

Министерство образования и науки России
ФГБОУ ВО ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. Д. Бертяев, Л. П. Семенова, О. А. Ткач

**РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКИХ
И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ
КОНСТРУЦИЙ И МЕХАНИЗМОВ**

Учебное пособие
для студентов очной, очно-заочной и заочной формы обучения

Издательство ТулГУ
Тула 2021

Рецензенты: Пеньков В.Б., д.ф.-м. н., профессор кафедры общей механики
Липецкого государственного технического университета

Соколова М.Ю., д.ф.-м. н., профессор кафедры математического
моделирования Тульского государственного университета

УДК 534.1 + 538.56

Бертяев В. Д., Семенова Л.П., Ткач О. А. Равновесие плоских и пространственных конструкций и механизмов: учеб. пособие. / В. Д. Бертяев, Л. П. Семенова, О. А. Ткач. Тула: Изд-во ТулГУ, 2021 – 168 с.

ISBN 978–5 –7679–3364–8

В пособии приводится описание курсовой работы по теоретической механике (раздел «Статика»), посвященной исследованию равновесия твердых тел на примере плоских шарнирных ферм, плоских составных конструкций, пространственных систем (валов, плит и др.), а также плоских шарнирных механизмов с использованием аналитических и графических методов. Особое внимание уделено проведению расчетов на ЭВМ в среде Mathcad. Пособие содержит сборник многовариантных заданий. Оно может также использоваться при выполнении расчетно-графических работ. Предназначается в качестве учебного пособия для студентов всех форм обучения.

Печатается по решению библиотечно–издательского совета Тульского государственного университета

ISBN 978–5—7679–3364–8

© В. Д. Бертяев, Л.П. Семенова, О. А. Ткач, 2021
© Издательство ТулГУ, 2021

Курсовая работа по статике посвящена применению основных теорем и методов статики к исследованию равновесия механических систем. Студенты, выполняя то или иное задание, должны получить навыки и умения: составления уравнений равновесия для рассматриваемых тел, нахождения реакций внешних и внутренних связей, анализа результатов расчета и исследования конструкций.

В данной курсовой работе представлены четыре задания разной степени сложности:

- расчет плоских шарнирных ферм;
- расчет плоских составных конструкций;
- расчет пространственных систем.
- равновесие плоских шарнирных механизмов

Цель работы

Курсовая работа по статике имеет целью выработку навыков исследования равновесия твердых тел и их систем на примере таких технически важных конструкций, как плоские шарнирные фермы, балки, валы, плиты и пластинки. В процессе выполнения работы студент использует аналитические условия равновесия различных систем сил для определения реакций опор и усилий в элементах конструкций, а также знакомится с графическими методами статики. Часть расчетов проводится на ЭВМ (по указанию преподавателя).

Содержание курсовой работы

Часть 1. Расчёт плоской шарнирной фермы

Первая часть курсовой работы включает в себя:

1. Вычисление опорных реакций:

- Аналитически.
- Графически (построением силового и веревочного многоугольников).

2. Вычисление усилий в стержнях:

- Методом вырезания узлов (графически и аналитически).
- Построением диаграммы Максвелла-Кремоны.
- Способом сечений (методом Риттера).

Схемы ферм и таблицы исходных данных приведены в Приложении 1.

Часть 2. Расчёт плоских составных конструкций

Вторая часть курсовой работы включает в себя:

- Расчет четырех конструкций.
- Контрольную работу в дисплейном классе с использованием АОС «Составные конструкции».

Схемы конструкций с таблицами исходных данных приведены в приложении 1. Там же приведено задание на расчет для каждой конструкции, которое определяется с помощью таблицы искомых реакций.

Требуется определить:

- В двух конструкциях — реакции всех внешних и внутренних связей.
- В двух других — часть реакций, формируя для этого минимально необходимое число уравнений равновесия.

Часть 3. Расчет пространственной конструкции

Третья часть курсовой работы включает в себя:

- Расчет пространственной системы
- Контрольную работу в дисплейном классе с использованием АОС «Равновесие одного тела. Пространственная система сил».

Схемы пространственных систем и таблицы исходных данных приведены в Приложении 1.

При расчете пространственной системы требуется определить реакции связей, наложенных на конструкцию, — опор A , B и стержня DE . Стержни и тросы считать невесомыми. Трением пренебречь.

Часть 4. Равновесие плоского шарнирного механизма

Четвертая часть курсовой работы включает в себя:

- Расчет равновесия плоского шарнирного механизма.

Изучается равновесие плоских многозвенных шарнирных механизмов. Совместно решается нелинейная система, в которую входят: система нелинейных уравнений геометрических связей и система уравнений равновесия. Исследуются факторы, обеспечивающие равновесие механизма в зависимости от положения ведущего звена.

Схемы плоских шарнирных механизмов и таблицы исходных данных приведены в Приложении 1.

Примечания

1. Варианты курсовой работы, а также ее объем по отдельным пунктам задания, определяет преподаватель. Допускается включение в состав курсовой работы проведения несложного исследования, выполняемого на ЭВМ: изучение зависимости реакций связей от одного или двух параметров, построение графиков реакций, определение экстремумов реакций и т.п.
2. При выполнении расчетов (в частности, при решении систем линейных алгебраических уравнений) рекомендуется применение современных математических пакетов (Mathcad и др.).
3. Четвёртая часть выполняется только по указанию преподавателя. Может быть выдана как отдельным заданием, так и заменой любого из первых трех заданий.

ЧАСТЬ 1. РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ ШАРНИРНОЙ ФЕРМЫ

Сведения о ферме как стержневой конструкции, основных допущениях и предположениях, применяемых при ее расчете, а также методах расчета, можно найти в пособиях [1 – 4].

Фермой называется геометрически неизменяемая конструкция, образованная прямолинейными стержнями, соединенными друг с другом идеальными шарнирами, которые называются узлами фермы. Если стержни, образующие ферму, лежат в одной плоскости, то такая ферма называется плоской.

При расчете ферм методами теоретической механики все действующие на ферму силы приводятся к ее узлам, а стержни считаются невесомыми и абсолютно жесткими. Тогда усилия в стержнях фермы будут направлены вдоль их осей, и стержни могут быть только сжаты или растянуты. Расчет статически определимых ферм сводится к определению усилий в стержнях фермы. В этом случае все активные силы и реакции опор являются внешними силами для всей фермы, рассматриваемой как твердое тело; усилия в стержнях — внутренними силами (внутренними реакциями).

Расчет фермы, состоящий из определения опорных реакций и усилий в стержнях, рекомендуется проводить в следующем порядке:

- убедиться в том, что выполняется условие статической определимости и геометрической неизменяемости фермы: $k = 2n - 3$, где k — число стержней, n — число узлов;
- определить опорные реакции фермы;
- найти усилия в стержнях фермы аналитическим методом вырезания узлов;
- определить усилия в стержнях фермы графическим методом вырезания узлов; сравнить полученные результаты с аналитическим методом;
- построить диаграмму Максвелла – Кремоны;
- определить усилия в указанных стержнях методом Риттера.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Определить усилия в стержнях 1 – 6 фермы (рис. 1) методом вырезания узлов, а в стержнях 6 – 8, 10 – 12 — способом Риттера, если $P_1 = 10 \text{ кН}$, $P_2 = 20 \text{ кН}$, $P_3 = 20 \text{ кН}$, $P_4 = 40 \text{ кН}$, $P_5 = 30 \text{ кН}$, $\alpha = 60^\circ$, $a = b = 2 \text{ м}$. Построить диаграмму Максвелла - Кремоны.

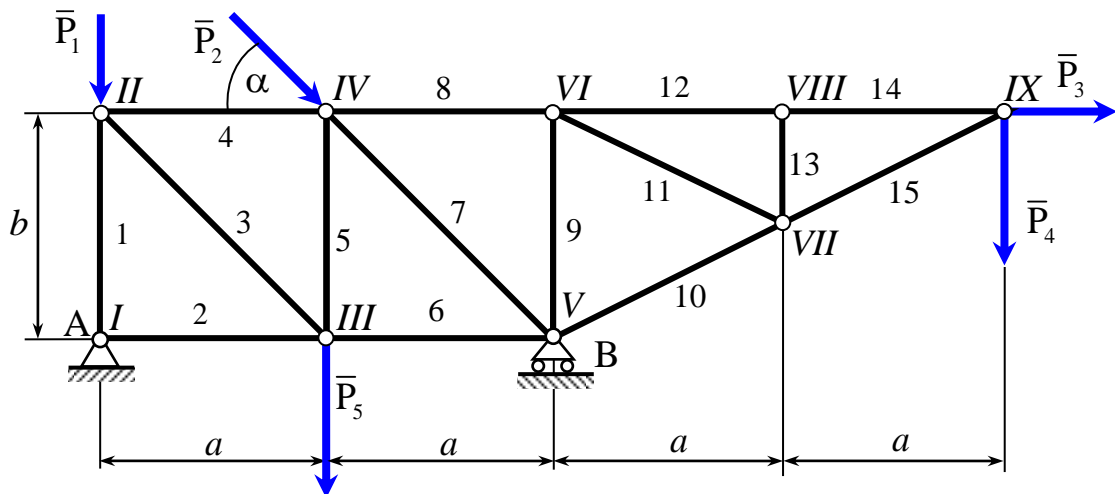


Рис. 1. Схема фермы

Приступая к расчету фермы, следует пронумеровать ее стержни арабскими цифрами, а узлы — римскими, и убедиться в выполнении условия статической определимости и геометрической неизменяемости: $k = 2n - 3$ ($k = 15$, $n = 9$).

1.1. Определение опорных реакций фермы

Реакции опор фермы можно определить графически и аналитически.

1.1.1. Определение опорных реакций аналитическим способом

Освободим ферму от опор, заменив их действие силами реакций связей. Расчетная схема изображена на рис. 2. На ферму действуют активные силы \bar{P}_i ($i = \overline{1, 5}$) и реакции опор. Реакция \bar{R}_A неподвижной шарнирной опоры А неизвестна ни по модулю, ни по направлению, поэтому разложим ее на две взаимно перпендикулярные силы \bar{X}_A и \bar{Y}_A , т. е. $\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A$, направив их, как указано на расчетной схеме. Подвижная шарнирная опора В препятствует перемещению в направлении, перпендикулярном опорной плоскости (если

полагать опорную плоскость гладкой), поэтому ее реакцию \bar{Y}_B направим также перпендикулярно опорной плоскости вертикально вверх. Таким образом, ферма находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил.

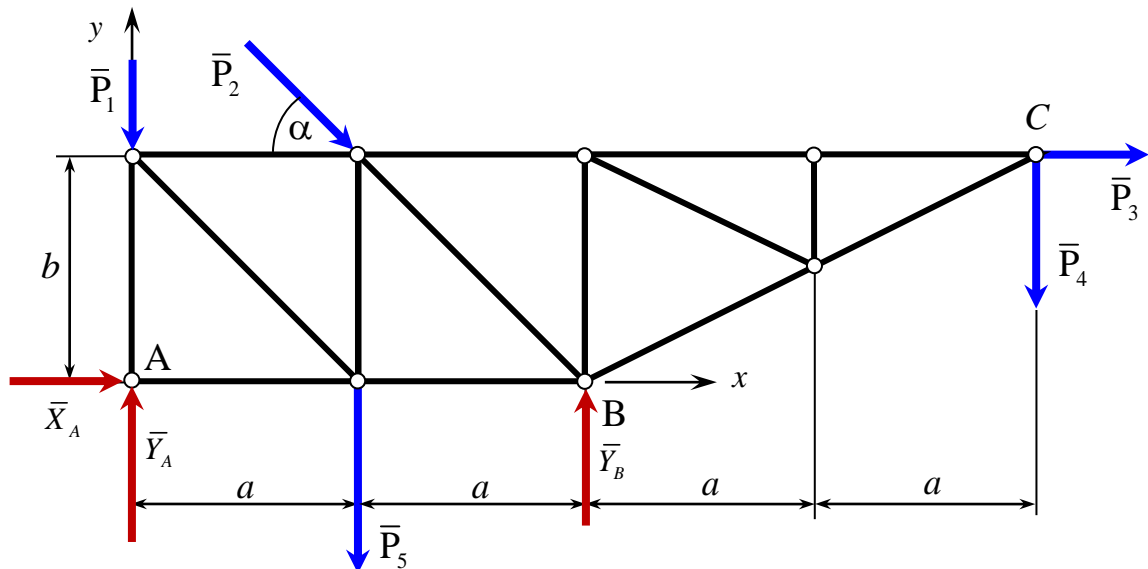


Рис. 2. Расчетная схема к определению реакций опор

Выбрав систему координат, составим уравнения равновесия сил, приложенных к ферме:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad X_A + P_2 \cos \alpha + P_3 = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad Y_A + Y_B - P_1 - P_2 \sin \alpha - P_4 - P_5 = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad Y_B 2a - P_2(a \sin \alpha + b \cos \alpha) - P_3 b - P_4 4a - P_5 a = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (1)

$$X_A = -P_2 \cos \alpha - P_3 = -20 \cdot 0,5 - 20 = -30 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3)

$$Y_B = \frac{1}{2a} [P_2(a \sin \alpha + b \cos \alpha) + P_3 b + P_4 4a + P_5 a] =$$

$$= \frac{1}{4} [2 \cdot 20 \cdot (0,5 + 0,87) + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 4 \cdot 2 + 30 \cdot 2] = 118,66 \text{ кН.}$$

Из уравнения (2)

$$\begin{aligned} Y_A &= -Y_B + P_1 + P_2 \sin \alpha + P_4 + P_5 = \\ &= -118,66 + 10 + 20 \cdot 0,87 + 40 + 30 = -21,34 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$X_A = -30 \text{ кН}; \quad Y_A = -21,34 \text{ кН}; \quad Y_B = 118,66 \text{ кН}.$$

Заметим, что направления реакций \bar{X}_A и \bar{Y}_A противоположны направлениям этих сил, выбранным при расчете.

1.1.2. Определение опорных реакций графическим способом

Данный способ определения опорных реакций основан на графическом условии равновесия: *для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы силовой и веревочный многоугольники, построенные для этих сил, были замкнутыми.*

Последовательность действий при определении опорных реакций графическим способом подробно описана в пособии [2], поэтому здесь на этом не останавливаемся.

► Замечания

1. Определение реакций опор является очень ответственным этапом расчета фермы. Графическое определение опорных реакций позволяет контролировать расчеты аналитического метода. Если определение реакций опор проводится только аналитическим способом, то проверить вычисления можно составлением уравнения моментов относительно какой-либо точки плоскости действия сил, в рассматриваемом случае, например, точки C :

$$\sum M_C(\bar{F}_i) = 0; \quad X_A b - Y_A \cdot 4a - Y_B \cdot 2a + P_5 \cdot 3a + P_1 \cdot 4a + P_2 \sin \alpha \cdot 3a = 0.$$

2. Вычисления рекомендуем проводить в математической среде Mathcad. Для приобретения навыков работы в среде можно начать с простейших расчетов: например, вычислений по формулам решения системы уравнений (1)-(3) вручную. Mathcad-документ численной реализации этих формул приведен на рис. 3.

$P_1 := 10$	$P_2 := 20$	$P_3 := 20$	$P_4 := 40$	$P_5 := 30$	$a := 2$	$b := 2$	$\alpha := \frac{\pi}{3}$	← Исходные данные	
$X_A := -P_2 \cdot \cos(\alpha) - P_3$								← Формулы для реакций опор, полученные при решении системы уравнений равновесия вручную	
$Y_B := \frac{1}{2 \cdot a} \cdot [P_2 \cdot (a \cdot \sin(\alpha) + b \cdot \cos(\alpha)) + P_3 \cdot b + P_4 \cdot 4 \cdot a + P_5 \cdot a]$									
$Y_A := -Y_B + P_1 + P_2 \cdot \sin(\alpha) + P_4 + P_5$									
$X_A = -30$								← Вывод значений реакций связей	
$Y_A = -21.34$									
$Y_B = 118.66$									
$X_A \cdot b - Y_A \cdot 4 \cdot a - Y_B \cdot 2 \cdot a + P_5 \cdot 3 \cdot a + P_1 \cdot 4 \cdot a + P_2 \cdot \sin(\alpha) \cdot 3 \cdot a \rightarrow 0$								← $\sum M_C(\bar{F}_i) = 0$ (контроль решения)	

Рис. 3. Определение реакций опор при решении системы вручную

Укажем здесь также на возможность решения системы (1)-(3) с помощью встроенной функции *solve* (рис. 4).

1. Исходные данные	
$P_1 := 10$ $P_2 := 20$ $P_3 := 20$ $P_4 := 40$ $P_5 := 30$ $a := 2$ $b := 2$ $\alpha := \frac{\pi}{3}$	
2. Символьное решение системы уравнений: после вызова с панели Символы функции <i>solve</i> в левое поле вводится матрица-столбец (вектор) левых частей уравнений равновесия, а в правое — матрица-столбец (вектор) неизвестных; после щелчка на свободном поле документа выводится решение системы в символьном виде	
$\begin{bmatrix} X_A + P_2 \cdot \cos(\alpha) + P_3 \\ Y_A + Y_B - P_1 - P_2 \cdot \sin(\alpha) - P_4 - P_5 \\ Y_B \cdot 2 \cdot a - P_2 \cdot (a \cdot \sin(\alpha) + b \cdot \cos(\alpha)) - P_3 \cdot b - P_4 \cdot 4 \cdot a - P_5 \cdot a \end{bmatrix}$	$\text{solve,} \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Y_B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{X_A} \\ \frac{1}{Y_A} \\ \frac{1}{Y_B} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -30 \\ \frac{1}{5 \cdot 3^2 - 30} \\ \frac{1}{5 \cdot 3^2 + 110} \end{pmatrix}$
3. Вывод решения в виде десятичных чисел	
$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Y_B \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{-30} & \frac{1}{5 \cdot 3^2 - 30} & \frac{1}{5 \cdot 3^2 + 110} \end{pmatrix}^T$	$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Y_B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -30 \\ \frac{1}{5 \cdot 3^2 - 30} \\ \frac{1}{5 \cdot 3^2 + 110} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -21.34 \\ 118.66 \end{pmatrix}$

Рис. 4. Определение реакций опор с помощью функции *solve*

1.2. Расчет усилий в стержнях фермы

1.2.1. Определение усилий в стержнях фермы аналитическим методом вырезания узлов

Расчет рекомендуется проводить в следующем порядке:

- наметить последовательность узлов, которые необходимо вырезать для определения усилий в указанных стержнях, из условия, что число неизвестных усилий при переходе к новому узлу не должно превышать двух (первым должен быть рассмотрен узел, содержащий не более двух стержней);
- освободить выбранные узлы от связей, заменить действие стержней их реакциями, направляя последние от узлов в предположении, что стержни растянуты, и учитывая, что $\bar{S}_j = -\bar{S}'_j$, где \bar{S}_j и \bar{S}'_j — реакции стержня с номером j на узлы, которые он соединяет;
- составить уравнения равновесия сходящихся сил, действующих на каждый вырезанный узел;
- решив полученную систему уравнений, найти усилия в стержнях: если реакция какого-нибудь стержня отрицательна, то этот стержень сжат;
- полученные результаты поместить в таблицу.

