Методические указания и задания на контрольную работу №1.

Задачи, включенные в контрольную работу, имеют двойную нумерацию, Студент выполняет те задачи, последняя цифра номера которых совпадает с последней цифрой его учебного шифра.

Перед выполнением контрольной работы студент должен ознакомиться с содержанием разделов рабочей программы, на освоение которых ориентирована выполняемая контрольная работа. Необходимую учебную литературу студент может найти в рабочей программе (в программе указана как основная, так и дополнительная литература).

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради, на обложке которой должны быть указаны: дисциплина, номер контрольной работы, шифр студента, курс, фамилия, имя и отчество студента. На обложке вверху справа указывается фамилия и инициалы преподавателя-рецензента. В конце работы студент ставит свою подпись и дату выполнения работы.

В каждой задаче надо полностью выписать ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

Решение каждой задачи должно содержать подробные вычисления, пояснения,ответ, а также, в случае необходимости, и рисунки. После каждой задачи следует оставлять место для замечаний преподавателя-рецензента. В случае невыполнения этих требований преподаватель возвращает работу для доработки без ее проверки.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Элементы векторной алгебры, аналитической геометрии и линейной алгебры

1.1 – 1.10

1.1. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах: $\vec{a}\,(-3;2;1)$; $\vec{b}\,(5;4;2)$; $\vec{c}\,(0;6;1)$. Сделать чертеж.

1.2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах: $\vec{a}\,(-4;2;5)$ и $\vec{b}\,(1;0;-2)$. Сделать чертеж.

1.3. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах: $\vec{a}\,(4;-3;7)$; $\vec{b}\,(2;0;1)$; $\vec{c}\,(-5;1;2)$. Сделать чертеж.

1.4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах: $\vec{a}\,(3;0;6)$ и $\vec{b}\,(2;-1;3)$. Сделать чертеж.

1.5. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах: $\vec{a}\,(-5;0;2)$; $\vec{b}\,(8;1;3)$; $\vec{c}\,(1;-1;-2)$. Сделать чертеж.

1.6. Найти площадь треугольника, построенного на векторах: $\vec{a}\,(2;2;-3)$ и $\vec{b}\,(0;-2;5)$. Сделать чертеж.

1.7. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах: $\vec{a}\,(1;2;8)$; $\vec{b}\,(2;3;-4)$; $\vec{c}\,(5;0;-1)$. Сделать чертеж.

1.8. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах: $\vec{a}\,(7;0;3)$ и $\vec{b}\,(-4;1;-2)$. Сделать чертеж.

1.9. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах: $\vec{a}\,(2;-4;7)$; $\vec{b}\,(3;-2;0)$; $\vec{c}\,(6;2;1)$. Сделать чертеж.

1.10. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах: $\vec{a}\,(4;-1;2)$ и $\vec{b}\,(0;3;-3)$. Сделать чертеж.

2.1 – 2.10

2.1.Уравнение одной из сторон квадрата $x+3y-5=0$. Составить уравнения трех остальных сторон квадрата, если $P(-1;\ 0)$ – точка пересечения его диагоналей. Сделатьчертеж.

2.2.Даны уравнения одной из сторон ромба $x-3y+10=0$ и одной из ее диагоналей $x+4y-4=0$; диагонали ромба пересекаются в точке $P(0;\ 1)$. Найти уравнения остальных сторон ромба. Сделать чертеж.

2.3.Уравнения двух сторон параллелограмма $x+2y+2=0$ и $x+y-4=0$, а уравнение одной из его диагоналей $x-2=0$. Найти координаты вершин параллелограмма. Сделать чертеж.

2.4.Даны две вершины $A(-3;\ 3)$ и $B(5;\ -1)$ и точка $D(4;3)$ пересечения высот треугольника. Составить уравнения его сторон. Сделать чертеж.

2.5.Даны вершины $A(3;\ -2)$, $B(4;-1)$, $C(1;\ 3)$ трапеции $ABCD(AD\ ||\ BC)$.Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины Dэтой трапеции. Сделать чертеж.

