ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ИРКУТСКИЙ ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра естественнонаучных дисциплин

М. В. Скоробогатова, А. Н. Онацкий

ИНФОРМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Учебно-методическое пособие
по выполнению контрольной работы

для обучающихся по направлениям
подготовки 25.03.01, 25.03.02
заочной формы обучения

Иркутск – 2017

ББК З 97
С 44

Рецензент доцент кафедры ЕНД, к.ф.-м.н. Н. А. Бронникова.

М. В. Скоробогатова, А. Н. Онацкий

С 44 Информатика и информационные технологии: учебно-методическое пособие по выполнению контрольной работы. – Иркутск: Иркутский филиал МГТУ ГА, 2017. – 46 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для описания теоретического материала с примерами решения задач, вариантов контрольной работы и методических указаний по ее выполнению. Пособие может быть использовано как для аудиторной работы, так и для самостоятельного освоения учебного материала по дисциплине «Информатика и информационные процессы».

Рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры ЕНД Иркутского филиала МГТУ ГА. Протокол № 2 от 07.09.2017 г.

Рассмотрено и рекомендовано к использованию в учебном процессе на заседании методического совета Иркутского филиала МГТУ ГА. Протокол № 2 от 26.10.2017 г.

Редактор Л. Н. Хапилина
Тех. редактор А. Ф. Широколобова

Подписано в печать 30.10.2017 г.

Печать трафаретная   Формат 60х84/16   1,4 уч.-изд.л.
2,6 печ.л.   Заказ № 626   Тираж 25 экз.

Иркутский филиал Московского государственного технического университета гражданской авиации
664047, г. Иркутск ул. Коммунаров, д. 3
Отдел редакционно-издательской и научной работы
664009, г. Иркутск ул. Советская, д. 139

Содержание

Методические указания
по выполнению контрольной работы

В учебно-методическом пособии излагаются теоретические положения, методические указания и варианты контрольных заданий. Выполнение контрольной работы заключается в письменном решении задач по тематике «Двоичная арифметика» (задание 1), применение численных методов для вычисления определенного интеграла (задание 2), построение и исследование математической модели движение тела, брошенного под углом к горизонту (задание 3).

При выполнении каждого задания следует придерживаться изложенных ниже требований:

– при выполнении первого задания сначала следует записать полный текст задачи с исходными данными в соответствии со своим вариантом. Процедура решения задачи должна быть приведена в ответе подробно, с записью процесса решения и промежуточных результатов. Сдается преподавателю в рукописном или напечатанном виде;

– второе и третье задания выполняются в табличном процессоре MS Excel или Libre Office Calc и сдаются преподавателю в электронном виде.

Выбор вариантов заданий контрольной работы

Для всех заданий дано **30 вариантов** задач.

Номер варианта задачи одинаков для всех заданий и определяется числом, состоящим из двух последних цифр номера зачетной книжки, взятым по модулю числа 30, например:

– если номер зачетной книжки – 98878 (последние цифры – 78), то номер варианта: 78 mod 30 = 18;

– если последние цифры зачетной книжки – 25, то номер варианта: 25 mod 30 = 25.

– если последние цифры зачетной книжки – 00, то номер варианта: 100 mod 30 = 10.

– если последние цифры зачетной книжки – 30, 60 или 90, то номер варианта: 30

Задание № 1. Двоичная арифметика

Теоретические сведения

Под **системой счисления** (СС) понимается способ представления любого числа с помощью алфавита символов, называемых цифрами.

СС называется *позиционной*, если одна и та же цифра имеет различное значение, которое определяется её местом в числе.

Десятичная СС является позиционной. Значение цифры 9 в числе 1999 изменяется в зависимости от её положения в числе. Первая слева девятка делает вклад в общее значение десятичного числа 900 единиц, вторая – 90, а третья – 9 единиц.

Римская СС является *непозиционной*. Значение цифры X в числе XXI остаётся неизменным при вариации её положения в числе.

Количество различных цифр, употребляемых в позиционной СС, называется *основанием* СС:

- в десятичной СС используется десять цифр: 0, 1, 2, ..., 9;
- в двоичной СС – две цифры: 0 и 1;
- в восьмеричной СС – восемь цифр: 0, 1,2,..., 7;
- в СС с основанием Q используются цифры от 0 до Q – 1.

В вычислительной технике применяют позиционные СС с недесятичным основанием: 2-ную, 8-ную и 16-ную СС.

Способы обозначения используемой СС:

- $(15)_{10}$; $(1011)_2$; $(735)_8$; $(1EA9F)_{16}$;
- 15_{10}; 1011_2; 735_8; $1EA9F_{16}$.

Есть ещё один способ обозначения СС: при помощи латинских букв, добавляемых после числа. Например, 15D; 1011B; 735Q; 1EA9FH.

Правила перевода целых чисел

Переход в другой разряд: переход происходит, если разряд единиц становится равен **основанию системы счисления**, мы увеличиваем число десятков на 1.

Перевод целых чисел из десятичной СС в двоичную, восьмеричную или шестнадцатеричную СС удобно делать с помощью следующего правила:

Для перевода целого числа из S-системы счисления в W-систему счисления нужно последовательно делить это число, а затем получаемые частные на основание W новой СС до тех пор, частное не станет меньше W.

Из десятичной системы счисления – в двоичную и шестнадцатеричную

– Исходное целое число *делится* на основание СС, в которую переводится; получается частное и остаток;

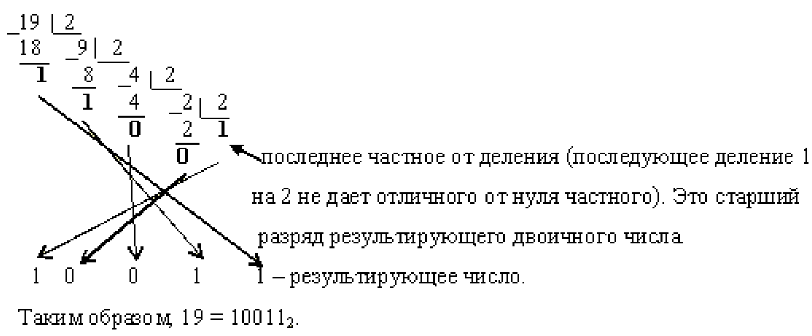
– *если* полученное частное не делится на основание СС так, чтобы образовалась целая часть, отличная от нуля, процесс умножения прекращается, переходят к п. 3. *Иначе* над частным выполняют действия, описанные в п.1;

– все полученные остатки и последнее частное *преобразуются* в соответствии с таблицей в цифры той СС, в которую выполняется перевод;

– *формируется* результирующее число: его старший разряд – полученное последнее частное, каждый последующий младший разряд образуется из полученных остатков от деления, начиная с последнего и заканчивая 1-м.

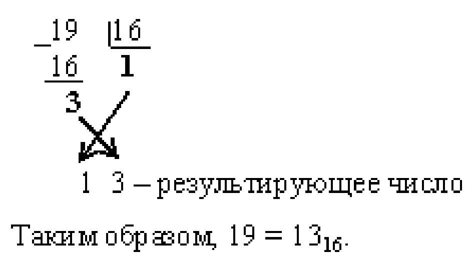
Пример 1. Выполнить перевод числа 19_{10} в двоичную систему счисления.

Решение:



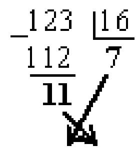
Пример 2. Выполнить перевод числа 19_{10} в шестнадцатеричную систему счисления.

Решение:



Пример 3. Выполнить перевод числа 123_{10} в шестнадцатеричную систему счисления.

Решение:



7 B – результирующее число.

Таким образом, $123 = 7B_{16}$.

Из двоичной и шестнадцатеричной систем счисления – в десятичную

В этом случае рассчитывается полное значение числа по формуле. Воспользуемся правилом:

Для перевода двоичного числа в десятичную СС следует представить число в виде полинома, подставить в него известные коэффициенты и вычислить сумму.

Для перевода шестнадцатеричного числа в десятичную СС следует представить число в виде полинома, подставить в него известные коэффициенты и вычислить сумму.

Пример 4. Выполнить перевод числа 13_{16} в десятичную систему счисления.

Решение:

$$13_{16} = 1*16^1 + 3*16^0 = 16 + 3 = 19_{10}.$$

Таким образом, $13_{16}= 19_{10}$.

Пример 5. Выполнить перевод числа 10011_2 в десятичную систему счисления.

Решение:

$$10011_2 = 1*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0= 16+0+0+2+1 = 19_{10}.$$

Таким образом, $10011_2 = 19_{10}$.

Из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную

1) исходное число разбивается на тетрады (т.е. 4 цифры), начиная с младших разрядов. Если количество цифр исходного двоичного числа не кратно 4, оно дополняется слева незначащими нулями до достижения кратности 4;

2) каждая тетрада заменятся соответствующей шестнадцатеричной цифрой в соответствии с таблицей.

Пример 6. Выполнить перевод 10011_2 в CC_{16}.

Решение:

Поскольку в исходном двоичном числе количество цифр не кратно 4, дополняем его слева незначащими нулями до достижения кратности 4 числа цифр.

$$10011_2 = \underbrace{0001}_{\text{вторая тетрада – старшая цифра числа}}\underbrace{0011}_{\text{первая тетрада – младшая цифра числа}}{}_2$$

В соответствии с таблицей $0011_2 = 11_2 = 3_{16}$ и $0001_2 = 1_2 = 1_{16}$.
Тогда $10011_2 = 13_{16}$.

Пример 7. Перевести число 111001100 из двоичной СС в восьмеричную СС.

