточнения корней.
8	$\begin{cases} 0{,}87x_1-0{,}27x_2+0{,}22x_3+0{,}18x_4=1{,}21 \\ 0{,}21x_1+1{,}45x_2+0{,}45x_3-0{,}18x_4=-0{,}33 \\ 0{,}12x_1+0{,}13x_2-1{,}33x_3+0{,}18x_4=0{,}48 \\ 0{,}33x_1-0{,}05x_2+0{,}06x_3-1{,}28x_4=0{,}17 \end{cases}$	1) метод Гаусса по схеме единственного деления; 2) метод простой итерации.
9	$\begin{cases} 0{,}81x_1+0{,}07x_2-0{,}38x_3+0{,}21x_4=-0{,}81 \\ 0{,}22x_1+0{,}92x_2-0{,}11x_3-0{,}33x_4=-0{,}64 \\ 0{,}51x_1-0{,}07x_2-0{,}91x_3-0{,}11x_4=-1{,}71 \\ 0{,}33x_1-0{,}41x_2-x_4=1{,}21 \end{cases}$	1) метод Гаусса по схеме единственного деления; 2) метод Зейделя.
10	$\begin{cases} x_1-0{,}22x_2+0{,}11x_3-0{,}31x_4=2{,}7 \\ 0{,}38x_1-x_2-0{,}12x_3+0{,}22x_4=1{,}5 \\ 0{,}11x_1+0{,}23x_2-x_3-0{,}51x_4=-1{,}2 \\ 0{,}17x_1-0{,}21x_2+0{,}31x_3-x_4=0{,}17 \end{cases}$	1) метод Гаусса с выбором главного элемента; 2) метод уточнения корней.
11	$\begin{cases} 0{,}93x_1+0{,}08x_2-0{,}11x_3+0{,}18x_4=-0{,}51 \\ 0{,}18x_1-0{,}48x_2+0{,}21x_4=-1{,}17 \\ 0{,}13x_1+0{,}31x_2-x_3-0{,}21x_4=1{,}02 \\ 0{,}08x_1-0{,}33x_3-0{,}72x_4=0{,}28 \end{cases}$	1) метод Гаусса с выбором главного элемента; 2) метод простой итерации.

№	Система уравнений	Методы
12	$\begin{cases} 0{,}95x_1+0{,}06x_2+0{,}12x_3-0{,}14x_4=-2{,}17 \\ 0{,}04x_1-1{,}12x_2+0{,}08x_3+0{,}11x_4=-1{,}4 \\ 0{,}34x_1+0{,}08x_2-1{,}06x_3+0{,}14x_4=2{,}1 \\ 0{,}11x_1+0{,}12x_2-1{,}03x_4=0{,}8 \end{cases}$	1) метод Гаусса с выбором главного элемента; 2) метод Зейделя.
13	$\begin{cases} 0{,}92x_1+0{,}03x_2+0{,}04x_4=-1{,}2 \\ 0{,}69x_2-0{,}27x_3+0{,}08x_4=0{,}81 \\ 0{,}33x_1-1{,}07x_3+0{,}21x_4=0{,}92 \\ 0{,}11x_1+0{,}03x_3-0{,}42x_4=-0{,}17 \end{cases}$	1) метод Гаусса по схеме Жордана; 2) метод уточнения корней.
14	$\begin{cases} 0{,}88x_1+0{,}23x_2-0{,}25x_3+0{,}16x_4=1{,}24 \\ 0{,}14x_1-0{,}66x_2-0{,}18x_3+0{,}24x_4=0{,}89 \\ 0{,}33x_1+0{,}04x_2-0{,}84x_3-0{,}32x_4=-1{,}15 \\ 0{,}12x_1-0{,}05x_2-0{,}85x_4=0{,}57 \end{cases}$	1) метод Гаусса по схеме Жордана; 2) метод простой итерации.
15	$\begin{cases} 0{,}77x_1+0{,}14x_2-0{,}06x_3+0{,}12x_4=1{,}21 \\ 0{,}12x_1-x_2+0{,}32x_3-0{,}18x_4=-0{,}33 \\ 0{,}08x_1-0{,}12x_2-0{,}77x_3+0{,}32x_4=0{,}48 \\ 0{,}25x_1+0{,}22x_2+0{,}14x_3-x_4=-1{,}56 \end{cases}$	1) метод Гаусса по схеме Жордана; 2) метод Зейделя.
16	$\begin{cases} 0{,}86x_1-0{,}23x_2-0{,}18x_3-0{,}17x_4=-1{,}42 \\ 0{,}12x_1-1{,}14x_2+0{,}08x_3+0{,}09x_4=0{,}83 \\ 0{,}16x_1+0{,}24x_2-x_3-0{,}35x_4=-1{,}21 \\ 0{,}23x_1-0{,}08x_2+0{,}05x_3-0{,}75x_4=-0{,}65 \end{cases}$	1) метод Крамера; 2) метод уточнения корней.
17	$\begin{cases} 0{,}76x_1-0{,}21x_2-0{,}06x_3+0{,}34x_4=1{,}42 \\ 0{,}05x_1-x_2+0{,}32x_3+0{,}12x_4=0{,}57 \\ 0{,}35x_1-0{,}27x_2-x_3-0{,}05x_4=-0{,}68 \\ 0{,}12x_1-0{,}43x_2+0{,}04x_3-1{,}21x_4=-2{,}14 \end{cases}$	1) метод Крамера; 2) метод простой итерации.
18	$\begin{cases} 0{,}83x_1-0{,}25x_2+0{,}13x_3+0{,}11x_4=-1{,}42 \\ 0{,}13x_1-1{,}12x_2+0{,}09x_3-0{,}06x_4=-0{,}48 \\ 0{,}11x_1+0{,}05x_2-1{,}02x_3+0{,}12x_4=2{,}34 \\ 0{,}13x_1+0{,}18x_2+0{,}24x_3-0{,}57x_4=-0{,}72 \end{cases}$	1) метод Крамера; 2) метод Зейделя.
19	$\begin{cases} 0{,}85x_1-0{,}05x_2+0{,}08x_3-0{,}14x_4=-0{,}48 \\ 0{,}32x_1-1{,}13x_2-0{,}12x_3+0{,}11x_4=-1{,}24 \\ 0{,}17x_1+0{,}06x_2-1{,}08x_3+0{,}12x_4=-1{,}15 \\ 0{,}21x_1-0{,}16x_2+0{,}36x_3-x_4=0{,}88 \end{cases}$	1) метод обратной матрицы; 2) метод уточнения корней.

№	Система уравнений	Методы
20	$\begin{cases} x_1 - 0{,}28x_2 + 0{,}17x_3 - 0{,}06x_4 = 0{,}21 \\ 0{,}52x_1 - x_2 + 0{,}12x_3 + 0{,}17x_4 = 1{,}17 \\ 0{,}17x_1 - 0{,}18x_2 - 0{,}79x_3 = 0{,}81 \\ 0{,}11x_1 + 0{,}22x_2 + 0{,}03x_3 - 0{,}95x_4 = -0{,}72 \end{cases}$	1) метод обратной матрицы; 2) метод простой итерации.
21	$\begin{cases} x_1 - 0{,}52x_2 - 0{,}08x_3 - 0{,}13x_4 = -0{,}22 \\ 0{,}07x_1 - 1{,}38x_2 - 0{,}05x_3 + 0{,}41x_4 = -1{,}8 \\ 0{,}04x_1 + 0{,}42x_2 - 0{,}89x_3 - 0{,}07x_4 = 1{,}3 \\ 0{,}17x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}13x_3 - 0{,}81x_4 = -0{,}33 \end{cases}$	1) метод обратной матрицы; 2) метод Зейделя.
22	$\begin{cases} 0{,}99x_1 - 0{,}02x_2 + 0{,}62x_3 - 0{,}08x_4 = -1{,}3 \\ 0{,}03x_1 - 0{,}72x_2 + 0{,}33x_3 - 0{,}07x_4 = -1{,}1 \\ 0{,}09x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}58x_3 + 0{,}28x_4 = 1{,}7 \\ 0{,}19x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}08x_3 - 0{,}63x_4 = -1{,}5 \end{cases}$	1) метод Гаусса по схеме единственного деления; 2) метод уточнения корней.
23	$\begin{cases} x_1 - 0{,}17x_2 + 0{,}33x_3 - 0{,}18x_4 = -1{,}2 \\ 0{,}82x_2 - 0{,}43x_3 + 0{,}08x_4 = 0{,}33 \\ 0{,}22x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}79x_3 + 0{,}07x_4 = -0{,}48 \\ 0{,}08x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}21x_3 - 0{,}96x_4 = 1{,}2 \end{cases}$	1) метод Гаусса по схеме единственного деления; 2) метод простой итерации.
24	$\begin{cases} 0{,}97x_1 + 0{,}05x_2 - 0{,}22x_3 + 0{,}33x_4 = 0{,}43 \\ 0{,}22x_1 - 0{,}45x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}07x_4 = 1{,}8 \\ 0{,}33x_1 + 0{,}13x_2 - 1{,}08x_3 - 0{,}05x_4 = 0{,}8 \\ 0{,}08x_1 + 0{,}17x_2 + 0{,}29x_3 - 0{,}67x_4 = -1{,}7 \end{cases}$	1) метод Гаусса по схеме единственного деления; 2) метод Зейделя.
25	$\begin{cases} 0{,}68x_1 + 0{,}05x_2 - 0{,}11x_3 + 0{,}08x_4 = 2{,}15 \\ -0{,}11x_1 + 0{,}84x_2 + 0{,}28x_3 + 0{,}06x_4 = -0{,}83 \\ -0{,}08x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}88x_3 - 0{,}12x_4 = 1{,}16 \\ 0{,}21x_1 - 0{,}13x_2 + 0{,}27x_3 + x_4 = 0{,}44 \end{cases}$	1) метод Гаусса с выбором главного элемента; 2) метод уточнения корней.
26	$\begin{cases} 0{,}68x_1 + 0{,}16x_2 + 0{,}08x_3 - 0{,}15x_4 = 2{,}42 \\ 0{,}16x_1 - 1{,}23x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}21x_4 = -1{,}43 \\ 0{,}05x_1 - 0{,}08x_2 - x_3 + 0{,}34x_4 = 0{,}16 \\ 0{,}12x_1 + 0{,}14x_2 - 0{,}18x_3 - 0{,}94x_4 = -1{,}62 \end{cases}$	1) метод Гаусса с выбором главного элемента; 2) метод простой итерации.
27	$\begin{cases} x_1 - 0{,}08x_2 + 0{,}23x_3 - 0{,}32x_4 = 1{,}34 \\ 0{,}16x_1 - 1{,}23x_2 + 0{,}18x_3 + 0{,}16x_4 = 2{,}33 \\ 0{,}15x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}68x_3 - 0{,}18x_4 = -0{,}34 \\ 0{,}25x_1 + 0{,}21x_2 - 0{,}16x_3 - 0{,}97x_4 = -0{,}63 \end{cases}$	1) метод Гаусса с выбором главного элемента; 2) метод Зейделя.

№	Система уравнений	Методы
28	$\begin{cases} 0{,}94x_1 - 0{,}18x_2 - 0{,}33x_3 - 0{,}16x_4 = 2{,}43 \\ 0{,}32x_1 - x_2 + 0{,}23x_3 - 0{,}05x_4 = 1{,}12 \\ 0{,}16x_1 - 0{,}08x_2 - x_3 - 0{,}12x_4 = -0{,}43 \\ 0{,}09x_1 + 0{,}22x_2 - 0{,}13x_3 - x_4 = -0{,}83 \end{cases}$	1) метод Гаусса по схеме Жордана; 2) метод уточнения корней.
29	$\begin{cases} x_1 - 0.34x_2 - 0{,}23x_3 + 0{,}06x_4 = 1{,}42 \\ 0{,}11x_1 - 1{,}23x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}36x_4 = 0{,}66 \\ 0{,}23x_1 - 0{,}12x_2 - 0{,}84x_3 - 0{,}35x_4 = -1{,}08 \\ 0{,}12x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}47x_3 - 0{,}82x_4 = -1{,}72 \end{cases}$	1) метод Гаусса по схеме Жордана; 2) метод простой итерации.
30	$\begin{cases} 0{,}68x_1 + 0{,}23x_2 - 0{,}11x_3 + 0{,}06x_4 = 0{,}67 \\ 0{,}18x_1 - 0{,}88x_2 - 0{,}33x_3 = 0{,}88 \\ 0{,}12x_1 + 0{,}32x_2 - 1{,}05x_3 + 0{,}07x_4 = 0{,}18 \\ 0{,}05x_1 - 0{,}11x_2 + 0{,}09x_3 - 1{,}12x_4 = -1{,}44 \end{cases}$	1) метод Гаусса по схеме Жордана; 2) метод Зейделя.