2.6.Даны уравнения двух сторон треугольника $5x–4y+15=0$ и $4x+y–9=0$. Его медианы пересекаются в точке $P(0;2)$. Составить уравнение третьей стороны треугольника. Сделать чертеж.

2.7.Даны две вершины $A(2; –2)$ и $B(3; –1)$ и точка $P(1; 0)$ пересечения медиан треугольника ABC. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной через третью вершину C.Сделать чертеж.

2.8.Даны уравнения двух высот треугольника $x+y=4$ и $y=2x$ и одна из его вершин $A(0; 2)$. Составить уравнения сторон треугольника. Сделать чертеж.

2.9.Даны уравнения двух медиан треугольника $x–2y+1 = 0$ и $y–1=0$ и одна из его вершин $A(1; 3)$. Составить уравнения его сторон. Сделать чертеж.

2.10.Двестороны треугольника заданы уравнениями $5x–2y–8=0$ и $3x–2y–8=0$, а середина третьей стороны совпадает с началом координат. Составить уравнение этой стороны. Сделать чертеж.

3.1–3.10.Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса.Сделать проверку.

3.1. $\begin{cases} 3x+y+z=2 \\ x-y+2z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$ 3.2. $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+2z=2 \\ 2x-y-z=3 \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x-y+2z=-2 \\ 3x+y+z=3 \end{cases}$ 3.4. $\begin{cases} 2x+y-z=6 \\ x-y+z=0 \\ x+y=5 \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+3y+z=11 \\ x-y+4z=4 \end{cases}$ 3.6. $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-y-z=-2 \\ 3x+y+z=6 \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+y+z=6 \\ x-z=0 \end{cases}$ 3.8. $\begin{cases} 3x-y-z=5 \\ x+z=3 \\ x-2y-z=1 \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} x-y+z=-1 \\ 3x+y-z=1 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$ 3.10. $\begin{cases} 3x+2y-z=4 \\ x+2y+z=4 \\ x-y-z=0 \end{cases}$

Введение в математический анализ. Производная и ее приложения.

4.1–4.10.Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

4.1. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg3x}{\sin 5x}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^4+5}{(2x^2-1)^2}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3-2x}{5-2x}\right)^{2x+1}$.

4.2. а) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x+12}-4}{\sqrt{x}-2}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg4x}{\sqrt{x+1}-1}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x+1)^2+3x^3}{x^3-(2x-1)^2}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{5-2x}{5+3x}\right)^{\frac{2+x}{x}}$.

4.3. а) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x^2-25}}{\sqrt{x-5}}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{\sin^2 2x}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^6-7}{(x^3-3)(2-x^3)}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{x+3}$.

4.4. а) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x-7}+2}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(3x-2)^3}{(x^2+1)(2-x)}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

4.5. а) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+14}-2\sqrt{x+2}}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x-3)(2-x^2)}{(x-1)^3}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2+3}\right)^{x^2-1}$.

4.6. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg2x}{5x^2-9x}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^4-6x+7}{(x^2-3)^2}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

4.7. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{5x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\arcsin 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-2x-x^3}{(2+x)^2-3x^3}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2+2}{3x^2-1}\right)^{x^2+5}$.

4.8. а) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{5\sqrt{1-x}-2\sqrt{4-7x}}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4-x}-2}{\arcsin 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7+x+x^2-2x^3}{(1-x)^3}$;   г) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x+2}{3x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

4.9. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{3x}$;   б) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{tg 2x}{\sin 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x^2-3)^2+5}{(1-2x^2)^2+7}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{7x+1}{7x-1}\right)^{x+2}$.

4.10. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x+1}-1}$;   б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{x+1}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4+x-x^5}{2+x^2-3x^5}$;   г) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{7+x}{7-x}\right)^{\frac{7}{x}}$.

5.1–5.10. Задана функция $y=f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать схематический чертеж.