Решение:

$$\underbrace{111}_{7}\ \underbrace{001}_{4}\ \underbrace{100}_{1} \Rightarrow 714_8$$

Из шестнадцатеричной системы счисления в двоичную

1) Каждая цифра исходного числа заменяется тетрадой двоичных цифр в соответствии с таблицей. Если в таблице двоичное число имеет менее 4 цифр, оно дополняется слева незначащими нулями до тетрады;

2) незначащие нули в результирующем числе отбрасываются.

Пример 8. Выполнить перевод числа 13_{16} в двоичную систему счисления.

Решение:

По таблице имеем:
$1_{16} = 1_2$ и после дополнения незначащими нулями $1_2 = 0001_2$;
$3_{16} = 11_2$ и после дополнения незначащими нулями $11_2 = 0011_2$.

Тогда $13_{16} = 00010011_2$.

После удаления незначащих нулей имеем $13_{16} = 10011_2$.

Правила перевода правильных дробей

Результатом является всегда правильная дробь.

Из десятичной системы счисления – в двоичную и шестнадцатеричную

1) Исходная дробь умножается на основание системы счисления, в которую переводится (2 или 16);

2) в полученном произведении целая часть преобразуется в цифру нужной системы счисления и отбрасывается – она является старшей цифрой получаемой дроби;

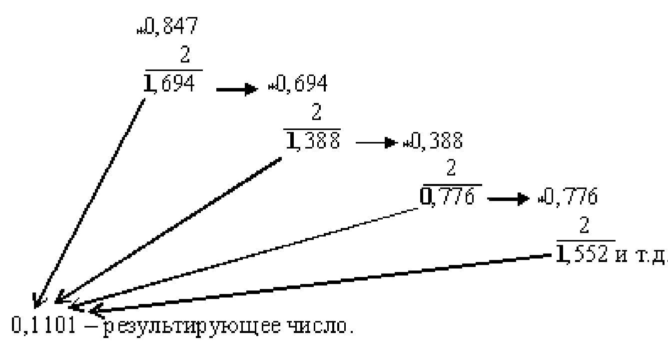
3) оставшаяся дробная часть вновь умножается на нужное основание системы счисления с последующей обработкой полученного произведения в соответствии с п. 1 и 2;

4) процедура умножения продолжается до тех пор, пока ни будет получен нулевой результат в дробной части произведения или ни будет достигнуто требуемое количество цифр в результате;

5) формируется результат: последовательно отброшенные в п. 2 цифры составляют дробную часть результата, причем в порядке уменьшения старшинства.

Пример 9. Выполнить перевод $0{,}847_{10}$ в $СС_2$. Перевод выполнить *до четырех значащих цифр* после запятой.

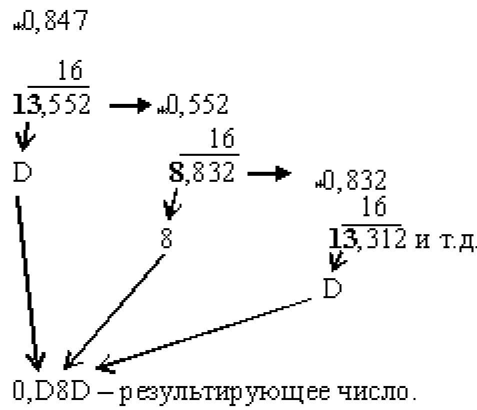
Решение:



Таким образом, $0{,}847_{10} = 0{,}11012_2$.

Пример 10. Выполнить перевод числа $0{,}847_{10}$ в шестнадцатеричную систему счисления. Перевод выполнить до трех значащих цифр.

Решение:



В данном примере также процедура перевода прервана. Таким образом, $0,847_{10} = 0,D8D_{16}$.

Из двоичной и шестнадцатеричной систем счисления − в десятичную

В этом случае рассчитывается полное значение числа по формуле, причем коэффициенты ai принимают десятичное значение в соответствии с таблицей.

Пример 11. Выполнить перевод из двоичной системы счисления в десятичную числа 0,110110.

Решение:

$$0,1101_{10} = 1*2^{-1} + 1*2^{-2} + 0*2^{-3} +1*2^{-4} = 0,5 + 0,25 + 0 + 0,0625 = 0,8125_{10}.$$

Таким образом, $0,1101_{10} = 0,8125_{10}$.

Пример 12. Выполнить перевод из шестнадцатеричной системы счисления в десятичную числа $0,D8D_{16}$.

Решение:

$$0,D8D_{16} = 13*16^{-1} + 8*16^{-2} + 13*16^{-3} = 13*0,0625 + 8*0,003906 + 13* 0,000244 = 0,84692_{10}.$$

Таким образом, $0,D8D_{16} = 0,84692_{10}$.

Из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную

1) Исходная дробь делится на тетрады, начиная с позиции десятичной точки вправо. Если количество цифр дробной части исходного двоичного числа не кратно 4, оно дополняется справа незначащими нулями до достижения кратности 4;

2) каждая тетрада заменяется шестнадцатеричной цифрой в соответствии с таблицей.

Пример 13. Выполнить перевод из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную числа $0{,}1101_2$.

Решение:

В соответствии с таблицей $1101_2 = D_{16}$. Тогда имеем $0{,}1101_2 = 0{,}D_{16}$.

Пример 14. Выполнить перевод из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную числа $0{,}0010101_2$.

Решение:

Поскольку количество цифр дробной части не кратно 4, добавим справа незначащий ноль: $0{,}0010101_2 = 0{,}00101010_2$.

В соответствии с таблицей: $0010_2 = 10_2 = 2_{16}$ и $1010_2 = A_{16}$.

Тогда: $0{,}0010101_2 = 0{,}2A_{16}$.

Из шестнадцатеричной системы счисления в двоичную

1) Каждая цифра исходной дроби заменяется тетрадой двоичных цифр в соответствии с таблицей;
2) незначащие нули отбрасываются.

Пример 15. Выполнить перевод из шестнадцатеричной системы счисления в двоичную числа $0{,}2A_{16}$.

Решение:

По таблице имеем $2_{16} = 0010_2$ и $A_{16} = 1010_2$. Тогда $0{,}2A_{16} = 0{,}00101010_2$.

Отбросим в результате незначащий ноль и получим окончательный результат: $0{,}2A_{16} = 0{,}0010101_2$.

Правило перевода дробных чисел

Отдельно переводится целая часть числа, отдельно — дробная. Результаты складываются.

Пример 16. Выполнить перевод из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную числа 19,847. Перевод выполнять до трех значащих цифр после запятой.

Решение:

Представим исходное число как сумму целого числа и правильной дроби:
$19{,}847_{10} = 19_{10} + 0{,}847_{10}$.
$19_{10} = 13_{16}$; $0{,}847_{10} = 0{,}D8D_{16}$.
Тогда имеем: $19_{10} + 0{,}847_{10} = 13_{16} + 0{,}D8D_{16} = 13{,}D8D_{16}$.
Таким образом, $19{,}847_{10} = 13{,}D8D_{16}$.

Арифметические основы ЭВМ

Правила арифметики во всех позиционных СС аналогичны.

Пример 17. Выполнить операцию арифметического сложения в двоичной системе счисления.

Решение:

$$\begin{bmatrix} 13 \\ +\ 7 \\ \hline 20 \end{bmatrix}_{10} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{0}\dot{1}\dot{1}\dot{0}1 \\ +00111 \\ \hline 10100 \end{bmatrix}_{2}$$

В устройствах, реализующих операцию арифметического сложения двоичных чисел, операнды представляют числами определённой разрядности (одинаковой для обоих операндов).

При этом неиспользуемые старшие разряды заполняются нулями.

Следует заметить, что в реальных ЭВМ чаще всего используются 32-, 64-разрядные сетки.

Пример 18. Выполнить операцию арифметического сложения двух вещественных чисел в двоичной системе счисления.

Решение:

При сложении вещественных чисел в общем случае перенос осуществляется и из дробной части числа в целую часть.

$$\begin{bmatrix} 55{,}25 \\ +19{,}5 \\ \hline 74{,}75 \end{bmatrix}_{10} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{0}\dot{1}1\dot{0}\dot{1}\dot{1}1{,}01 \\ +0010011{,}10 \\ \hline 1001010{,}11 \end{bmatrix}_{2}$$

В вычислительной технике, с целью упрощения реализации арифметических операций, применяют **специальные коды**. За счёт этого:

– облегчается определение знака результата операции,

– операция вычитания чисел сводится к арифметическому сложению.

В результате упрощаются устройства, выполняющие арифметические операции. Для этого **применяют:**

– прямой код,

– обратный код,

– дополнительный код.

Примой двоичный код $P_{\text{пр}}(x)$ − это такое представление двоичного числа *x,* при котором знак «+» кодируется нулём в старшем разряде числа, а знак «–» − единицей. При этом старший разряд называется **знаковым.** Остальные разряды двоичного числа называются значащими.

Пример 19. Представить в прямом четырёххразрядном двоичном коде числа $+5_{10}$ и $–5_{10}$.

Решение:

$$+5_{10} = 0'101_2;$$
$$–5_{10} = 1'101_2.$$

Здесь апострофом условно (для удобства определения знака) отделены знаковые разряды. Это позволяет не записывать все числа в разрядной сетке.

Обратный код $P_{\text{овр}}(x)$ получается из прямого кода по следующему правилу:

$$P_{\text{обр}}(x)=\begin{cases}0'P_{\text{пр}}(x), \text{ при } x\geq 0\\ 1'\overline{P_{\text{пр}}(x)}, \text{ при x} \leq 0\end{cases}$$

Для положительных чисел обратный код совпадает с прямым кодом.

Чтобы представить *отрицательное двоичное число* в обратном коде, нужно:

– поставить в знаковом разряде 1,

– во всех значащих разрядах заменить 1 на 0, а 0 на 1.

