

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Факультет прикладной математики – процессов управления

А. П. ИВАНОВ

**ПРАКТИКУМ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ  
МЕТОД НЬЮТОНА**

Методические указания

Санкт-Петербург  
2016

## ГЛАВА 1. РЕШЕНИЕ СКАЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для скалярного уравнения

$$f(x) = 0, \quad f(\cdot) \in \mathbb{C}^2(a, b) \quad (1)$$

далее рассматривается задача уточнения корня  $\bar{x}$ , локализованного на отрезке  $[a, b]$ .

### §1. Описание метода Ньютона

При наличии хорошего приближения  $x_k$  к корню  $\bar{x}$  функции  $f(\cdot)$  можно использовать метод Ньютона, называемый также методом *линеаризации* или методом *касательных*. Расчётные формулы метода могут быть получены путём замены исходного уравнения (1) линейным уравнением в окрестности корня

$$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0, \quad (1.1)$$

Решение этого уравнения принимается за очередное приближение к искомому корню уравнения

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (1.2)$$

Метод Ньютона имеет простую геометрическую интерпретацию:

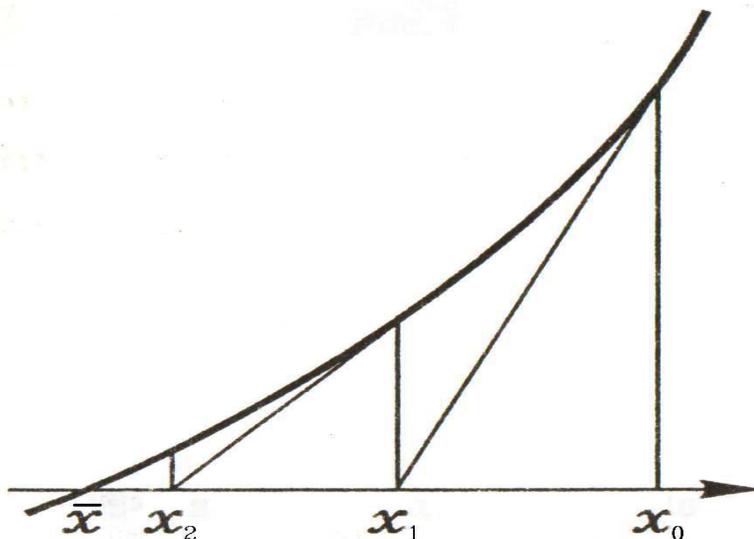


Рис. 1.

график функции заменяется касательной к нему в точке  $(x_k, f(x_k))$  и за очередное приближение  $x_{k+1}$  принимается абсцисса точки пересечения её с осью  $OX$ . Используя эту интерпретацию легко получить расчётные формулы (1.2) метода Ньютона и вследствие этой интерпретации он именуется также методом касательных.

Здесь  $x_0, x_1, x_3$  поделовательные приближения к корню  $\bar{x}$ , полученные в результате применения метода Ньютона.

Ясно, что сходимость последовательности  $\{x_k\}$  к корню зависит от свойств функции  $f(\cdot)$  и не всегда имеет место. Так, легко представить, что уже приближение  $x_1$  не попадает на исходный интервал и процесс итераций останавливается.

Приведём полезную теорему, гарантирующую в некоторых случаях сходимость метода Ньютона.

**Теорема 1.1.** *Если  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , причём  $f'(x)$  и  $f''(x)$  отличны от нуля (и, следовательно, сохраняют определённые знаки при  $x \in [a, b]$ ), то, исходя из начального приближения  $x_0 \in [a, b]$ , удовлетворяющего условию  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ , можно вычислить методом Ньютона по формуле (1.2) единственный корень  $\bar{x}$  уравнения (1) с любой степенью точности.*

**Замечание 1.1.** Практическим критерием окончания вычислений является выполнение условия  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – требуемая точность вычисления корня.