5.1. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1; \\ x^2+2, & -1\le x<1; \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$

5.2. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1; \\ x^2+1, & -1< x\le 1; \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$

5.3. $$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0;\\ -(x-1)^2, & 0<x<2;\\ x-3, & x\ge 2.\end{cases}$$

5.4. $$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x<1;\\ x, & x\ge 1.\end{cases}$$

5.5. $$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0;\\ x^2, & 0<x\le 2;\\ x+1, & x>2.\end{cases}$$

5.6. $$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le \pi;\\ x-2, & x>\pi.\end{cases}$$

5.7. $$f(x)=\begin{cases}-(x+1), & x\le -1;\\ (x+1)^2, & -1<x\le 0;\\ x, & x>0.\end{cases}$$

5.8. $$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\le 0;\\ \operatorname{tg} x, & 0<x\le \pi/4;\\ 2, & x>\pi/4.\end{cases}$$

5.9. $$f(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x\le 1;\\ 2, & x>1.\end{cases}$$

5.10. $f(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0;\\ \sqrt{x}, & 0<x<4;\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$

6.1–6.10. Методами дифференциального исчисления:

а) исследовать функцию $y = f(x)$ и по результатам исследования построить ее график;

б) Найти наименьшее и наибольшее значения заданной функции на отрезке $[a; b]$.

6.1. а) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$, б) $[-3; 3]$.

6.2. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, б) $[-1; 1]$.

6.3. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, б) $[-2; 2]$.

6.4. а) $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$, б) $[-2; 2]$.

6.5. а) $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$, б) $[1; 4]$.

6.6. а) $y=(x-1)e^{3x+1}$, б) $[0; 1]$.

6.7. а) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, б) $[1; 9]$.

6.8. а) $y=e^{\frac{1}{2-x}}$, б) $[-1; 1]$.

6.9. а) $y=xe^{-x^2}$, б) $[-2; 2]$.

6.10. а) $y=\dfrac{x^2-3}{x^2+9}$, б) $[-2; 2]$.

7.1–7.10. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ данных функций.

7.1. а) $y = \arccos\sqrt{x}$; б) $y = \ln ctg\frac{x}{3}$;

в) $x = 2t^2 + t, \quad y = \ln t.$

7.2. а) $y = \frac{x}{2}\sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2}\arccos\frac{x}{5};$ б) $y = \exp(ctg 2x);$

в) $x = \frac{1-t}{1+t^2}; \quad y = \frac{2+t^2}{t^2}.$

7.3. а) $y = \frac{1}{6}\ln\frac{x-3}{x+3}$; б) $y = arcctg[\exp(5x)]$;

в) $x = sin^2 3t, y = cos^2 3t$.

7.4. а) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right);$ б) $y = \frac{1-\cos 3x}{1+\cos 3x};$

в) $x = t^4 + 2t, y = t^2 + 5t$.

7.5. а) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \arccos\frac{1}{x^2};$ б) $y = (x-1)\exp\left(x^2\right);$

в) $x = t - ln\ sint, y = t + ln\ cost$.

7.6. а) $y = \frac{1}{2}ctg^2 x + \ln\sin x$; б) $y = exp(cos3x)$.

в) $x = tgt$, $y = \frac{1}{\sin^2 t}.$

7.7. а) $y = \ln\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-2}\right) + \sqrt{x^2 - 2x}$; б) $y = 3x\ exp(-x^{-2})$;

в) $x = t^2 - t^3$, $y = 2t^3$.

7.8. а) $y = ln\ cos2x - ln\ sin2x$;б) $y = 2^{ctg^2 3x};$

в) $x = cos^3 t$, $y = sin^3 t$.

7.9. а) $y = \arccos\frac{x-1}{x+1}$; б) $y = \ln ctg\sqrt{x+2}$;

в) $x = 3sint, y = 3cos^2t$.

7.10. *а*) $y = \frac{tg^3 x}{3} - \frac{ctg^2 x}{2} + \ln\sin x$; *б*) $y = x\ \exp\left(\frac{1}{x}\right)$;

в) $x = 2t - t^2$, $y = 2t^3$.

Неопределенный и определенный интегралы.
Функции нескольких переменных.

8.1–8.10. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

8.1.а) $\int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x^4\right)dx$; б) $\int(2x+1)^{20}dx$;

в) $\int(x-1)e^x dx$; г) $\int\sin^3 x\cos^5 x dx$.