Такая операция называется *инверсией* и обозначается горизонтальной чертой над инвертируемым выражением.

Пример 20. Получить обратный код для числа x = -10_{10}.

Решение:

$$P_{\text{пр}}(x) = 1'1011_2$$

$$P_{\text{обр}}(x) = 1'0100_2.$$

Считается, что здесь числа представлены пятью разрядами.

Из рассмотренного примера видно, что *обратный код:*

1) для положительных чисел совпадает с прямым,

2) для отрицательных чисел получается инверсией (переворотом) всех разрядов, кроме знакового разряда.

Дополнительный код $P_{\text{доп}}(x)$ образуется следующим образом:

$$P_{\text{доп}}(x) = \begin{cases} 0'P_{\text{пр}}(x), \text{ при } x \geq 0 \\ 1'\overline{P_{\text{пр}}(x)} + 1, \text{ при x} \leq 0 \end{cases}$$

Для положительных чисел обратный код совпадает с прямым кодом.

Из выражения видно, что *дополнительный код*:

1) положительного числа совпадает с прямым кодом,

2) для отрицательного числа получается путём инверсии всех значащих разрядов и добавлением единицы к младшему разряду результата.

Дополнительный код отрицательного числа может быть получен из обратного кода путём прибавления 1 к младшему разряду обратного кода (естественно, с учётом переносов между разрядами).

$$P_{\text{доп}}(\text{x}) = P_{\text{обр}}(\text{x}) + 1.$$

Пример 21. Получить дополнительный код для числа $x = -14_{10}$.

Решение:

$P_{\text{пр}}(x) = 1'1110_2$	прямой код
$P_{\text{обр}}(x) = 1'0001_2$	обратный код
$P_{\text{доп}}(x) = 1'0010_2$	дополнительный код.

В табл. 1 представлены прямые, обратные и дополнительные коды чисел в диапазоне от -7_{10} до $+7_{10}$.

Таблица 1

Десятичное число *x*	$P_{пр}(x)$	$P_{обр}(x)$	$P_{доп}(x)$
0	0'000	0'000	0'000
1	0'001	0'001	0'001
2	0'010	0'010	0'010
3	0'011	0'011	0'011
4	0'100	0'100	0'100
5	0'101	0'101	0'101
6	0'110	0'110	0'110
7	0'111	0'111	0'111
–0	1'000	1'111	—
–1	1'001	1'110	1'111
–2	1'010	1'101	1'110
–3	1'011	1'100	1'101
–4	1'100	1'011	1'100
–5	1'101	1'010	1'011
–6	1'110	1'001	1'010
–7	1'111	1'000	1'001

Рассмотрим **правило сложения** двоичных чисел в дополнительном коде.

При алгебраическом сложении двоичных чисел положительные слагаемые представляют в прямом коде, а отрицательные слагаемые – в дополнительном коде, производят арифметическое суммирование этих кодов, включая разряды знаков, которые при этом рассматривают как старшие разряды.

При возникновении переноса из разряда знака единицу переноса отбрасывают.

В результате получают алгебраическую сумму в прямом коде, если эта сумма положительная, и в дополнительном коде, – если сумма отрицательная.

Алгебраическое сложение – это сложение, в котором могут участвовать как положительные, так и отрицательные числа.

Пример 22. Выполнить алгебраическое сложение с использованием дополнительного кода для чисел $x_1 = 7_{10}$ и $x_2 = –3_{10}$.

Решение:

Необходимо найти сумму: $y = x_1 + x_2$.

Учитывая, что $x_1 > 0$, это число нужно представить в прямом коде, а так как $x_2 < 0$, то число x_2 нужно перевести в дополнительный код.

$P(y) = P_{пр}(x_1) + P_{доп}(x_2)$

$P_{пр}(x_1) = 0'111_2$

$P_{пр}(x_2) = 1'011_2$

$P_{обр}(x_2) = 1'100_2$

$P_{доп}(x_2) = 1'101_2$

$$P(y) = \left[\begin{array}{r} \dot{0}'\dot{1}\dot{1}1 \\ +1'101 \\ \hline 0'100 \end{array}\right]_2$$

Так как результат положителен (в знаковом разряде $P(y)$ – 0), значит, он представлен в прямом коде $P_{пр}(y) = 0'100_2$.

После перевода двоичного числа в десятичную СС получим ответ: $y = +4_{10}$.

Пример 23. Выполнить алгебраическое сложение чисел $x_1 = 8_{10}$ и $x_2 = -13_{10}$ с использованием дополнительного кода.

Решение:

Необходимо найти сумму: $y = x_1 + x_2$.

Число x_1 нужно представить в прямом коде, а x_2 – в дополнительном коде.

$P(y) = P_{пр}(x_1) + P_{доп}(x_2)$

$P_{пр}(x_1) = 0'1000_2$

$P_{пр}(x_2) = 1'1101_2$

$P_{обр}(x_2) = 1'0010_2$

$P_{доп}(x_2) = 1'0011_2$

$$P(y) = \left[\begin{array}{r} 0'1000 \\ +1'0011 \\ \hline 0'1011 \end{array}\right]_2$$

В знаковом разряде стоит единица, и, значит, результат получен в дополнительном коде.

Для перехода от дополнительного кода

$$P_{доп}(y) = 1'1011_2$$

к прямому коду $P_{пр}(y)$ необходимо выполнить следующие преобразования:

$$P_{обр}(y) = P_{доп}(y) — 1 = 1'1011_2 — 1 = 1'1010_2,$$
$$P_{пр}(y) = \overline{P_{обр}(y)} = 1'\overline{1010}_2 — 1'0101_2 .$$

Переходя от двоичной СС к десятичной СС, получим ответ: $y = -5_{10}$.

Пример 24. Выполнить алгебраическое сложение с использованием дополнительного кода для чисел $x_1 = -6_{10}$ и $x2 = -17_{10}$.

Решение:

Необходимо найти сумму: $y = x_1 + x_2$.

Числа x_1 и x_2 *нужно* представить в дополнительном коде.

$$P(y)=P_{доп}(x_1)+P_{доп}(x_2)$$

$$P_{пр}(x_1)=1'00110_2$$
$$P_{обр}(x_1)=1'11001_2$$
$$P_{доп}(x_1)=1'11010_2$$
$$P_{пр}(x_2)=1'10001_2$$
$$P_{обр}(x_2)=1'01110_2$$
$$P_{доп}(x_2)=1'01111_2$$

$$P(y)=\left[\begin{array}{r} 1'11010 \\ +1'01111 \\ \hline 1'01001 \end{array}\right]_2$$

В знаковом разряде стоит единица, и, значит, результат получен в дополнительном коде. Для перехода от дополнительного кода $P_{доп(y)}=$ $1'01001_2$ к прямому коду $P_{пр(y)}$ необходимо выполнить следующие преобразования:

$$P_{обр}(y) = P_{доп}(y) - 1 = 1'01001_2 - 1 = 1'01000_2,$$
$$P_{пр}(y) = \overline{P_{обр}(y)} = 1'\overline{01000}_2 = 1'10111_2 .$$

Переходя от двоичной СС к десятичной СС, получим ответ: **$y = -23_{10}$.**

Пример 25. Реализовать операцию: 15 – 7 в прямом, обратном и дополнительном коде:

	10-е число	Прямой код	Обратный код	Дополнительный код
данные	15 – 7	0.1111 1.0111	0.1111 $^{+}$1.1000	0.1111 $^{+}$1.1001
промежуточный результат	8		10.0111 $^{+}$ → 1	~~1~~ 0.1000
промежуточный результат	8		0.1000	0.1000

Пример 26. Реализовать операцию: 7 – 15 в прямом, обратном и дополнительном коде:

	10-е число	Прямой код	Обратный код	Дополнитель-ный код
данные	–15 + 7	1.1111 0.0111	1.0000 + 0.0111	1.0001 + 0.0111
промежуточный результат	– 8		1.0111	1.1000
промежуточный результат	– 8		1.1000	1.0111 + 1 1.1000

Формы записи числа

При проведении математических расчётов *числа в ЭВМ могут быть представлены* с помощью естественной и нормальной форм записи.

Примером записи в *естественной* форме может служить вещественное число 173,856.

Для записи числа в *естественной форме* машинное слово (операнд) делится на две части (на два поля):

– первое поле отводится для записи целой части числа,

– второе − для записи дробной части числа.

Старший разряд машинного слова используется для указания *знака* числа. Разряды машинного слова нумеруются справа − налево, начиная с нуля.

В вычислительной технике принято отделять целую часть числа от дробной части точкой. Так как положение точки между целой и дробной частями числа чётко определено, то такое представление чисел называют представлением с **фиксированной** точкой.

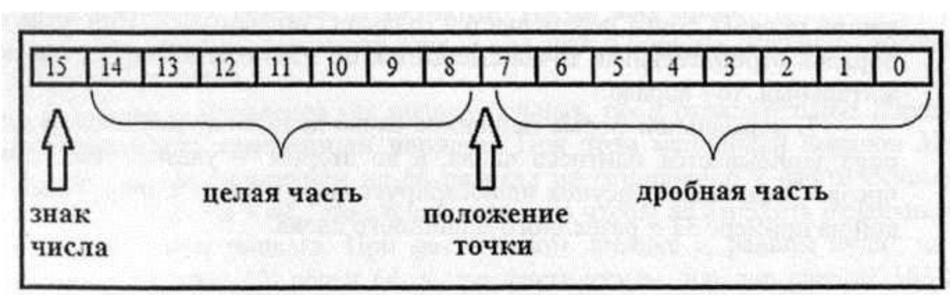


Рисунок 1 − Иллюстрация формата чисел с фиксированной точкой

Недостатком формы с фиксированной точкой является малый диапазон представления чисел. В современных ЭВМ в этой форме записывают только целые числа. При этом отпадает необходимость отводить поле для записи дробной части числа (рис. 2).

