

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики – процессов управления

А. П. ИВАНОВ

**ПРАКТИКУМ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Методические указания

Санкт-Петербург
2013

ГЛАВА 3. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

В итерационных методах строится последовательность векторов, которая при определенных условиях сходится к решению исходной СЛАУ.

§1. Метод простой итерации

Пусть СЛАУ

$$Ax = b \quad (1.1)$$

тем или иным способом записана в виде:

$$x = Bx + c. \quad (1.2)$$

Метод простой итерации (для краткости – МПИ) состоит в следующем: берётся некоторый вектор $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и строится последовательность векторов $\{x^k\}$ по формуле

$$x^{k+1} = Bx^k + c. \quad (1.3)$$

Теорема 1.1. (достаточное условие сходимости МПИ) Если $\|B\| < 1$, то СЛАУ (1.2) имеет единственное решение \bar{x} и последовательность (1.3) сходится к нему со скоростью геометрической прогрессии.

Замечание 1.1. При выполнении условий теоремы МПИ сходится к решению системы для любого начального вектора.

Теорема 1.2. МПИ сходится при любом начальном векторе x^0 и любом векторе c тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы B лежат в единичном круге.

Замечание 1.2. В качестве начального вектора для итерационного процесса ((1.3)) рекомендуется брать вектор c .

Степень близости очередного приближения x^k к решению может быть оценена так:

$$\|\bar{x} - x^k\| \leq \|B\| \|\bar{x} - x^{k-1}\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \cdot \|x^k - x^{k-1}\|.$$

Замечание 1.3. Для сходимости построенной последовательности достаточно, чтобы нашлась *любая подчинённая* норма матрицы, в которой выполнено условие теоремы 1.1. При этом сходимость $\{x^k\}$ к решению \bar{x} будет иметь место в *любой* норме пространства \mathbb{R}^n ввиду эквивалентности норм в конечномерных пространствах.

Определение 1.1. Если для системы (1.2) имеет место сходимость последовательности $\{x^k\}$, построенной в соответствии с формулой (1.3), то будем говорить, что система (1.1) приведена к виду, пригодному для применения МПИ.

Отметим тот факт, что любую СЛАУ с неособой матрицей можно привести к виду, пригодному для применения МПИ.

Рассмотрим сначала СЛАУ (1.1), в которой матрица A является положительно определённой. Пусть в (1.2) матрица B и вектор c имеют вид:

$$B = E - \mu A, \quad c = \mu b, \quad \text{где } \mu = \frac{2}{\|A\| + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \quad (1.4)$$

Очевидно, что система (1.2) в таком случае эквивалентна системе (1.1). Отметим здесь же, что матрица B является симметричной (хотя, возможно, и не положительно определённой). Для выписанной здесь матрицы B выполнены условия теоремы 1.1 и потому процесс итераций будет сходиться.

Если же в исходной системе A не является и положительно определённой, то, умножая обе части (1.1) на транспонированную матрицу A^T , придём к системе

$$\hat{A}x = \hat{b}, \quad \hat{A} = A^T A, \quad \hat{b} = A^T b,$$

которая эквивалентна исходной системе ввиду предположенной неособости A и в которой матрица \hat{A} обладает требуемым свойством положительной определённости. Тем самым установлено, что *любая* СЛАУ с неособой матрицей указанным выше способом может быть приведена к виду, пригодному для применения МПИ.

Замечание 1.4. В формуле (1.4) можно брать и другие значения для μ , например $\mu = 1/\|A\|$ (оно получается при $\varepsilon = \|A\|$).

§2. Метод Зейделя.

Пусть матрица СЛАУ $Ax = b$ такова, что $\forall i \ a_{ii} \neq 0$. Если в i -ом уравнения произвести деление на a_{ii} и все неизвестные кроме x_i перенести направо, то получим систему вида

$$x = Cx + d, \quad c_{ii} = 0, \quad c_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}, \quad d_i = b_i/a_{ii}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.1)$$

Имея $x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)^T$, следующую итерацию будем строить согласно формулам:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} &= & c_{12}x_2^k &+ & \dots + c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2^{k+1} &= & c_{21}x_1^{k+1} &+ & \dots + c_{2n}x_n^k + d_2 \\ x_3^{k+1} &= & c_{31}x_1^{k+1} &+ & c_{32}x_2^{k+1} + \dots + c_{3n}x_n^k + d_3 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ x_n^{k+1} &= & c_{n1}x_1^{k+1} &+ & c_{n2}x_2^{k+1} + \dots + c_{n,(n-1)}x_{n-1}^{k+1} + d_n. \end{cases} \quad (2.2)$$

Нетрудно видеть, что хотя в правую часть этого соотношения входит вектор x^{k+1} , формально который ещё не построен, фактически для вычисления i -ой компоненты вектора x^{k+1} в выписанной формуле используются лишь компоненты вектора x^{k+1} с номерами, меньшими i и к этому моменту уже вычисленные.

Данный метод построения итеративной последовательности носит название метода Зейделя. Этот метод можно рассматривать как некоторый МПИ.

Сходимость метода имеет место, если выполнено хотя бы одно из условий:

1. Матрица A исходной СЛАУ обладает свойством диагонального преобладания;
2. Матрица A является положительно определенной.

§3. Метод Якоби

Если матрица A СЛАУ (1.1) обладает свойством диагонального преобладания, то, приведя систему (1.1) к виду (2.1) указанным там способом, можем строить последовательность векторов x^k по формуле

$$x^{k+1} = Cx^k + d,$$

причем гарантируется сходимость последовательности к решению \bar{x} системы (1.1), поскольку в данном случае будет выполнено достаточное условие сходимости $\|A\|_\infty < 1$. Построенный таким образом итерационный процесс называется *методом Якоби*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Бахвалов, Н. Жидков, Г. Кобельков.* Численные методы. — М.: Изд. Физматлит, 2006.
2. *В. М. Вержбицкий.* Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. — М.: Изд. Высшая школа, 2000.