8.2.а) $\int\left(x^2 + \frac{1}{\cos^2 x} + 2e^x\right)dx$; б) $\int\frac{x}{x^2+1}dx$;

в) $\int(x+3)\cos x dx$; г) $\int \mathrm{tg}^4 x\, dx$.

8.3.а) $\int\left(e^x - \frac{1}{\sin^2 x} + 5\right)dx$; б) $\int\sin(2-3x)dx$;

в) $\int\ln 4x\, dx$; г) $\int\frac{x^4}{x^2+1}dx$.

8.4. а) $\int\left(3^x + \frac{1}{1+x^2} - \sin x\right)dx$; б) $\int\frac{x}{x^2-3}dx$;

в) $\int x\sin x dx$; г) $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

8.5. а) $\int\left(\cos x+\frac{1}{4+x^2}-x^3\right)dx$; б) $\int\sqrt{3x-2}\,dx$;

в) $\int(x+2)e^x dx$; г) $\int\frac{\cos x}{1+\cos x}dx$.

8.6. а) $\int\left(\frac{1}{9-x^2}+e^x-7\right)dx$; б) $\int\sin\left(\frac{x}{5}+3\right)dx$;

в) $\int x\cos 3x dx$; г) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

8.7. а) $\int\left(x+\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}-\sin x\right)dx$; б) $\int 2e^{1-2x}dx$;

в) $\int x\ln 4x dx$; г) $\int\sin^2 x\cos^2 x dx$.

8.8. а) $\int\left(\cos x+\frac{1}{\sin^2 x}+6^x\right)dx$; б) $\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$;

в) $\int(x-3)\sin x dx$; г) $\int\frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$.

8.9. а) $\int\left(3x^2-4+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$; б) $\int e^{4-8x}dx$;

в) $\int arctgx dx$; г) $\int\frac{1}{x^2}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$.

8.10. а) $\int\left(2+\frac{1}{1-x^2}+\sin x\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\cos^2(7x+5)}$;

в) $\int\ln x dx$; г) $\int\frac{3x+5}{x^2+8x+15}dx$.

8.1–8.10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж.

8.1. $x^2 + 2y = 0$, $5x + 2y - 6 = 0$.

8.2. $x^2 - 2y = 0$, $x - 2y + 6 = 0$.

8.3. $x^2 - 2y = 0$, $x + 2y - 6 = 0$.

8.4. $x^2 - 6y = 0$, $x + 6y - 12 = 0$.

8.5. $x^2 + 2y = 0$, $2x - y - 3 = 0$.

8.6. $2x + y^2 = 0$, $2x + 5y - 6 = 0$.

8.7. $2x - y^2 = 0$, $2x - y - 6 = 0$.

8.8. $2x - y^2 = 0$, $2x + y - 6 = 0$.

8.9. $6x - y^2 = 0$, $6x + y - 12 = 0$.

8.10. $x + y^2 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$.

9.1–9.10. Дана функция $z = f(x, y)$ и точка $M_1(x_1; y_1)$. С помощью полного дифференциала вычислить приближенно значение функции в данной точке. Вычислить точное значение функции в точке M_1 и оценить относительную погрешность вычислений.

9.1. $z = x^2 + 3xy + y^2$; $M_1(0{,}98; 1{,}04)$.

9.2. $z = 2xy - 3y^2 + 5x$; $M_1(3{,}04; 2{,}03)$.

9.3. $z = x^2 + y^2 + 2x - 2y$; $M_1(0{,}94; 1{,}04)$.

9.4. $z = x^2 + y^2 + 4x - 2y$; $M_1(2{,}94; 1{,}05)$.

9.5. $z = y^2 + 3xy + x$; $M_1(1{,}05; 1{,}95)$.

9.6. $z = x^2 + 2xy + y^2$; $M_1(2{,}06; 0{,}98)$.

9.7. $z = x^2 - y^2 + 3x + 2y$; $M_1(1{,}02; 2{,}05)$.

9.8. $z = x^2 + 4xy + y^2$; $M_1(2{,}96; 0{,}94)$.

9.9. $z = 3xy + 2x + 5y$; $M_1(1{,}04; 2{,}96)$.

9.10. $z = x^2 - 3xy + 2x$; $M_1(0{,}96; 2{,}05)$.