Рисунок 2 − Иллюстрация записи целого числа

Разряд кода числа, в котором размещается знак, называется знаковым разрядом. Знаковый разряд размещается в старшем разряде машинного слова. Знак положительного числа кодируется двоичной цифрой 0, а знак отрицательного числа – цифрой 1.

При представлении **чисел с плавающей точкой (запятой)** (в показательной форме) числа имеют вид правильной дроби:

$$N = m \cdot d^{p},$$

где m – мантисса числа (она является правильной дробью со знаком);
p – порядок (целое число со знаком);
d – основание системы счисления (в ЭВМ лишь подразумевается).

Пример 27. $N = 1{,}541 \cdot 10^{2}$. Здесь m=1,541, d=10, p=2.

Порядок p изменяет местоположение точки в мантиссе. В зависимости от значения порядка p точка перемещается (плавает) по мантиссе.

Пример 28. Возьмем m = 0.3, основание системы счисления d = 10, а порядок p будем брать разным. Тогда:

$$0{,}3 \cdot 10^{-1} = 0{,}03;\ 0{,}3 \cdot 10^{-2} = 0{,}003;\ 0{,}3 \cdot 10^{2} = 30;\ 0{,}3 \cdot 10^{3} = 300.$$

Чтобы исключить неоднозначность записи, используют так называемую **нормализованную форму** записи чисел с плавающей запятой:

– в этой форме мантисса числа имеет нулевую целую часть,

– в старшем разряде дробной части – цифру, отличную от нуля (для двоичной системы – всегда «1»).

Пример 29. Записать десятичное число 41,654 в показательной форме и определить нормализованную форму записи:

1) $41,654 * 10^0$,
2) $4,1654 * 10^1$,
3) $0,41654 * 10^2$ – нормализованная форма,
4) $0,041654 * 10^3$,
5) $416540 * 10^{-3}$

Рассматриваемая форма представления чисел называется *формой с плавающей точкой (запятой)*. Из приведённого примера видно, что благодаря изменению порядка точка перемещается (плавает) по мантиссе. При этом если порядок:

– отрицательный, точка смещается по мантиссе влево,
– положительный, то − вправо.

Аналогично представляются числа с плавающей запятой в двоичной системе счисления.

Пример 30. Двоичное число 101,011 в нормализованной показательной форме имеет вид:

$$0,101011 \cdot 10^{11}$$

Здесь основание «10» – запись десятичного числа «2» в двоичной системе счисления, а показатель «11» – двоичный аналог десятичного числа «3», компенсирующий сдвиг мантиссы на три разряда вправо при получении нормализованной формы.

В нормальной форме машинное слово делится на два поля. В одном поле записывается мантисса числа, а во втором — указывается порядок числа. Рис. 3 иллюстрирует форму числа с плавающей точкой на примере 32-х разрядного машинного слова.

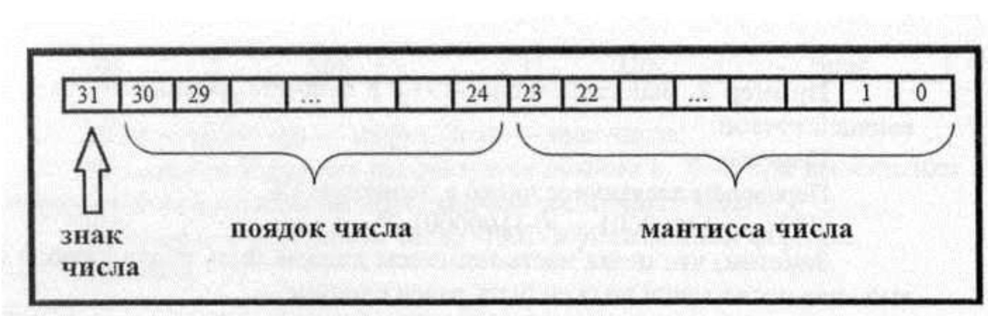


Рисунок 3 − Иллюстрация нормальной формы записи

Диапазон представления чисел с плавающей точкой значительно больше диапазона представления чисел с фиксированной точкой.

Однако быстродействие ЭВМ при обработке чисел с плавающей точкой гораздо ниже, чем при обработке чисел с фиксированной точкой.

Этим объясняется одновременное существование двух форм чисел.

Сложение чисел с плавающей запятой

Сложение чисел с плавающей запятой осуществляется в соответствии со следующим *алгоритмом:*

1. Уравнять порядки слагаемых. Для этого меньший порядок увеличивается до большего; при этом соответственно сдвигается мантисса корректируемого числа. Так как число разрядов мантиссы (как и порядка) постоянно и задано разрядной сеткой ЭВМ, младшие разряды преобразуемого числа, выходящие за пределы разрядной сетки, теряются.
2. Выполняется (для отрицательных чисел) преобразование мантисс в обратный (дополнительный) код.
3. Производится суммирование мантисс по правилам алгебраического сложения двоичных чисел.
4. К сумме приписывается порядок слагаемых.
5. В случае переполнения производится нормализация результата (сдвиг мантиссы до получения нормализованной формы с соответствующим изменением значения порядка).

Пример 31. Пусть необходимо сложить двоичные числа:

$$0{,}111 \cdot 10^{10} \text{ и } 0{,}101 \cdot 10^{01}$$

Здесь мантисса имеет разрядность 3, а порядок – 2.

1-е число		2-е число	
мантисса	порядок	мантисса	порядок
0,111	10	0,010	10

Реализуем вышеописанный алгоритм по пунктам:

1. Уравниваем порядки:
2. Так как оба числа положительны, нет необходимости преобразования их в обратный (дополнительный) код.

3. Складываем мантиссы чисел, результатом является число:

мантисса	порядок
1,001	10

4. Нормализуем мантиссу и получаем окончательный результат:

мантисса	порядок
0,100	11

Варианты задания 1а

Перевести десятичное число в систему счисления с основанием «b» (см. примеры 1, 2, 3, 9, 10, 16).

№	Число	b	№	Число	b	№	Число	b
1	67,43	2	11	1234,54	8	21	4321,45	16
2	89,12	2	12	2346,77	8	22	6432,22	16
3	46,32	2	13	1436,32	8	23	6341,23	16
4	39,55	2	14	3215,78	8	24	5123,87	16
5	73,12	2	15	2741,42	8	25	7214,24	16
6	81,54	2	16	1985,55	8	26	8591,32	16
7	61,33	2	17	2794,54	8	27	7942,27	16
8	87,32	2	18	3582,33	8	28	8235,41	16
9	51,32	2	19	1658,32	8	29	6851,82	16
10	83,52	2	20	2531,46	8	30	5312,36	16

Варианты задания 1б

Перевести число с основанием «b» в десятичную СС (см. примеры 4, 5).

№	b	Число	№	b	Число	№	b	Число
1	2	101110,101	11	8	2451,73	21	16	1A9,23
2	2	110101,110	12	8	6142,34	22	16	D3C,19
3	2	110011,001	13	8	5462,15	23	16	98E,7D
4	2	111001,011	14	8	4361,43	24	16	B65,C6
5	2	101101,111	15	8	5764,52	25	16	45F,79
6	2	100011,010	16	8	3476,61	26	16	86B,5A
7	2	111010,100	17	8	5461,11	27	16	D49,66

№	b	Число	№	b	Число	№	b	Число
8	2	101010,011	18	8	4671,47	28	16	6EC,75
9	2	111100,101	19	8	6543,21	29	16	F61,55
10	2	110110,110	20	8	1526,35	30	16	7CA,16

Варианты задания 1в

Перевести 8-е (16-ричное) число в 16-ричную (8-ричную) СС (см. примеры 6, 7, 8).

№	8 → 16	№	8 → 16	№	16 → 8	№	16 → 8
1	453,764	9	716,625	16	6A9,87C	24	7EC,DF2
2	532,431	10	673,231	17	DA1,938	25	94D,89C
3	367,175	11	573,471	18	4F8,95D	26	CDF,874
4	761,126	12	414,726	19	6EC,793	27	963,D51
5	641,375	13	573,346	20	79C,68F	28	77A,1CD
6	517,672	14	241,736	21	E58,BC4	29	6F5,AC4
7	375,264	15	472,616	22	984,147	30	83D,651
8	264,517	–	–	23	67A,16C	–	–

Варианты задания 1г

Осуществить алгебраическое сложение целых двоичных чисел в обратном (дополнительном) коде. Результат представить в прямом коде (см. примеры 22, 23, 24, 25, 26).

№	a	b	код	№	a	b	код	№	a	b	код
1	27	–19	обр.	11	19	–24	обр.	21	26	–29	обр.
2	–24	17	доп.	12	–17	19	доп.	22	23	–18	доп.
3	19	–15	обр.	13	15	–27	обр.	23	19	–24	обр.
4	–21	14	доп.	14	–14	21	доп.	24	17	–26	доп.
5	25	–28	доп.	15	28	–25	доп.	25	25	–18	доп.
6	–18	23	обр.	16	–23	19	обр.	26	28	–16	обр.
7	16	–21	доп.	17	21	–26	доп.	27	18	–11	доп.
8	–22	19	обр.	18	–19	22	обр.	28	21	–27	обр.
9	24	–25	обр.	19	25	–27	обр.	29	22	–16	обр.
10	–27	19	доп.	20	19	–24	доп.	30	16	–23	доп.

Варианты задания 1д

Сложить два двоичных числа в форме с плавающей запятой $N = m \cdot d^p$. В ответе должны быть приведены все промежуточные результаты реализации алгоритма сложения по пунктам, аналогичным примеру 31.