2 РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (СНУ)

2.1 Постановка задачи

Общий вид системы из *n* нелинейных уравнений с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \qquad \ldots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

СНУ (7.1) не имеют аналитических методов решения. Для системы из 2-х нелинейных уравнений с 2-мя неизвестными x_1, x_2 иногда удается выразить одно неизвестное через другое неизвестное и свести СНУ к решению одного нелинейного уравнения.

Для решения СНУ используют численные (итерационные) методы.

В качестве начального (нулевого) приближения неизвестных $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ выбирают значения, полученные:

– графическим методом для системы из двух уравнений с двумя неизвестными;

– другими способами (аналитически, методом проб) для систем с любым количеством уравнений.

Пример 2.1: Решить СНУ графическим методом с $\Delta = 0{,}1$.

$$\begin{cases} \sin(x + 0{,}5) - y = 1{,}2 \\ \cos(y - 2) + x = 0 \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем СНУ к виду (2.1):

$$\begin{cases} \sin(x + 0{,}5) - y - 1{,}2 = 0 \\ x + \cos(y - 2) = 0 \end{cases}$$

Построим графики функци $F_1(x,y)=\sin(x+0{,}5)-y-1{,}2$ (красный цвет на рисунке 2.1) и $F_2(x,y)=\cos(y-2)+x$ (синий цвет на рисунке 2.1). Определим координаты точки пересечения графиков: $x_0=0{,}6;\quad y_0=-0{,}2.$

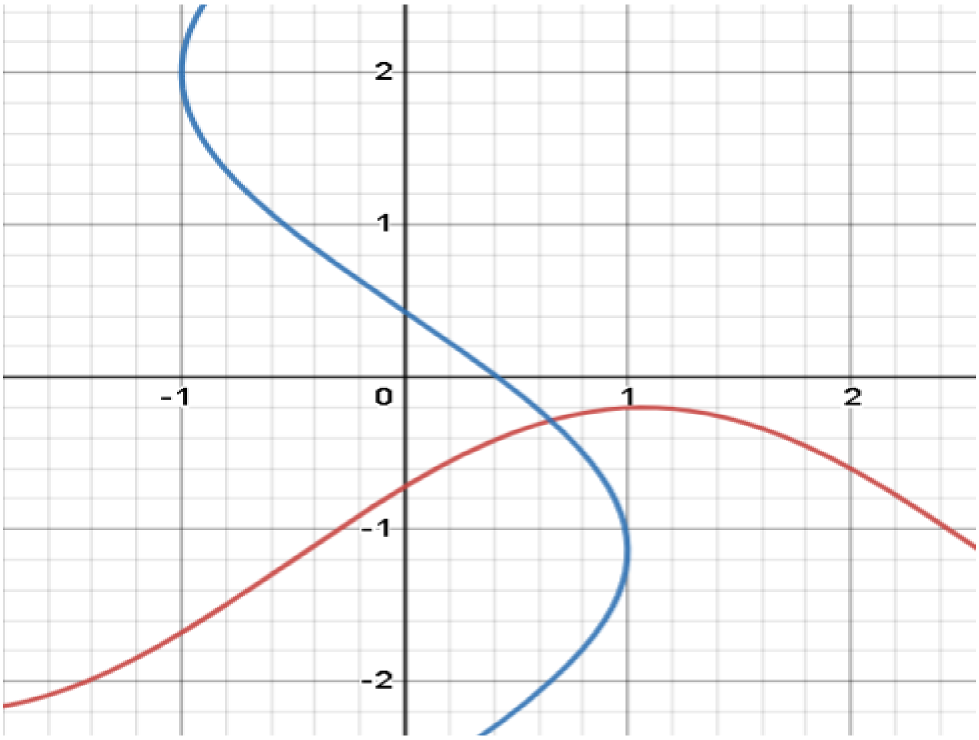

Рисунок 2.1– Решение СНУ (пример 2.1) графическим методом.

2.2 Метод простой итерации

Определим $X^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$ графически или аналитически.

Преобразуем СНУ (2.1). Для этого разрешим i-ое уравнение системы относительно неизвестного x_i , $i=\overline{1,n}$.

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ x_2 = f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ \qquad\ldots \\ x_n = f_n(x_1.x_2,\ldots,x_n) \end{cases} \qquad (2.2)$$

Значения $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ должны удовлетворять одному из условий сходимости метода:

$$\|B\|_1 = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| < 1 \qquad (2.3)$$

$$\|B\|_2 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| < 1 \qquad (2.4)$$

где $\|B\|_1$ и $\|B\|_2$ – первая и вторая нормы матрицы B соответственно.

Алгоритм получения матрицы B:

1. Составляем матрицу из частных производных, вычисленных для функций $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n),\ i = \overline{1,n}$ системы (2.2) по каждому неизвестному x_j , $j = \overline{1,n}$.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ & & \dots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

2. Вычисляем коэффициенты $b_{ij},\ i = \overline{1,n},\quad j = \overline{1,n}$, подставляя начальное приближение $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ в выражения частных производных.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

где $b_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{X^{(0)}}$, $i = \overline{1,n},\quad j = \overline{1,n}$.

Используя (2.5) последовательно выполняем итерации $k = 1,2,\dots$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = f_1(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = f_2(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ \qquad \dots \\ x_n^{(k)} = f_n(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \end{cases} \tag{2.5}$$

Первая итерация $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \\ \qquad \dots \\ x_n^{(1)} = f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \end{cases}$$

Вторая итерация $k = 2$:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) \\ x_2^{(2)} = f_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) \\ \qquad \dots \\ x_n^{(2)} = f_n(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) \end{cases}$$

Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока на *k*-ой итерации выполнится критерий (1.9).

При выполнении условия (1.9) за искомое решения принимаем значения, вычисленные на последней *k*-ой итерации.

Пример 2.2: Решить СНУ из примера 2.1 методом простой итерации с $\Delta = 0{,}001$.

Решение.

В качестве нулевого приближения неизвестных *x* и *y* выберем значения, полученные решением СНУ графическим методом с $\Delta = 0{,}1$ в примере 2.1: $x_0 = 0{,}6; \quad y_0 = -0{,}2.$

Преобразуем СНУ к виду (2.2).

$$\begin{cases} x = -\cos(y-2) \\ y = \sin(x+0{,}5) - 1{,}2 \end{cases}$$

Проверим условие сходимости метода по (2.3):

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin(y-2) \\ \cos(x+0{,}5) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin(y_0-2) \\ \cos(x_0+0{,}5) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sin(-0{,}2-2) \\ \cos(0{,}6+0{,}5) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}8085 \\ 0{,}4536 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|B\|_1 = \max(|-0{,}8085|;\, 0{,}4536) = 0.8085 < 1$$

Условие сходимости метода выполняется.

Используя (2.5) последовательно выполняем итерации $k = 1,2,...$

Первая итерация $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1 = -\cos(y_0-2) = -\cos(-0{,}2-2) = 0{,}5885 \\ y_1 = \sin(x_0+0{,}5) - 1{,}2 = \sin(0{,}6+0{,}5) - 1{,}2 = -0{,}3088 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|0{,}5885 - 0{,}6| = 0{,}0115$;

–второго уравнения: $|-0{,}3088 - (-0{,}2)| = 0{,}1088$.

Условие (1.9) не выполняется, т.к. $0{,}1088 > 0{,}001$.

Вторая итерация $k = 2$:

$$\begin{cases} x_2 = -\cos(y_1-2) = -\cos(-0{,}3088-2) = 0{,}6728 \\ y_2 = \sin(x_1+0{,}5) - 1{,}2 = \sin(0{,}5885+0{,}5) - 1{,}2 = -0{,}3141 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|0{,}6728 - 0{,}5885| = 0{,}0843$;

–второго уравнения: $|-0{,}3141 - (-0{,}3088)| = 0{,}0053$.

Условие (1.9) не выполняется, т.к. $0{,}0843 > 0{,}001$.

Третья итерация $k = 3$:

$$\begin{cases} x_3 = -\cos(y_2 - 2) = -\cos(-0{,}3141 - 2) = 0{,}6767 \\ y_3 = \sin(x_2 + 0{,}5) - 1{,}2 = \sin(0{,}6728 + 0{,}5) - 1{,}2 = -0{,}2782 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|0{,}6767 - 0{,}6728| = 0{,}0039$;

–второго уравнения: $|-0{,}2782 - (-0{,}3141)| = 0{,}0359$.

Условие (1.9) не выполняется, т.к. $0{,}0359 > 0{,}001$.

Четвертая итерация $k = 4$:

$$\begin{cases} x_4 = -\cos(y_3 - 2) = -\cos(-0{,}2782 - 2) = 0{,}6498 \\ y_4 = \sin(x_3 + 0{,}5) - 1{,}2 = \sin(0{,}6767 + 0{,}5) - 1{,}2 = -0{,}2767 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|0{,}6498 - 0{,}6767| = 0{,}0269$;

–второго уравнения: $|-0{,}2767 - (-0{,}2782)| = 0{,}0015$.

Условие (1.9) не выполняется, т.к. $0{,}0269 > 0{,}001$.

Пятая итерация $k = 5$:

$$\begin{cases} x_5 = -\cos(y_4 - 2) = -\cos(-0{,}2767 - 2) = 0{,}6487 \\ y_5 = \sin(x_4 + 0{,}5) - 1{,}2 = \sin(0{,}6498 + 0{,}5) - 1{,}2 = -0{,}2873 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|0{,}6487 - 0{,}6498| = 0{,}0011$;

–второго уравнения: $|-0{,}2873 - (-0{,}2767)| = 0{,}0106$.

Условие (1.9) не выполняется, т.к. $0{,}0106 > 0{,}001$.

Шестая итерация $k = 6$:

$$\begin{cases} x_6 = -\cos(y_5 - 2) = -\cos(-0{,}2873 - 2) = 0{,}6568 \\ y_6 = \sin(x_5 + 0{,}5) - 1{,}2 = \sin(0{,}6487 + 0{,}5) - 1{,}2 = -0{,}2878 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|0{,}6568 - 0{,}6487| = 0{,}0081$;

–второго уравнения: $|-0{,}2878 - (-0{,}2873)| = 0{,}0005$.

Условие (1.9) не выполняется, т.к. $0{,}0081 > 0{,}001$.

Седьмая итерация $k = 7$:

$$\begin{cases} x_7 = -\cos(y_6 - 2) = -\cos(-0{,}2878 - 2) = 0{,}6571 \\ y_7 = \sin(x_6 + 0{,}5) - 1{,}2 = \sin(0{,}6568 + 0{,}5) - 1{,}2 = -0{,}2845 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|0{,}6571 - 0{,}6568| = 0{,}0003$;

–второго уравнения: $|-0{,}2845 - (-0{,}2878)| = 0{,}0033$.

Условие (1.9) не выполняется, т.к. $0{,}0033 > 0{,}001$.

Восьмая итерация $k = 8$:

$$\begin{cases} x_8 = -\cos(y_7 - 2) = -\cos(-0{,}2845 - 2) = 0{,}6546 \\ y_8 = \sin(x_7 + 0{,}5) - 1{,}2 = \sin(0{,}6571 + 0{,}5) - 1{,}2 = -0{,}2844 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|0{,}6546 - 0{,}6571| = 0{,}0025$;

–второго уравнения: $|-0{,}2844 - (-0{,}2845)| = 0{,}0001$.

Условие (1.9) не выполняется, т.к. $0{,}0025 > 0{,}001$.

Девятая итерация $k = 9$:

$$\begin{cases} x_9 = -\cos(y_8 - 2) = -\cos(-0{,}2844 - 2) = 0{,}6546 \\ y_9 = \sin(x_8 + 0{,}5) - 1{,}2 = \sin(0{,}6546 + 0{,}5) - 1{,}2 = -0{,}2853 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|0{,}6546 - 0{,}6546| = 0{,}0000$;

–второго уравнения: $|-0{,}2853 - (-0{,}2844)| = 0{,}0009$.

Условие (1.9) выполняется, т.к. $0{,}0009 < 0{,}001$.