Обратимся к нашему примеру. Для определения усилий в стержнях 1-6 вырежем узлы I, II, III (см. рис. 3) и рассмотрим равновесие сил, приложенных к каждому из них. Расчетные схемы для узлов изображены на рис. 5.

Система уравнений равновесия имеет вид:

$$\begin{array}{l} \text{Узел I:} \\ \sum F_{ix} = 0; \quad S_2 - X_A = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \quad S_1 - Y_A = 0. \end{array} \quad (4)$$

$$\begin{array}{l} \text{Узел II:} \\ \sum F_{ix} = 0; \quad S_3 \cos 45^\circ + S_4 = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \quad -S_3 \cos 45^\circ - S'_1 - P_1 = 0. \end{array} \quad (5)$$

$$\begin{array}{l} \text{Узел III:} \\ \sum F_{ix} = 0; \quad S_6 - S'_2 - S'_3 \cos 45^\circ = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \quad S_5 + S'_3 \cos 45^\circ - P_5 = 0. \end{array} \quad (6)$$

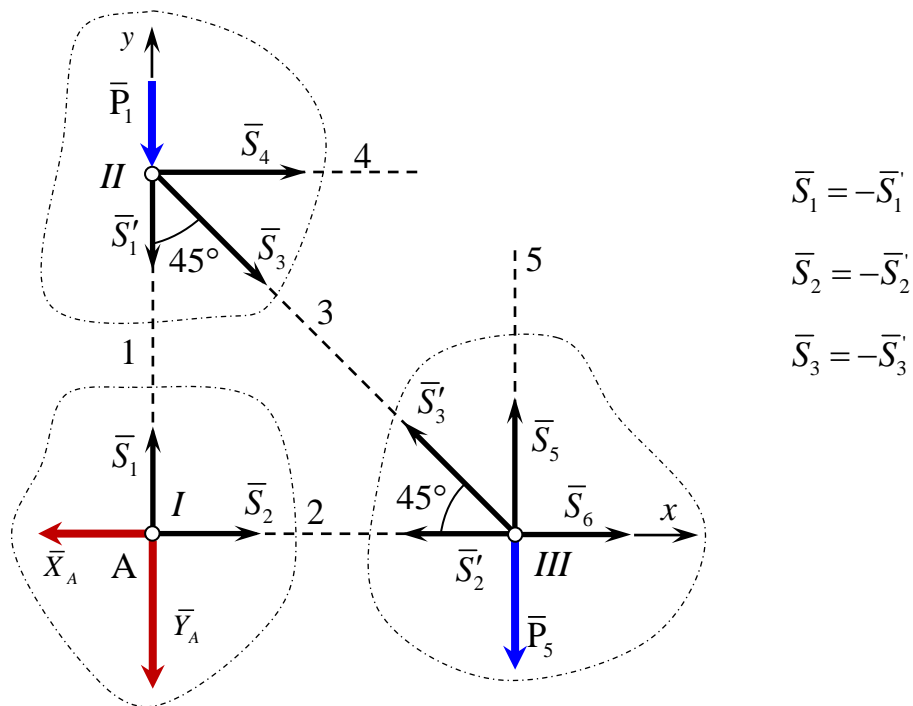


Рис. 5. Расчетные схемы для узлов I, II, III

Решим систему уравнений (4) – (6).

Из уравнений (4)

$$S_2 = X_A = 30 \text{ кН}, \quad S_1 = Y_A = 21,34 \text{ кН}.$$

Из уравнений (5)

$$S_3 = -\frac{S_1' + P_1}{\cos 45^\circ} = -\frac{21,34 + 10}{0,707} = -44,32 \text{ кН},$$

$$S_4 = -S_3 \cos 45^\circ = -(-44,32) \cdot 0,707 = 31,34 \text{ кН}.$$

Из уравнений (6)

$$S_6 = S_2' + S_3' \cos 45^\circ = 30 - 44,32 \cdot 0,707 = -1,34 \text{ кН}$$

$$S_5 = P_5 - S_3' \cos 45^\circ = 30 - (-44,32) \cdot 0,707 = 61,34 \text{ кН}$$

Из полученных результатов следует, что реакции стержней 3 и 6 имеют направления, противоположные их направлениям, принятым на расчетной схеме. Следовательно, эти стержни сжаты. Результаты расчета поместим в таблицу.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6
Усилы, кН	21,34	30	- 44,32	31,34	61,34	- 1,34

Примечание

Усилие считается положительным, если стержень растянут, и отрицательным, если он сжат.

► Замечания

1. В примере определены усилия только в шести стержнях. Усилия в других стержнях можно также определить, следуя изложенным выше рекомендациям. Укажем возможную последовательность вырезания узлов: I → II → III → IV → V → VI → VII (или VIII, а затем VII) → IX. *Рассмотрение равновесия узла IX является проверочным действием*: к этому моменту усилия во всех стержнях фермы будут найдены и, чтобы убедиться в правильности расчета, нужно составить условия равновесия сил, приложенных к этому узлу (активных сил \vec{P}_4, \vec{P}_5 и реакций стержней 14 и 15) — $\sum F_{ix} = 0, \sum F_{iy} = 0$. Если опорные реакции и усилия в стержнях фермы определены правильно, то эти условия обратятся в тождества.

2. Вырезание узлов рассматриваемой фермы можно провести, например, и в такой последовательности: IX → VIII → VII → VI → V → IV → III → I (или II, а затем I).

3. Описанный алгоритм расчета ориентирован на решение уравнений равновесия вручную. Он предполагает *предварительное определение опорных реакций фермы*. При использовании вычислительной техники для решения уравнений равновесия последовательность действий можно изменить: в этом случае отпадает необходимость предварительного определения реакций опор фермы. Действительно, статически определимая и геометрически неизменяемая ферма содержит $2n - 3$ стержня, где n — число узлов; так как три уравнения необходимы для определения реакций опор, то для определения всех неизвестных сил (реакций опор и реакций стержней) нужно $2n$ уравнений. Рассмотрев равновесие всех узлов фермы, получим эти уравнения, так как для каждого узла можно составить по два уравнения. *Уравнения (1)-(3) послужат для проверки расчета*: при подстановке в них найденных значений реакций опор они должны обратиться в тождества. Решение уравнений равновесия и контроль расчета в этом случае можно провести в среде Mathcad, используя для решения системы линейных уравнений метод обратной матрицы, встроенную функцию *lsolve* или решающий блок *Given ... Find*.

4. При оформлении курсовой работы расчетные схемы для вырезаемых узлов и соответствующие им уравнения равновесия следует располагать на одной странице. ◀

1.2.2. Аналитический метод вырезания узлов: реализация в среде Mathcad

Составление уравнений равновесия узлов фермы

Рассмотрим равновесие узлов фермы. На каждый узел действует *плоская система сходящихся сил*, в составе которой могут быть активные силы $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_5$ (узлы II, III, IV, IX), реакции опор $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B$ (опорные узлы I, V) и реакции стержней. Составляя уравнения равновесия сходящихся сил, действующих на каждый узел, получаем систему из 18 уравнений для определения реакций стержней $\bar{S}_i = -\bar{S}'_i$ ($i = 1, 2, \dots, 15$) и реакций опор $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B$.

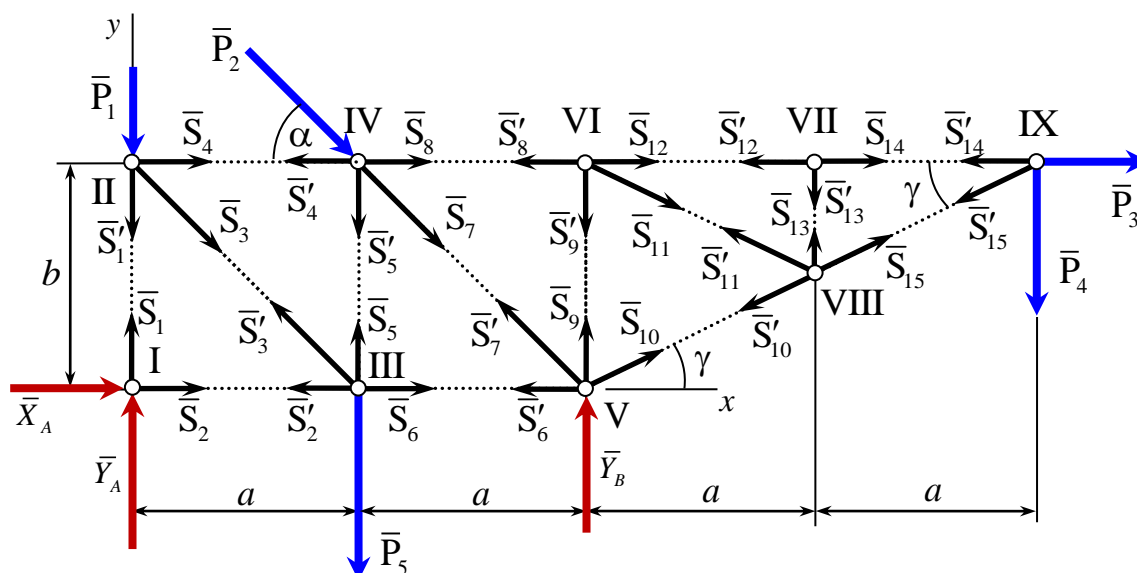


Рис. 6. Расчетные схемы аналитического метода вырезания узлов

Расчетные схемы для узлов фермы приведены на рис. 6. Реакции стержней направлены от узлов в предположении, что стержни растянуты. Уравнения равновесия сил, действующих в узлах фермы, имеют вид

Но- мер узла	Уравнения равновесия	
	$\sum F_{ix} = 0$	$\sum F_{iy} = 0$
I	$X_A + S_2 = 0$	$Y_A + S_1 = 0$
II	$S_3 \cos \beta + S_4 = 0$	$-S'_1 - S_3 \sin \beta - P_1 = 0$

III	$-S'_2 - S'_3 \cos \beta + S_6 = 0$	$S_5 + S'_3 \sin \beta - P_5 = 0$
IV	$-S'_4 + S_7 \cos \beta + S_8 + P_2 \cos \alpha = 0$	$-S'_5 - S_7 \sin \beta - P_2 \sin \alpha = 0$
V	$-S'_6 - S'_7 \cos \beta + S_{10} \cos \gamma = 0$	$S'_7 \sin \beta + S_9 + S_{10} \sin \gamma + Y_B = 0$
VI	$-S'_8 + S_{11} \cos \gamma + S_{12} = 0$	$-S'_9 - S_{11} \sin \gamma = 0$
VII	$-S'_{10} \cos \gamma - S'_{11} \cos \gamma + S_{15} \cos \gamma = 0$	$-S'_{10} \sin \gamma + S'_{11} \sin \gamma + S_{15} \sin \gamma + S_{13} = 0$
VIII	$-S'_{12} + S_{14} = 0$	$-S'_{13} = 0$
IX	$-S'_{14} - S'_{15} + P_3 = 0$	$-S'_{15} \sin \gamma - P_4 = 0$

Решение системы уравнений равновесия

1. Решение системы вручную.

Еще раз обращаем внимание, что система уравнений равновесия узлов фермы I-IX легко решается вручную, если считать реакции опор известными; в этом случае их следует определить предварительно (независимо от метода вырезания узлов). Тогда из уравнений I-VII и первого уравнения VIII определяются реакции стержней, а остальные уравнения (в таблице выделены) служат для контроля решения: они содержат заданные силы и уже определенные реакции стержней.

2. Решение системы в среде Mathcad.

Система содержит 18 уравнений с 18 неизвестными, из них 15 — реакции стержней и 3 — реакции опор. При использовании пакета Mathcad все неизвестные определяются совместно.

Решение системы проведем с помощью блока Given ... Find. Использование решающего блока, на наш взгляд, здесь предпочтительнее применения встроенной функции lsolve, так как формирование матрицы 18 порядка является утомительным делом, требующим большого внимания, в то время как при использовании решающего блока уравнения равновесия записываются в их естественном виде. Рассмотрим следующие случаи.

1. Численное решение системы уравнений для заданных значений геометрических и силовых параметров.

ORIGIN := 1

1. Задание значений исходных данных

$$P_1 := 10 \quad P_2 := 20 \quad P_3 := 20 \quad P_4 := 40 \quad P_5 := 30 \quad a := 2 \quad b := 2 \quad \alpha := \frac{\pi}{3}$$

2. Вычисляемые константы (синусы и косинусы углов β и γ)

$$\sin\beta := \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \cos\beta := \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin\gamma := \frac{b}{\sqrt{4 \cdot a^2 + b^2}} \quad \cos\gamma := \frac{2 \cdot a}{\sqrt{4 \cdot a^2 + b^2}}$$

3. Решение с помощью блока Given ... Find

3.1. Задание начальных значений реакций опор и стержней (в качестве начального приближения решения приняты нулевые значения неизвестных)

$$X_A := 0 \quad Y_A := 0 \quad Y_B := 0 \quad S_1 := 0 \quad S_2 := 0 \quad S_3 := 0 \quad S_4 := 0 \quad S_5 := 0 \quad S_6 := 0 \\ S_7 := 0 \quad S_8 := 0 \quad S_9 := 0 \quad S_{10} := 0 \quad S_{11} := 0 \quad S_{12} := 0 \quad S_{13} := 0 \quad S_{14} := 0 \quad S_{15} := 0$$

3.2. Блок решения системы уравнений равновесия

Given ← Ключевое слово (начало блока)

Система уравнений равновесия

$$\begin{array}{ll} X_A + S_2 = 0 & Y_A + S_1 = 0 \\ S_3 \cdot \cos\beta + S_4 = 0 & -S_1 - S_3 \cdot \sin\beta - P_1 = 0 \\ -S_2 - S_3 \cdot \cos\beta + S_6 = 0 & S_5 + S_3 \cdot \sin\beta - P_5 = 0 \\ S_8 + S_7 \cdot \cos\beta - S_4 + P_2 \cdot \cos(\alpha) = 0 & -S_5 - S_7 \cdot \sin\beta - P_2 \cdot \sin(\alpha) = 0 \\ -S_6 - S_7 \cdot \cos\beta + S_{10} \cdot \cos\gamma = 0 & S_9 + S_7 \cdot \sin\beta + Y_B + S_{10} \cdot \sin\gamma = 0 \\ -S_8 + S_{12} + S_{11} \cdot \cos\gamma = 0 & -S_9 - S_{11} \cdot \sin\gamma = 0 \\ -S_{10} \cdot \cos\gamma - S_{11} \cdot \sin\gamma + S_{15} \cdot \cos\gamma = 0 & -S_{10} \cdot \sin\gamma + S_{11} \cdot \sin\gamma + S_{15} \cdot \sin\gamma + S_{13} = 0 \\ -S_{12} + S_{14} = 0 & -S_{13} = 0 \\ -S_{14} - S_{15} \cdot \cos\gamma + P_3 = 0 & -S_{15} \cdot \sin\gamma - P_4 = 0 \end{array}$$

Конец блока. Функция Find возвращает решение системы в виде вектора S (матрица-столбец)

$$S := \text{Find}(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}, X_A, Y_A, Y_B)$$

4. Вывод решения системы (в первой строке таблицы – номера неизвестных, во второй –

их значения). Просмотр значений неизвестных проводится с помощью полосы прокрутки, для вызова которой следует щелкнуть на таблице (для экономии места выведен транспонированный вектор)

$$S^T = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 21.34 & 30 & -44.321 & 31.34 & 61.34 & -1.34 & -111.242 & 100 \end{array}$$

Вывод решения системы можно осуществить по-другому: для вывода значения неизвестной набирается ее имя и знак равенства. Например, для вывода значения первой неизвестной набираем: S[1=, восемнадцатой — S[18=.

$$S_1 = 21.34 \quad S_2 = 30 \quad S_3 = -44.321 \quad \dots \quad S_{16} = -30 \quad S_{17} = -21.34 \quad S_{18} = 118.66$$

5. Контроль решения (проверка выполнения условий равновесия фермы; здесь S_{16} — реакция X_A , S_{17} — реакция Y_A , S_{18} — реакция Y_B). Набирается левая часть уравнения и знак символического равенства (стрелка вправо \rightarrow).

$$S_{16} + P_2 \cdot \cos(\alpha) + P_3 \rightarrow 0 \quad \leftarrow \sum F_{ix} = 0$$

$$S_{17} + S_{18} - P_1 - P_2 \cdot \sin(\alpha) - P_4 - P_5 \rightarrow 0 \quad \leftarrow \sum F_{iy} = 0$$

$$S_{18} \cdot 2 \cdot a - P_2 \cdot \cos(\alpha) \cdot b - P_2 \cdot \sin(\alpha) \cdot a - P_3 \cdot b - P_4 \cdot 4 \cdot a - P_5 \cdot a \rightarrow 0 \quad \leftarrow \sum M_A(\bar{F}_i) = 0$$

2. Символьное решение уравнений равновесия

Для определения влияния какого-либо геометрического или силового параметра на усилия в стержнях фермы или реакции ее опор необходимо иметь аналитические выражения этих величин через исходные данные. Эти функции можно получить, решая систему уравнений равновесия вручную. Однако использование пакета Mathcad заметно сокращает трудоемкость этого процесса. Пусть требуется построить графики зависимости реакций стержней узла IV от угла α . Для этого решим систему уравнений в символьном виде, используя блок **Given ... Find**. Начальные значения неизвестных в этом случае не задаются.