№	1-е число		2-е число		№	1-е число		2-е число	
	m	p	m	p		m	p	m	p
1	0,10111	110	0,11001	101	16	0,10011	100	0,11101	101
2	0,11011	101	0,01011	110	17	0,11001	101	0,11011	110
3	0,10101	110	0,10110	100	18	0,10111	110	0,11110	100
4	0,11001	011	0,11101	101	19	0,10001	011	0,11101	101
5	0,11101	101	0,10101	011	20	0,10101	101	0,10111	011
6	0,11001	010	0,11001	100	21	0,11011	010	0,10101	100
7	0,11010	101	0,10010	100	22	0,11011	101	0,11010	100
8	0,10010	011	0,11010	101	23	0,11110	011	0,10010	101
9	0,10110	010	0,11110	100	24	0,10010	010	0,10010	100
10	0,10111	101	0,10010	100	25	0,10110	101	0,11110	100
11	0,11001	001	0,10011	011	26	0,11111	001	0,11010	011
12	0,11011	011	0,10001	101	27	0,10010	011	0,11011	101
13	0,10001	010	0,11101	100	28	0,10011	010	0,11001	100
14	0,10111	110	0,10001	100	29	0,11101	110	0,10101	100
15	0,11100	011	0,10011	101	30	0,11001	011	0,11010	101

Задание № 2. Вычисление интеграла

Теоретические сведения

Вычислительные (численные) методы − методы решения математических задач в численном виде. Иными словами, это представление как исходных данных в задаче, так и её решения − в виде числа или набора чисел.

Основами для вычислительных методов являются:

– решение систем линейных уравнений;

– интерполирование (способ приближенного или точного нахождения какой-либо величины по известным отдельным значениям этой же или других величин, связанных с ней);

– численное интегрирование;

– численное решение системы нелинейных уравнений;

– численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

Численное интегрирование

Численное интегрирование − это нахождение интеграла численными методами.

Численное интегрирование применяется, если подынтегральная функция задана приближенно (таблицей), или если она задана точно, то использование методов численного интегрирования быстрее приводит к получению результата с заданной точностью, чем использование точных методов, или, наконец, если использование точных методов невозможно, так как интеграл не выражается в известных функциях. Для численного интегрирования осуществляют построение квадратурных формул (в случае функций одного переменного) и кубатурных формул (для вычисления кратных интегралов).

Численное интегрирование (историческое название: (численная) квадратура) − вычисление значения определённого интеграла (как правило, приближённое). Под численным интегрированием понимают набор численных методов отыскания значения определённого интеграла.

Численное интегрирование применяется, когда:

– Сама подынтегральная функция не задана аналитически. Например, она представлена в виде таблицы (массива) значений в узлах некоторой расчётной сетки.

– Аналитическое представление подынтегральной функции известно, но её первообразная не выражается через аналитические функции. Например, $\int e^{-x^2}dx$.

В этих двух случаях невозможно вычисление интеграла по формуле Ньютона-Лейбница. Также возможна ситуация, когда вид первообразной настолько сложен, что быстрее вычислить значение интеграла численным методом.

Во многих случаях, в виду того, что подлежащий вычислению интеграл не выражается через элементарные функции, прибегают к приближённым численным методам.

При этом задачей является не только правильный выбор программы, которая призвана решать физическую проблему, но и подробный анализ и корректировка используемых алгоритмов, в соответствии с реалиями поставленной задачи и теми математическими правилами, которые либо допускают существование решения с заданной точностью, либо говорят о невозможности такого решения.

Примеры современных физических задач, для решения которых используются численные методы – моделирование астрономических событий (рождение и развитие Вселенной), моделирование процессов в микромире (распад и синтез частиц), моделирование установок и процессов термоядерного синтеза. Более «прикладные» задачи – моделирование физических процессов в твердотельных структурах (широко используется в проектировании и изготовлении интегральных схем), моделирование процессов в газах и плазме. Учитывая большую сложность и дороговизну современных экспериментальных методик, и, с другой стороны, постоянный рост производительности вычислительных систем, нетрудно определить тенденцию к увеличению в настоящее время доли модельных (вычислительных) экспериментов. Большое количество численных методов разработано для решения задач математической физики, к которым, например, относятся задачи тепло- и массопереноса, исследования турбулентного движения.

Решение многих научных и инженерных задач на разных этапах приводит к необходимости вычисления *значения определенного интеграла*.

К интегрированию функций *сводятся задачи* вычисления:

- площадей и объемов,
- пути, пройденного точкой при неравномерном движении,
- определения центров тяжести и моментов инерции тел,
- работы, произведенной некоторыми силами,

– оценивания расхода электроэнергии и потребляемой мощности по графикам электропотребления и др.

Математический аппарат численного интегрирования **используется в методах** приближенного решения дифференциальных уравнений.

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a; b] и известна ее первообразная F(x), то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{где} \quad F'(x) = f(x).$$

Эта формула реализует *точный метод* вычисления определенного интеграла.

Однако на практике только для ограниченного числа подынтегральных функций f(x) *удается* воспользоваться точным методом и найти аналитическое решение, т. е. выразить первообразную F(x) в виде комбинации функций.

В большинстве задач:

– первообразную F(x) не удается выразить через элементарные функции;

– она получается чрезмерно сложной и громоздкой.

Кроме того, подынтегральная функция f(x) *часто задается в виде таблицы* ее значений на фиксированном конечном множестве точек xi, и, следовательно, теряет смысл само понятие первообразной.

В таких случаях применяются *приближенные методы интегрирования.*

Приближенные методы интегрирования *делятся на два класса:*

– численные;

– аналитические.

Классические численные методы интегрирования

В *основу классических методов* численного интегрирования положено геометрическое толкование определенного интеграла *как площади криволинейной трапеции*, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$.

Задача *численного интегрирования* состоит в нахождении приближенного значения определенного интеграла с помощью некоторой приближенной формулы через известные значения подынтегральной функции *f(x)* в заданных точках. Такие формулы называются *квадратурными*.

Термин «квадратура» происходит от латинского слова quadratura – вычисление площади или квадрирование.

Квадратурная формула позволяет искомый интеграл **заменить** определенной линейной комбинацией (линейной функцией) значений подынтегральной функции $f(x_k)$ в $n+1$ точках интервала [a; b]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f),$$

где A_k − коэффициенты, называемые *весами*; $x_0, x_1, x_{2,}\dots, x_k, \dots$ − узлы квадратурной формулы; $R(f)$ − методическая погрешность квадратурной формулы или ее *остаточный член*.

Принцип построения классических квадратурных формул: заданная подынтегральная функция $f(x)$ на интервале [a; b] заменяется интерполирующей функцией $\phi(x)$ простого вида (например, интерполяционным многочленом), от которой легко находится интеграл.

Для повышения точности вычисления интеграла исходный интервал [a; b] разделяют на n частей с шагом $h = \frac{b-a}{n}$.

На каждом из n полученных элементарных интервалов $[x_k; x_{k+1}]$ строится свой интерполяционный многочлен, и искомый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ вычисляется как сумма n частичных интегралов с помощью простейших квадратурных формул следующего вида:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx.$$

Выбор квадратурной формулы *определяется:*

- классом функции $f(x)$, формой ее задания,
- набором узловых значений $\{x_k\}$,
- классом интерполирующей функции $j(x)$.

Обзор классических методов численного интегрирования

1. Метод прямоугольников.
2. Метод трапеций.
3. Метод парабол (метод Симпсона).
4. Увеличение точности.
5. Метод Гаусса.
6. Метод Гаусса-Кронрода.
7. Метод Чебышёва.

8. Интегрирование при бесконечных пределах.
9. Методы Монте-Карло.
10. Методы Рунге-Кутта.
11. Метод сплайнов.

Метод прямоугольников

– Метод левых прямоугольников.
– Метод правых прямоугольников.
– Метод прямоугольников (средних).

Интервал интегрирования [a; b] разбивают на n равных частей (подынтервалов) точками x_k $(k = 0,1,2,\dots,n)$; при этом $x_0 = a;\ x_n = b$.

Длина h каждого из отрезков $[x_k; x_{k+1}]$ равна $\frac{b-a}{n}$.

Значения подынтегральной функции $f(x)$в узлах x_kобозначают следующим образом:

$$y_0 = f(x_0);\ y_1 = f(x_1);$$
$$y_2 = f(x_2);\dots;\ y_n = f(x_n).$$

Функцию $f(x)$ заменяют ступенчатой функцией, которая в пределах каждого элементарного отрезка $[x_k; x_{k+1}]$ принимает постоянное значение, равное, например, значению подынтегральной функции $f(x)$ на левом конце отрезка, т. е. $f(x) = f(x_k)$.

Таким образом, производится кусочно-постоянная интерполяция функции $f(x)$.

Геометрически это означает, что на интервале $[x_k; x_{k+1}]$ частичный интеграл $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$ приближенно определяется как площадь элементарного прямоугольника:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx f(x_k)h \approx y_k h.$$

Тогда площадь криволинейной трапеции *ABCD*, определяющая значение искомого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ приближенно *заменяется суммой площадей* nпрямоугольников с высотами y_k и основаниями h, что выражается формулой

$$\int_a^b f(x)dx \approx y_0 h + y_1 h + y_2 h + \dots + y_{n-1} h = h\sum_{k=0}^{n-1} y_k.$$

Эта формула называется квадратурной ***формулой левых прямоугольников***.