Метод Ньютона – удобный способ вычисления корня целой степени. Поскольку задача извлечения корня  $\sqrt[n]{c}$  равносильна задаче решения уравнения (1) с функцией  $f(x) = x^n - c$ , то расчётная формула метода Ньютона приобретает вид

$$x_{k+1} = \frac{n-1}{n}x_k + \frac{c}{nx_k^{n-1}}.$$

Пусть  $n = 2, c = 2$ , и тогда  $f(x) = x^2 - 2$ . Можно принять  $[a, b] = [1, 2]$ . Проверим выполнение условий теоремы 1.1:  $f(1) = -1, f(2) = 2, f'(x) = 2x > 0, f''(x) = 2 > 0$  при  $x \in [1, 2]$ . Положим  $x_0 = 2$ . Поскольку  $f(2) \cdot f''(2) = 2 \cdot 2 = 4 > 0$ , то обеспечена сходимость последовательности  $\{x_k\}$ , получаемой по формуле (1.2) к  $\sqrt{2}$ :  $x_1 = \frac{1}{2}(2 + 1) = 1.5; x_2 = 1.41667; x_3 = 1.414216;$

$x_4 = 1.414214$ . Все цифры этого приближения являются верными.

Если же условия теоремы 1.1 не выполняются или проверка их затруднительна, то очередное "приближение"  $x_{k+1}$  может оказаться вне интервала, на котором расположен корень  $\bar{x}$ . В этом случае  $x_{k+1}$  строится либо методом половинного деления либо методом хорд. В первом случае полагают

$$x_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}, \quad (1.3)$$

во втором –

$$x_{k+1} = a_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} \cdot f(a_k). \quad (1.4)$$

Здесь  $a_k, b_k$  – левый и правый конец интервала, которому принадлежит корень  $\bar{x}$  на предыдущем шаге.

На начальном этапе полагаем  $a_0 = a, b_0 = b$ . Пусть для определённости  $f(a) < 0, f(b) > 0$ . Если  $x_1 \in [a, b]$ , то вычислив  $c = f(x_1)$ , полагаем  $a_1 = c, b_1 = b_0$  при  $c < 0$ , и  $a_1 = a_0, b_1 = c$  при  $c > 0$  и повторяем вычисления.

Если же приближение  $x_1 \notin [a, b]$ , то применяем формулы (1.3) либо (1.4) и поступаем как и выше: вычисляя  $c = f(x_1)$ , полагаем  $a_1 = c, b_1 = b_0$  при  $c < 0$ , и  $a_1 = a_0, b_1 = c$  при  $c > 0$  и применяем метод Ньютона.

## §2. О локализации корней

Если в уравнении  $f(x) = 0$  функция  $f(\cdot)$  непрерывна, то основой для локализации корня обычно служит следствие из теоремы Коши: если  $f(a)f(b) < 0$ , то на интервале  $[a, b]$  имеется по крайней мере один корень указанного уравнения (точнее нечётное число корней). Для локализации корня на интервале  $[a, b]$  можно применять, например, такие подходы:

- *Графический метод.* Исходное уравнение (1) приводится к виду  $g(x) = h(x)$ , строятся графики функций  $y = g(x)$  и  $y = h(x)$  и определяется интервал оси  $Ox$ , которому принадлежит абсцисса точки пересечения графиков. Он и используется для уточнения корня.

- *Последовательный перебор.* Интервал  $[a, b]$  разбивается на  $N$  равных отрезков и вычисляются значения функции  $f(\cdot)$  в точках  $x_k = a + kh$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , где  $h = (b - a)/N$ . Если при этом найдётся интервал  $[x_k, x_{k+1}]$ , для которого  $f(x_k)f(x_{k+1}) < 0$ , то тем самым корень функции будет локализован с точностью  $h/2$ . Может оказаться, что функция  $f(\cdot)$  не меняет знака на последовательности  $\{x_k\}$ . Если корень на  $[a, b]$  существует, то последнее означает, что шаг  $h$  слишком велик и его следует заменить на меньший, полагая, например,  $N = 2N$ .

- *Перебор с переменным шагом.* Если функция  $f(x)$  является Липшицевой, т.е.

$$|f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''|, \quad x', x'' \in [a, b],$$

то можно строить последовательность  $\{x_k\}$  вида:

$$x_0 = a, \quad x_{k+1} = x_k + \frac{|f(x_k)|}{L}.$$

Основанием к этому может служить то, что при  $f(x) = cx + d$ , можно принять  $L = |c|$  и в этом случае значение  $x_1$ , полученное указанным способом, удовлетворяет уравнению  $f(x) = 0$ .