ORIGIN := 1

$$\operatorname{sn}\beta := \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \operatorname{cs}\beta := \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \operatorname{sn}\gamma := \frac{b}{\sqrt{4a^2 + b^2}} \quad \operatorname{cs}\gamma := \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + b^2}}$$

Given

$$X_A + S_2 = 0$$

$$Y_A + S_1 = 0$$

$$S_3 \cdot \operatorname{cs}\beta + S_4 = 0$$

$$-S_1 - S_3 \cdot \operatorname{sn}\beta - P_1 = 0$$

$$-S_2 - S_3 \cdot \operatorname{cs}\beta + S_6 = 0$$

$$S_5 + S_3 \cdot \operatorname{sn}\beta - P_5 = 0$$

$$S_8 + S_7 \cdot \operatorname{cs}\beta - S_4 + P_2 \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$-S_5 - S_7 \cdot \operatorname{sn}\beta - P_2 \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$-S_6 - S_7 \cdot \operatorname{cs}\beta + S_{10} \cdot \operatorname{cs}\gamma = 0$$

$$S_9 + S_7 \cdot \operatorname{sn}\beta + Y_B + S_{10} \cdot \operatorname{sn}\gamma = 0$$

$$-S_8 + S_{12} + S_{11} \cdot \operatorname{cs}\gamma = 0$$

$$-S_9 - S_{11} \cdot \operatorname{sn}\gamma = 0$$

$$-S_{10} \cdot \operatorname{cs}\gamma - S_{11} \cdot \operatorname{cs}\gamma + S_{15} \cdot \operatorname{cs}\gamma = 0$$

$$-S_{10} \cdot \operatorname{sn}\gamma + S_{11} \cdot \operatorname{sn}\gamma + S_{15} \cdot \operatorname{sn}\gamma + S_{13} = 0$$

$$-S_{12} + S_{14} = 0$$

$$-S_{13} = 0$$

$$-S_{14} - S_{15} \cdot \operatorname{cs}\gamma + P_3 = 0$$

$$-S_{15} \cdot \operatorname{sn}\gamma - P_4 = 0$$

Для получения символьного решения после набора имени функции Find(...) набирается знак символьного равенства (стрелка вправо \rightarrow): Mathcad выводит вектор решения, элементами которого являются символьные выражения неизвестных в том порядке, в котором они указаны в функции Find (ниже вектор решения заменен многоточием ввиду его громоздкости)

$$\operatorname{Find}(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}, X_A, Y_A, Y_B) \rightarrow \dots$$

Построение графиков реакций опор фермы и усилий в ее стержнях

При проектировании фермы некоторые из ее геометрических или силовых параметров могут изменяться: расположение опор, размеры, величины и направления нагрузок и т.п. Важно знать, как при этом изменяются реакции опор и усилия стержней. Предположим, что при эксплуатации фермы может изменяться направление силы \bar{P}_2 , т.е. угол α . Пусть $\alpha \in [0, 2\pi)$. Рассмотрим, как при этом определить диапазоны изменения реакций опор и стержней.

1. Использование результатов символьного решения системы уравнений равновесия для построения графиков усилий стержней узла IV

В состав узла IV входят 4, 5, 7 и 8 стержни. Символьные выражения их реакций расположены в 4, 5, 7 и 8 строках вектора решения. Используем их

для задания функций $S_i = S_i(\alpha)$ ($i = 4, 5, 7, 8$). Найдем также экстремумы функции $S_5 = S_5(\alpha)$, знание которых необходимо для определения области ее изменения.

1. Задание значений исходных данных

$$P_1 := 10 \quad P_2 := 20 \quad P_3 := 20 \quad P_4 := 40 \quad P_5 := 30 \quad a := 2 \quad b := 2 \quad \alpha := \frac{\pi}{3}$$

2. Вычисляемые константы (синусы и косинусы углов β и γ)

$$\text{sn}\beta := \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{cs}\beta := \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{sm}\gamma := \frac{b}{\sqrt{4 \cdot a^2 + b^2}} \quad \text{cs}\gamma := \frac{2 \cdot a}{\sqrt{4 \cdot a^2 + b^2}}$$

3. Построение графиков реакций стержней узла IV

3.1. Задание реакций стержней узла IV как функций угла α : правые части ниже приведенных функций скопированы из вектора символьного решения системы уравнений равновесия

$$S_4(\alpha) := \frac{1}{2} \cdot \frac{(-\text{cs}\beta) \cdot \text{sm}\gamma \cdot P_5 - \text{cs}\beta \cdot \text{sm}\gamma \cdot P_2 \cdot \sin(\alpha) + \text{cs}\gamma \cdot P_4 \cdot \text{sn}\beta + P_3 \cdot \text{sm}\gamma \cdot \text{sn}\beta + P_2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sm}\gamma \cdot \text{sn}\beta}{\text{sm}\gamma \cdot \text{sn}\beta}$$

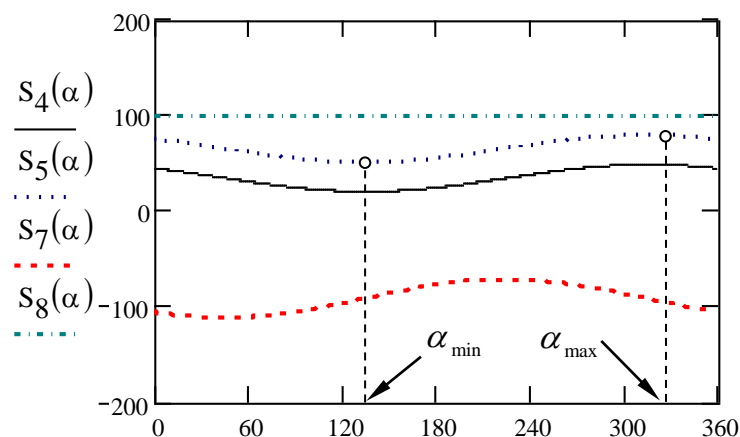
$$S_5(\alpha) := \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{cs}\beta \cdot \text{sm}\gamma \cdot P_5 - \text{cs}\beta \cdot \text{sm}\gamma \cdot P_2 \cdot \sin(\alpha) + \text{cs}\gamma \cdot P_4 \cdot \text{sn}\beta + P_3 \cdot \text{sm}\gamma \cdot \text{sn}\beta + P_2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sm}\gamma \cdot \text{sn}\beta}{\text{cs}\beta \cdot \text{sm}\gamma}$$

$$S_7(\alpha) := \frac{-1}{2} \cdot \frac{\text{cs}\beta \cdot \text{sm}\gamma \cdot P_5 + \text{cs}\beta \cdot \text{sm}\gamma \cdot P_2 \cdot \sin(\alpha) + \text{cs}\gamma \cdot P_4 \cdot \text{sn}\beta + P_3 \cdot \text{sm}\gamma \cdot \text{sn}\beta + P_2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sm}\gamma \cdot \text{sn}\beta}{\text{cs}\beta \cdot \text{sm}\gamma \cdot \text{sn}\beta}$$

$$S_8(\alpha) := \frac{\text{cs}\gamma \cdot P_4 + P_3 \cdot \text{sm}\gamma}{\text{sm}\gamma}$$

3.2. Построение графиков

$$\alpha := 0, 0.01 \dots 2\pi$$



4. Определение диапазона изменения усилия в стержне 5: для определения точек экстремума усилия в стержне 5 используется функция $root(f(x), x, a, b)$, разыскивающая корень уравнения $f(x) = 0$ на интервале (a, b) . Интервал (a, b) определяется по графику функции $S_5(\alpha)$.

4.1. Определение минимума функции $S_5(\alpha)$

$$\alpha_{\min} := \text{root}\left(\frac{d}{d\alpha} S_5(\alpha), \alpha, \frac{\pi}{2}, \pi\right) \quad \alpha_{\min} = 2.356 \quad \frac{\alpha_{\min}}{\text{deg}} = 135 \quad S_5(\alpha_{\min}) = 50.858$$

4.2. Определение максимума функции $S_5(\alpha)$

$$\alpha_{\max} := \text{root}\left(\frac{d}{d\alpha} S_5(\alpha), \alpha, \pi, 2\pi\right) \quad \alpha_{\max} = 5.498 \quad \frac{\alpha_{\max}}{\text{deg}} = 315 \quad S_5(\alpha_{\max}) = 79.142$$

2. Многократное решение системы уравнений равновесия при различных значениях какого-либо параметра

Для определения влияния какого-либо геометрического или силового параметра на усилия в стержнях фермы или реакции ее опор необязательно иметь аналитические выражения этих величин через исходные данные. Построить графики и найти экстремальные значения реакций опор и усилий в стержнях фермы можно, используя возможность многократного решения системы при различных значениях параметра. В приводимом ниже Mathcad-документе введена функция $S(\alpha)$, выраженная через функцию Find. При каждом обращении к функции $S(\alpha)$ Mathcad решает систему уравнений равновесия при заданном значении ее аргумента α . Функция $S(\alpha)$ использована для построения графиков реакций опор и усилий в стержнях узла III. Найдены также экстремумы функции $R_A = R_A(\alpha)$ на интервале $[0, 2\pi)$ с помощью функции $root$ и графика функции.

ORIGIN := 1

1. Задание значений исходных данных

$$P_1 := 10 \quad P_2 := 20 \quad P_3 := 20 \quad P_4 := 40 \quad P_5 := 30 \quad a := 2 \quad b := 2$$

2. Вычисляемые константы

$$\operatorname{sn}\beta := \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \operatorname{cs}\beta := \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \operatorname{sn}\gamma := \frac{b}{\sqrt{4a^2 + b^2}} \quad \operatorname{cs}\gamma := \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + b^2}}$$

3. Решение с помощью блока Given ... Find

Задание начальных значений реакций опор и стержней

$$X_A := 0 \quad Y_A := 0 \quad R_B := 0 \quad S_1 := 0 \quad S_2 := 0 \quad S_3 := 0 \quad S_4 := 0 \quad S_5 := 0 \quad S_6 := 0$$

$$S_7 := 0 \quad S_8 := 0 \quad S_9 := 0 \quad S_{10} := 0 \quad S_{11} := 0 \quad S_{12} := 0 \quad S_{13} := 0 \quad S_{14} := 0 \quad S_{15} := 0$$

Given

$$X_A + S_2 = 0$$

$$Y_A + S_1 = 0$$

$$S_3 \cdot \operatorname{cs}\beta + S_4 = 0$$

$$-S_1 - S_3 \cdot \operatorname{sn}\beta - P_1 = 0$$

$$-S_2 - S_3 \cdot \operatorname{cs}\beta + S_6 = 0$$

$$S_5 + S_3 \cdot \operatorname{sn}\beta - P_5 = 0$$

$$S_8 + S_7 \cdot \operatorname{cs}\beta - S_4 + P_2 \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$-S_5 - S_7 \cdot \operatorname{sn}\beta - P_2 \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$-S_6 - S_7 \cdot \operatorname{cs}\beta + S_{10} \cdot \operatorname{cs}\gamma = 0$$

$$S_9 + S_7 \cdot \operatorname{sn}\beta + Y_B + S_{10} \cdot \operatorname{sn}\gamma = 0$$

$$-S_8 + S_{12} + S_{11} \cdot \operatorname{cs}\gamma = 0$$

$$-S_9 - S_{11} \cdot \operatorname{sn}\gamma = 0$$

$$-S_{10} \cdot \operatorname{cs}\gamma - S_{11} \cdot \operatorname{cs}\gamma + S_{15} \cdot \operatorname{cs}\gamma = 0$$

$$-S_{10} \cdot \operatorname{sn}\gamma + S_{11} \cdot \operatorname{sn}\gamma + S_{15} \cdot \operatorname{sn}\gamma + S_{13} = 0$$

$$-S_{12} + S_{14} = 0$$

$$-S_{13} = 0$$

$$-S_{14} - S_{15} \cdot \operatorname{cs}\gamma + P_3 = 0$$

$$-S_{15} \cdot \operatorname{sn}\gamma - P_4 = 0$$

Задание функции $S(\alpha)$

$$S(\alpha) := \text{Find}(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}, X_A, Y_A, Y_B)$$

3. Вывод решения системы для трех значений аргумента $\alpha = \pi / 6; \pi / 3; \pi / 2$ (процедура необязательная, выполнена в качестве примера)

$$S\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$

	1
1	28.66
2	37.321
3	-54.674
4	38.66
5	68.66
6	-1.34
7	-111.242
8	100
9	0
10	-89.443
11	0
12	100
13	0
14	100
15	-89.443
16	-37.321

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

	1
1	21.34
2	30
3	-44.321
4	31.34
5	61.34
6	-1.34
7	-111.242
8	100
9	0
10	-89.443
11	0
12	100
13	0
14	100
15	-89.443
16	-30

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

	1
1	15
2	20
3	-35.355
4	25
5	55
6	-5
7	-106.066
8	100
9	0
10	-89.443
11	-4.263·10 ⁻¹⁴
12	100
13	0
14	100
15	-89.443
16	-20

$\alpha := 0, \frac{\pi}{180} .. 2\pi$

← Переменной α присваиваются значения от 0 до 2π с шагом $\pi/180$, т.е. через один градус, с целью последующего построения графиков

Вывод решения системы: вектор $S(\alpha)_i$ ($i=1,2,\dots,18$) содержит значения неизвестной с номером i при всех значениях аргумента α (выведены усилия в стержнях 1-4 и реакция опоры B)
 — процедура необязательная, выполнена для пояснения работы функции $S(\alpha)$

$S(\alpha)_1 =$

35
34.824
34.645
34.463
34.278
34.09
33.9
33.707
33.511
33.313
33.112
32.908
32.702
32.494
32.284
32.071

$S(\alpha)_2 =$

40
39.997
39.988
39.973
39.951
39.924
39.89
39.851
39.805
39.754
39.696
39.633
39.563
39.487
39.406
39.319

$S(\alpha)_3 =$

-63.64
-63.391
-63.137
-62.88
-62.619
-62.353
-62.084
-61.811
-61.534
-61.253
-60.969
-60.681
-60.39
-60.096
-59.798
-59.497

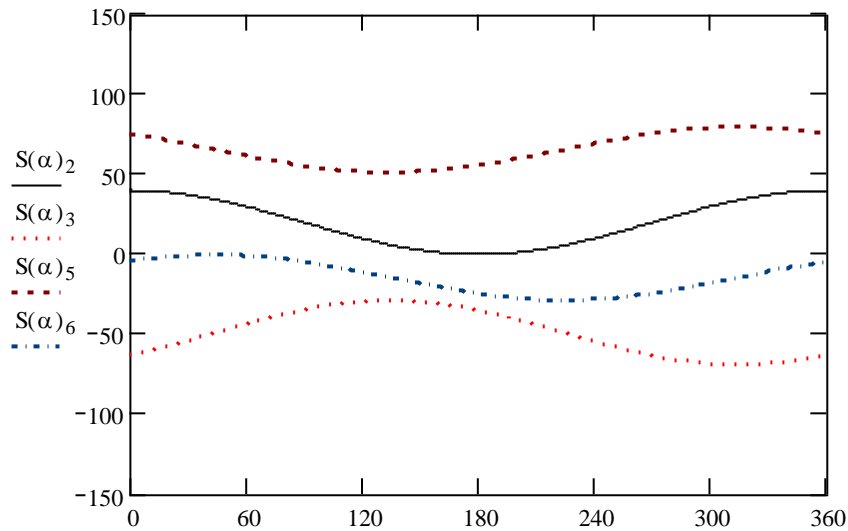
$S(\alpha)_4 =$

45
44.824
44.645
44.463
44.278
44.09
43.9
43.707
43.511
43.313
43.112
42.908
42.702
42.494
42.284
42.071

$S(\alpha)_{18} =$

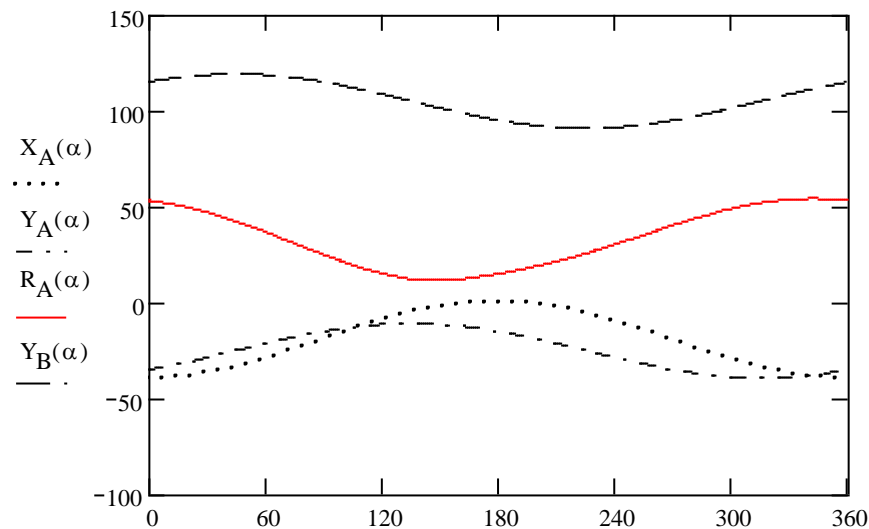
115
115.173
115.343
115.51
115.673
115.834
115.991
116.144
116.294
116.441
116.585
116.724
116.861
116.993
117.122
117.247

4. Графики реакций стержней узла III



5. Графики реакций опор фермы

$$X_A(\alpha) := S(\alpha)_{16} \quad Y_A(\alpha) := S(\alpha)_{17} \quad R_A(\alpha) := \sqrt{X_A(\alpha)^2 + Y_A(\alpha)^2} \quad Y_B(\alpha) := S(\alpha)_{18}$$



6. Определение экстремумов реакции опоры А

6.1. Минимум реакции

$$\alpha_{\min} := \text{root}\left(\frac{d}{d\alpha} R_A(\alpha), \alpha, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2} \cdot \pi\right) \quad \alpha_{\min} = 2.573 \quad \frac{\alpha_{\min}}{\text{deg}} = 147.396 \quad R_A(\alpha_{\min}) = 11.623$$