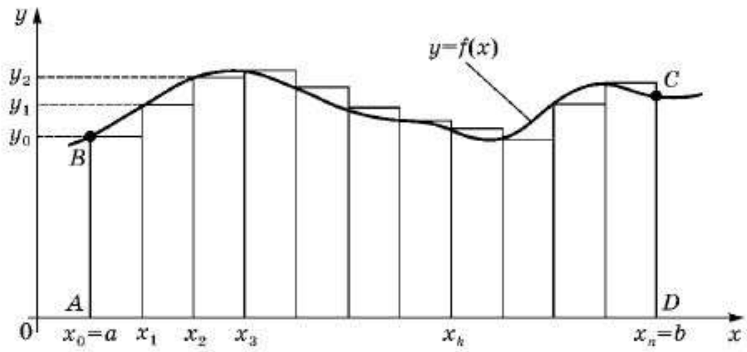


Рисунок 4 − Геометрическая интерпретация формулы левых прямоугольников

Метод левых *прямоугольников дает* ***грубую оценку*** искомого интеграла. Методическая погрешность данного метода определяется соотношением

$$R(f) \leqslant \frac{b-a}{2} h \cdot \max_{x \in [a;b]} | f'(x) |,$$

т. е. для *непрерывно* дифференцируемых функций она убывает по линейному закону с уменьшением величины шага h.

Остаточный член квадратурной формулы $R(f)$ пропорционален шагу h численного интегрирования в 1-й степени. Следовательно, метод левых прямоугольников имеет ***первый порядок точности***.

Более точный результат вычисления определенного интеграла можно получить, если площадь криволинейной трапеции *ABCD* заменить суммой площадей n прямоугольников с высотами, равными значениям подынтегральной функции $f(x)$ **в средних точках элементарных интервалов** $[x_k; x_{k+1}]$.

Метод трапеций

Подынтегральную функцию $f(x)$ заменяют кусочно-линейной функцией. Геометрически это означает, что в пределах каждого элементарного отрезка $[x_k; x_{k+1}]$ функция $f(x)$ аппроксимируется прямой линией, проходящей через *две соседние точки* с координатами $[x_k; f(x_k)]$ и $[x_{k+1}; f(x_{k+1})]$.

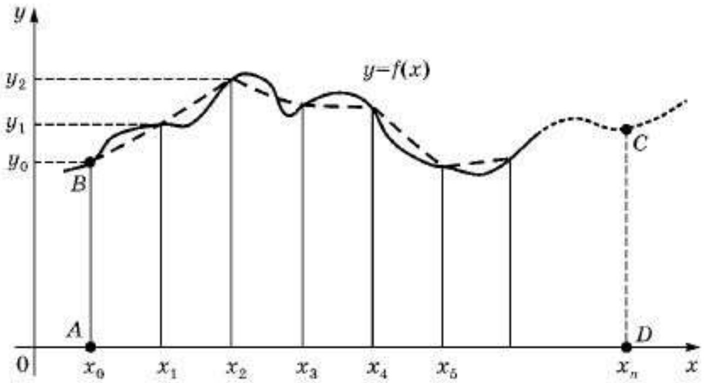


Рисунок 5 − Геометрическая интерпретация формулы трапеций

Это дает возможность приближенно заменить площадь криволинейной трапеции *ABCD*, определяющую значение искомого интеграла $\int_a^b f(x)dx$, суммой площадей n *элементарных трапеций*.

Площадь такой трапеции определяется как произведение полусуммы оснований на высоту:

$$S = \frac{y_k + y_{k+1}}{2} h.$$

Квадратурная формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h[\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}] \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + y_n)$$

Методическую погрешность метода трапеций можно оценить с помощью соотношения

$$R(f) \leqslant \frac{b-a}{12} h^2 \cdot \max_{x \in [a;b]} | f''(x) |.$$

Метод трапеций имеет ***второй*** *порядок точности*, так как его погрешность убывает прямо пропорционально величине h^2.

Варианты задания 2

Вычислить определенный интеграл, границы взять согласно своему варианту. Оценить погрешность методов левых и правых прямоугольников, метода трапеции.

Вариант	A	B	Вариант	A	B
1	0,5	1,5	16	8	9
2	1,5	2	17	9,5	10
3	2	2,5	18	10	10,5
4	2,5	3,5	19	10,5	11,5
5	3,5	4,5	20	10,5	11
6	4,5	5,5	21	11,5	12,5
7	5,5	6	22	0,5	3
8	6,6	7,5	23	12,5	13
9	7,5	8,5	24	13,5	14,5
10	0	2	25	13	14
11	1	2	26	13	14,5
12	1	1,5	27	0	1,5
13	1,5	2,5	28	0	1
14	9	10	29	14	14,5
15	8,5	9	30	14,5	15,5

Задание 2а

Вычислить определенный интеграл через его первообразную функцию.

$$\int_A^B f(x)\mathrm{dx} = F(B) - F(A),$$

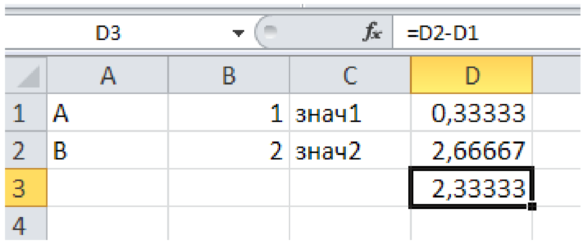
где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Используя MS Excel или Libre Office Calc, вычислить определенный интеграл $\int_A^B x^2\mathrm{dx}$.

В ячейке F1 напишите название метода «Вычисление интеграла».

В ячейки B1 и B2 введите значения A и B согласно своего варианта. Используя формулу $\int_A^B x^2\mathrm{dx} = \frac{x^3}{3}\,|_A^B$, заполните ячейки D1=B1^3/3 и D2=B2^3/3.

Посчитайте значение интеграла: D3=D2–D1.



D3 =D2-D1

	A	B	C	D
1	A	1	знач1	0,33333
2	B	2	знач2	2,66667
3				2,33333
4				

Рисунок 6 – Пример выполнения задания 2а

Задание 2б

Применение метода правых и левых прямоугольников с шагом разбиения отрезка интегрирования $\Delta x=0{,}05$.

Вычислить приближенное значение интеграла, используя численное интегрирование, и оценить погрешность вычисления.

Как известно, определенный интеграл равен площади фигуры, ограниченной снизу осью координат 0*x*, слева и справа – прямыми $x = A$ и $x = B$, сверху – функцией $y = f(x)$.

Для его приближенного вычисления методом правых (левых) прямоугольников используется следующий **алгоритм**:

– интервал интегрирования $[A; B]$ разбивают на N равных частей точками x_k $(k = 0,1,2,\dots,N)$; при этом $x_0 = A$; $x_N = B$. Длина h каждого из отрезков $[x_k; x_{k+1}]$ равна 0,05.

– на интервале $[x_k; x_{k+1}]$ частичный интеграл $\int_B^A x^2dx = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} x^2dx$ приближенно определяется как площадь элементарного прямоугольника: $\int_{x_k}^{x_{k+1}} x^2dx \approx y_kh$.

– исходный интеграл $I_0 = \int_A^B x^2\mathrm{dx}$ будет приближенно равен сумме площадей, вычисленных на каждом интервале.

Метод правых прямоугольников

Рассчитайте приближенное значение интеграла и погрешность вычислений с шагом 0,05, используя **метод правых прямоугольников**, геометрическая интерпретация которого показана рис. 7.

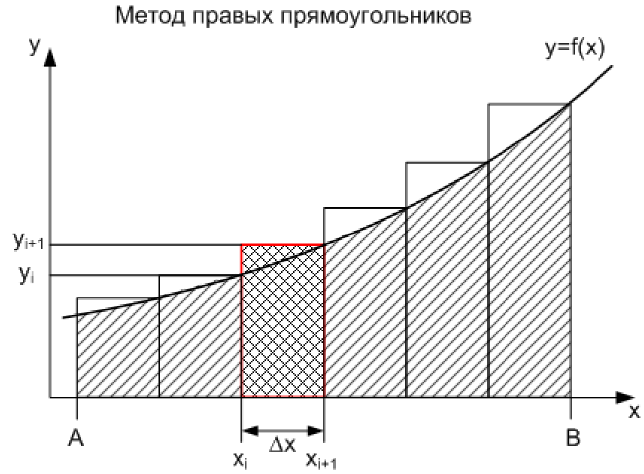


Рисунок 7 – Геометрическая интерпретация метода правых прямоугольников

1. В свободной ячейке **напишите** название метода «Метод правых прямоугольников с шагом 0,05».

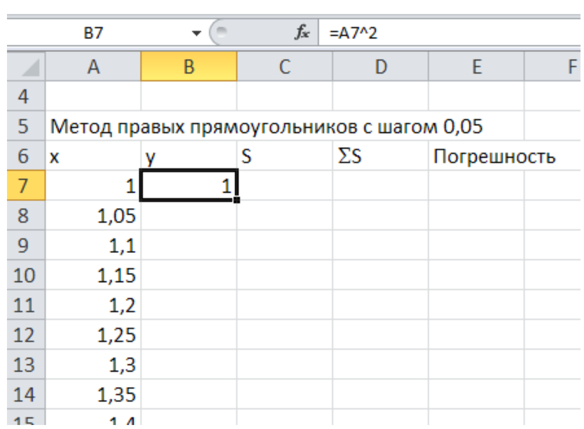
2. Заполните ячейки значениями для оси *x* от *A* до *B* с шагом 0,05. Таким же образом заполните значения для оси $y=x^2$ в каждой точке по оси *x*.

3. Постройте график функции.

4. Посчитайте площадь каждого прямоугольника.

5. Посчитайте сумму этих площадей. При расчете учитывайте, что *прямоугольников будет на 1 меньше*, чем количество значений по оси x, т. е. если Вы разбили ось *0x* на 6 значений, то прямоугольников будет 5.

6. Посчитайте погрешность по формуле $\left|\frac{I_0-I}{I_0}\right| \cdot 100$, где I_0 – точное значение интеграла (ячейка D3), *I* – приближенное значение, рассчитанное по методу прямоугольников.