Запишем результаты девятой итерации с требуемой $\Delta = 0{,}001$:

$x = 0{,}655; \quad y = -0{,}285.$

Выполним проверку полученного результа подстановкой в исходную СНУ:

$$\begin{cases} \sin(x + 0{,}5) - y - 1{,}2 = \sin(0{,}655 + 0{,}5) - (-0{,}285) - 1{,}2 = 0{,}0002 \\ x + \cos(y - 2) = 0{,}655 + \cos(-0{,}285 - 2) = 0{,}0000 \end{cases}$$

Абсолютные погрешности решения СНУ составляют для первого уравнения 0,0002, для второго – 0,0000 и являются меньшими заданного значения $\Delta = 0{,}001$.

Таким образом корнями СНУ с $\Delta = 0{,}001$ являются

$x = 0{,}655; \quad y = -0{,}284.$

Решение получено за девять итераций.

2.3 Метод Зейделя

Определим $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ графически или аналитически.

Преобразование СНУ (2.1) к виду (2.2) и проверка условия (2.3)-(2.4) аналогичны соответствующим действиям метода итераций.

Используя (2.6) последовательно выполняем итерации $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = f_1(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)}) \\ \qquad \ldots \\ x_n^{(k)} = f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k-1)}) \end{cases} \tag{2.6}$$

Первая итерация $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = f_2(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \\ \quad\quad ... \\ x_n^{(1)} = f_n(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(0)}) \end{cases}$$

Вторая итерация $k = 2$:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}) \\ x_2^{(2)} = f_2(x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}) \\ \quad\quad ... \\ x_n^{(2)} = f_n(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(1)}) \end{cases}$$

Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока на *k*-ой итерации выполнится критерий (1.9).

При выполнении условия (1.9) за искомое решения принимаем значения, вычисленные на последней *k*-ой итерации.

Пример 2.3: Решить СНУ из примера 2.1 методом Зейделя с $\Delta = 0{,}001$.

Решение.

Выбор начального приближения неизвестных, преобразование СНУ к виду (2.2) и проверка условия (2.3)-(2.4) аналогичны соответствующим действиям метода итераций в примере 2.2.

Используя (2.6) последовательно выполняем итерации $k = 1, 2, ...$

Первая итерация $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1 = -\cos(y_0 - 2) = -\cos(-0{,}2 - 2) = 0{,}5885 \\ y_1 = \sin(x_0 + 0{,}5) - 1{,}2 = \sin(0{,}5885 + 0{,}5) - 1{,}2 = -0{,}3141 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|0{,}5885 - 0{,}6| = 0{,}0115$;

–второго уравнения: $|-0{,}3141 - (-0{,}2)| = 0{,}1141$.

Условие (1.9) не выполняется, т.к. $0{,}1141 > 0{,}001$.

Вторая итерация $k = 2$:

$$\begin{cases} x_2 = -\cos(y_1 - 2) = -\cos(-0{,}3141 - 2) = 0{,}6767 \\ y_2 = \sin(x_1 + 0{,}5) - 1{,}2 = \sin(0{,}6767 + 0{,}5) - 1{,}2 = -0{,}2767 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|0{,}6767 - 0{,}5885| = 0{,}0882$;

–второго уравнения: $|-0{,}2767 - (-0{,}3141)| = 0{,}0374$.

Условие (1.9) не выполняется, т.к. $0{,}0882 > 0{,}001$.

Третья итерация $k = 3$:

$$\begin{cases} x_3 = -\cos(y_2 - 2) = -\cos(-0{,}2767 - 2) = 0{,}6482 \\ y_3 = \sin(x_2 + 0{,}5) - 1{,}2 = \sin(0{,}6482 + 0{,}5) - 1{,}2 = -0{,}2880 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|0{,}6482 - 0{,}6767| = 0{,}0285$;

–второго уравнения: $|-0{,}2880 - (-0{,}2767)| = 0{,}0113$.

Условие (1.9) не выполняется, т.к. $0{,}0285 > 0{,}001$.

Четвертая итерация $k = 4$:

$$\begin{cases} x_4 = -\cos(y_3 - 2) = -\cos(-0{,}2880 - 2) = 0{,}6573 \\ y_4 = \sin(x_3 + 0{,}5) - 1{,}2 = \sin(0{,}6573 + 0{,}5) - 1{,}2 = -0{,}2843 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|0{,}6573 - 0{,}6482| = 0{,}0091$;

–второго уравнения: $|-0{,}2843 - (-0{,}2882)| = 0{,}0039$.

Условие (1.9) не выполняется, т.к. $0{,}0091 > 0{,}001$.

Пятая итерация $k = 5$:

$$\begin{cases} x_5 = -\cos(y_4 - 2) = -\cos(-0{,}2843 - 2) = 0{,}6543 \\ y_5 = \sin(x_4 + 0{,}5) - 1{,}2 = \sin(0{,}6545 + 0{,}5) - 1{,}2 = -0{,}2854 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|0{,}6545-0{,}6573|=0{,}0028$;

–второго уравнения: $|-0{,}2854-(-0{,}2843)|=0{,}0011$.

Условие (1.9) не выполняется, т.к. $0{,}0028>0{,}001$.

Шестая итерация $k=6$:

$$\begin{cases} x_6=-\cos(y_5-2)=-\cos(-0{,}2854-2)=0{,}6553 \\ y_6=\sin(x_5+0{,}5)-1{,}2=\sin(0{,}6553+0{,}5)-1{,}2=-0{,}2851 \end{cases}$$

Проверим условие (1.9) для:

– первого уравнения: $|0{,}6553-0{,}6545|=0{,}0008$;

–второго уравнения: $|-0{,}2851-(-0{,}2854)|=0{,}0003$.

Условие (1.9) выполняется, т.к. $0{,}0008<0{,}001$.

Запишем результаты шестой итерации с требуемой $\Delta=0{,}001$:

$x=0{,}655;\quad y=-0{,}285.$

Выполним проверку полученного результа подстановкой в исходную СНУ:

$$\begin{cases} \sin(x+0{,}5)-y-1{,}2=\sin(0{,}655+0{,}5)-(-0{,}285)-1{,}2=0{,}001 \\ x+\cos(y-2)=0{,}655+\cos(-0{,}285-2)=0{,}0000 \end{cases}$$

Абсолютные погрешности решения СНУ составляют для первого уравнения 0,0002, для второго – 0,0000 и являются меньшими заданного значения $\Delta=0{,}001$.

Таким образом корнями СНУ с $\Delta=0{,}001$ являются

$x=0{,}655;\quad y=-0{,}285.$

Решение получено за шесть итераций.

2.4 Метод Ньютона

Решение СНУ (2.1) сводится к решению СЛУ (1.1).

Составляем матрицу Якоби W – матрицу из частных производных, вычисленных для функций $F_i(x_1, x_2, ..., x_n), i = \overline{1, n}$ системы (2.1) по каждому неизвестному x_i , $i = \overline{1, n}$

$$W = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ & \ldots & & \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Выбираем $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$.

Последовательно выполняем итерации $k = 1,2,...$, на каждой из которых составляем и решаем систему из n линейных уравнений относительно погрешностей $\Delta x_i^{(k)}$, $i = \overline{1, n}$ неизвестных x_i , $i = \overline{1, n}$

$$\begin{cases} a_{11}\Delta x_1^{(k)} + a_{12}\Delta x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}\Delta x_n^{(k)} = b_1 \\ a_{21}\Delta x_1^{(k)} + a_{22}\Delta x_2^{(k)} + \ldots + a_{2n}\Delta x_n^{(k)} = b_2 \\ \qquad \ldots \\ a_{n1}\Delta x_1^{(k)} + a_{n2}\Delta x_2^{(k)} + \ldots + a_{nn}\Delta x_n^{(k)} = b_n \end{cases} \tag{2.7}$$

где $b_i = -F_i(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, ..., x_n^{(k-1)}), i = \overline{1, n}$

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{X^{(k-1)}}, \; i = \overline{1, n}, \; j = \overline{1, n}$$

Полученные значения $\Delta x_i^{(k)}$ используем для уточнения значения неизвестных $x_i^{(k)}$ на k-ой итерации:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \Delta x_i^{(k)}, \; i = \overline{1, n}$$

Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока на k-ой итерации выполнится условие:

$$\max_{1\le i\le n}\left|\Delta_i^{(k)}\right| < \Delta \tag{2.8}$$

где Δ – заданная предельная абсолютная погрешность неизвестных.

Пример 2.4: Решить СНУ из примера 2.1 методом Ньтона с $\Delta = 0{,}001$.

Решение.

Преобразуем СНУ к виду (2.1):

$$\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y - 1{,}2 = 0 \\ x + \cos(y-2) = 0 \end{cases}$$

Составляем матрицу Якоби W :

$$W = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x+0{,}5) & -1 \\ 1 & -\sin(y-2) \end{pmatrix}$$

В качестве нулевого приближения неизвестных x и y выберем значения, полученные решением СНУ графическим методом с $\Delta = 0{,}1$ в примере 2.1: $x_0 = 0{,}6; \quad y_0 = -0{,}2.$

Используя (2.7) последовательно выполняем итерации $k = 1{,}2{,}\ldots$, на каждой из которых составляем и решаем систему из двух линейных уравнений относительно погрешностей $\Delta x^{(k)}$, $\Delta y^{(k)}$ неизвестных x , y .

$$\begin{cases} a_{11}\Delta x^{(k)} + a_{12}\Delta y^{(k)} = b_1 \\ a_{21}\Delta x^{(k)} + a_{22}\Delta y^{(k)} = b_2 \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= -(\sin(x^{(л-1)} + 0{,}5) - y^{(л-1)} - 1{,}2) \\ b_2 &= -(x^{(k-1)} + \cos(y^{(k-1)} - 2)) \\ a_{11} &= \cos(x^{(k-1)} + 0{,}5) \\ a_{12} &= -1 \\ a_{21} &= 1 \\ a_{22} &= -\sin(y^{(k-1)} - 2) \end{aligned}$$

Первая итерация $k=1$:

$$b_1 = -(\sin(0,6+0,5)-(-0,2)-1,2) = -0,1088$$
$$b_2 = -(0,6+\cos(-0,2-2)) = -0,0115$$
$$a_{11} = \cos(0,6+0,5) = 0,4536$$
$$a_{12} = -1$$
$$a_{21} = 1$$
$$a_{22} = -\sin(-0,2-2) = 0,8085$$

$$\begin{cases} 0,4536\Delta x^{(1)} - \Delta y^{(1)} = -0,1088 \\ \Delta x^{(1)} + 0,8085\Delta y^{(1)} = -0,0115 \end{cases}$$

В результате решения СЛУ прямым методом находим значения погрешностей $\Delta x^{(1)} = 0,0559;\quad \Delta y^{(1)} = -0,0834$, и вычисляем первое приближение неизвестных $x^{(1)};\quad y^{(1)}$:

$$x^{(1)} = 0,6+0,0559 = 0,6559$$
$$y^{(1)} = -0,2+(-0,0834) = -0,2834$$

Условие (2.8) не выполняется, т.к. $|-0,0834| = 0,0834 > 0,001$.

Вторая итерация $k=2$:

$$b_1 = -(\sin(0,6559+0,5)-(-0,2834)-1,2) = 0,0014$$
$$b_2 = -(0,6559+\cos(-0,2834-2)) = -0,0021$$
$$a_{11} = \cos(0,6559+0,5) = 0,4031$$
$$a_{12} = -1$$
$$a_{13} = 1$$
$$a_{14} = -\sin(-0,2834-2) = 0,7567$$

$$\begin{cases} 0,4031\Delta x^{(2)} - \Delta y^{(2)} = 0,0014 \\ \Delta x^{(2)} + 0,7567\Delta y^{(2)} = -0,0021 \end{cases}$$

В результате решения СЛУ прямым методом находим значения погрешностей $\Delta x^{(2)} = -0,0008;\quad \Delta y^{(2)} = -0,0018$, и вычисляем второе приближение неизвестных $x^{(2)};\quad y^{(2)}$:

$$x^{(2)} = 0{,}6559 - 0{,}0008 = 0{,}6551$$
$$y^{(2)} = -0{,}2834 + (-0{,}0018) = -0{,}2852$$

Условие (2.8) не выполняется, т.к. $|-0{,}0018| = 0{,}0018 > 0{,}001$.