Если  $L$  неизвестна, то можно её заменить через

$$L_k = \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|x_k - x_{k-1}|}.$$

- *Использование мажорант.* Если известны оценки функции  $f(\cdot)$  на  $[a, b]$ , т.е.

$$f^-(x) \leq f(x) \leq f^+(x),$$

и корни  $x^-$  и  $x^+$  этих функций, то

$$\bar{x} \in [\min\{x^-, x^+\}, \max\{x^-, x^+\}].$$

**Пример 2.1.** Пусть  $f(x) = \sin x + x^3 - 2$ ,  $x \in [0, \pi]$ . Поскольку на указанном интервале  $0 < \sin x < 1$ , то в данном случае можно принять:  $f^-(x) = x^3 - 2$ ,  $f^+(x) = 1 + x^3 - 2 = x^3 - 1$ . Следовательно,  $\bar{x} \in [1; \sqrt[3]{2}] \subset [1; 1, 28]$ .

Итеративная последовательность метода Ньютона в соответствии с формулой (1.2) для этого уравнения имеет вид:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\sin x_k + x_k^3 - 2}{\cos x_k + 3x_k^2}.$$

**ГЛАВА 2. МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**§1. Изложение метода**

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$F(x) = 0, \quad F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

и предположим, что существует вектор  $\bar{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ , являющийся решением системы (1.1). Будем считать, что  $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ , причём  $f_i(\cdot) \in C^1(D) \forall i$ .

Разложим  $F(x)$  в окрестности точки  $\bar{x}$ :  $F(x) = F(x^0) + F'(x^0)(x - x^0) + o(\|x - x^0\|)$ . Здесь

$$F'(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

называется матрицей Якоби, а её определитель – якобианом системы (1.1). Исходное уравнение заменим следующим:  $F(x^0) + F'(x^0)(x - x^0) = 0$ . Считая матрицу Якоби  $F'(x^0)$  неособой, разрешим это уравнение относительно  $x$ :  $\hat{x} = x^0 - [F'(x^0)]^{-1}F(x^0)$ . И вообще положим

$$x^{k+1} = x^k - [F'(x^k)]^{-1}F(x^k). \quad (1.2)$$

При сделанных относительно  $F(\cdot)$  предположениях имеет место сходимость последовательности  $\{x^k\}$  к решению системы со скоростью геометрической прогрессии при условии, что начальное приближение  $x^0$  выбрано из достаточно малой окрестности решения  $\bar{x}$ .

При дополнительном предположении  $F(\cdot) \in C^2[a, b]$  имеет место квадратичная сходимость метода, т.е.

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\| \leq \omega \|x^k - \bar{x}\|^2.$$

Сформулируем теорему.

**Теорема 1.1.** Пусть в некоторой окрестности решения  $\bar{x}$  системы (1.1) функции  $f_i(\cdot) \in \mathbb{C}^2[a, b]$  и якобиан системы отличен от нуля в этой окрестности. Тогда существует  $\delta$ -окрестность точки  $\bar{x}$  такая, что при любом выборе начального приближения  $x^0$  из этой окрестности последовательность  $\{x^k\}$  не выходит из неё и имеет место квадратичная сходимость этой последовательности.

**Замечание 1.1.** В качестве критерия окончания процесса итераций обычно берут условие:  $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$ .

**Замечание 1.2.** Сложность метода Ньютона – в обращении матрицы Якоби. Вводя обозначение  $\delta x^k = x^{k+1} - x^k$  получаем для вычисления  $\delta x^k$  СЛАУ

$$\frac{\partial F(x^k)}{\partial x} \cdot \delta x^k = -F(x^k), \quad (1.3)$$

откуда и находим искомую поправку  $\delta x^k$ , а затем и следующее приближение  $x^{k+1} = x^k + \delta x^k$  к решению  $\bar{x}$ . Очевидно, что это значительно сокращает количество арифметических операций для построения очередного приближения.

**Замечание 1.3.** Начиная с некоторого шага  $k_0$  решают стационарную СЛАУ

$$\frac{\partial F(x^{k_0})}{\partial x} \cdot \delta x^k = -F(x^k).$$

Данное видоизменение носит название *модифицированный метод Ньютона*.