6.2. Максимум реакции

$$\alpha_{\max} := \text{root}\left(\frac{d}{d\alpha} R_A(\alpha), \alpha, \frac{3\pi}{2}, 2 \cdot \pi\right) \quad \alpha_{\max} = 5.969 \quad \frac{\alpha_{\max}}{\text{deg}} = 341.988 \quad R_A(\alpha_{\max}) = 54.189$$

1.2.3. Определение усилий в стержнях фермы графическим методом вырезания узлов

Известно, что для равновесия системы сходящихся сил *необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнутым*. Это условие лежит в основе графического метода вырезания узлов. Рекомендуется следующая последовательность действий:

1) вычертить в масштабе ферму и изобразить (также в масштабе) все приложенные к ней заданные силы и ранее определенные реакции опор;

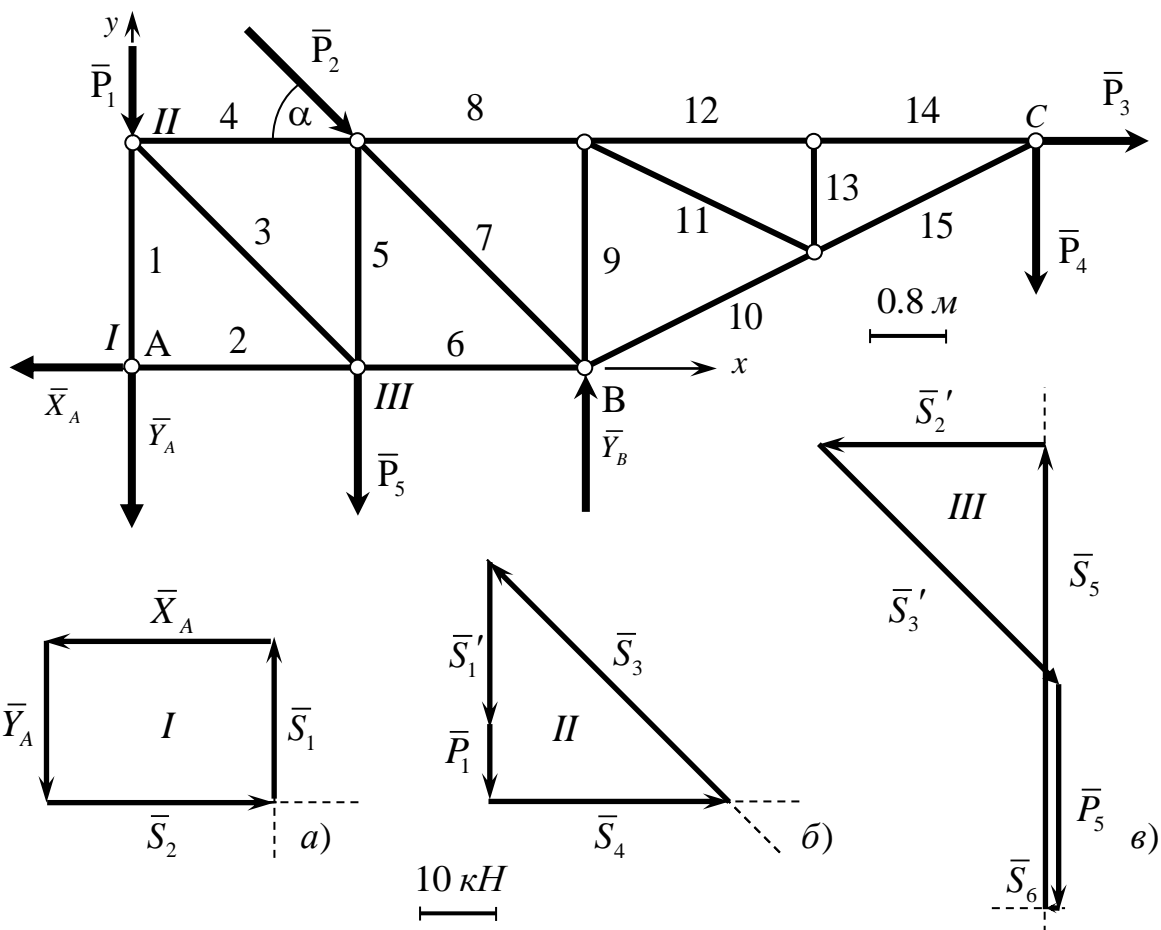
2) наметить последовательность узлов, которые необходимо вырезать для определения усилий в указанных стержнях (количество узлов для расчета определяет преподаватель); последовательность вырезания узлов при определении усилий во всех стержнях фермы указана выше (с. 12);

3) вырезать узел, в котором сходятся два стержня, и рассмотреть его равновесие под действием заданных сил и реакций стержней; определить эти реакции построением в масштабе замкнутого многоугольника сил, приложенных к узлу;

4) рассмотреть, переходя от узла к узлу, равновесие остальных узлов в намеченной последовательности: при этом в узле должно быть только две неизвестные реакции стержней; построив для каждого узла замкнутый силовой многоугольник, определить измерением искомые усилия в стержнях;

5) результаты расчета занести в таблицу с указанием характера работы стержней (сжатие или растяжение) и сравнить их с аналитическим методом.

Обратимся к нашему примеру. На рис. 7 изображена в масштабе ферма и показаны все активные силы и реакции опор. Для определения усилий в стержнях 1-6 необходимо вырезать узлы I, II, III.



Номер стержня	1	2	3	4	5	6
Усилие, кН	21,4	30	-45	31,4	61,8	-1,4

Рис. 7. Графический метод вырезания узлов (узлы I, II, III)

Вырежем узел I, содержащий два стержня. Из четырех сил, действующих на узел I, известны две: \bar{X}_A и \bar{Y}_A . Кроме того, известны линии действия реакций стержней 1 и 2. Модули и направления реакций \bar{S}_1 и \bar{S}_2 определим, построив замкнутый силовой многоугольник для узла I. Для этого изобразим в масштабе силу \bar{X}_A , из ее конца — \bar{Y}_A . Из начала \bar{X}_A проведем прямую, параллельную линии действия реакции \bar{S}_1 (первому стержню), а из конца \bar{Y}_A — прямую, параллельную линии действия реакции \bar{S}_2 (второму стержню). Точка пересечения этих прямых будет неизвестной вершиной силового многоугольника. Построение заканчивается расстановкой стрелок (рис. 7, а). Измеряя длину векторов \bar{S}_1 и \bar{S}_2 с учетом масштаба сил, найдем усилия в стержнях 1 и 2.

Для определения характера работы стержней мысленно перенесем реакции \bar{S}_1 и \bar{S}_2 в узел I: так как они направлены от узла, то стержни 1 и 2 растянуты. Если реакция стержня направлена к узлу, то стержень сжат.

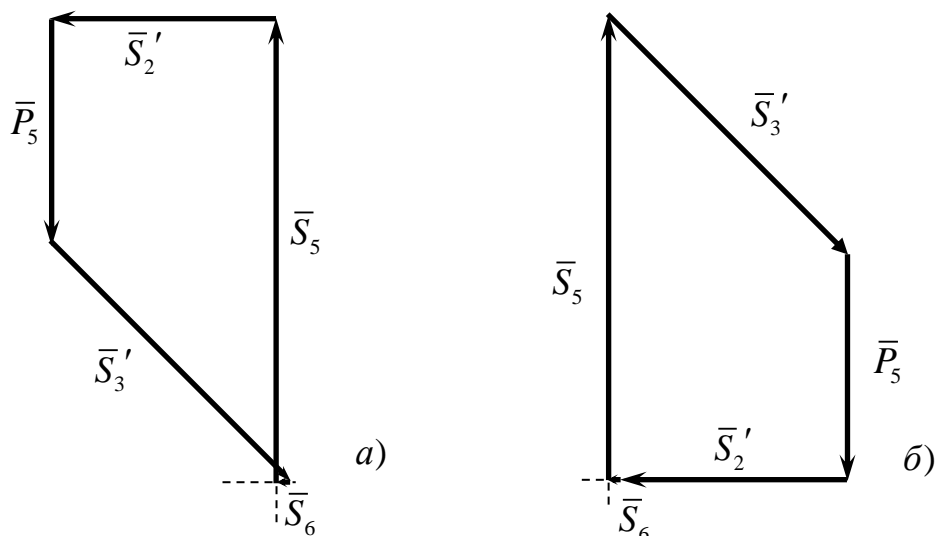
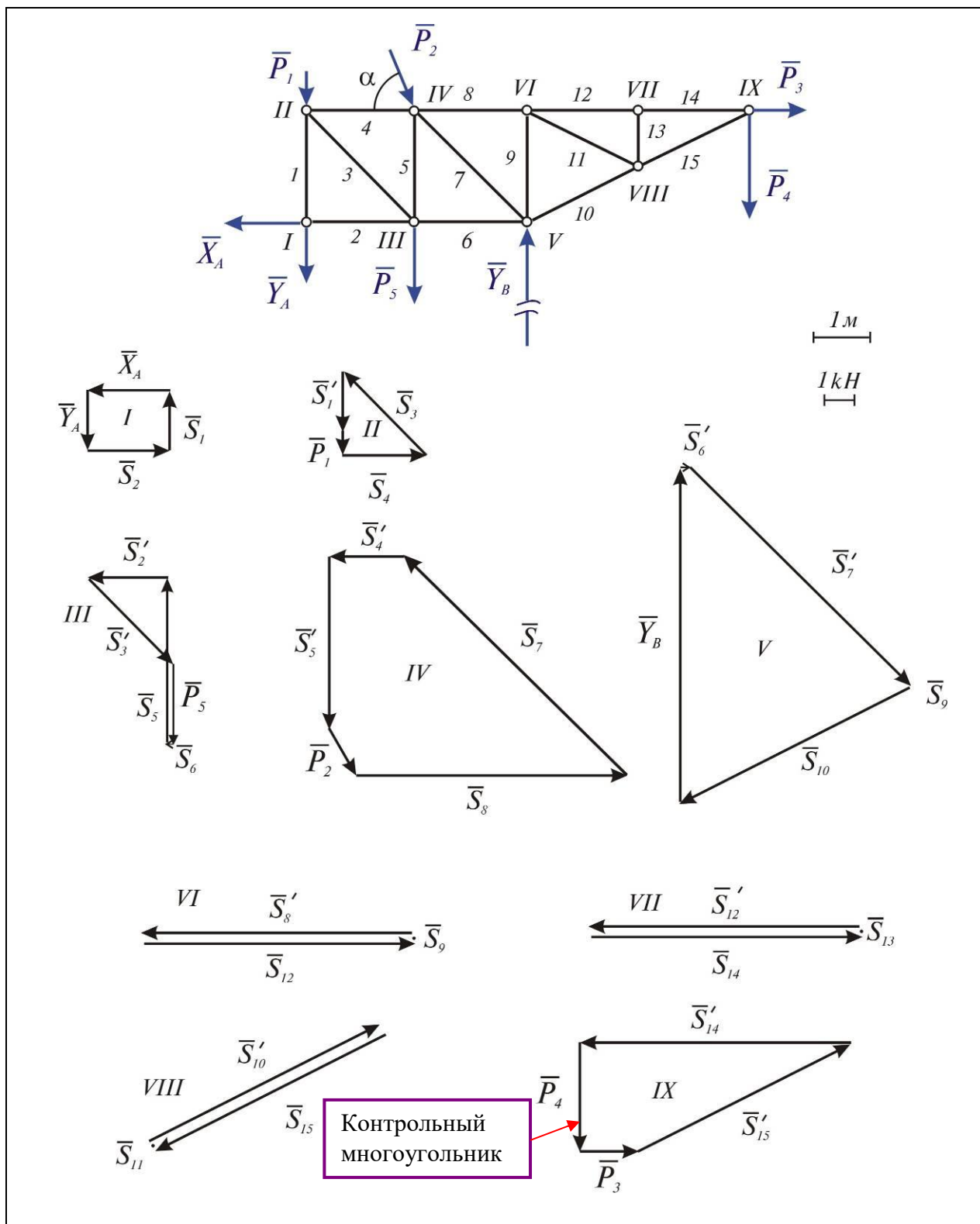


Рис. 8. Силовые многоугольники для узла III

Аналогично строятся силовые многоугольники для других узлов (рис. 7, б, в). Еще раз обращаем внимание, что при построении силовых многоугольников для узлов I, II и III следует иметь в виду, что реакции стержней на узлы, которые они соединяют, удовлетворяют векторным равенствам $\bar{S}_j = -\bar{S}_j'$ ($j=1, 2, 3$). Поэтому при построении силового многоугольника для узла II, реакцию \bar{S}_1' стержня 1 на этот узел следует брать равной по модулю реакции \bar{S}_1 этого стержня на узел I, но противоположно направленной.

Заметим также, что результат построения не зависит от порядка, в котором изображаются в силовом многоугольнике известные силы и проводятся прямые, параллельные линиям действия неизвестных сил. Например, силовым многоугольником для узла III может иметь вид, изображенный на рис. 8, а или рис. 8, б.



Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Усилие, кН	21,4	30	-45	31,4	61,8	-1,4	-113	102	0	-91,5	0	102	0	102	-91,5

Рис. 9. Графический метод вырезания узлов

► Замечания

1. При определении усилий во всех стержнях фермы рассмотрение равновесия последнего узла (из намеченной к вырезанию последовательности узлов) является *контрольным действием*, так как к этому моменту реакции всех стержней будут уже определены. Для проверки расчета нужно убедиться в том, что силовой многоугольник, построенный из сил, действующих на этот узел, является замкнутым. На рис 9 определены усилия во всех стержнях фермы графическим методом вырезания узлов. Контрольным является многоугольник для узла IX.

2. При оформлении курсовой работы графический метод вырезания узлов должен быть выполнен на отдельной странице, на ней располагаются: схема фермы в масштабе, внешние силы — активные и реакции опор (также в масштабе), многоугольники сил и таблица усилий с указанием характера работы стержней. Описание метода приводится на других страницах. ◀

1.2.4. Определение усилий в стержнях фермы построением диаграммы Максвелла – Кремоны

Графический метод вырезания узлов можно усовершенствовать, не изменяя его сущности, если в процессе построения силовые многоугольники для узлов фермы объединить в одну диаграмму, которую называют диаграммой Максвелла – Кремоны.

Построение диаграммы Максвелла – Кремоны рекомендуется проводить в следующем порядке:

1. Определить опорные реакции (в рассматриваемом примере это уже сделано).

2. Построить в масштабе схему фермы и изобразить на ней заданные силы и реакции опор (также в масштабе), расположив их вне контура фермы.

3. Выбрать направление обхода контура фермы и ее узлов (например, по ходу часовой стрелки) и обозначить большими буквами латинского алфавита А, В, С, D и т. д. области, ограниченные внешними силами и стержнями фермы, а также внутренние области, ограниченные только стержнями. Это

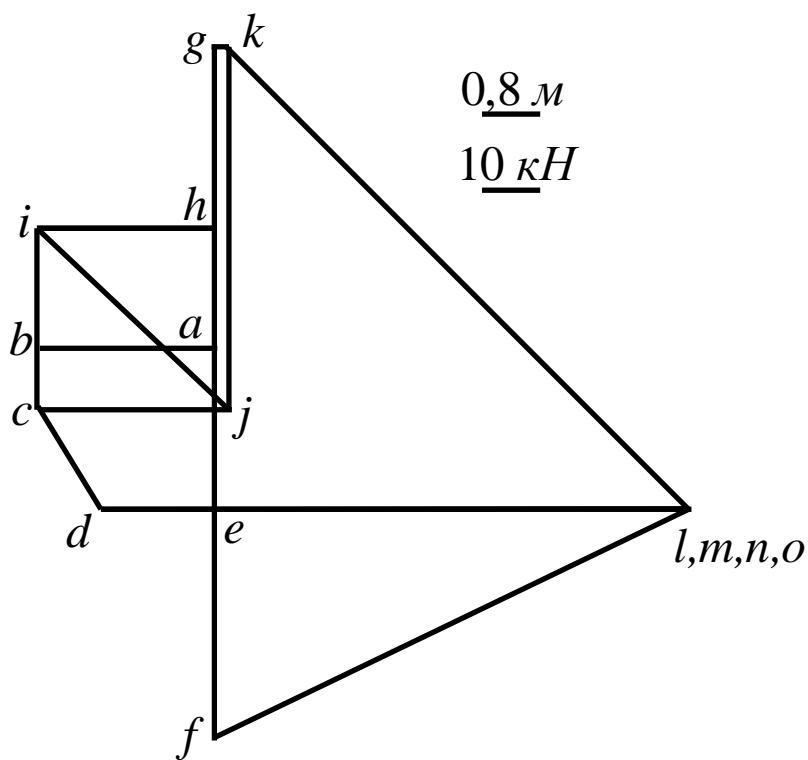
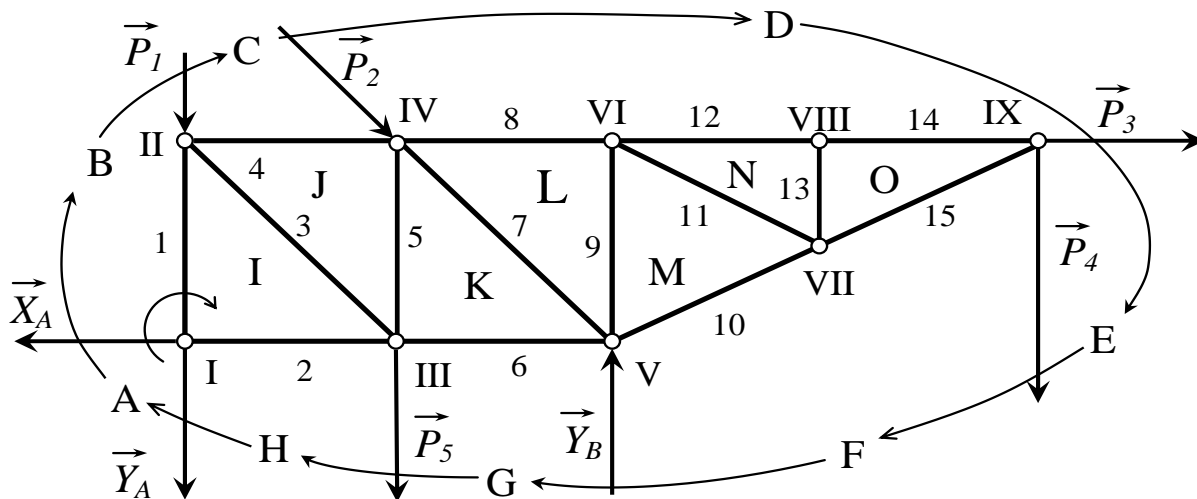
необходимо для введения единого способа обозначения активных сил, реакций опор и реакций стержней.