Третья итерация $k = 3$:

$$b_1 = -(\sin(0{,}6551 + 0{,}5) - (-0{,}2852) - 1{,}2) = 0{,}0000$$
$$b_2 = -(0{,}6551 + \cos(-0{,}2852 - 2)) = 0{,}0001$$
$$a_{11} = \cos(0{,}6551 + 0{,}5) = 0{,}4038$$
$$a_{12} = -1$$
$$a_{13} = 1$$
$$a_{14} = -\sin(-0{,}2852 - 2) = 0{,}7555$$

$$\begin{cases} 0{,}4038\Delta x^{(3)} - \Delta y^{(3)} = 0{,}0000 \\ \Delta x^{(3)} + 0{,}7555\Delta y^{(3)} = 0{,}0001 \end{cases}$$

В результате решения СЛУ прямым методом находим значения погрешностей $\Delta x^{(3)} = 0{,}0001$; $\Delta y^{(3)} = 0{,}0001$, и вычисляем второе приближение неизвестных $x^{(2)}$; $y^{(2)}$:

$$x^{(3)} = 0{,}6551 + 0{,}0001 = 0{,}6552$$
$$y^{(2)} = -0{,}2852 + 0{,}0001) = 0{,}2853$$

Условие (2.8) выполняется, т.к. $0{,}0001 < 0{,}001$.

Запишем результаты третьей итерации с требуемой $\Delta = 0{,}001$:

$$x = 0{,}655; \quad y = -0{,}285.$$

Выполним проверку полученного результа подстановкой в исходную СНУ:

$$\begin{cases} \sin(x + 0{,}5) - y - 1{,}2 = \sin(0{,}655 + 0{,}5) - (-0{,}285) - 1{,}2 = 0{,}001 \\ x + \cos(y - 2) = 0{,}655 + \cos(-0{,}285 - 2) = 0{,}0000 \end{cases}$$

Абсолютные погрешности решения СНУ составляют для первого уравнения 0,0002, для второго – 0,0000 и являются меньшими заданного значения $\Delta = 0{,}001$.

Таким образом корнями СНУ с $\Delta = 0{,}001$ являются

$x = 0{,}655; \quad y = -0{,}285.$

Решение получено за три итерации.

2.5 Индивидуальные задания

1. Решить СНУ графическим методом с $\Delta = 0{,}01$ или с $\Delta = 0{,}1$.

2. Решить СНУ численными методами с $\Delta = 0{,}001$:

– методом простой итерации или методом Зейделя согласно таблице 2.1;

– методом Ньютона, получив СЛУ и решив ее прямым методом.

Варианты индивидуальных заданий выбираются из таблицы 2.1 в соответствии с номером студента в журнале преподавателя.

Таблица 2.1 – Системы нелинейных уравнений

№	Система уравнений	Метод
1	$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1{,}2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$	Простой итерации
2	$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}5 \\ x - \cos y = 3 \end{cases}$	Зейделя
3	$\begin{cases} \sin x + 2y = 2 \\ \cos(y-1) + x = 0{,}7 \end{cases}$	Простой итерации
4	$\begin{cases} \cos x + y = 1{,}5 \\ 2x - \sin(y - 0{,}5) = 1 \end{cases}$	Зейделя
5	$\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$	Простой итерации
6	$\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 0{,}8 \\ \sin y - 2x = 1{,}6 \end{cases}$	Зейделя
7	$\begin{cases} \sin(x-1) = 1{,}3 - y \\ x - \sin(y+1) = 0{,}8 \end{cases}$	Простой итерации
8	$\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0 \\ x + \sin y = -0{,}4 \end{cases}$	Зейделя
9	$\begin{cases} \cos(x+0{,}5) - y = 2 \\ \sin y - 2x = 1 \end{cases}$	Простой итерации

№	Система уравнений	Метод
10	$\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1{,}5 \\ x + \cos(y-2) = 0{,}5 \end{cases}$	Зейделя
11	$\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1{,}2 \\ 2y + \cos x = 2 \end{cases}$	Простой итерации
12	$\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0{,}5 \\ y - \cos x = 3 \end{cases}$	Зейделя
13	$\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ \cos(x-1) + y = 0{,}7 \end{cases}$	Простой итерации
14	$\begin{cases} \cos y + x = 1{,}5 \\ 2y - \sin(x-0{,}5) = 1 \end{cases}$	Зейделя
15	$\begin{cases} \sin(y+0{,}5) - x = 1 \\ \cos(x-2) + y = 0 \end{cases}$	Простой итерации
16	$\begin{cases} \cos(y+0{,}5) + x = 0{,}8 \\ \sin x - 2y = 1{,}6 \end{cases}$	Зейделя
17	$\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1{,}3 \\ y - \sin(x+1) = 0{,}8 \end{cases}$	Простой итерации
18	$\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0 \\ y + \sin x = -0{,}4 \end{cases}$	Зейделя
19	$\begin{cases} \cos(y+0{,}5) - x = 2 \\ \sin x - 2y = 1 \end{cases}$	Простой итерации
20	$\begin{cases} \sin(y+2) - x = 1{,}5 \\ y + \cos(x-2) = 0{,}5 \end{cases}$	Зейделя
21	$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$	Простой итерации
22	$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}8 \\ x - \cos y = 2 \end{cases}$	Зейделя
23	$\begin{cases} \sin x + 2y = 1{,}6 \\ \cos(y-1) + x = 1 \end{cases}$	Простой итерации
24	$\begin{cases} \cos x + y = 1{,}2 \\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 2 \end{cases}$	Зейделя
25	$\begin{cases} \sin(x-0{,}6) - y = 1{,}6 \\ 3x - \cos y = 0{,}9 \end{cases}$	Простой итерации
26	$\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 1; \\ \sin y - 2x = 2. \end{cases}$	Зейделя

№	Система уравнений	Метод
27	$\begin{cases} \sin(x-1)+y=1{,}5 \\ x-\sin(y+1)=1 \end{cases}$	Простой итерации
28	$\begin{cases} \sin(y+1)-x=1 \\ 2y+\cos x=2 \end{cases}$	Зейделя
29	$\begin{cases} \cos(y-1)+x=0{,}8 \\ y-\cos x=2 \end{cases}$	Простой итерации
30	$\begin{cases} \cos(x-1)+y=1 \\ \sin y+2x=1{,}6 \end{cases}$	Зейделя

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (СДУ)

3.1 Постановка задачи

Система из n дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных имеет вид:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \qquad (3.1)$$

где x – независимая переменная.

Решением СДУ (3.1) называется любая совокупность функций $y_i = \varphi_i(x),\ i = \overline{1,n}$, которая после подстановки в (3.1), обращает ее в тождество.

Общее решение системы (3.1)

$$y_i = \Phi_i(x, C_i),\ i = \overline{1,n},$$

где C_i, $i = \overline{1,n}$ – произвольные постоянные.

Частное решение системы получают из общего при определенных значениях произвольных постоянных, которые находят при наличии дополнительных условий. Если эти условия заданы в одной точке, получим задачу Коши. Одношаговые и многошаговые методы решения задачи Коши для ДУ первого порядка могут быть использованы и для решения задачи Коши СДУ.

К решению СДУ сводится задача Коши для ДУ высших порядков.

Рассмотрим ДУ второго порядка $y'' = f(x, y, y')$, где x – независимая переменная, с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = z_0$.

Введем вторую неизвестную функцию $z(x) = y'$ и получим систему из двух дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных:

$$\begin{cases} y' = z(x) \\ z' = f(x, y, z). \end{cases} \tag{3.2}$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = z_0$.

Пример 3.1: Представить ДУ второго порядка $y'' + xy' - 0{,}5\dfrac{y}{x} = 1$ в постановке задачи Коши с начальными условиями $y(2) = 0, \quad y'(2) = 0$ в виде системы двух ДУ первого порядка.

Решение.

Приведем исходное ДУ к виду $y'' = f(x, y, y')$:

$$y'' = 1 - xy' + 0{,}5\frac{y}{x}$$

Введем вторую неизвестную функцию $z(x) = y'$ и получим по (3.2):

$$\begin{cases} y' = z(x) \\ z' = 1 - xz + 0{,}5\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

с начальными условиями $y(2) = 0, \quad z(2) = 0.$

3.2 Методы решения задачи Коши

3.2.1 Одношаговый метод Эйлера

Рассмотрим систему двух ДУ, где где x – независимая переменная, с начальными условиями $y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0$.

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases} \tag{3.3}$$

Формулы Эйлера решения СДУ (3.3):

$$y_{i+1} = y_i + hf_1(x_i, y_i, z_i)$$
$$z_{i+1} = z_i + hf_2(x_i, y_i, z_i) \tag{3.4}$$

где h – шаг переменной x, $h = \text{const}$.

Пример 3.2: Решить с $\Delta = 0{,}01$ ДУ второго порядка $y'' + xy' - 0{,}5\dfrac{y}{x} = 1$ в постановке задачи Коши одношаговым методом Эйлера на отрезке $[2; 2{,}3]$ с шагом $h = 0{,}1$ и начальными условиями $y(2) = 0, \quad y'(2) = 0$.

Решение.

Представим ДУ второго порядка в виде системы двух ДУ первого порядка (решение приведено в примере 3.1).

Разбив отрезок $[2; 2{,}3]$ на части с шагом $h = 0{,}1$, получим четыре узловые точки с абсциссами $x_0 = 2$; $x_1 = 2{,}1$; $x_2 = 2{,}2$; $x_3 = 2{,}3$.

Точка $x_0 = 2$ начальная точка, поэтому из начальных условий $y_0 = 0$; $z_0 = 0$.

Найдем y_1 и z_1 для $x_1 = 2{,}1$ по (3.4):

$$y_1 = y_0 + hf_1(x_0, y_0, z_0) = y_0 + h \cdot z_0 = 0 + 0{,}1 * 0 = 0$$

$$z_1 = z_0 + hf_2(x_0, y_0, z_0) = z_0 + h \cdot (1 - x_0 z_0 + 0{,}5\frac{y_0}{x_0}) = 0 + 0{,}1 * (1 - 2 * 0 + 0{,}5 * \frac{0}{2}) = 0{,}1$$

Найдем y_2 и z_2 для $x_2 = 2{,}2$ по (3.4):

$$y_2 = y_1 + hf_1(x_1, y_1, z_1) = y_1 + h \cdot z_1 = 0 + 0{,}1 * 0{,}1 = 0{,}01$$

$$z_2 = z_1 + hf_2(x_1, y_1, z_1) = z_1 + h \cdot (1 - x_1 z_1 + 0{,}5 * \frac{y_1}{x_1}) =$$

$$= 0{,}1 + 0{,}1 * (1 - 2{,}1 * 0{,}1 + 0{,}5 * \frac{0}{2{,}1}) = 0{,}179$$

Найдем y_3 и z_3 для $x_3 = 2{,}3$ по (3.4):

$$y_3 = y_2 + hf_1(x_2, y_2, z_2) = y_2 + hz_2 = 0{,}01 + 0{,}1 * 0{,}179 = 0{,}028$$

$$z_3 = z_2 + hf_2(x_2, y_2, z_2) = z_2 + h(1 - x_2 z_2 + 0{,}5\frac{y_2}{x_2}) =$$

$$= 0{,}179 + 0{,}1 * (1 - 2{,}2 * 0{,}179 + 0{,}5 * \frac{0{,}01}{2{,}2}) = 0{,}240$$

Ответ представим с $\Delta = 0{,}01$ в виде таблицы.

X	2	2,1	2,2	2,3
Y	0	0	0,01	0,03

3.2.2 Одношаговый усовершенствованный метод Эйлера

Формулы усовершенствованного (исправленного) метода Эйлера решения СДУ (3.3):

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hf_1(x_i + h/2, y_{i+1/2}, z_{i+1/2}) \\ z_{i+1} &= z_i + hf_2(x_i + h/2, y_{i+1/2}, z_{i+1/2}) \end{aligned} \qquad (3.5)$$

где

$$y_{i+1/2} = y_i + hf_1(x_i, y_i, z_i)/2$$

$$z_{i+1/2} = z_i + hf_2(x_i, y_i, z_i)/2$$

Пример 3.3: Решить с $\Delta = 0{,}01$ ДУ второго порядка $y'' + xy' - 0{,}5\dfrac{y}{x} = 1$ в постановке задачи Коши одношаговым усовершенствованным методом Эйлера на отрезке [2; 2,3] с шагом $h = 0{,}1$ и начальными условиями $y(2) = 0, \quad y'(2) = 0$.