B7 =A7^2

	A	B	C	D	E	F
4						
5	Метод правых прямоугольников с шагом 0,05					
6	x	y	S	ΣS	Погрешность	
7	1	1				
8	1,05					
9	1,1					
10	1,15					
11	1,2					
12	1,25					
13	1,3					
14	1,35					
15	1,4					

Рисунок 8 – Разбиение отрезка интегрирования на подинтервалы

Метод левых прямоугольников

По *аналогии* с методом правых прямоугольников примените метод левых прямоугольников для расчета приближенного значения интеграла $\int_A^B x^2 \mathrm{dx}$. Для разбиения отрезка интегрирования на подинтервалы возьмите шаг Δx=0,05.

Посчитайте погрешность вычислений.

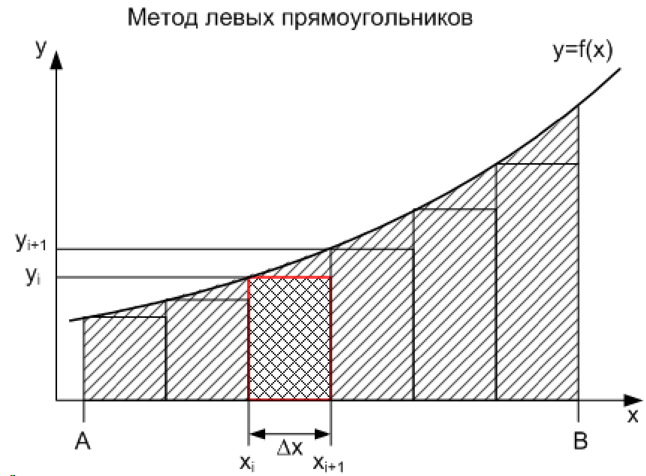


Рисунок 9 − Геометрическая интерпретация метода левых прямоугольников

Задание 2в

По *аналогии* с заданием 2б примените метод правых и левых прямоугольников для расчета приближенного значения интеграла $\int_A^B x^2 \mathrm{dx}$. Для разбиения отрезка интегрирования на подинтервалы возьмите шаг Δx=0,02.

Посчитайте погрешность вычислений.

Задание 2г

По *аналогии* с заданиями 2б и 2в примените метод трапеций для расчета приближенного значения интеграла $\int_A^B x^2 \mathrm{dx}$. Для разбиения отрезка интегрирования на подинтервалы возьмите шаг Δx=0,05.

Площадь трапеции $S_{\text{трапеции}} = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \Delta x$.

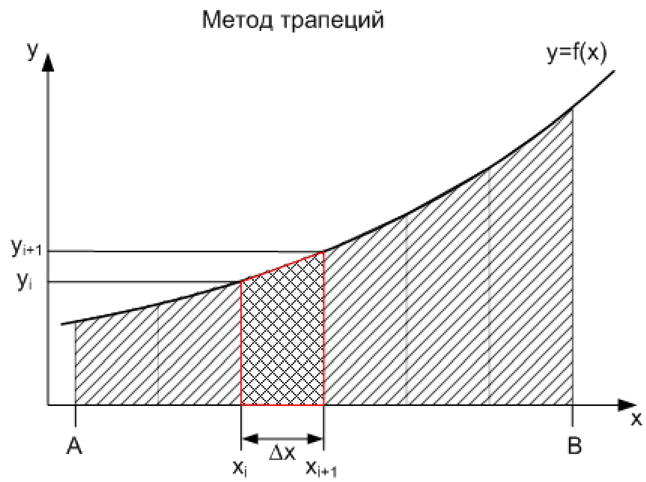


Рисунок 10 − Геометрическая интерпретация метода трапеций

В свободных ячейках запишите результаты выполнения заданий 2а, 2б, 2в, 2г.

Номер задания	**Задание**	**Результат**	**Погрешность**
2а	Вычисление интеграла		
2б. 1	Метод правых прямоугольников с шагом 0,05		
2б. 2	Метод левых прямоугольников с шагом 0,05		
2в. 1	Метод правых прямоугольников с шагом 0,02		
2в. 2	Метод левых прямоугольников с шагом 0,02		
2г	Метод трапеций с шагом 0,05		

Задание № 3. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Теоретические сведения

Математическая модель – совокупность математических объектов (уравнений, систем уравнений и неравенств, алгебраических выражений и т. д.), описывающих языком математических символов исследуемый объект и его отношения с окружающим миром.

Под **математическим** моделированием понимают:

– процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью,

– исследование этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта.

Особенность математического моделирования состоит в том, что абстрактным отражением существующего или создаваемого объекта является его математическая модель, количественный анализ которой позволяет получить новые знания об этом объекте.

Преимущества математического моделирования по сравнению с натурным экспериментом:

– экономичность (сбережение материальных, человеческих, временных и финансовых ресурсов);

– возможность моделирования гипотетических объектов;

– возможность реализации режимов, опасных или трудновоспроизводимых в реальности;

– возможность изменения масштаба времени;

– простота многоаспектного анализа;

– возможность построения прогнозов на основе выявления общих закономерностей;

– наличие и универсальность технического и программного обеспечения для моделирования.

Структура математической модели

Математическая модель представляет собой *комбинацию следующих элементов*:

– переменных (входных и выходных) – всегда имеют область определения;

– параметров – принимают числовые значения;

– функциональных зависимостей;

– ограничений (искусственных и естественных);

– целевых функций (в задачах оптимизации).

К математической модели предъявляется ряд основных **требований**:

– адекватность её исследуемому объекту;

– простота и полнота описания свойств объекта.

Вычислительный эксперимент – это получение результатов с помощью математической модели для какого-либо конкретного случая исследований.

Это может *быть*:

– единичный расчет одного параметра,

– комплекс расчетов целого спектра параметров модели во множестве определенным образом связанных условий.

При ***математическом*** моделировании возможны **погрешности**, обусловленные различными **причинами:**

– погрешности *физической* абстракции:

– неточность физических законов и закономерностей,

– неучет некоторых факторов;

– погрешности *математического* описания:

– приближенность уравнений,

– приближенность данных,

– погрешность расчетов (погрешность установок, ЭВМ, приближенные методы расчетов);

– погрешность *обработки* результатов:

– округление результатов,

– графическое изображение.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ

Координаты цели:

Вариант	$x_ц$	$y_ц$	Вариант	$x_ц$	$y_ц$
1	10	7	16	8,2	7,1
2	10,5	7	17	10,5	7
3	10	7,2	18	10	7,8
4	9	7	19	9,4	7,1
5	13	14	20	5,9	5
6	12	8	21	7,6	4,8
7	13	7	22	10	7,9
8	11	6,3	23	10	6,9
9	9	7,1	24	11	7,9
10	10	7,8	25	12	8,7
11	10,4	6	26	11	7,8
12	12	7	27	9,4	6,2
13	10	7,8	28	10,4	8
14	10,1	7,4	29	10,5	7.9
15	9,3	6,7	30	11,1	8.3

Целью задания является исследование движение тела, брошенного под углом к горизонту, при изменении угла бросания и начальной скорости – требуется подобрать значения так, чтобы брошенное тело попало в цель с заданной **Координаты цели** берутся согласно своего варианта.

Для выполнения задания необходимо **построить математическую модель** исследуемого процесса и выполнить ряд вычислительных экспериментов с моделью. В качестве среды моделирования можно использовать любой процессор, например, MS Excel или Libre Office Calc.

В рассматриваемом случае движение тела происходит только под действием силы тяжести (трением пренебрегаем).

Для описания движения необходимо ввести систему координат $x0y$, при этом ось $0x$ направлена горизонтально, а ось $0y$ – вертикально вверх или вниз. Положение тела будет задано двумя координатами (x, y), каждая из которых с течением времени будет изменяться.

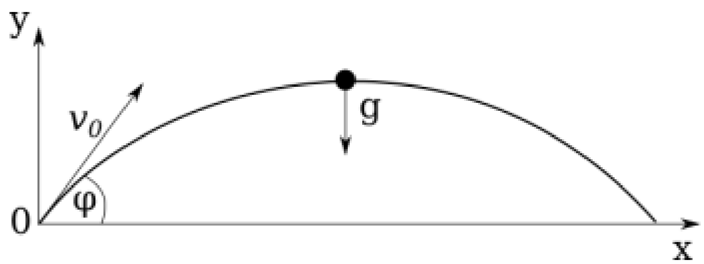


Рисунок 11 − Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Характеристики объектов и процессов

Таблица 2

Объект	**Параметры**		**Действия**
	название	значение	
Тело	Начальная скорость υ_0; Угол бросания φ; Координаты x и y	Исходные данные Исходные данные Расчетные данные	Бросают под углом к горизонту. Движется под действием силы тяжести.
Цель	Координаты цели (x,y) Точность попадания Δ	Исходные данные Исходные данные	Неподвижна
Процесс движения	Ускорение свободного падения g Время t Шаг изменения времени Δ t Расстояние между телом и целью: – по горизонтали S_x; – по вертикали S_y; – полное S	9,81 м/с^2 Расчетные данные Исходные данные Результаты Результаты Результаты	Изменение расстояния между телом и целью

Движение тела, брошенного под углом к горизонту, описывается формулами:

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cdot \cos\varphi$$

$$\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \cdot \sin\varphi$$

$$x = \upsilon_x \cdot t$$

$$y = \upsilon_{0y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Здесь υ_{0x}, υ_{0y} – горизонтальная и вертикальная составляющие начальной скорости.