**Замечание 1.4.** (О выборе начального приближения). Пусть вектор-функция  $\Phi(\lambda, x)$  такова, что  $\Phi(1, x) = F(x)$ , а система  $\Phi(0, x) = 0$  может быть решена. Тогда разбивая  $[0, 1]$  на  $N$  частей решают методом Ньютона набор из  $N$  систем

$$\Phi(i/N, x) = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

принимая для каждой следующей системы в качестве начального приближения решение предыдущей системы.

## §2. Пример решения системы методом Ньютона

Рассмотрим задачу решения системы нелинейных уравнений с точностью  $\varepsilon = 0.001$ :

$$\begin{cases} \sin(2x - y) - 1.2x = 0.4; \\ 0.8x^2 + 1.5y^2 = 1. \end{cases}$$

Отделение корней проведём графически (см. рисунок 2).

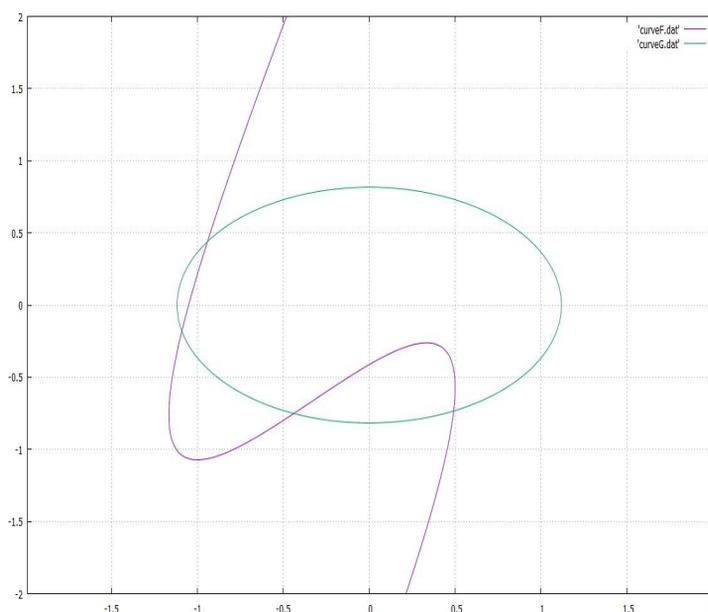


Рис. 2.

Второе уравнение системы геометрически суть эллипс с полуосями  $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ . Кривую, соответствующую первому уравнению, строим по точкам в диапазоне  $x \in [-1.5; +1.5]$ .

Система имеет, судя по рисунку, четыре решения. Уточним одно из них, расположенное в четвёртой четверти, приняв в качестве начального приближения значения  $x_0 = 0.4$ ;  $y_0 = -0.75$ .

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \sin(2x - y) - 1.2x - 0.4; \\ f_2(x, y) = 0.8x^2 + 1.5y^2 - 1. \end{cases}$$

Имеем далее:

$$\begin{cases} (f_1(x, y))'_x = 2 \cos(2x - y) - 1.2; \\ (f_2(x, y))'_x = 1.6x, \\ (f_1(x, y))'_y = -\cos(2x - y); \\ (f_2(x, y))'_y = 3y. \end{cases}$$

Уточнение корней будем вести методом Ньютона с учётом замечания 1.2:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + g_n; \\ y_{n+1} = y_n + h_n, \end{cases}$$

где  $g_n$  и  $h_n$  – решение СЛАУ (1.3):

$$\begin{cases} (f_1(x_n, y_n))'_x g_n + (f_1(x_n, y_n))'_y h_n = -f_1(x_n, y_n); \\ (f_2(x_n, y_n))'_x g_n + (f_2(x_n, y_n))'_y h_n = -f_2(x_n, y_n). \end{cases}$$

Отсюда последовательно получаем:

$$\begin{cases} x_1 = 0.50; \\ y_1 = -0.733, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0.4940; \\ y_2 = -0.7083, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_3 = 0.4913; \\ y_3 = -0.7339, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 0.4912; \\ y_4 = -0.7335. \end{cases}$$

Поскольку три первые знака после запятой установились, процесс вычислений заканчиваем (см. замечание 1.1).

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Глава 1. Решение скалярных уравнений</b> .....	<b>2</b>
§ 1. Описание метода Ньютона.....	2
§ 2. О локализации корней .....	4
<b>Глава 2. Метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений</b> .....	<b>7</b>
§ 1. Изложение метода.....	7
§ 2. Пример решения системы методом Ньютона.....	9