Решение.

Представим ДУ второго порядка в виде системы двух ДУ первого порядка (решение приведено в примере 3.1).

Разбив отрезок $[2; 2{,}3]$ на части с шагом $h = 0{,}1$, получим четыре узловые точки с абсциссами $x_0 = 2;\ x_1 = 2{,}1;\ x_2 = 2{,}2;\ x_3 = 2{,}3$.

Точка $x_0 = 2$ начальная точка, поэтому из начальных условий $y_0 = 0;\ z_0 = 0$.

Найдем y_1 и z_1 для $x_1 = 2{,}1$ по (3.5):

$$y_{0+1/2} = y_0 + hf_1(x_0, y_0, z_0)/2 = y_0 + hz_0 = 0 + 0{,}1*0/2 = 0$$

$$z_{0+1/2} = z_0 + hf_2(x_0, y_0, z_0)/2 = z_0 + h(1 - x_0 z_0 + 0{,}5\frac{y_0}{x_0})/2 =$$

$$= 0 + 0{,}1*(1 - 2*0 + 0{,}5*\frac{0}{2})/2 = 0{,}05$$

$$y_1 = y_0 + hf_1(x_0 + h/2, y_{0+1/2}, z_{0+1/2}) = y_0 + hz_{0+1/2} = 0 + 0{,}1*0{,}05 = 0{,}005$$

$$z_1 = z_0 + hf_2(x_0 + h/2, y_{0+1/2}, z_{0+1/2}) = z_0 + h(1 - (x_0 + h/2)\cdot z_{0+1/2} + 0{,}5\frac{y_{0+1/2}}{x_0 + h/2}) =$$

$$= 0 + 0{,}1*(1 - (2 + 0{,}1/2)*0{,}05 + 0{,}5*\frac{0}{2 + 0{,}1/2}) = 0{,}090$$

Найдем y_2 и z_2 для $x_2 = 2{,}2$ по (3.5):

$$y_{1+1/2} = y_1 + hf_1(x_1, y_1, z_1)/2 = y_1 + h\cdot_1 = 0{,}005 + 0{,}1*0{,}090/2 = 0{,}009$$

$$z_{1+1/2} = z_1 + hf_2(x_1, y_1, z_1)/2 = z_1 + h(1 - x_1 z_1 + 0{,}5\frac{y_1}{x_1})/2 =$$

$$= 0{,}090 + 0{,}1*(1 - 2{,}1*0{,}090 + 0{,}5*\frac{0{,}005}{2{,}1})/2 = 0{,}171$$

$$y_2 = y_1 + hf_1(x_1 + h/2, y_{1+1/2}, z_{1+1/2}) = y_1 + hz_{1+1/2} = 0{,}005 + 0{,}1*0{,}171 = 0{,}022$$

$$z_2 = z_1 + hf_2(x_1 + h/2, y_{1+1/2}, z_{1+1/2}) = z_1 + h(1 - (x_1 + h/2)z_{1+1/2} + 0{,}5\frac{y_{1+1/2}}{x_1 + h/2}) =$$

$$= 0{,}090 + 0{,}1*(1 - (2{,}1 + 0{,}1/2)*0{,}171 + 0{,}5*\frac{0{,}009}{2{,}1 + 0{,}1/2}) = 0{,}153$$

Найдем y_3 и z_3 для $x_3 = 2{,}3$ по (3.5):

$$y_{2+1/2} = y_2 + hf_1(x_2, y_2, z_2)/2 = y_2 + hz_2 = 0{,}022 + 0{,}1*0{,}153/2 = 0{,}030$$

$$z_{2+1/2} = z_2 + hf_2(x_2, y_2, z_2)/2 = z_2 + h(1 - x_2 z_2 + 0{,}5\frac{y_2}{x_2})/2 =$$

$$= 0{,}153 + 0{,}1\cdot(1 - 2{,}2*0{,}153 + 0{,}5*\frac{0{,}022}{2{,}2})/2 = 0{,}220$$

$$y_3 = y_2 + hf_1(x_2 + h/2, y_{2+1/2}, z_{2+1/2}) = y_2 + hz_{2+1/2} = 0{,}022 + 0{,}1*0{,}220 = 0{,}044$$

$$z_3 = z_2 + hf_2(x_2 + h/2, y_{2+1/2}, z_{2+1/2}) = z_2 + h(1 - (x_2 + h/2)\cdot z_{2+1/2} + 0{,}5\frac{y_{2+1/2}}{x_2 + h/2}) =$$

$$= 0{,}153 + 0{,}1*(1 - (2{,}2 + 0{,}1/2)*0{,}220 + 0{,}5*\frac{0{,}030}{2{,}2 + 0{,}1/2}) = 0{,}271$$

Ответ представим с $\Delta = 0{,}01$ в виде таблицы.

X	2	2,1	2,2	2,3
Y	0	0,01	0,02	0,04

3.2.3 Одношаговый метод Рунге-Кутта

Формулы метода Рунге-Кута 4 порядка решения СДУ (3.3):

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + 1/6\,(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ z_{i+1} &= z_i + 1/6\,(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) \end{aligned} \qquad (3.6)$$

где $i = 0,1,\ldots$

$$K_1 = hf_1(x_i, y_i, z_i)$$

$$L_1 = hf_2(x_i, y_i, z_i)$$

$$K_2 = hf_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}, z_i + \frac{L_1}{2})$$

$$L_2 = hf_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}, z_i + \frac{L_1}{2})$$

$$K_3 = hf_1(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}, z_i + \frac{L_2}{2})$$

$$L_3 = hf_2(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}, z_i + \frac{L_2}{2})$$

$$K_4 = hf_1(x_i + h, y_i + K_3, z_i + L_3)$$

$$L_4 = hf_2(x_i + h, y_i + K_3, z_i + L_3)$$

Пример 3.4: Решить с $\Delta = 0{,}01$ ДУ второго порядка $y'' + xy' - 0{,}5\frac{y}{x} = 1$ в постановке задачи Коши одношаговым методом Рунге-Кутта на отрезке $[2;\,2{,}3]$ с шагом $h = 0{,}1$ и начальными условиями $y(2) = 0, \quad y'(2) = 0$.

Решение.

Представим ДУ второго порядка в виде системы двух ДУ первого порядка (решение приведено в примере 3.1).

Разбив отрезок $[2;\,2{,}3]$ на части с шагом $h = 0{,}1$, получим четыре узловые точки с абсциссами $x_0 = 2;\; x_1 = 2{,}1;\; x_2 = 2{,}2;\; x_3 = 2{,}3$.

Точка $x_0 = 2$ начальная точка, поэтому из начальных условий $y_0 = 0;\; z_0 = 0$.

Найдем y_1 и z_1 для $x_1 = 2{,}1$ по (3.6):

$$K_1 = hf_1(x_0, y_0, z_0) = hz_0 = 0{,}1*0 = 0$$

$$L_1 = hf_2(x_0, y_0, z_0) = h\cdot(1 - x_0 z_0 + 0{,}5\frac{y_0}{x_0}) = 0{,}1*(1 - 2*0 + 0{,}5*\frac{0}{2}) = 0{,}1$$

$$K_2 = hf_1(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}, z_0 + \frac{L_1}{2}) = h(z_0 + \frac{L_1}{2}) = 0{,}1*(0 + \frac{0{,}1}{2}) = 0{,}005$$

$$L_2 = hf_2(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}, z_0 + \frac{L_1}{2}) = h(1 - (x_0 + \frac{h}{2})(z_0 + \frac{L_1}{2}) + 0{,}5\frac{y_0 + \frac{K_1}{2}}{x_0 + \frac{h}{2}}) =$$

$$= 0{,}1*(1 - (2 + \frac{0{,}1}{2})*(0 + \frac{0{,}1}{2}) + 0{,}5*\frac{0 + \frac{0}{2}}{2 + \frac{0{,}1}{2}}) = 0{,}090$$

$$K_3 = hf_1(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}, z_0 + \frac{L_2}{2}) = h(z_0 + \frac{L_2}{2}) = 0{,}1*(0 + \frac{0{,}090}{2}) = 0{,}005$$

$$L_3 = hf_2(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}, z_0 + \frac{L_2}{2}) = h(1 - (x_0 + \frac{h}{2})(z_0 + \frac{L_2}{2}) + 0{,}5\frac{y_0 + \frac{K_2}{2}}{x_0 + \frac{h}{2}}) =$$

$$= 0{,}1*(1 - (2 + \frac{0{,}1}{2})*(0 + \frac{0{,}090}{2}) + 0{,}5*\frac{0 + \frac{0{,}005}{2}}{2 + \frac{0{,}1}{2}}) = 0{,}091$$

$$K_4 = hf_1(x_0 + h, y_0 + K_3, z_0 + L_3) = h(z_0 + L_3) = 0{,}1*(0 + 0{,}091) = 0{,}009$$

$$L_4 = hf_2(x_0 + h, y_0 + K_3, z_0 + L_3) = h(1 - (x_0 + h)(z_0 + L_3) + 0{,}5\frac{y_0 + K_3}{x_0 + h}) =$$

$$= 0{,}1*(1 - (2 + 0{,}1)*(0 + 0{,}091) + 0{,}5*\frac{0 + 0{,}005}{2 + 0{,}1}) = 0{,}172$$

$$y_1 = y_0 + 1/6\,(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 0 + 1/6*(0 + 2*0{,}005 +$$
$$2*0{,}005\cdot + 0{,}009) = 0{,}005$$

$$z_1 = z_0 + 1/6\,(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) = 0 + 1/6*(0{,}1 + 2*0{,}090 + 2*0{,}091 + 0{,}172) = 0{,}106$$

Найдем y_2 и z_2 для $x_2 = 2{,}2$ по (3.6):

$$K_1 = hf_1(x_1, y_1, z_1) = hz_1 = 0{,}1*0{,}106 = 0{,}011$$

$$L_1 = hf_2(x_1, y_1, z_1) = h(1 - x_1 z_1 + 0{,}5\frac{y_1}{x_1}) = 0{,}1*(1 - 2{,}1*0{,}106 + 0{,}5*\frac{0{,}005}{2{,}1}) = 0{,}078$$

$$K_2 = hf_1(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_1}{2}, z_1 + \frac{L_1}{2}) = h(z_1 + \frac{L_1}{2}) = 0{,}1*(0{,}106 + \frac{0{,}078}{2}) = 0{,}015$$

$$L_2 = hf_2(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_1}{2}, z_1 + \frac{L_1}{2}) = h(1 - (x_1 + \frac{h}{2})(z_1 + \frac{L_1}{2}) + 0{,}5\frac{y_1 + \frac{K_1}{2}}{x_1 + \frac{h}{2}}) =$$

$$= 0{,}1*(1 - (2{,}1 + \frac{0{,}1}{2})*(0{,}106 + \frac{0{,}078}{2}) + 0{,}5*\frac{0{,}005 + \frac{0{,}011}{2}}{2{,}1 + \frac{0{,}1}{2}}) = 0{,}092$$

$$K_3 = hf_1(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_2}{2}, z_1 + \frac{L_2}{2}) = h(z_1 + \frac{L_2}{2}) = 0{,}1*(0{,}106 + \frac{0{,}092}{2}) = 0{,}015$$

$$L_3 = hf_2(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_2}{2}, z_1 + \frac{L_2}{2}) = h(1 - (x_1 + \frac{h}{2})(z_1 + \frac{L_2}{2}) + 0{,}5\frac{y_1 + \frac{K_2}{2}}{x_1 + \frac{h}{2}}) =$$

$$= 0{,}1*(1 - (2{,}1 + \frac{0{,}1}{2})*(0{,}106 + \frac{0{,}092}{2}) + 0{,}5*\frac{0{,}005 + \frac{0{,}015}{2}}{2{,}1 + \frac{0{,}1}{2}}) = 0{,}068$$

$$K_4 = hf_1(x_1 + h, y_1 + K_3, z_1 + L_3) = h(z_1 + L_3) = 0{,}1*(0{,}106 + 0{,}068) = 0{,}017$$

$$L_4 = hf_2(x_1 + h, y_1 + K_3, z_1 + L_3) = h(1 - (x_1 + h)(z_1 + L_3) + 0{,}5\frac{y_1 + K_3}{x_1 + h}) =$$

$$= 0{,}1*(1 - (2{,}1 + 0{,}1)*(0{,}106 + 0{,}068) + 0{,}5*\frac{0{,}005 + 0{,}015}{2{,}1 + 0{,}1}) = 0{,}167$$

$$y_2 = y_1 + 1/6\,(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 0{,}005 + 1/6*(0{,}011 + 2*0{,}015 +$$
$$+ 2*0{,}015 + 0{,}017) = 0{,}020$$

$$z_2 = z_1 + 1/6\,(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) = 0{,}106 + 1/6*(0{,}078 + 2*0{,}092 +$$
$$+ 2*0{,}068 + 0{,}167) = 0{,}215$$

