

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики – процессов управления

А. П. ИВАНОВ

**ПРАКТИКУМ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Методические указания

Санкт-Петербург
2013

ГЛАВА 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В методическом пособии приведены классификация методов решения СЛАУ и алгоритмы их применения. Методы приведены в форме, позволяющей их использование без обращения к другим источникам. Предполагается, что матрица системы неособая, т.е. $\det A \neq 0$.

§1. Нормы векторов и матриц

Напомним, что линейное пространство Ω элементов x называется нормированным, если в нём введена функция $\|\cdot\|_\Omega$, определённая для всех элементов пространства Ω и удовлетворяющая условиям:

1. $\|x\|_\Omega \geq 0$, причём $\|x\|_\Omega = 0 \iff x = 0_\Omega$;
2. $\|\lambda x\|_\Omega = |\lambda| \cdot \|x\|_\Omega$;
3. $\|x + y\|_\Omega \leq \|x\|_\Omega + \|y\|_\Omega$.

Договоримся в дальнейшем обозначать малыми латинскими буквами векторы, причём будем считать их вектор-столбцами, большими латинскими буквами обозначим матрицы, а греческими буквами станем обозначать скалярные величины (сохраняя за буквами i, j, k, l, m, n обозначения для целых чисел).

К числу наиболее употребительных норм векторов относятся следующие:

1. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$;
2. $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$;
3. $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$.

Отметим, что все нормы в пространстве R^n являются *эквивалентными*, т.е. любые две нормы $\|x\|_i$ и $\|x\|_j$ связаны соотношениями:

$$\alpha_{ij} \|x\|_j \leq \|x\|_i \leq \beta_{ij} \|x\|_j,$$

$$\tilde{\alpha}_{ij}\|x\|_i \leq \|x\|_j \leq \tilde{\beta}_{ij}\|x\|_i,$$

причём α_{ij} , β_{ij} , $\tilde{\alpha}_{ij}$, $\tilde{\beta}_{ij}$ не зависят от x . Более того, в конечномерном пространстве любые две нормы являются эквивалентными.

Пространство матриц с естественным образом введёнными операциями сложения и умножения на число образуют линейное пространство, в котором многими способами можно ввести понятие нормы. Однако чаще всего рассматриваются так называемые *подчинённые* нормы, т.е. нормы, связанные с нормами векторов соотношениями:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Отмечая подчинённые нормы матриц теми же индексами, что и соответствующие нормы векторов, можно установить, что

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|; \quad \|A\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^T A)}; \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Здесь через $\lambda_i(A^T A)$ обозначено собственное число матрицы $A^T A$, где A^T – матрица, транспонированная к A . Кроме отмеченных выше трёх основных свойств нормы, отметим здесь ещё два:

- $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$,
- $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$,

причём в последнем неравенстве матричная норма подчинена соответствующей векторной норме. Договоримся использовать в дальнейшем только нормы матриц, подчинённые нормам векторов. Отметим, что для таких норм справедливо равенство: если E – единичная матрица, то $\|E\| = 1$.

§2. Матрицы с диагональным преобладанием

Определение 2.1. Матрица A с элементами $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ называется *матрицей с диагональным преобладанием* (величины δ), если имеют место неравенства

$$|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \geq \delta > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

§3. Положительно определённые матрицы

Определение 3.1. Симметричную матрицу A будем называть *положительно определённой*, если квадратичная форма $x^T A x$ с этой матрицей принимает лишь положительные значения при любом векторе $x \neq 0$.

Критерием положительной определённости матрицы может служить положительность её собственных чисел или положительность её главных миноров.

§4. Число обусловленности СЛАУ

При решении любой задачи, как известно, имеют место три типа погрешностей: неустраняемая погрешность, методическая погрешность и погрешность округления. Рассмотрим влияние неустраняемой погрешности исходных данных на решение СЛАУ, пренебрегая погрешностью округления и принимая во внимание отсутствие методической погрешности.

Будем считать, что в СЛАУ

$$Ax = b \quad (4.1)$$

матрица A известна точно, а правая часть b содержит неустраняемую погрешность δb .

Тогда для относительной погрешности решения $\|\delta x\|/\|x\|$ нетрудно получить оценку:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \nu(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}, \quad (4.2)$$

где $\nu(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

Число $\nu(A)$ называется числом обусловленности системы (4.1) (или матрицы A). Оказывается, что всегда $\nu(A) \geq 1$ для любой матрицы A . Поскольку величина числа обусловленности зависит от выбора матричной нормы, то при выборе конкретной нормы будем соответственно индексировать и $\nu(A)$: $\nu_1(A)$, $\nu_2(A)$ или $\nu_\infty(A)$.

В случае $\nu(A) \gg 1$ систему (4.1) или матрицу A называют плохо обусловленной. В этом случае, как это следует из оценки

(4.2), погрешность решения системы (4.1) может оказаться неприемлемо большой. Понятие приемлемости или неприемлемости погрешности определяется постановкой задачи.

Для матрицы с диагональным преобладанием легко получить оценку её числа обусловленности сверху. Имеет место

Теорема 4.1. Пусть A – матрица с диагональным преобладанием величины $\delta > 0$. Тогда она неособая и $\nu_\infty(A) \leq \|A\|_\infty/\delta$.

§5. Пример плохо обусловленной системы.

Рассмотрим СЛАУ (4.1), в которой

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Данная система имеет единственное решение $x = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$. Пусть правая часть системы содержит погрешность $\delta b = (0, 0, \dots, 0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\delta x_n = \varepsilon, \quad \delta x_{n-1} = \varepsilon, \quad \delta x_{n-2} = 2\varepsilon, \quad \delta x_{n-k} = 2^{k-1}\varepsilon, \dots, \delta x_1 = 2^{n-2}\varepsilon.$$

Отсюда

$$\|\delta x\|_\infty = \max_i \{|\delta x_i|\} = 2^{n-2}\varepsilon, \quad \|x\|_\infty = 1; \quad \|\delta b\|_\infty = \varepsilon, \quad \|b\|_\infty = 1.$$

Следовательно,

$$\nu_\infty(A) \geq \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} : \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 2^{n-2}.$$

Поскольку $\|A\|_\infty = n$, то $\|A^{-1}\|_\infty \geq n^{-1}2^{n-2}$, хотя $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = 1$. Пусть, например, $n = 102$. Тогда $\nu(A) \geq 2^{100} > 10^{30}$. При этом если даже $\varepsilon = 10^{-15}$ получим $\|\delta x\|_\infty > 10^{15}$. И тем не

менее $\|A\delta x\|_\infty = \varepsilon$.

§6. Ещё один пример

Рассмотрим совсем простую систему двух уравнений вида

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 &= 2 \\ (2 - \varepsilon)x_1 + x_2 &= 1. \end{cases} \quad (6.1)$$

С геометрической точки зрения уравнения, входящие в систему, представляют две прямые, пересекающиеся под малым углом (при $\varepsilon \ll 1$). Для этой системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 - \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \varepsilon - 2 & 2 \end{pmatrix},$$

а поэтому $\|A\|_\infty = 3$, $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{4 - \varepsilon}{\varepsilon}$ и, следовательно,
 $\nu_\infty(A) = \frac{12}{\varepsilon} - 3$. Решение данной системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\varepsilon} \\ x_2 = 2(1 - \frac{1}{\varepsilon}), \end{cases}$$

откуда видно, что оно существенно зависит от ε .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Бахвалов, Н. Жидков, Г. Кобельков.* Численные методы. — М.: Изд. Физматлит, 2006.
2. *В. М. Вержбицкий.* Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. — М.: Изд. Высшая школа, 2000.