4. Построить многоугольник внешних сил, т. е. активных сил и реакций опор, отложив в нем силы в том порядке, в котором они встречаются при обходе фермы в выбранном направлении, и обозначив их малыми буквами, соответствующими названиям пограничных областей. В рассматриваемом примере сила \bar{X}_A разделяет зоны А и В (рис. 10), при обходе фермы по часовой стрелке на диаграмме она будет обозначена \bar{ab} (a — начало вектора, b — конец), сила $\bar{P}_1 - \bar{bc}$, сила $\bar{P}_2 - \bar{cd}$ и т. д. Многоугольник внешних сил должен быть замкнутым. В нашем примере — это многоугольник $abcdefgha$. Стрелки у концов сил на диаграмме не ставят, так как направление обхода контура фермы однозначно определяет, где начало, а где конец вектора.

5. Используя графический метод вырезания узлов, к многоугольнику внешних сил последовательно пристроить силовые многоугольники для всех узлов фермы, начиная с узла, где сходятся два стержня, обозначая реакции стержней по тому же правилу, что и внешние силы. В нашем примере первым вырежем узел I, приняв направление его обхода по часовой стрелке. На этот узел действуют четыре силы: \bar{ab} , \bar{bi} , \bar{ih} и \bar{ha} (\bar{ab} и \bar{ha} — составляющие реакции опоры А, уже имеющиеся в многоугольнике внешних сил; \bar{bi} и \bar{ih} — реакции стержней 1 и 2 на узел I). Для определения сил \bar{bi} и \bar{ih} из точек b и h проведем прямые, параллельные стержням 1 и 2 соответственно: пересечение этих прямых даст точку i . Таким образом, силовой многоугольник $abiha$ для узла I построен. Далее следует вырезать узел II. Для определения точки j на диаграмме нужно найти точку пересечения прямых, проведенных из точек c и i параллельно стержням 4 и 3 соответственно. Силовой многоугольник для узла II — это $bcjib$.

Выполнив такое построение для остальных узлов фермы, получим диаграмму Максвелла – Кремоны (рис. 10).

6. Определить измерением с учетом масштаба численное значение всех усилий, а также характер работы стержней. Результаты занести в таблицу



Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Усилие, кН	21,4	30	-45	31,4	61,8	-1,4	-113	102	0	-91,5	0	102	0	102	-91,5

Рис. 10. Диаграмма Максвелла-Кремоны

► Замечания

1. Каждому отрезку диаграммы соответствует параллельный ему отрезок на расчетной схеме фермы: это — либо стержень, либо — сила. Если такого соответствия нет, то диаграмма построена неправильно.

2. Характер работы стержня с помощью диаграммы Максвелла-Кремоны определяется следующим образом. Пусть требуется установить, сжат или растянут стержень 7. Этот стержень соединяет узлы IV и V. Обходим любой из этих узлов, например, узел IV. На диаграмме реакция стержня 7 на узел IV изображается вектором \overline{lk} (l — начало вектора, k — конец). Мысленно переносим этот вектор в узел IV. Реакция оказывается направленной к узлу. Следовательно, стержень 7 сжат. Аналогично можно установить, что стержень 8 растянут (его реакция \overline{dl} на узел IV направлена от узла).

3. При оформлении курсовой работы метод диаграммы Максвелла-Кремоны выполняется на отдельной странице. На ней приводятся схема фермы в масштабе с нумерацией стержней и узлов, действующие на нее внешние силы — активные и реакции опор (также в масштабе), принятые направления обхода фермы и ее узлов, обозначения зон, масштабы длин и сил, диаграмма Максвелла-Кремоны и таблица усилий с указанием характера работы стержней. Описание построения диаграммы приводится на других страницах.

4. Обратите внимание, что рассматриваемая ферма имеет три нулевых стержня. Они необходимы для обеспечения геометрической неизменяемости фермы. При изменении нагрузки на ферму они становятся рабочими: для этого достаточно, например, нагрузить узел VIII вертикальной или наклонной силой.

1.2.5. Определение усилий в стержнях фермы методом Риттера

Метод Риттера (способ сечений) в общем случае предполагает предварительное определение реакций опор фермы, хотя усилия в некоторых стержнях (при определенном расположении опор фермы) можно определить, не зная опорных реакций. Если реакции опор фермы определены, то метод Риттера позволяет *оперативно найти усилие в данном стержне*, при этом, как пра-

вило, определение усилия является *автономным*, т.е. не связанным с определением усилий в других стержнях. Для этого необходимо выполнение одного условия: конструкция фермы должна быть такой, чтобы существовала возможность рассечения фермы на две части по трем стержням, среди которых находится стержень, усилие в котором определяется. Для успешного применения метода сечений необходимо хорошо знать условия равновесия произвольной плоской системы сил, в частности, вторую и третью формы условий равновесия.

При определении усилий в стержнях фермы методом Риттера рекомендуется следующая последовательность действий:

1. После определения опорных реакций мысленно разрезать ферму на две части по трем стержням, усилия в которых требуется определить, и рассмотреть равновесие сил, приложенных к одной из них, заменив действие отброшенной части искомыми усилиями, полагая стержни растянутыми. Целесообразно рассматривать равновесие той части фермы, для которой объем вычислительной работы меньше (меньше действующих сил, они проще расположены, а поэтому легче составить и решить уравнения равновесия).

2. Для плоской системы сил, приложенной к выбранной части фермы, составить такие уравнения равновесия, чтобы каждое из уравнений содержало бы только одну неизвестную силу. Это — три уравнения моментов относительно точек пересечения линий действия неизвестных сил (*точек Риттера*), если стержни в сечении не параллельны; если же два стержня в сечении параллельны, то для определения усилий в этих стержнях составляются уравнения моментов относительно точек Риттера, а для определения усилия в третьем стержне — уравнение проекций сил на ось, перпендикулярную к параллельным стержням.

3. Определить искомые усилия, решив каждое из составленных уравнений: если для усилия какого-либо стержня получено отрицательное значение, то это означает, что данный стержень сжат.

Для определения усилий в стержнях 6, 7 и 8 выполним сечение по этим

стержням, и рассмотрим равновесие правой части фермы. Расчетная схема изображена на рис. 11. На выбранную часть фермы действуют известные силы \bar{P}_3 , \bar{P}_4 и \bar{Y}_B и реакции отброшенной части \bar{S}_6 , \bar{S}_7 и \bar{S}_8 (в данном случае их можно называть усилиями в стержнях).

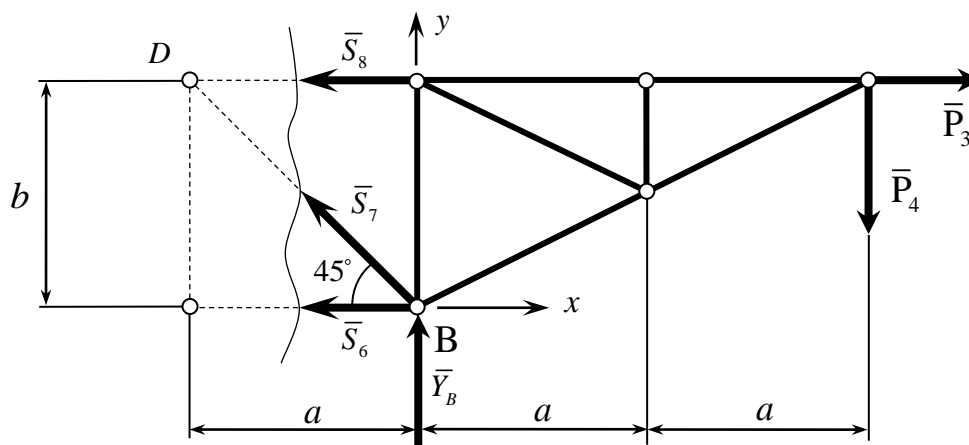


Рис. 11. Расчетная схема к определению усилий в стержнях 6-8 методом Риттера

Чтобы определить усилие S_6 (независимо от усилий S_7 и S_8), составляем уравнение моментов сил относительно точки D , в которой пересекаются линии действия сил \bar{S}_7 и \bar{S}_8 :

$$\sum M_D(\vec{F}_i) = 0; \quad -S_6 b + Y_B a - P_4 \cdot 3a = 0. \quad (7)$$

Стержни 6 и 8 параллельны. Поэтому для определения усилия S_7 , независимо от усилий S_6 и S_8 , составляем уравнение

$$\sum F_{iy} = 0; \quad S_7 \cos 45^\circ + Y_B - P_4 = 0. \quad (8)$$

Для определения усилия S_8 составим уравнение моментов относительно точки B , в которой пересекаются линии действия сил \bar{S}_6 и \bar{S}_7 :

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad S_8 b - P_3 b - P_4 2a = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (7)

$$S_6 = \frac{a}{b}(Y_B - 3P_4) = \frac{2}{2}(118,66 - 3 \cdot 40) = -1,34 \text{ кН}.$$

Из уравнения (8)

$$S_7 = \frac{P_4 - Y_B}{\cos 45^\circ} = \frac{40 - 118,66}{0,707} = -111,26 \text{ кН}.$$

Из уравнения (9)

$$S_8 = P_3 + 2P_4 \frac{a}{b} = 20 + 2 \cdot 40 \cdot \frac{2}{2} = 100 \text{ kH} .$$

Для определения усилий в стержнях 10, 11 и 12 разрежем ферму по этим стержням и рассмотрим ее правую часть (рис. 12).

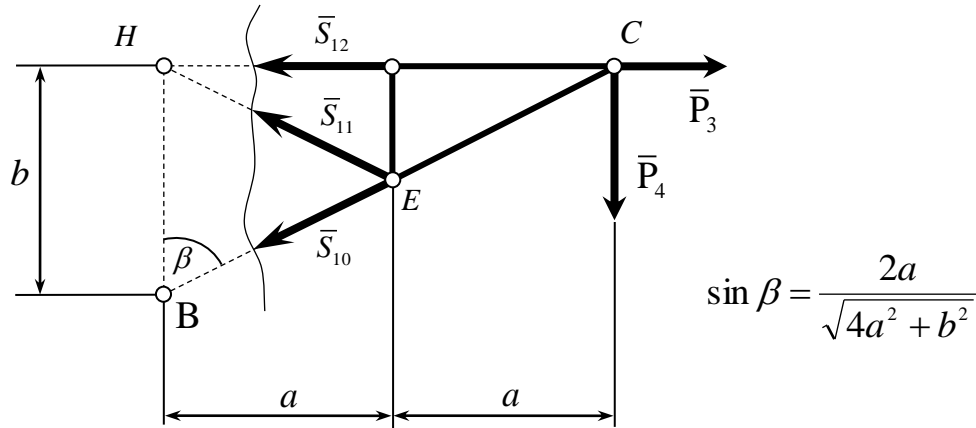


Рис. 12. Расчетная схема к определению усилий в стержнях 10-12 методом Риттера

Для определения усилий S_{10} , S_{11} и S_{12} составим уравнения моментов относительно точек Риттера H , C и E соответственно:

$$\sum_k M_H(\bar{F}_k) = 0; \quad -S_{10} b \sin \beta - P_4 \cdot 2a = 0; \quad (10)$$

$$\sum_k M_C(\bar{F}_k) = 0; \quad -S_{11} = 0; \quad (11)$$

$$\sum_k M_E(\bar{F}_k) = 0; \quad S_{12} \cdot \frac{b}{2} - P_3 \cdot \frac{b}{2} - P_4 a = 0. \quad (12)$$

Из уравнения (10)

$$S_{10} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{2P_4}{\sin \beta} = -\frac{2}{2} \cdot \frac{2 \cdot 40}{0,89} = -89,44 \text{ kH} .$$

Из уравнения (12)

$$S_{12} = P_3 + 2P_4 \frac{a}{b} = 20 + 2 \cdot 40 \cdot \frac{2}{2} = 100 \text{ kH} .$$

Результаты расчета поместим в таблицу.

Номер стержня	6	7	8	10	11	12
---------------	---	---	---	----	----	----

Усилие, кН	- 1,34	-111,26	100	- 89,44	0	100
------------	--------	---------	-----	---------	---	-----

Замечание

Обратите внимание, что для определения усилий в стержнях 10, 11 и 12 знание опорных реакций не требуется.

ЧАСТЬ 2. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

С особенностями расчета составных конструкций можно ознакомиться в любом из рекомендованных пособий [1-4, 6]. Заметим, что речь идет о равновесии плоских конструкций (состоящих, как правило, из двух или трех тел, соединенных каким-либо образом между собой и с телами, не входящими в конструкцию), нагруженных системой активных сил, расположенных в той же плоскости, что и конструкция.

Расчет составной конструкции состоит в определении реакций внешних и внутренних связей. При этом решаются задачи двух типов.

В задачах первого типа требуется определить реакции всех связей. Для решения такой задачи нужно сформировать систему $3n$ уравнений равновесия, где n — число тел в конструкции.

В задачах второго типа требуется найти только часть реакций связей. В этом случае необходимо сформировать систему m уравнений равновесия, где m — число определяемых неизвестных, причем $m < 3n$.

Приступая к расчету данной конструкции, прежде всего, нужно убедиться в том, что она является *статически определимой*. Дальнейшая последовательность действий зависит от типа решаемой задачи.

Решение задач первого типа рекомендуется проводить в следующем порядке:

1. В зависимости от состава конструкции и действующих на нее нагрузок, выбрать способ расчета, т. е.: а) рассмотреть сначала равновесие всей си-

стемы как одного твердого тела, освободив ее только от внешних связей, а затем равновесие $n - 1$ каких-либо ее частей, или б) рассмотреть равновесие каждой из n частей системы отдельно; и в том, и в другом случае строятся расчетные схемы с указанием координатной системы, активных сил и реакций связей; распределенные нагрузки при этом заменяются равнодействующими силами.

2. Составить уравнения равновесия, используя наиболее удобную форму условий равновесия плоской системы сил, и, решив эти уравнения, определить все неизвестные силы.

Задания второго типа рекомендуется выполнять в следующей последовательности:

1. Выделить из данной конструкции тела и совокупности тел, на которые действуют силы реакций, подлежащие определению, построив соответствующие расчетные схемы. Среди сил, действующих на выделенные тела, будут активные силы, искомые реакции связей и реакции связей, которые определять не нужно.

2. Для выбранных тел и их совокупностей записать такие уравнения равновесия, в которые входят только активные силы и искомые реакции связей. В каждом случае такие уравнения можно составить, это — либо уравнения моментов относительно точек пересечения линий действия реакций, которые не нужно определять, либо уравнения проекций сил на ось, перпендикулярную к таким силам.

3. Определить искомые реакции связей, решив полученную систему уравнений равновесия.

В табл. 1 приведены для справок виды распределенных нагрузок, встречающиеся при выполнении задания. Информацию о связях можно найти в Приложении 3.

2.1. Пример решения задачи первого типа

Конструкция состоит из горизонтальной балки AD, на правом конце которой имеется блок D, и наклонной балки BC (рис. 13). Балки прикреплены к стене и связаны между собой с помощью цилиндрических шарниров A, B и C. В точке E наклонной балки привязана нить, перекинутая через блок и несущая груз P . Кроме того, к балке BC на участке BE приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивности q , а на балку AD действует пара сил с моментом M . Определить реакции шарниров A, B и C, если $P = 10 \text{ кН}$, $q = 5 \text{ кН/м}$, $M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $a = 1,2 \text{ м}$, $b = 1 \text{ м}$, $r = 0,15 \text{ м}$. Весом нити и трением на блоке D пренебречь.

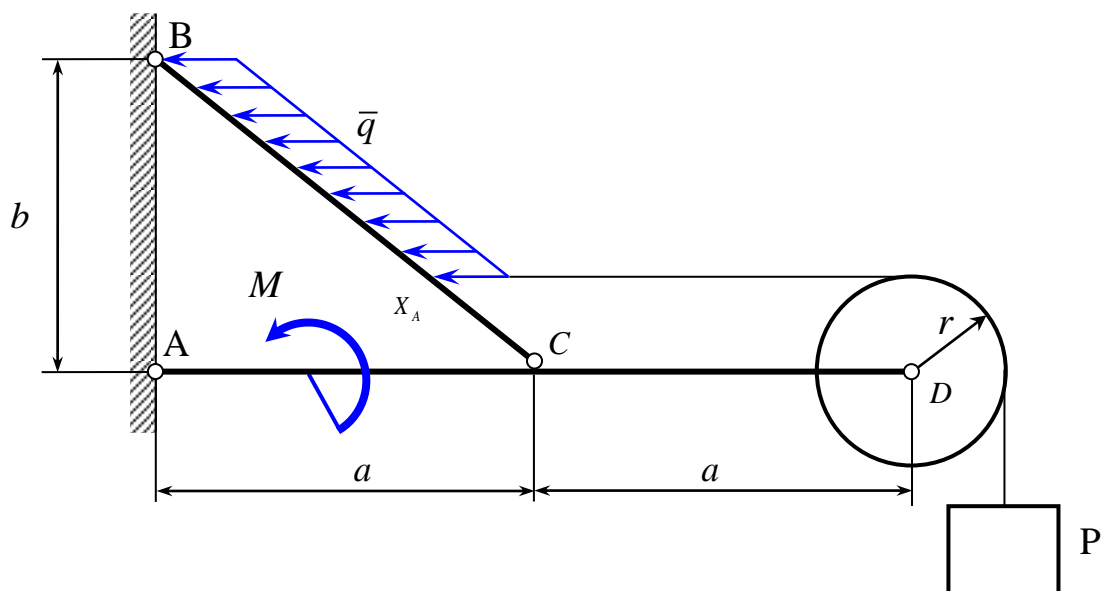


Рис. 13. Схема конструкции

Расчленим конструкцию на две части: наклонную балку BC и горизонтальную балку AD с блоком и грузом P , освободив ее от внешних связей — шарниров A и B и от внутренних связей — шарнира C и горизонтальной части нити. На расчетных схемах (рис. 14), использованы следующие обозначения:

\bar{X}_A, \bar{Y}_A — составляющие реакции шарнира A;

\bar{X}_B, \bar{Y}_B — составляющие реакции шарнира B;

\bar{X}_C, \bar{Y}_C — составляющие реакции шарнира C на балку BC;

$\bar{X}'_C = -\bar{X}_C$, $\bar{Y}'_C = -\bar{Y}_C$ — составляющие реакции шарнира С на балку AD;

\bar{T}' — реакция нити на блок D;

\bar{T} — реакция нити на балку BC;

\bar{Q} — равнодействующая распределенной нагрузки.