Найдем y_3 и z_3 для $x_3 = 2{,}3$ по (3.6):

$$K_1 = hf_1(x_2, y_2, z_2) = hz_2 = 0{,}1*0{,}215 = 0{,}022$$

$$L_1 = hf_2(x_2, y_2, z_2) = h\cdot(1 - x_2 z_2 + 0{,}5\frac{y_2}{x_2}) = 0{,}1*(1 - 2{,}2*0{,}215 + 0{,}5*\frac{0{,}019}{2{,}2}) = 0{,}053$$

$$K_2 = hf_1(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{K_1}{2}, z_2 + \frac{L_1}{2}) = h(z_2 + \frac{L_1}{2}) = 0{,}1*(0{,}215 + \frac{0{,}053}{2}) = 0{,}024$$

$$L_2 = hf_2(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{K_1}{2}, z_2 + \frac{L_1}{2}) = h(1 - (x_2 + \frac{h}{2})(z_2 + \frac{L_1}{2}) + 0{,}5\frac{y_2 + \frac{K_1}{2}}{x_2 + \frac{h}{2}}) =$$

$$= 0{,}1*(1 - (2{,}2 + \frac{0{,}1}{2})*(0{,}215 + \frac{0{,}053}{2}) + 0{,}5*\frac{0{,}020 + \frac{0{,}022}{2}}{2{,}2 + \frac{0{,}1}{2}}) = 0{,}046$$

$$K_3 = hf_1(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{K_2}{2}, z_2 + \frac{L_2}{2}) = h(z_2 + \frac{L_2}{2}) = 0{,}1*(0{,}215 + \frac{0{,}046}{2}) = 0{,}024$$

$$L_3 = hf_2(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{K_2}{2}, z_2 + \frac{L_2}{2}) = h(1 - (x_2 + \frac{h}{2})(z_2 + \frac{L_2}{2}) + 0{,}5\frac{y_2 + \frac{K_2}{2}}{x_2 + \frac{h}{2}}) =$$

$$= 0{,}1*(1 - (2{,}2 + \frac{0{,}1}{2})*(0{,}215 + \frac{0{,}046}{2}) + 0{,}5*\frac{0{,}020 + \frac{0{,}024}{2}}{2{,}2 + \frac{0{,}1}{2}}) = 0{,}047$$

$$K_4 = hf_1(x_2 + h, y_2 + K_3, z_2 + L_3) = h(z_2 + L_3) = 0{,}1*(0{,}215 + 0{,}047) = 0{,}026$$

$$L_4 = hf_2(x_2 + h, y_2 + K_3, z_2 + L_3) = h(1 - (x_2 + h)(z_2 + L_3) + 0{,}5\frac{y_2 + K_3}{x_2 + h}) =$$

$$= 0{,}1*(1 - (2{,}2 + 0{,}1)*(0{,}215 + 0{,}047) + 0{,}5*\frac{0{,}020 + 0{,}024}{2{,}2 + 0{,}1}) = 0{,}099$$

$$y_3 = y_2 + 1/6\,(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 0{,}020 + 1/6*(0{,}022 + 2*0{,}024 +$$
$$+ 2*0{,}024 + 0{,}026) = 0{,}044$$

$$z_3 = z_2 + 1/6\,(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) = 0{,}215 + 1/6*(0{,}053 + 2*0{,}046 +$$
$$+ 2*0{,}047 + 0{,}099) = 0{,}271$$

Ответ представим с $\Delta = 0{,}01$ в виде таблицы.

X	2	2,1	2,2	2,3
Y	0	0,01	0,02	0,04

3.2.4 Многошаговые методы Адамса

Для использования многошаговых (r-шаговых) методов, необходимо сначала любым одношаговым методом вычислить решение на $r-1$ предыдущих шагах (в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$).

Формулы двухшагового метода Адамса решения СДУ (3.3):

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}\big(3f_1(x_i, y_i, z_i) - f_1(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})\big) \\ z_{i+1} &= z_i + \frac{h}{2}\big(3f_2(x_i, y_i, z_i) - f_2(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})\big) \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Пример 3.5: Решить с $\Delta = 0{,}01$ ДУ второго порядка $y'' + xy' - 0{,}5\frac{y}{x} = 1$ в постановке задачи Коши двухшаговым методом Адамса на отрезке $[2;\,2{,}3]$ с шагом $h = 0{,}1$ и начальными условиями $y(2) = 0, \quad y'(2) = 0$.

Решение.

Представим ДУ второго порядка в виде системы двух ДУ первого порядка (решение приведено в примере 3.1).

Разбив отрезок $[2;\,2{,}3]$ на части с шагом $h = 0{,}1$, получим четыре узловые точки с абсциссами $x_0 = 2;\ x_1 = 2{,}1;\ x_2 = 2{,}2;\ x_3 = 2{,}3$.

Точка $x_0 = 2$ начальная точка, поэтому из начальных условий $y_0 = 0;\ z_0 = 0$.

Решение в точке $x_1 = 2{,}1$ найдем одношаговым методом, например, методом Рунге-Кутта: $y_1 = 0{,}005;\ z_1 = 0{,}106$.

Найдем y_2 и z_2 для $x_2 = 2{,}2$ по (3.7):

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \frac{h}{2}\big(3f_1(x_1, y_1, z_1) - f_1(x_0, y_0, z_0)\big) = y_1 + \frac{h}{2}(3z_1 - z_0) = \\ &= 0{,}005 + \frac{0{,}1}{2} * (3 * 0{,}106 - 0) = 0{,}021 \end{aligned}$$

$$z_2 = z_1 + \frac{h}{2}\big(3 f_2(x_1, y_1, z_1) - f_2(x_0, y_0, z_0)\big) = z_1 + \frac{h}{2}(3(1 - x_1 z_1 + 0{,}5\frac{y_1}{x_1}) -$$

$$-(1 - x_0 z_0 + 0{,}5\frac{y_0}{x_0})) = 0{,}106 + \frac{0{,}1}{2} * (3(1 - 2{,}1 * 0{,}106 + 0{,}5\frac{0{,}005}{2{,}1}) -$$

$$-(1 - 2 * 0 + 0{,}5\frac{0}{2})) = 0{,}223$$

Найдем y_3 и z_3 для $x_3 = 2{,}3$ по (3.7):

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{2}\big(3 f_1(x_2, y_2, z_2) - f_1(x_1, y_1, z_1)\big) = y_2 + \frac{h}{2}(3z_2 - z_1) =$$

$$= 0{,}021 + \frac{0{,}1}{2} * (3 * 0{,}223 - 0{,}106) = 0{,}049$$

$$z_3 = z_2 + \frac{h}{2}\big(3 f_2(x_2, y_2, z_2) - f_2(x_1, y_1, z_1)\big) = z_2 + \frac{h}{2}(3(1 - x_2 z_2 + 0{,}5\frac{y_2}{x_2}) -$$

$$-(1 - x_1 z_1 + 0{,}5\frac{y_1}{x_1})) = 0{,}223 + \frac{0{,}1}{2} * (3(1 - 2{,}2 * 0{,}223 + 0{,}5\frac{0{,}021}{2{,}2}) -$$

$$-(1 - 2{,}1 * 0{,}106 + 0{,}5\frac{0{,}005}{2{,}1})) = 0{,}261$$

Ответ представим с $\Delta = 0{,}01$ в виде таблицы.

X	2	2,1	2,2	2,3
Y	0	0,01	0,02	0,05

Формулы трехшагового метода Адамса решения СДУ (3.3):

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{12}\big(23 f_1(x_i, y_i, z_i) - 16 f_1(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}) + 5 f_1(x_{i-2}, y_{i-2}, z_{i-2})\big) \\ z_{i+1} &= z_i + \frac{h}{12}\big(23 f_2(x_i, y_i, z_i) - 16 f_2(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}) + 5 f_2(x_{i-2}, y_{i-2}, z_{i-2})\big) \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Пример 3.6: Решить с $\Delta = 0{,}01$ ДУ второго порядка $y'' + xy' - 0{,}5\frac{y}{x} = 1$ в постановке задачи Коши трехшаговым методом Адамса на отрезке $[2; 2{,}3]$ с шагом $h = 0{,}1$ и начальными условиями $y(2) = 0, \quad y'(2) = 0$.

Решение.

Представим ДУ второго порядка в виде системы двух ДУ первого порядка (решение приведено в примере 3.1).

Разбив отрезок $[2; 2{,}3]$ на части с шагом $h = 0{,}1$, получим четыре узловые точки с абсциссами $x_0 = 2;\ x_1 = 2{,}1;\ x_2 = 2{,}2;\ x_3 = 2{,}3$.

Точка $x_0 = 2$ начальная точка, поэтому из начальных условий $y_0 = 0;\ z_0 = 0$.

Решение в точке $x_1 = 2{,}1$ найдем одношаговым методом, например, методом Рунге-Кутта: $y_1 = 0{,}005;\ z_1 = 0{,}106$.

Решение в точке $x_2 = 2{,}2$ найдем одношаговым методом, например, методом Рунге-Кутта: $y_2 = 0{,}020;\ z_2 = 0{,}215$.

Найдем y_3 и z_3 для $x_3 = 2{,}3$ по (3.8):

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{12}\left(23 f_1(x_2, y_2, z_2) - 16 f_1(x_1, y_1, z_1) + 5 f_1(x_0, y_0, z_0)\right) =$$

$$= y_2 + \frac{h}{12}(23 z_2 - 16 z_1 + 5 z_1) = 0{,}020 + \frac{0{,}1}{12} * (23 * 0{,}215 -$$

$$-16 * 0{,}106 + 5 * 0) = 0{,}047$$

$$z_3 = z_2 + \frac{h}{12}\left(23 f_2(x_2, y_2, z_2) - 16 f_2(x_1, y_1, z_1) + 5 f_2(x_0, y_0, z_0)\right) =$$

$$= z_2 + \frac{h}{12}(23(1 - x_2 z_2 + 0{,}5\frac{y_2}{x_2}) - 16(1 - x_1 z_1 + 0{,}5\frac{y_1}{x_1}) + 5(1 - x_0 z_0 + 0{,}5\frac{y_0}{x_0})) =$$

$$= 0{,}215 + \frac{0{,}1}{12}(23(1 - 2{,}2 * 0{,}215 + 0{,}5 * \frac{0{,}020}{2{,}2}) - 16(1 - 2{,}1 * 0{,}106 + 0{,}5 * \frac{0{,}005}{2{,}1}) +$$

$$+ 5(1 - 2 * 0 + 0{,}5 * \frac{0}{2})) = 0{,}255$$

Ответ представим с $\Delta = 0{,}01$ в виде таблицы.

X	2	2,1	2,2	2,3
Y	0	0,01	0,02	0,05

3.3 Решение краевой задачи

Для ДУ второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \tag{3.9}$$

краевая задача заключается в поиске функции $y(x)$ на отрезке $[a, b]$, удовлетворяющей на концах отрезка условиям, которые заданы в частном виде:

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b, \tag{3.10}$$

или в общем виде:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ &\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где $A, B, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ – некоторые постоянные величины.

Рассмотрим метод конечных разностей для решения краевой задачи. Он позволяет свести решение краевой задачи для ДУ к решению системы алгебраических уравнений относительно значений функции на заданном множестве точек. Это достигается путем замены производных, входящих в ДУ, их конечно-разностными аппроксимациями.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на m равных отрезков длиной h точками $x_{i+1}=x_i+h$, $i = \overline{0, m-1}$, где $x_0=a$ и $x_m=b$. Точки x_i называют узлами сетки, h – шагом сетки, точки x_0 и x_m – граничными узлами, а $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ – внутренними узлами.