Расстояние от тела до цели вычисляется по формулам:

$$S_x = x - x_ц,\ S_y = y - y_ц,$$

$$S = \sqrt{S^2{}_x + S^2{}_y},$$

где x и y – это координаты тела, $x_ц$ и $y_ц$ координаты цели, S_x и S_y – расстояние от тела до цели по осям x и y.

Параметры движения тела и положение тела по отношению к цели иллюстрируют рис. 12 и рис. 13.

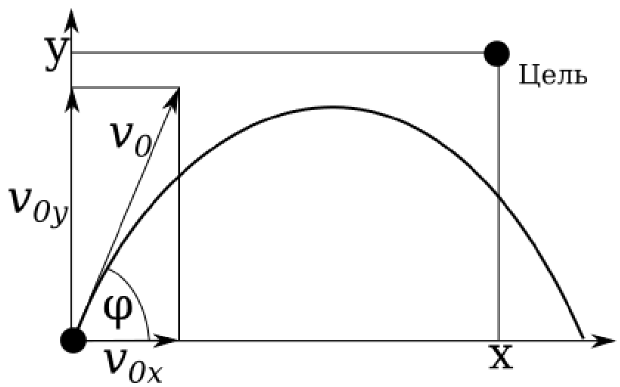


Рисунок 12 − Параметры движения тела

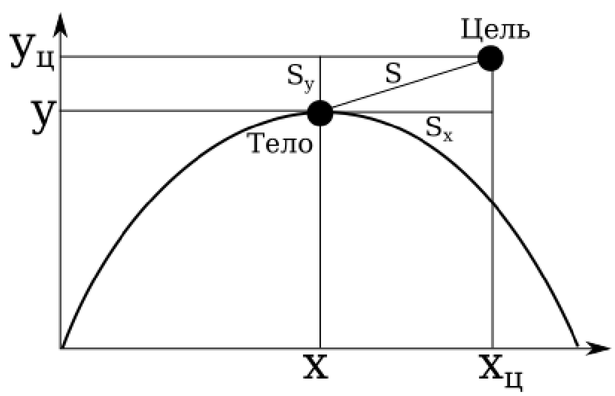


Рисунок 13 − Положение тела и цели

Этапы выполнения задания 3 (построение компьютерной модели)

1. Заполните область исходных данных по образцу (табл. 4).

Таблица 4

	A	B	C	D
1	**Поражение цели**			
2				
3	**Исходные данные**			
4	Ускорение свободного падения			9,81
5	Начальная скорость			20
6	Угол бросания в градусах			35
7	Шаг изменения времени			0,2
8	Координаты цели		$x_ц$	Из варианта
9			$y_ц$	Из варианта
10	Точность попадания			0,035

2. Заполните область промежуточных расчетов и результатов (табл. 5).

Таблица 5

Ячейка	**Формула**	
D12	=$D$5*COS($D$6*ПИ()/180)	(1)
D13	=$D$5*SIN($D$6*ПИ()/180)	(2)
A16	0	(3)
A17	=A16+$D$7	(4)
B16	=$D$12*A16	(5)
C16	=$D$13*A16-$D$4*A16*A16/2	(6)
D16	=B16-$D$8	(7)
E16	=C16-$D$9	(8)
F16	=КОРЕНЬ(D16*D16+E16*E16)	(9)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Поражение цели							
2								
3	Исходные данные							
4	Ускорение свободного падения			9,81				
5	Начальная скорость			20				
6	Угол бросания в градусах			35				
7	Шаг изменения времени			0,2				
8	Координаты цели		$x_ц$	10				
9			$y_ц$	12				
10	Точность попадания			0,035				
11	Расчет							
12	Начальн. гориз. скорость			16,38				
13	Начальн. верт. скорость			11,47				
14				Расстояние до цели				
15	Время	x	y	гориз.	верт.	полное	Анализ попадания	
16	0	0	0	-10	-12	15,62		
17	0,2	3,2766	2,098105745	-6,72339182	-9,9019	11,969		
18	0,4	6,5532	3,803811491	-3,44678365	-8,1962	8,8914		
19	0,6	9,8298	5,117117236	-0,17017547	-6,8829	6,885		
20	0,8	13,106	6,038022982	3,10643271	-5,962	6,7227		
21	1	16,383	6,566528727	6,38304089	-5,4335	8,3825		

Рисунок 14 – Компьютерная модель движения тела, брошенного под углом к горизонту

3. Столбцы A, B, C, D, E, F заполнить сверху вниз аналогичными формулами. Для построения диаграммы возьмите столько расчетных значений, чтобы кривая пересекла горизонтальную ось **x**.
4. Провести тестовый расчет по данным, приведенным в таблице:
   – Исследовать движение тела.
   – Исследовать изменение движения тела при изменении угла бросания.
   – Исследовать изменение движения тела при изменении начальной скорости.
   – Изменяя начальную скорость и угол бросания, исследовать характер движения тела и его положение по отношению к цели.
   – Изменяя исходную начальную скорость и угол, подобрать значения так, чтобы брошенное тело попало в цель с заданной точностью.

Пояснение

1. Заполните столько строк расчетной таблицы, пока координата **y** не станет меньше нуля.
2. По столбцам B и C построить диаграмму движения. Для построения диаграммы возьмите столько расчетных значений, чтобы кривая пересекла горизонтальную ось x.

Задание 3а

1. Изменяя начальную скорость от 5 до 20 м/с, проследите, как изменяется наибольшая высота подъема при увеличении начальной скорости.
2. Проследите, как изменяется дальность полета при увеличении начальной скорости.
3. Проведите расчеты для некоторого угла и результаты исследований сведите в таблицу, составленную на свободном поле электронной таблицы.
4. Запишите выводы по результатам эксперимента: как изменяется высота и дальность полета при изменении начальной скорости.

Задание 3б

1. Проведите расчеты по модели, увеличивая угол бросания от 5^0 до 85^0 и оставляя неизменной начальную скорость.
2. Проследите изменение высоты подъема при увеличении угла бросания, начальная скорость неизменна.
3. Проследите изменение дальности полета при увеличении угла бросания.
4. Результаты оформите в виде таблицы.

Задание 3в

1. Исследуйте, что означает знак S_x и S_y в различные моменты времени.
2. Исследуйте, как изменяется S при движении тела.

Задание 3г

1. По столбцу F определите наименьшее значение S. В этот момент тело ближе всего пролетает к цели.
2. Постройте столбец G анализа попадания. Будем считать, что тело попало в цель, если расстояние до цели стало меньше заданной точности (ячейка $D$10). Для этого в ячейку G16 введите формулу =если(F16<$D$10;»попал»; «мимо»).
3. Изменяйте исходные данные, чтобы получить наилучшее приближение к цели.
4. Зафиксируйте в свободных ячейках начальную скорость и угол бросания, необходимые для попадания в цель.

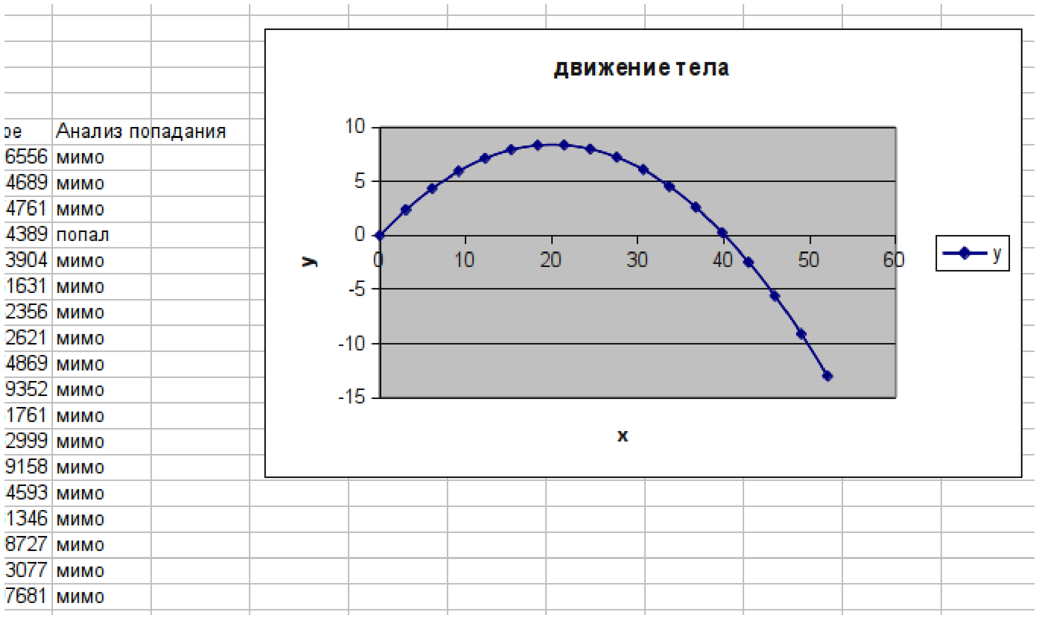


Рисунок 15 – Анализ попадания в цель

Список литературы

1. Алексеев А.П. Информатика 2015: учебное пособие. Москва: СОЛОН-пресс, 2015. – 400 с.
2. Алексеев А.П. Сборник задач по дисциплине «Информатика» для ВУЗов: учебное пособие. Москва: СОЛОН-пресс, 2016.
3. Алексеев А.П. Сборник лабораторных работ по дисциплине «Информатика»: учебное пособие. Москва: СОЛОН-пресс, 2017. – 256 с.
4. Андреева Т.И. Информатика: Пособие по изучению дисциплины и выполнению контрольных работ для студентов заочной формы обучения. – М.: МГТУ ГА, 2008.
5. Богуславский А.А., Щеглова И.Ю. Лабораторный практикум по курсу «Моделирование физических процессов»: Учебно-методическое пособие для студентов физико-математического факультета. – Коломна: КГПИ, 2002 г.