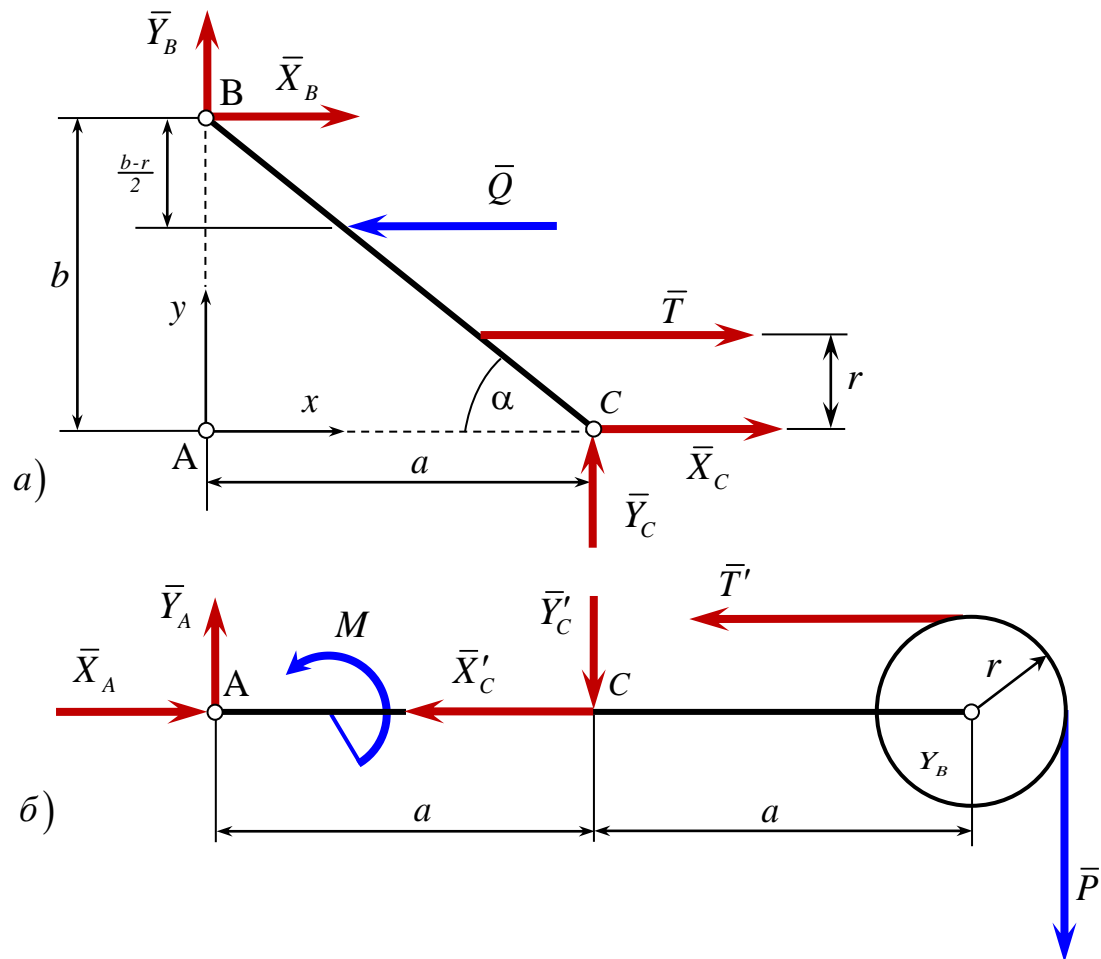


Рис. 14. Расчетные схемы

Задача является статически определенной, так как число неизвестных (их 6 — по две в каждом шарнире) равно числу уравнений равновесия, которые можно составить для частей конструкции (по 3 уравнения для каждого тела).

Так как нить невесомая, а трением на блоке D пренебрегаем, то $T = T' = P$. Равнодействующая равномерно распределенной нагрузки приложена в середине участка BE, а ее модуль определяется по формуле

$$Q = q \cdot BE = q \cdot \frac{b-r}{\sin \alpha},$$

где $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Составим уравнения равновесия балки BC (рис. 14, а):

$$\sum F_{ix} = 0; \quad X_B + X_C - Q + T = 0, \quad (13)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad Y_B + Y_C = 0, \quad (14)$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad X_C \cdot b + Y_C \cdot a + T(b-r) - Q \cdot \frac{b-r}{2} = 0. \quad (15)$$

Система уравнений (13) – (15) содержит 4 неизвестных. Ее нужно дополнить системой уравнений равновесия совокупности тел – балки AD, блока D и груза P (на рисунке не показан) (рис. 14, б):

$$\sum F_{ix} = 0; \quad X_A - X'_C - T' = 0, \quad (16)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad Y_A - Y'_C - P = 0, \quad (17)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad -Y'_C a + T' r - P(2a+r) + M = 0. \quad (18)$$

Решая систему уравнений (13) - (18), находим неизвестные.

Из уравнения (18)

$$Y'_C = \frac{M}{a} - 2P = \frac{6}{1,2} - 2 \cdot 10 = -15 \text{ кН}.$$

Из уравнения (17)

$$Y_A = Y'_C + P = -15 + 10 = -5 \text{ кН}.$$

Из уравнения (14)

$$Y_B = -Y_C = 15 \text{ кН}.$$

Из уравнения (15)

$$X_C = \frac{1}{b} \left[Q \frac{b-r}{2} - Y_C \cdot a - T(b-r) \right] =$$

$$= 6,64 \cdot \frac{1-0,15}{2} + 15 \cdot 1,2 - 10 \cdot 0,85 = 12,32 \text{ кН}.$$

Из уравнения (13)

$$X_B = Q - T - X_C = 6,64 - 10 - 12,32 = -15,68 \text{ кН}.$$

Из уравнения (16)

$$X_A = X'_C + T' = 12,32 + 10 = 22,32 \text{ кН}.$$

Таким образом,

$$X_A = 22,32 \text{ кН}; \quad Y_A = -5 \text{ кН};$$

$$X_B = -15,68 \text{ кН}; \quad Y_B = 15 \text{ кН};$$

$$X_C = 12,32 \text{ кН}; \quad Y_C = -15 \text{ кН},$$

т.е. силы \bar{X}_B , \bar{Y}_C и \bar{Y}'_C противоположны направлениям, принятым для них на расчетных схемах.

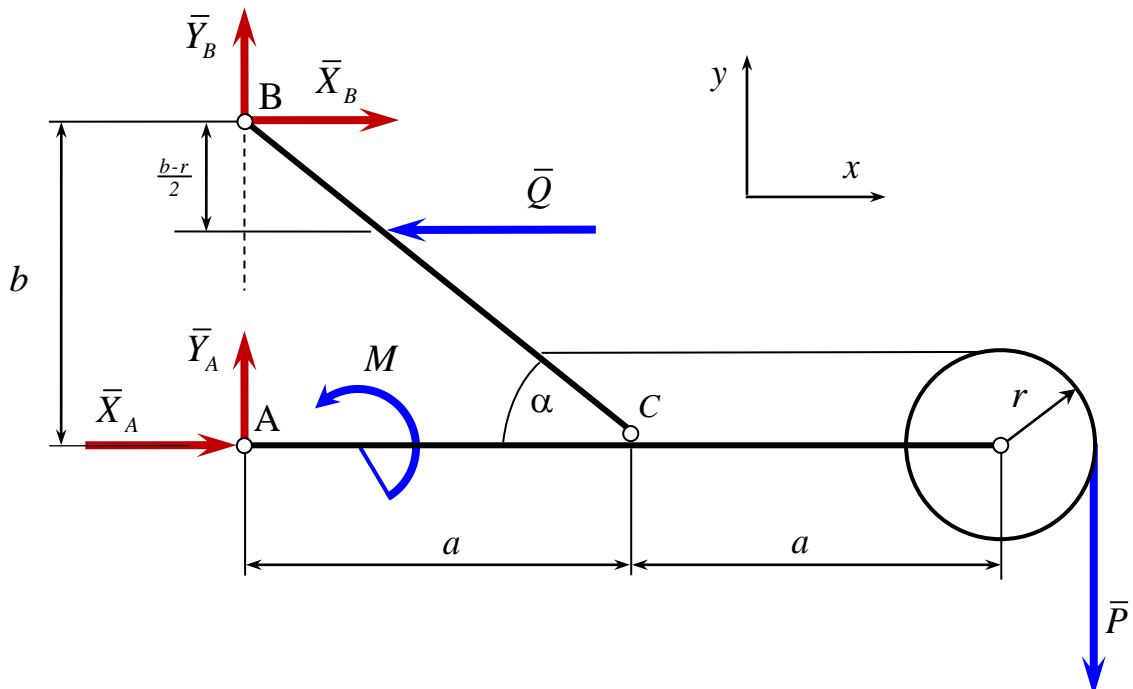


Рис. 15. Расчетная схема для контроля решения

► Замечания

1. Для контроля полученных результатов рекомендуем проверить выполнение условий равновесия всей конструкции, освобожденной от внешних связей (рис. 15). Можно использовать любую из трех форм условий равновесия плоской системы сил.
2. Для определения искомых величин в данном примере можно было избрать другой путь решения: рассмотреть равновесие всей конструкции в целом как абсолютно твердого тела, освободив ее от связей в точках А и В (рис. 15), совместно с одной из частей (рис. 14, а или рис. 14, б).
3. При определении реакции связи обычно ограничиваются отысканием ее составляющих. Для определения модуля полной реакции, например шарнира А, нужно воспользоваться формулой $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$. ◀

2.2. Пример решения задачи второго типа

Конструкция состоит из двух частей: горизонтальной балки АВ и наклонной балки ВС (рис 16). В точке А балка АВ закреплена с помощью жесткой заделки, конец В наклонной балки прикреплен к стене посредством неподвижной шарнирной опоры. Балки соединены вертикальным невесомым стержнем С с шарнирами на концах. На конструкцию действуют сосредоточенная сила \vec{P} , треугольная нагрузка максимальной интенсивности q_{\max} и пара сил с моментом M .

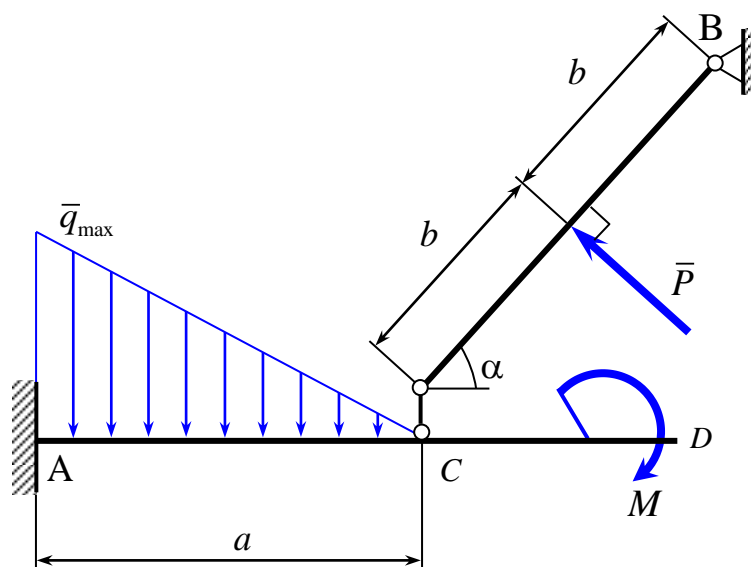


Рис. 16. Схема конструкции

Определить момент в заделке А и реакцию опоры В, если $q_{max} = 5 \text{ кН/м}$, $M = 7 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $P = 10 \text{ кН}$, $a = 4 \text{ м}$, $b = 1,5 \text{ м}$, $\alpha = 60^\circ$. Длиной стержня С пренебречь.

Рассмотрим равновесие всей конструкции как абсолютно твердого тела, освободив ее от связей в точках А и В. Расчетная схема приведена на рис. 17, где использованы следующие обозначения:

\bar{X}_A, \bar{Y}_A — составляющие реакции заделки;

M_A — момент в заделке;

\bar{X}_B, \bar{Y}_B — составляющие реакции шарнира В;

\bar{Q} — равнодействующая распределенной нагрузки, модуль которой

$$Q = \frac{1}{2} q_{max} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10 \text{ кН}.$$

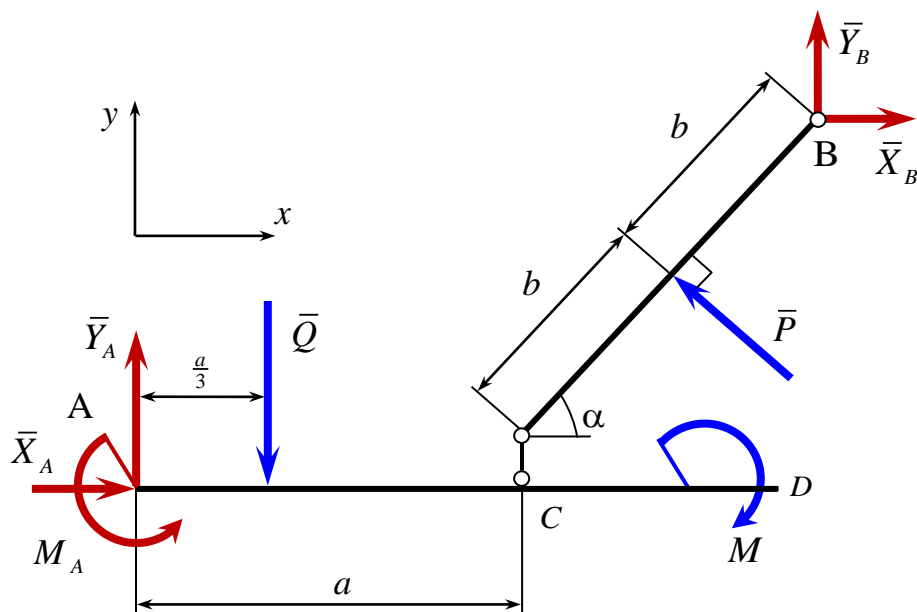


Рис. 17. Расчетная схема конструкции, освобожденной от внешних связей

Поскольку неизвестные \bar{X}_A и \bar{Y}_A определять не нужно, то из уравнений равновесия, которые можно составить для всей конструкции, следует взять только уравнение моментов относительно точки А, как не содержащее этих неизвестных:

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0;$$

$$M_A - X_B \cdot 2b \sin \alpha + Y_B(a + 2b \cos \alpha) - Q \cdot \frac{a}{3} - M + P(b + a \cos \alpha) = 0. \quad (19)$$

Рассмотрим далее равновесие балки ВС. Расчетная схема изображена на рис. 18.

Реакцию стержня \bar{R}_C определять не нужно. Поэтому для балки ВС составляем такие уравнения, в которые эта сила не входит:

$$\sum M_C(\bar{F}_k) = 0; \quad -X_B \cdot 2b \sin \alpha + Y_B \cdot 2b \cos \alpha + P b = 0, \quad (20)$$

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_B - P \sin \alpha = 0. \quad (21)$$

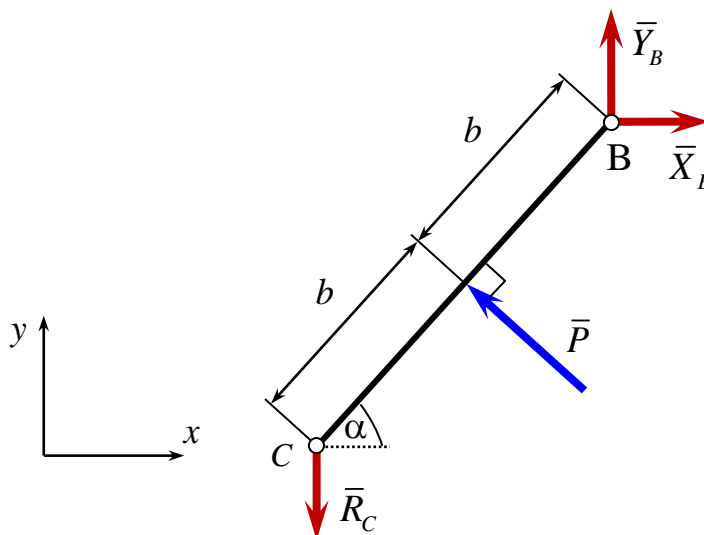


Рис. 18. Расчетная схема для наклонной балки

Система уравнений (19)-(21) содержит только те неизвестные, которые нужно определить. Решая эту систему, находим неизвестные.

Из уравнения (21)

$$X_B = P \sin \alpha = 10 \cdot 0,867 = 8,67 \text{ кН}..$$

Из уравнения (20)

$$Y_B = X_B \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{P}{2 \cos \alpha} = 8,67 \cdot 1,73 - 10 = 5 \text{ кН}.$$

Из уравнения (19)

$$\begin{aligned}
 M_A &= X_B \cdot 2b \sin \alpha - Y_B (a + 2b \cos \alpha) + \frac{1}{3} \cdot Q a + M - P (b + a \cos \alpha) = \\
 &= 8,67 \cdot 2 \cdot 1,5 \cdot 0,867 - 5 \cdot (4 + 2 \cdot 1,5 \cdot 0,5) + \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 4 + 7 - 10 (1,5 + 4 \cdot 0,5) = \\
 &= -19,67 \text{ кН} \cdot \text{м}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, $M_A = -19,67 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $X_B = 8,67 \text{ кН}$; $Y_B = 5 \text{ кН}$.