Решение краевой задачи заменим вычислением значений сеточной функции y_i в узловых точках x_i. Для этого запишем уравнение (3.9) для внутренних узлов:

$$y''(x_i) = f(x_i, y(x_i), y'(x_i)), \quad i = \overline{1, m-1}. \tag{3.12}$$

Заменим производные, входящие в этих соотношений их конечно-разностными аппроксимациями:

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h},$$

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Подставляя эти выражения в (3.12), получим систему разностных уравнений:

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}=f\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right),\ i=\overline{1,m-1} \qquad (3.13)$$

Значение y_0 и y_m берут из граничных условий, если они заданы в частном виде (3.11).

Если граничные условия заданы в общем виде (3.11), то их необходимо представить в разностном виде путем аппроксимации производных $y'(a)$ и $y'(b)$ конечно-разностными соотношениями:

$$y'(a)=\frac{y_1-y_0}{h},$$

$$y'(b)=\frac{y_m-y_{m-1}}{h}.$$

Таким образом граничные условия (3.12) примут вид:

$$\begin{aligned}&\alpha_0 y_0+\alpha_1\frac{y_1-y_0}{h}=A\\&\beta_0 y_n+\beta_1\frac{y_m-y_{m-1}}{h}=B\end{aligned} \qquad (3.14)$$

Система (3.13), дополненная при необходимости уравнениями (3.14), является системой из $m-1$ (или $m+1$) линейных или нелинейных уравнений, относительно значений сеточной функции $y_1,y_2,\dots,y_{m-1}$ (или $y_0,y_1,y_2,\dots,y_{m-1},y_m$).

Матрица коэффициентов полученной СЛУ является трехдиагональной и может быть решена методом прогонки.

Запишем трехдиагональную систему из n линейных уравнений в виде:

$$\begin{cases}b_1x_1+c_1x_2=d_1\\a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3=d_2\\\qquad a_3x_2+b_3x_3+c_3x_4=d_3\\\qquad\quad\dots\\\qquad\qquad a_{n-1}x_{n-2}+b_{n-1}x_{n-1}+c_{n-1}x_n=d_{n-1}\\\qquad\qquad\qquad a_nx_{n-1}+b_nx_n=d_n\end{cases}$$

где $b_i \neq 0,\ i = \overline{1, n}$.

Метод прогонки состоит из этапов: прямой прогонки и обратной прогонки.

На этапе прямой прогонки выражают из *i*-го уравнения неизвестное x_i через x_{i+1} с помощью прогоночных коэффициентов:

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i, \qquad i = \overline{1, n-1}. \tag{3.15}$$

Из первого уравнения

$$x_1 = -\frac{c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1}.$$

Поскольку $x_1 = A_1 x_2 + B_1$, следовательно: $A_1 = -\dfrac{c_1}{b_1},\ \ B_1 = \dfrac{d_1}{b_1}$.

Из второго уравнения:

$$a_2(A_1 x_2 + B_1) + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2,$$

$$x_2 = -\frac{c_2}{a_2 A_1 + b_2} x_3 + \frac{d_2 - a_2 B_1}{a_2 A_1 + b_2} = -\frac{c_2}{l_2} x_3 + \frac{d_2 - a_2 B_1}{l_2}.$$

Поскольку $x_2 = A_2 x_3 + B_2$, следовательно

$$A_2 = -\frac{c_2}{l_2},\ \ B_2 = \frac{d_2 - a_2 B_1}{l_2},\ \ l_2 = a_2 A_1 + b_2.$$

Для $i = \overline{3, n-1}$:

$$A_i = -\frac{c_i}{l_i},\ \ B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{l_i},\ \ l_i = a_i A_{i-1} + b_i.$$

На этапе обратной прогонки вычисляют x_n из *n*-го уравнения уравнения:

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n,$$

$$a_n(A_{n-1} x_n + B_{n-1}) + b_n x_n = d_n,$$

$$x_n = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{a_n A_{n-1} + b_n}.$$

Далее вычисляют x_i, $i = \overline{n-1,1}$ по формуле (3.15) и формулам прогоночных коэффициентов.

Пример 3.7: Решить с $\Delta = 0{,}01$ ДУ второго порядка $y'' + xy' - 0{,}5\frac{y}{x} = 1$ в постановке краевой задачи методом конечных разностей на отрезке $[2; 2{,}3]$ с шагом $h = 0{,}1$ и граничными условиями:

$$\begin{cases} y(2) + 2y'(2) = 1 \\ y(2{,}3) = 2{,}15 \end{cases}.$$

Решение.

Разбив отрезок $[2; 2{,}3]$ на части с шагом $h = 0{,}1$, получим четыре узловые точки с абсциссами $x_0 = 2;$ $x_1 = 2{,}1;$ $x_2 = 2{,}2;$ $x_3 = 2{,}3$.

Две точки $x_0 = 2$ и $x_3 = 2{,}3$ являются граничными, а две другие – внутренними.

Исходное ДУ второго порядка во внутренних точках заменим конечно-разностными уравнениями по (3,13):

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - 0{,}5\frac{y_i}{x_i} = 1\,,\ i = \overline{1,2}$$

Из первого граничного условия, заданного в общем виде (3.11), составим конечно-разностное уравнения в граничной точке $x_0 = 2$ по (3.14). Из второго граничного условия, заданного в частном виде по (3.10), запишем значение y_3 в граничной точке $x_3 = 2{,}3$:

$$\begin{cases} y_0 + 2\dfrac{y_1 - y_0}{h} = 1 \quad (i = 0) \\ y_3 = 2{,}15 \ (i = 3) \end{cases}$$

Таким образом, исходная задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} y_0 + 2\dfrac{y_1 - y_0}{0,1} = 1 \\ \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{0,01} + 2,1\dfrac{y_2 - y_0}{2 \cdot 0,1} - 0,5\dfrac{y_1}{2,1} = 1 \\ \dfrac{y_3 - 2y_2 + y_1}{0,01} + 2,2\dfrac{y_3 - y_1}{2 \cdot 0,1} - 0,5\dfrac{y_2}{2,2} = 1 \\ y_3 = 2,15 \end{cases}$$

Выполнив преобразования и подставив значение $y_3 = 2,15$ в третье уравнение системы уравнений, имеем

$$\begin{cases} -1,9y_0 + 2y_1 = 0,1 \\ 1,79y_0 - 4,005y_1 + 2,21y_2 = 0,02 \\ 1,78y_1 - 4,005y_2 = -4,753 \end{cases}$$

Решим полученную СЛУ методом прогонки.

Из первого уравнения выразим y_0:

$$y_0 = 1,053y_1 - 0,053$$

Подставим выражение для y_0 во второе уравнение и выразим из него y_1:

$$1,79(1,053y_1 - 0,053) - 4,005y_1 + 2,21y_2 = 0,02$$

$$-2,12y_1 + 2,21y_2 = 0,115$$

$$y_1 = 1,043y_2 - 0,054$$

Подставим выражение для y_1 в третье уравнение и выразим из него y_2:

$$1,78(1,043y_2 - 0,054) - 4,005y_2 = -4,753$$

$$-2,148y_2 = -4,753$$

$$y_2 = 2,213$$

Вычислив значение y_2=2,213, вычислим далее y_1=2,254, из второго уравнения и y_0=2,320 из первого уравнения.

Ответ представим с $\Delta = 0,01$ в виде таблицы.

X	2	2,1	2,2	2,3
Y	2,32	2,25	2,21	2,15

3.4 Индивидуальные задания

Решить ДУ второго порядка на отрезке с $h = 0{,}1$ и $\Delta = 0{,}01$ в постановке:

– задачи Коши с заданными начальными условиями;

– краевой задачи с заданными граничными условиями.

Варианты индивидуальных заданий выбираются из таблицы 3.1 в соответствии с номером студента в журнале преподавателя, название методов – из таблицы 3.2

Таблица 3.1 – ДУ второго порядка

№	Уравнения	отрезок	Задача Коши	Мет.	Краевая задача
1	$y'' + \frac{y'}{x} + 2y = x$	[0,7;1,0]	$y(0{,}7) = 0{,}5$ $y'(0{,}7) = 1{,}2$	м1; м4.	$y(0{,}7) = 0{,}5$ $2y(1) + 3y'(1) = 1{,}2$
2	$y'' - y'x + 2y = x + 1$	[0,9;1,2]	$y(0{,}9) = 0{,}5$ $y'(0{,}9) = 1{,}5$	м1; м5.	$y(1{,}2) = 1$ $y(0{,}9) - 0.5y'(0{,}9) = 2$
3	$y'' + y'x + y = x + 1$	[0,5;0,8]	$y(0{,}5) = 0$ $y'(0{,}5) = 1$	м2; м4.	$y'(0{,}8) = 1{,}2$ $y(0{,}5) + 2y'(0{,}5) = 1$
4	$y'' - \frac{y}{x} + 2y' = 3$	[0,2;0,5]	$y(0{,}2) = 2$ $y'(0{,}2) = 1$	м2; м5.	$y(0{,}2) = 2$ $0{,}5y(0{,}5) - y'(0{,}5) = 1$
5	$y'' - yx + 2y' = x^2$	[0,6;0,9]	$y(0{,}6) = 0$ $y'(0{,}6) = 0{,}8$	м3; м4.	$y'(0{,}6) = 0{,}7$ $y(0{,}9) - 0{,}5y'(0{,}9) = 1$
6	$y'' + \frac{2y}{x} - y' = x + 0{,}4$	[1,1;1,4]	$y(1{,}1) = 3$ $y'(1{,}1) = 2$	м3; м5.	$y'(1{,}4) = 4$ $y(1{,}1) - 0{,}5y'(1{,}1) = 2$
7	$y'' + \frac{y}{x} - 3y' = 1$	[0,4;0,7]	$y(0{,}4) = 2$ $y'(0{,}4) = 0{,}5$	м1; м4.	$y(0{,}4) = 2$ $y(0{,}7) + 2y'(0{,}7) = 0{,}7$
8	$y'' - \frac{y}{x} + 3y' = x + 1$	[1,2;1,5]	$y(1{,}2) = 0$ $y'(1{,}2) = 0{,}5$	м1; м5.	$y'(1{,}2) = 1$ $2y(1{,}5) - y'(1{,}5) = 0{,}5$
9	$y'' - \frac{y'}{2} + 3y = 2x^2$	[1,0;1,3]	$y(1) = 0$ $y'(1) = 1$	м2; м4.	$y(1) + 2y'(1) = 0{,}6$ $y(1{,}3) = 1$
10	$y'' - \frac{y}{x} + 0{,}5y' = 0{,}5$	[1,3;1,6]	$y(1{,}3) = 0$ $y'(1{,}3) = 2$	м2; м5.	$2y(1{,}3) - y'(1{,}3) = 1$ $y'(1{,}6) = 2$

№	Уравнения	отрезок	Задача Коши	Мет.	Краевая задача
11	$y'' + 2y'x - y = 0{,}4$	[0,3;0,6]	$y(0{,}3) = 0$ $y'(0{,}3) = 0{,}5$	м3; м4.	$2y(0{,}3) + y'(0{,}3) = 1$ $y'(0{,}6) = 2$
12	$y'' - 0{,}5y'x + y = 2$	[0,4;0,7]	$y(0{,}4) = 1{,}2$ $y'(0{,}4) = 1$	м3; м5.	$y(0{,}4) = 1{,}2$ $y(0{,}7) + 2y'(0{,}7) = 1{,}4$
13	$y'' + \frac{2y'}{x} - 3y = 2$	[0,8;1,1]	$y(0{,}8) = 0$ $y'(0{,}8) = 1$	м1; м4.	$y'(0{,}8) = 1{,}5$ $2y(1{,}1) + y'(1{,}1) = 3$
14	$y'' + 2y'x^2 + y = x$	[0,5;0,8]	$y(0{,}5) = 0$ $y'(0{,}5) = 2$	м1; м5.	$2y(0{,}5) - y'(0{,}5) = 1$ $y(0{,}8) = 3$
15	$y'' - 3y'x + 2y = 1{,}5$	[0,7;1,0]	$y(0{,}7) = 0$ $y'(0{,}7) = 1$	м2; м4.	$y'(0{,}7) = 1{,}3$ $0{,}5y(1) + y'(1) = 2$
16	$y'' + 2y'x - 2y = 0{,}6$	[2,0;2,3]	$y(2) = 0$ $y'(2) = 0{,}9$	м2; м5.	$y'(2) = 1$ $0{,}4y(2{,}3) - y'(2{,}3) = 1$
17	$y'' + \frac{y'}{x} - 0{,}4y = 2x$	[0,6;0,9]	$y(0{,}6) = 0$ $y'(0{,}6) = 0{,}6$	м3; м4.	$y(0{,}6) - 0{,}3y'(0{,}6) = 0{,}6$ $y'(0{,}9) = 1{,}7$
18	$y'' - \frac{y'}{2x} + 0{,}8y = x$	[1,7;2,0]	$y(1{,}7) = 0$ $y'(1{,}7) = 1$	м3; м5.	$y(1{,}7) + 1{,}2y'(1{,}7) = 2$ $y'(2) = 1$
19	$y'' - \frac{y'}{3} + xy = 2$	[0,8;1,1]	$y(0{,}8) = 1{,}6$ $y'(0{,}8) = 0{,}5$	м1; м4.	$y(0{,}8) = 1{,}6$ $3y(1{,}1) - 0{,}5y'(1{,}1) = 1$
20	$y'' - yx + 0{,}8y' = 1{,}4$	[1,8;2,1]	$y(1{,}8) = 0{,}5$ $y'(1{,}8) = 1{,}5$	м1; м5.	$y(1{,}8) = 0{,}5$ $2y(2{,}1) + y'(2{,}1) = 1{,}7$
21	$y'' - \frac{y}{x} + 2y' = \frac{1}{x}$	[0,9;1,2]	$y(0{,}9) = 0$ $y'(0{,}9) = 2$	м2; м4.	$0{,}5y(0{,}9) + y'(0{,}9) = 1$ $y(1{,}2) = 0{,}8$
22	$y'' + \frac{2y}{x} - \frac{y}{4} = \frac{x}{2}$	[1,3;1,6]	$y(1{,}3) = 0$ $y'(1{,}3) = 0{,}3$	м2; м5.	$1{,}5y(1{,}3) - y'(1{,}3) = 0{,}6$ $2y(1{,}6) = 0{,}3$
23	$y'' + 0{,}5yx - 0{,}5y' = 2x$	[1,0;1,3]	$y(1) = 0$ $y'(1) = 3$	м3; м4.	$y'(1) = 0{,}5$ $2y(1{,}3) - y'(1{,}3) = 2$
24	$y'' - 1{,}5yx + 2y' = \frac{2}{x}$	[0,8;1,1]	$y(0{,}8) = 0$ $y'(0{,}8) = 1$	м3; м5.	$y'(0{,}8) = 1$ $y(1{,}1) + 2y'(1{,}1) = 1$
25	$y'' + 2y'x - 1{,}5 = x$	[1,1;1,4]	$y(1{,}1) = 0$ $y'(1{,}1) = 2$	м1; м4.	$1{,}4y(1{,}1) + 0{,}5y'(1{,}1) = 2$ $y'(1{,}4) = 2{,}5$
26	$y'' - \frac{y'x}{2} + 0{,}5y = 2x$	[0,2;0,5]	$y(0{,}2) = 0$ $y'(0{,}2) = 1{,}5$	м1; м5.	$0{,}4y(0{,}2) - y'(0{,}2) = 1{,}5$ $y'(0{,}5) = 0{,}4$
27	$y'' + 0{,}6y'x - 2y = 1$	[1,5;1,8]	$y(1{,}5) = 0{,}6$ $y'(1{,}5) = 0{,}6$	м2; м4.	$y(1{,}5) = 0{,}6$ $2y(1{,}8) - 0{,}8y'(1{,}8) = 3$

№	Уравнения	отрезок	Задача Коши	Мет.	Краевая задача
28	$y'' + \frac{y'}{2x} - y = \frac{2}{x}$	[0,6;0,9]	$y(0{,}6) = 1{,}3$ $y'(0{,}6) = 0{,}3$	м2; м5.	$y(0{,}6) = 1{,}3$ $0{,}5y(0{,}9) - 1{,}2y'(0{,}9) = 1$
29	$y'' - 0{,}5y'x^2 + 2y = x^2$	[1,6;1,9]	$y(1{,}6) = 0$ $y'(1{,}6) = 1$	м3; м4.	$y(1{,}6) + 0{,}7y'(1{,}6) = 2$ $y(1{,}9) = 0{,}8$
30	$y'' - y'x + 2xy = 0{,}8$	[1,2;1,5]	$y(1{,}2) = 0$ $y'(1{,}2) = 2$	м3; м5.	$y(1{,}2) - 0{,}5y'(1{,}2) = 1$ $y'(1{,}5) = 2$

Таблица 3.2 – Методы решения задачи Коши

Индекс	Метод
м1	Одношаговый метод Эйлера
м2	Одношаговый усовершенствованный метод Эйлера
м3	Одношаговый метод Рунге-Кутта 4 порядка
м4	Двухшаговый метод Адамса
м5	Трехшаговый метод Адамса

4 ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Курсовая работа, заключается в самостоятельном выполнение студентом индивидуального задания по решению системы линейных, системы нелинейных и системы дифференциальных уравнений.

На выполнение и защиту курсовой работы отводится 15 учебных недель. Основные этапы выполнения курсовой работы представлены в таблице 4.1.

Контроль хода выполнения курсовой работы осуществляется в часы консультаций руководителя курсовой работы.

Оформленная работа (пояснительная записка) сдается руководителю курсовой работы на рецензирование. После получения рецензии студент представляет работу на защиту.

Защита работы осуществляется перед комиссией из числа преподавателей кафедры с выставлением дифференцированной оценки.

Таблица 4.1 – Основные этапы выполнения курсовой работы

Учебная неделя	Содержание этапов
1-4	Решение СЛУ
5-8	Решение СНУ
9-12	Решение СДУ
13	Оформление пояснительной записки к курсовой работе
14	Представление курсовой работы руководителю для рецензирования
15	Защита курсовой работы на кафедре

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – 9-е изд. – Москва : Лаборатория знаний, 2020. – 637 с. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/88986.html.

2. Пименов, В. Г. Численные методы. Часть 1 : учебное пособие / В. Г. Пименов. – Екатеринбург : Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2013. – 112 с. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/68410.html.

3. Пименов, В. Г. Численные методы. Часть 2 : учебное пособие / В. Г. Пименов, А. Б. Ложников. – Екатеринбург : Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2014. – 108 с. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/68411.html.

Дополнительная литература:

4. Гильмутдинов, Р. Ф. Численные методы : учебное пособие / Р. Ф. Гильмутдинов, К. Р. Хабибуллина. – Казань : Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2018. – 92 с. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/95068.html.

5. Батищев, Р. В. Численные методы : учебное пособие / Р. В. Батищев. – Липецк : Липецкий государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2018. – 73 с. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/88750.html.

6. Достоверные вычисления. Базовые численные методы / У. Кулиш, Д. Рац, Р. Хаммер, М. Хокс ; перевод А. Г. Яковлев ; под редакцией В. Я. Крейновича, А. Н. Соболевского, А. Г. Яковлева. – Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. – 495 c. – ISBN 978-5-4344-

074-1. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/91929.html.

Учебно-методические издания, разработанные в ДонНТУ:

7. Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Численные методы» : для обучающихся по направлениям подготовки 27.03.04 «Управление в технических системах», 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» всех форм обучения. / ГОУВПО «ДОННТУ», Каф. автоматики и телекоммуникаций ; сост.: И. П. Долгих. – Донецк : ДОННТУ, 2021. – Систем. требования: Acrobat Reader. (Доступ через личный кабинет студента)

Электронно-информационные ресурсы:

ЭБС ДОННТУ – http://donntu.org/library.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Требования к оформлению курсовой работы

Пояснительная записка к курсовой работе содержит вступительную часть, основную часть, список литературы, приложения.

Объем курсовой работы – 25-30 рукописных страниц, количество источников - не менее 5.

Вступительная часть содержит титульный лист, содержание, перечень условных обозначений, символов, единиц, сокращений и терминов**.**

Основная часть содержит введение, текст курсовой работы, выводы, список литературы.

Приложения размещают после основной части курсовой работы.

Структурные элементы «титульный лист», «содержание», «введение», «текст курсовой работы», «выводы», «список литературы» являются обязательными.

Титульный лист является первой страницей курсовой работы и служит основным источником библиографической информации, необходимой для обработки и поиска документа. Содержит следующие сведения:

– название министерства и учебного заведения;

– гриф допуска к защите;

– фамилия, полное имя и отчество автора;

– полное название документа;

– подписи ответственных лиц, включая руководителя работы;

– место и год выполнения работы.

Содержание включает в себя перечень сокращений, условных обозначений, символов, единиц и терминов (если они есть), введение, заголовки разделов и подразделов (если они есть), выводы, список литературы, приложения (если они есть) с указанием номера страницы, с которой начинается раздел или подраздел.

Перечень условных обозначений, символов, сокращений и терминов – перечисление с пояснением всех принятых в курсовой работе малораспространенных условных обозначений, символов, единиц, сокращений и терминов. Независимо от этого при первом появлении этих элементов в тексте курсовой работы приводят их расшифровку.

Во введении должно быть:

– актуальность проблемы – краткое изложение истории вопроса (степень изучения темы) по хронологическому или концептуальному принципом.

– объект исследования:...

– предмет исследования:...

– цель исследования: изучить и научно обосновать...

– гипотеза исследования (если она есть):...

В соответствии с целью и гипотезой исследования ставятся задачи:

1) …

2) …

3) …

– методы исследования:…

– научная новизна исследования заключается в том...

– практическое значение исследования.

Текст курсовой работы – изложение сведений о предмете (объекте) исследования, которые необходимы и достаточны для раскрытия сущности указанной работы (описание теории, методов работы и ее результаты).

Текст курсовой работы излагают, разделяя материал на разделы. Разделы могут делиться на пункты или на подразделы и пункты. Пункты, если это необходимо, разделяют на подпункты. Каждый пункт и подпункт должен содержать законченную информацию и выводы.

Выводы располагаются непосредственно после изложения текста, начиная с новой страницы. Выводы должны содержать в себе синтез «сквозных» выводов по разделам, оценку полноты решения поставленных задач.

Список литературы, на которую есть ссылки в основной части курсовой работы, приводятся в конце текста, начиная с новой страницы. Его размещают в алфавитном порядке и составляют в соответствии с действующими стандартами.

Ссылки в тексте курсовой работы делаются в квадратных скобках:

– с указанием фамилии автора (в транскрипции оригинала), года издания и страницы. Например, [Арутюнова 1999, с. 342; Austin 1994, с. 89];

– при наличии нескольких работ одного автора одного года издания, даты добавляется маленькая латинская буква. Например, [Арутюнова 1999а, с. 342; Austin 1994a, с. 89];

– при ссылке на коллективные издания вводить полное название работы. Например, [Дискурс иностранной коммуникации 1996, с. 89];

– при ссылке на периодические издания (после примеров) давать полное или сокращенное название, но ее объяснением в списке использованных источников. Например, [РМ № 245 1994, с. 89];

– при наличии 2-3 авторов приводить первого и соответствующей отметки. Например, [Левицкий и др.1989, с. 89; Austin et all 1994, с. 89].

В приложениях помещают материал, который:

– необходимо для полноты курсовой работы, но включение его в основной части научной работы может изменить упорядоченное и логическое представление об исследовании.

– не может быть размещен в основной части курсовой работы из-за большого объема или способов его воспроизведения.

В приложения могут быть включены:

– дополнительные иллюстрации или таблицы;

– материалы, которые из-за большого объема, специфики преподавания или формы представления не могут быть внесены в основную часть (оригиналы фотографий, формулы, расчеты, описание компьютерных программ, разработанных в процессе выполнения работы и др.)

Каждое приложение должно начинаться с нового листа и иметь заголовок, выполненный крупными буквами. В правом верхнем углу над заголовком прописными буквами пишется соответственно: Приложение А, Приложение Б.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Образец оформления титульного листа

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА «АВТОМАТИКА И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ»

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к курсовой работе

по дисциплине

«Численные методы»

ВЫПОЛНИЛ:
Иванов И.П.
студент группы ТКСзб21
вариант №

ПРОВЕРИЛ:
Долгих И.П.
старший преподаватель кафедры
«Автоматика и телекоммуникации»

Донецк
2023

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
для выполнения курсовой работы по дисциплине
«Численные методы»

Составитель:
Долгих Ирина Петровна – старший преподаватель кафедры автоматики и телекоммуникаций ГОУВПО «ДОННТУ»

Ответственный за выпуск:
Турупалов Виктор Владимирович – кандидат технических наук, профессор, заведующий кафедрой автоматики и телекоммуникаций ГОУВПО «ДОННТУ»