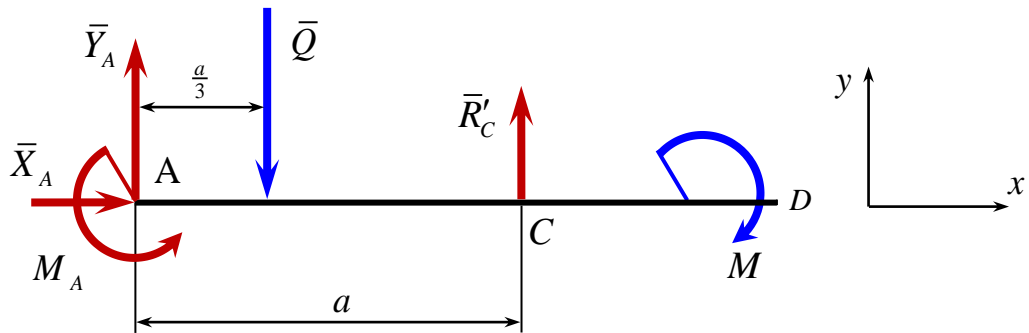


Рис. 19. Расчетная схема для горизонтальной балки

► **Замечание**

Равновесие балки AD (рис. 19) не рассматривалось, так как любое из уравнений равновесия ее содержит неизвестные, которые определять не нужно. ◀

2.3. Проведение расчетов в среде Mathcad

Решение систем уравнений равновесия (13-18), (19-21) рекомендуем провести в среде Mathcad, используя для этого блок Given... Find или функцию Isolve. В приводимых ниже Mathcad-документах использован решающий блок.

2.3.1. Решение системы уравнений (13) – (18)

В приведенном ниже документе находятся корни системы для заданных значений исходных величин. При необходимости определения реакций связей для других значений исходных данных нужно изменить значения последних.

ORIGIN := 1

$P := 10$ $q := 5$ $M := 6$ $a := 1.2$ $b := 1$ $r := 0.15$ ← Исходные данные

$\alpha := \operatorname{asin}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ $Q := q \cdot \frac{b-r}{\sin(\alpha)}$ $T := P$

Решающий блок

$X_A := 0$ $Y_A := 0$ $X_B := 0$ $Y_B := 0$ $X_C := 0$ $Y_C := 0$ ← Начальное приближение

Given ← Ключевое слово блока

$X_B + X_C - Q + T = 0$

$Y_B + Y_C = 0$

$X_C \cdot b + Y_C \cdot a + T \cdot (b - r) - Q \cdot \frac{b - r}{2} = 0$

$X_A - X_C - T = 0$ ← Система уравнений (13)-(18)

$Y_A - Y_C - P = 0$

$-Y_C \cdot a + T \cdot r - P \cdot (2 \cdot a + r) + M = 0$

$R := \operatorname{Find}(X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C)$ ← Конец блока: значения корней системы присваиваются элементам вектора R в той последовательности, в какой записаны аргументы функции Find

$$R = \begin{pmatrix} 22.321 \\ -5 \\ -15.683 \\ 15 \\ 12.321 \\ -15 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow X_A \\ \leftarrow Y_A \\ \leftarrow X_B \\ \leftarrow Y_B \\ \leftarrow X_C \\ \leftarrow Y_C \end{matrix}$$

← Вывод решения системы: первая компонента вектора R — это реакция X_A , вторая — реакция Y_A и т. д.

Контроль решения (проверка выполнения условий равновесия для конструкции в целом, освобожденной от внешних связей)

$$X_A := R_1 \quad Y_A := R_2 \quad X_B := R_3 \quad Y_B := R_4 \quad X_C := R_5 \quad Y_C := R_6$$

$$X_A + X_B - Q \rightarrow 0 \quad \leftarrow \sum F_{ix} = 0$$

$$Y_A + Y_B - P \rightarrow 0 \quad \leftarrow \sum F_{iy} = 0$$

$$-Y_A \cdot a - Y_B \cdot a - X_B \cdot b + M + Q \cdot \left(b - \frac{b-r}{2} \right) - P \cdot (a+r) \rightarrow 0 \quad \leftarrow \sum M_C(\bar{F}_i) = 0$$

2.3.2. Многократное решение системы уравнений (13) – (18).

Построение графиков реакций связей

Если нужно изучить зависимость реакций связей от одной (или нескольких) исходных величин, вводится функция этих параметров, выраженная через функцию Find. Например, для определения влияния размера b на реакции связей следует ввести функцию $R(b) = \text{Find}(X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C)$, которую можно использовать для вычисления реакций связей при различных значениях b , а также для построения графиков функций $X_A = X_A(b)$, $Y_A = Y_A(b)$ и др.

1. Исходные данные

$$P := 10 \quad q := 5 \quad M := 6 \quad a := 1.2 \quad b := 1 \quad r := 0.15$$

$$\alpha := \text{asin}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \quad Q := q \cdot \frac{b-r}{\sin(\alpha)} \quad T := P$$

2. Решающий блок

$$X_A := 0 \quad Y_A := 0 \quad X_B := 0 \quad Y_B := 0 \quad X_C := 0 \quad Y_C := 0 \quad \leftarrow \text{Начальное приближение решения}$$

Given

← Ключевое слово блока

$$X_B + X_C - Q + T = 0$$

$$Y_B + Y_C = 0$$

$$X_C \cdot b + Y_C \cdot a + T \cdot (b - r) - Q \cdot \frac{b - r}{2} = 0$$

$$X_A - X_C - T = 0$$

← Система уравнений (13)-(18)

$$Y_A - Y_C - P = 0$$

$$-Y_C \cdot a + T \cdot r - P \cdot (2 \cdot a + r) + M = 0$$

$$R(b) := \text{Find}(X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C)$$

← Конец блока. Система уравнений решается всякий раз, как происходит обращение к функции $R(b)$

3. Вывод решения системы для различных значений параметра b

$$R(0.5) = \begin{pmatrix} 41.324 \\ -5 \\ -34.685 \\ 15 \\ 31.324 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$R(0.75) = \begin{pmatrix} 28.655 \\ -5 \\ -22.017 \\ 15 \\ 18.655 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$R(1) = \begin{pmatrix} 22.321 \\ -5 \\ -15.683 \\ 15 \\ 12.321 \\ -15 \end{pmatrix}$$

4. Построение графиков реакций связей

$b := 0.5, 0.51 \dots 1$ ← Параметру b присваиваются значения от 0,5 до 1 с шагом 0,01

$R(b)_0 =$

41.324
40.578
39.862
39.172
38.508
37.869
37.252
36.656
36.082
35.526
34.99
34.47
33.968
33.481
33.01
32.553

$R(b)_1 =$

-5
-5
-5
-5
-5
-5
-5
-5
-5
-5
-5
-5
-5
-5
-5
-5

$R(b)_2 =$

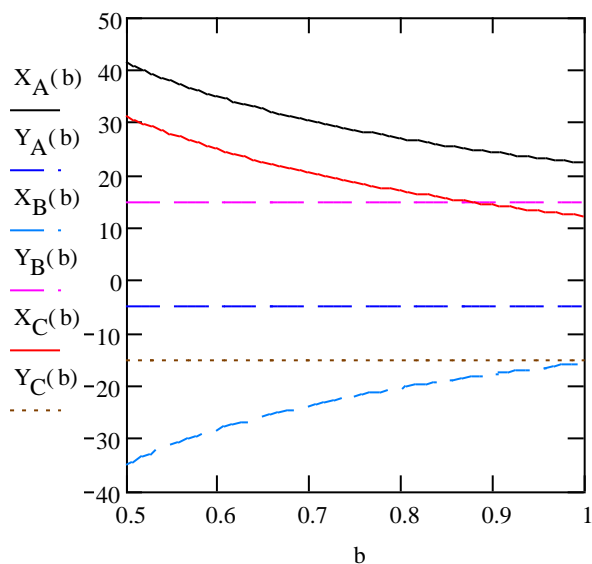
-34.685
-33.94
-33.223
-32.534
-31.87
-31.23
-30.613
-30.018
-29.443
-28.888
-28.351
-27.832
-27.329
-26.843
-26.371
-25.915

$R(b)_5 =$

-15
-15
-15
-15
-15
-15
-15
-15
-15
-15
-15
-15
-15
-15
-15
-15

← При обращении к функции $R(b)$ в данном месте документа система уравнений решается для каждого значения b (при неизменных значениях других данных). Значения реакции X_A присваиваются элементам вектора $R(b)_0$, реакции Y_A — элементам вектора $R(b)_1$ и т.д. Для вывода какого-либо вектора следует набрать его имя и знак равенства. Для просмотра значений компонент вектора нужно щелкнуть на соответствующей таблице и воспользоваться появившейся полосой прокрутки. Эта часть документа не является обязательной и для построения графиков реакций связей не нужна.

$X_A(b) := R(b)_0$ $Y_A(b) := R(b)_1$ ← Значения компонент векторов $R(b)_j (j = 0, 1, \dots, 5)$
 $X_B(b) := R(b)_2$ $Y_B(b) := R(b)_3$ присваиваются функциям (векторам) $X_A(b), Y_A(b)$ и др.
 $X_C(b) := R(b)_4$ $Y_C(b) := R(b)_5$ Процедура необязательная: выполняется для удобства построения графиков и их чтения.



← Графики реакций связей

2.3.3. Символьное решение системы уравнений (13) – (18)

Пакет Mathcad позволяет провести символьное решение системы уравнений (13)-(18), т.е. выразить корни системы непосредственно через заданные величины. При символьном решении системы уравнений с помощью решающего блока исходные данные и начальные значения неизвестных не задаются.

<p>Given</p> $X_B + X_C - Q + P = 0$ $Y_B + Y_C = 0$ $X_C \cdot b + Y_C \cdot a + P \cdot (b - r) - Q \cdot \frac{b - r}{2} = 0$ $X_A - X_C - P = 0$ $Y_A + Y_C - P = 0$ $-Y_C \cdot a + P \cdot r - P \cdot (2 \cdot a + r) + M = 0$	<p>← Ключевое слово блока</p> <p>← Система уравнений (13)-(18): здесь учтено, что $T = P$, а величина Q определяется так же, как в предыдущем документе</p>
<p>Find($X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C$) →</p>	<div style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;"> $\frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot P \cdot a - 2 \cdot M + 2 \cdot P \cdot r + Q \cdot b - Q \cdot r}{b}$ $\frac{-[(-3) \cdot P \cdot a + M]}{a}$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{(-4) \cdot P \cdot a + 2 \cdot M - 2 \cdot P \cdot r + Q \cdot b + Q \cdot r}{b}$ $\frac{-[(-2) \cdot P \cdot a + M]}{a}$ $\frac{-1}{2} \cdot \frac{(-4) \cdot P \cdot a + 2 \cdot M + 2 \cdot P \cdot b - 2 \cdot P \cdot r - Q \cdot b + Q \cdot r}{b}$ $\frac{(-2) \cdot P \cdot a + M}{a}$ </div>

Символьные выражения неизвестных полезны при изучении влияния геометрических и силовых параметров конструкции на реакции связей. Их можно использовать также при построении графиков.

ЧАСТЬ 3. РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ

Расчет пространственной конструкции состоит в определении реакций связей, наложенных на твердое тело, находящееся в равновесии под действием произвольной системы сил. Рекомендуется следующий порядок выполнения задания:

1. Из данной системы тел выбрать тело, равновесие которого удобно рассмотреть для определения искомых величин (на выбранное тело должны действовать все неизвестные силы).
2. Построить расчетную схему задачи:
 - а) изобразить выбранное тело свободным (без связей);
 - б) показать активные силы, действующие на тело;
 - в) действие отброшенных связей заменить силами реакций.
3. Убедиться в том, что задача является статически определенной, т. е. число неизвестных не более шести.
4. Выбрать систему координат и составить шесть уравнений равновесия:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i) = 0.$$

5. Найти неизвестные величины, решив полученную систему уравнений.

При выборе координатных осей следует руководствоваться удобством составления уравнений равновесия: желательно, чтобы как можно большее число линий действия неизвестных сил были параллельными, перпендикулярными осям или пересекали бы их. При наличии таких сил составление уравнений равновесия упрощается, а, следовательно, и упрощается решение полученной системы.

Информацию о связях и их реакциях, встречающихся при выполнении задания можно найти в приложении 2.

3.1. Пример выполнения задания

Однородная прямоугольная плита ABCD (рис. 20) со сторонами $a \times b$ и веса P закреплена в точке A при помощи шарового шарнира, а в точке B — при помощи цилиндрического шарнира. Сторона AB горизонтальна. В точке E плита опирается на стержень, перпендикулярный к ее плоскости. В точке H к плите прикреплен трос, перекинутый через блок, несущий груз Q . Трос параллелен стороне AB. Найти реакции связей в точках A, B, и E, если $a = 1,5\text{ м}$, $b = 2,0\text{ м}$, $BH = c = 0,5\text{ м}$, $CE = ED$, $P = 6\text{ кН}$, $Q = 3\text{ кН}$, а плита образует с горизонтальной плоскостью угол $\alpha = 30^\circ$. Пара сил с моментом $M = 10\text{ кН} \cdot \text{м}$ расположена в плоскости плиты. Трением на блоке и в шарнирах A и B пренебречь.

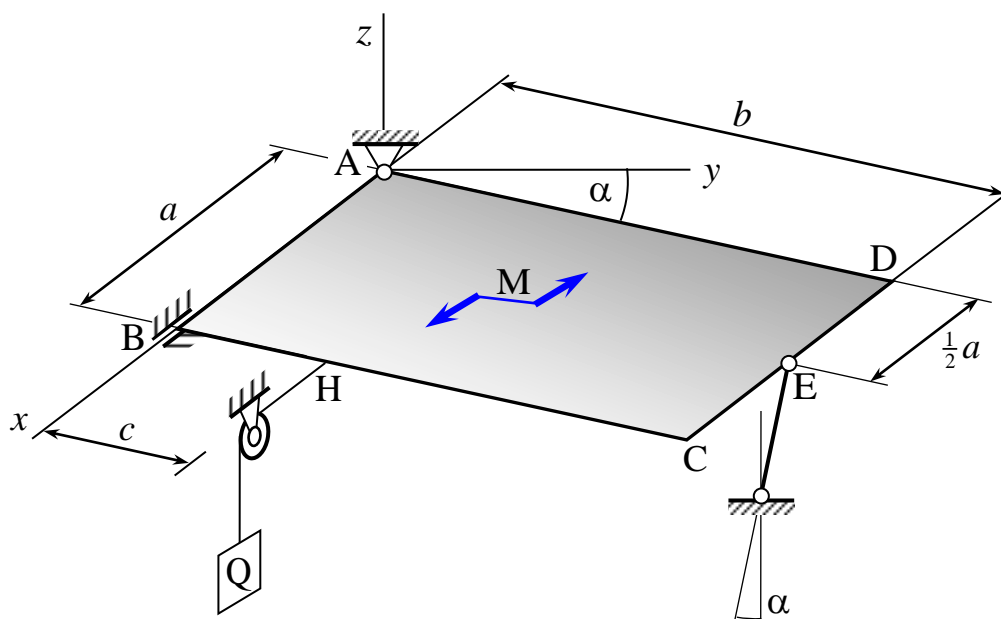


Рис. 20. Схема конструкции

Рассмотрим равновесие плиты. На нее действует активная сила \bar{P} (сила тяжести), приложенная в точке пересечения диагоналей плиты, и пара сил с моментом \bar{M} . На плиту наложены четыре связи: шаровой шарнир A, цилиндрический шарнир B, стержневая опора E и трос. Мысленно отбрасывая связи, заменяем их действие силами реакций. Заранее неизвестны ни величина, ни направление реакции \bar{R}_A шарового шарнира. Разложим реакцию \bar{R}_A на три

взаимно перпендикулярных силы \bar{X}_A, \bar{Y}_A и \bar{Z}_A , направив их по координатным осям в положительные стороны (рис. 21):

$$\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A + \bar{Z}_A.$$

Реакция \bar{R}_B перпендикулярна к оси x (так как в направлении оси x шарнир В не ограничивает перемещения плиты), поэтому ее целесообразно разложить на составляющие по координатным осям y и z :

$$\bar{R}_B = \bar{Y}_B + \bar{Z}_B.$$

Реакция \bar{R}_E стержня направлена по его оси, т. е. перпендикулярно к плоскости плиты. Реакция троса \bar{Q}' направлена по тросу, причем $Q' = Q$, так как трением на блоке G пренебрегаем. Вектор момента пары \bar{M} перпендикулярен плоскости плиты и направлен в ту сторону, откуда вращение, производимое парой, видно происходящим против хода часовой стрелки. На рисунке направление этого вращения показано парой сил.

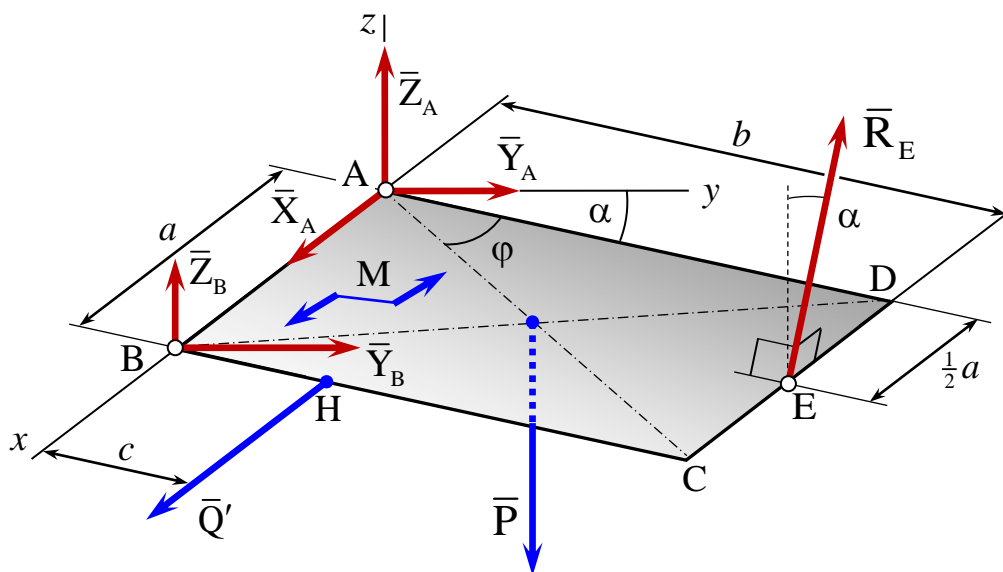


Рис. 21. Расчетная схема

Так как число неизвестных равно шести, то задача является статически определенной. Составим уравнения равновесия плиты, находящейся под действием произвольной пространственной системы сил $\bar{P}, \bar{Q}', \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{Y}_B, \bar{Z}_B, \bar{R}_E, \bar{M}$:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad X_A + Q' = 0, \quad (22)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad Y_A + Y_B + R_E \sin(\alpha) = 0, \quad (23)$$

$$\sum F_{iz} = 0; \quad Z_A + Z_B + R_E \cos(\alpha) - P = 0, \quad (24)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0; \quad R_E b - P \frac{b}{2} \cos(\alpha) = 0, \quad (25)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_i) = 0; \quad -Z_B a - R_E \frac{a}{2} \cos(\alpha) + P \frac{a}{2} - Q' c \sin(\alpha) + M \sin(\alpha) = 0, \quad (26)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0; \quad R_E \frac{a}{2} \sin(\alpha) + Y_B a - Q' c \cos(\alpha) + M \cos(\alpha) = 0. \quad (27)$$

Решим систему уравнений (22) – (27).

Из уравнения (22) $X_A = -Q' = -3,0 \text{ kH}.$

Из уравнения (25) $R_E = \frac{1}{2} P \cos \alpha = 2,60 \text{ kH}.$

Из уравнения (26)

$$Z_B = \frac{1}{a} \left(-R_E \cdot \frac{a}{2} \cos \alpha + P \cdot \frac{a}{2} - Q' c \sin \alpha + M \sin \alpha \right) = 4,71 \text{ kH}.$$

Из уравнения (24) $Z_A = -Z_B - R_E \cos \alpha + P = -0,96 \text{ kH}.$

Из уравнения (27)

$$Y_B = -\frac{1}{a} \cdot \left(R_E \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin \alpha - Q' c \cos \alpha + M \cos \alpha \right) = -5,56 \text{ kH}.$$

Из уравнения (23) $Y_A = -Y_B - R_E \sin(\alpha) = 4,26 \text{ kH}.$

Таким образом

$$\begin{aligned} X_A &= -3,00 \text{ kH}; & Y_B &= -5,56 \text{ kH}; \\ Y_A &= 4,26 \text{ kH}; & Z_B &= 4,71 \text{ kH}; \\ Z_A &= -0,96 \text{ kH}; & R_E &= 2,60 \text{ kH}. \end{aligned}$$

Заметим, что реальные направления реакций \bar{X}_A, \bar{Z}_A и \bar{Y}_B противоположны их

направлениям, выбранным при расчете.

► **Замечание**

При составлении уравнений моментов относительно любой из координатных осей рекомендуется изобразить проекцию на плоскость, перпендикулярную к этой оси, плиты и всех сил, т.е. вид конструкции с положительного конца оси. На рис. 22 а, 22 б и 22 в изображены расчетные схемы для составления уравнений моментов сил относительно осей x , y и z соответственно.

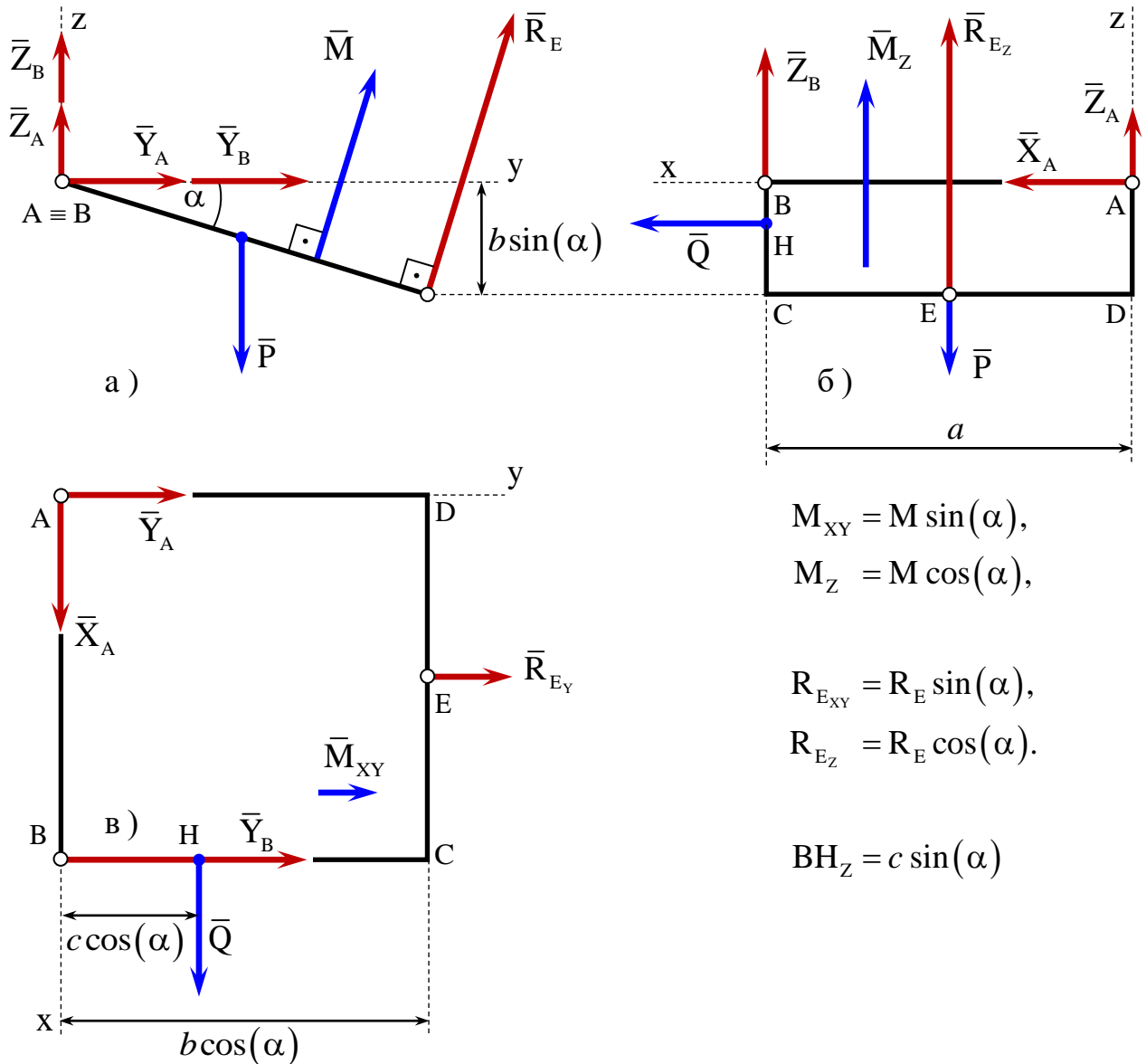


Рис. 22. Расчетные схемы для составления уравнений моментов относительно координатных осей

Чтобы получить уравнение моментов относительно оси x , нужно составить сумму моментов сил, изображенных на рис. 22 а, относительно точки А

(точки пересечения оси x и плоскости yz). Аналогично составляются уравнения моментов относительно других осей.

Момент пары \bar{M} входит в уравнения моментов сил относительно тех осей, на которые проекции его отличны от нуля. В нашем случае

$$M_X = 0, \quad M_Y = M \sin(\alpha), \quad M_Z = M \cos(\alpha),$$

поэтому в уравнении моментов сил относительно оси x момент пары отсутствует.

3.2. Решение задачи на ЭВМ

Уравнения (22) – (27) представляют собой неоднородную систему линейных алгебраических уравнений. Известно, что такая система уравнений совместна и определена, если определитель матрицы системы отличен от нуля. Решим эту систему на ЭВМ, используя математический пакет Mathcad.

Способ 1. Метод обратной матрицы. Запишем систему (22) – (27) в матричном виде

$$A \cdot X = B, \tag{28}$$

где A – матрица системы; X – вектор-столбец неизвестных; B – вектор-столбец правых частей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & -\frac{a}{2} \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \frac{a}{2} \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -Q \\ 0 \\ P \\ P \frac{b}{2} \cos \alpha \\ Qc \sin \alpha - P \frac{a}{2} - M \sin \alpha \\ Qc \cos \alpha - M \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ Y_B \\ Z_B \\ R_E \end{pmatrix}$$

В строках матрицы A расположены коэффициенты при неизвестных

X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B и R_E в уравнениях (22)-(27), строками матрицы B являются правые части этих уравнений, т.е. члены уравнений, содержащие активные силы, перенесенные в правую часть.

Из (28) получим

$$X = A^{-1} \cdot B, \quad (29)$$

где A^{-1} — матрица, обратная для матрицы A .

Mathcad-документ приведен ниже. Там же приведено решение системы (22)-(27) с помощью встроенной функции $lsolve(A, B)$, специально предназначенной для решения систем линейных алгебраических уравнений.

1. Исходные данные

$$Q := 3 \quad P := 6 \quad M := 10 \quad a := 1.5 \quad b := 2 \quad c := 0.5 \quad \alpha := \frac{\pi}{6}$$

2. Матрица системы A , ее определитель $|A|$ и вектор правых частей B

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & -\frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \frac{a}{2} \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad |A| = 4.5 \quad B := \begin{pmatrix} -Q \\ 0 \\ P \\ P \cdot \frac{b}{2} \cdot \cos(\alpha) \\ Q \cdot c \cdot \sin(\alpha) - P \cdot \frac{a}{2} - M \cdot \sin(\alpha) \\ Q \cdot c \cdot \cos(\alpha) - M \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

3. Решение системы методом обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ Y_B \\ Z_B \\ R_E \end{pmatrix} := A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -3.00 \\ 4.26 \\ -0.96 \\ -5.56 \\ 4.71 \\ 2.60 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{Вывод решения}$$

4. Решение системы с помощью встроенной функции lsolve

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ Y_B \\ Z_B \\ R_E \end{pmatrix} := \text{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} -3.00 \\ 4.26 \\ -0.96 \\ -5.56 \\ 4.71 \\ 2.60 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{Иной вывод решения}$$

Способ 2. Применение решающего блока. Блок Given ... Find в Mathcad предназначен для решения нелинейных уравнений и их систем, но с успехом может применяться для решения систем линейных уравнений. Использование блока

ORIGIN := 1

1 Исходные данные
 $Q := 3 \quad P := 6 \quad M := 10 \quad a := 1.5 \quad b := 2 \quad c := 0.5$

2 Блок решения

Given ← Ключевое слово блока

Начальное приближение решения
 $(X_A \ Y_A \ Z_A \ Y_B \ Z_B \ R_E) := (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$

Система уравнений равновесия

$X_A + Q = 0$ ← Система уравнений равновесия (22) – (27).

$Y_A + Y_B + R_E \cdot \sin(\alpha) = 0$

$$Z_A + Z_B + R_E \cdot \cos(\alpha) - P = 0$$

$$R_E \cdot b - P \cdot \frac{b}{2} \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$-Z_B \cdot a - R_E \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha) + P \cdot \frac{a}{2} - Q \cdot c \cdot \sin(\alpha) + M \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$R_E \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin(\alpha) + Y_B \cdot a - Q \cdot c \cdot \cos(\alpha) + M \cdot \cos(\alpha) = 0$$

Функция Find означает окончание блока, она возвращает решение системы. Ниже введена функция $R(\alpha)$, выраженная через эту функцию: при каждом обращении к функции $R(\alpha)$ (при заданном параметре α) решается система (22) – (27).

$$R(\alpha) := \text{Find}(X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B, R_E)$$

← Функция $R(\alpha)$

$$R\left(\frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} -3.00 \\ 4.26 \\ -0.96 \\ -5.56 \\ 4.71 \\ 2.60 \end{pmatrix} \quad R\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -3.00 \\ 3.26 \\ -1.76 \\ -4.76 \\ 6.26 \\ 2.12 \end{pmatrix}$$

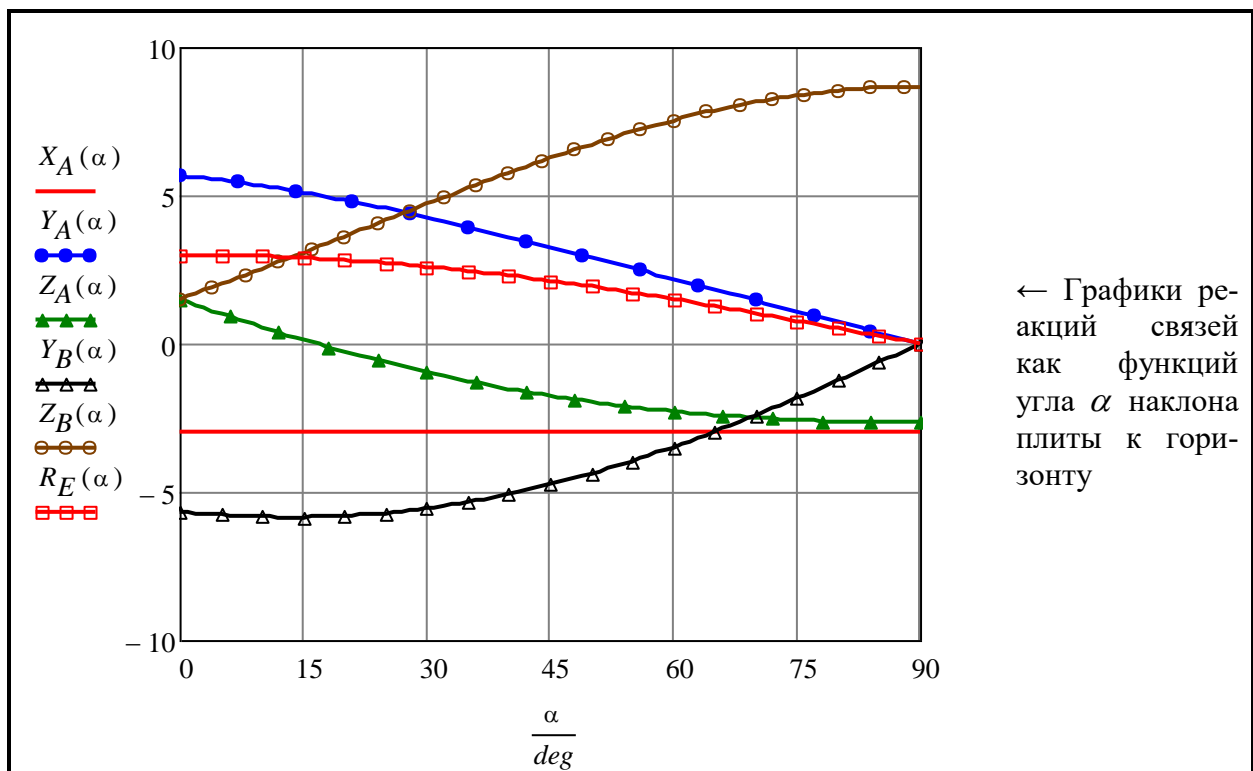
← Вывод значений реакций связей для двух значений угла α

$$\alpha := 0, \frac{\pi}{180} \dots \frac{\pi}{2} \quad \leftarrow \text{Параметру } \alpha \text{ присваиваются значения от } 0 \text{ до } \pi/2 \text{ с шагом } \pi/180$$

$$X_A(\alpha) := R(\alpha)_1 \quad Y_A(\alpha) := R(\alpha)_2 \quad Z_A(\alpha) := R(\alpha)_3$$

$$Y_B(\alpha) := R(\alpha)_4 \quad Z_B(\alpha) := R(\alpha)_5$$

$$R_E(\alpha) := R(\alpha)_6$$



позволяет избежать кропотливой работы по формированию матрицы системы, требующей большого внимания (в данном случае это — не проблема, так как порядок матрицы равен 6). Кроме того, при использовании блока решение выглядит наглядным: в документе набирается система уравнений в том виде, в каком она записывается на бумаге, а потому уменьшается вероятность ошибки. Если нужно установить зависимость реакций связей от какого-либо геометрического или силового параметра, то возникает необходимость многократного решения системы уравнений равновесия при различных значениях этого параметра. В этом случае вводится функция, аргументом которой является данный параметр, выражаемая через функцию Find: при каждом обращении к этой функции решается система уравнений при заданном значении параметра. В рассматриваемом примере введена функция $R(\alpha)$. Параметра α присваиваются значения от 0 до $\pi/2$ с шагом $\pi/180$. Система уравнений решается при каждом значении α из указанного диапазона. Значения каждой реакции возвращается в виде вектора $R(\alpha)_j$ ($j = \overline{1,6}$): вектор $R(\alpha)_1$ содержит

значения реакции X_A , вектор $R(\alpha)_2$ — реакции Y_A и т.д. Это дает возможность построить графики функций $X_A = X_A(\alpha)$, $Y_A = Y_A(\alpha)$ и др. Конечно, эти графики можно построить, располагая аналитическими выражениями реакций связей, решив систему уравнений равновесия вручную или воспользовавшись возможностью символьного решения системы с помощью функции `lsolve` или решающего блока.

Способ 3. Применение функции `lsolve`

`ORIGIN := 1`

`Q := 3 P := 6 M := 10 a := 1.5 b := 2 c := 0.5`

← Исходные данные

$$A(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & -\frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \frac{a}{2} \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad B(\alpha) := \begin{pmatrix} -Q \\ 0 \\ P \\ P \cdot \frac{b}{2} \cdot \cos(\alpha) \\ Q \cdot c \cdot \sin(\alpha) - P \cdot \frac{a}{2} - M \cdot \sin(\alpha) \\ Q \cdot c \cdot \cos(\alpha) - M \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

← Матрица системы $A(\alpha)$ и вектор правых частей $B(\alpha)$. Заданы как функции угла α

`R(\alpha) := lsolve(A(\alpha), B(\alpha))`

← Функция $R(\alpha)$, выраженная через функцию `lsolve`

$$R(0) = \begin{pmatrix} -3.00 \\ 5.67 \\ 1.50 \\ -5.67 \\ 1.50 \\ 3.00 \end{pmatrix} \quad R\left(\frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} -3.00 \\ 4.26 \\ -0.96 \\ -5.56 \\ 4.71 \\ 2.60 \end{pmatrix} \quad R\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -3.00 \\ 2.18 \\ -2.28 \\ -3.48 \\ 7.53 \\ 1.50 \end{pmatrix}$$

← Вывод решения системы (22)-(27) для трех значений угла α :
0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$

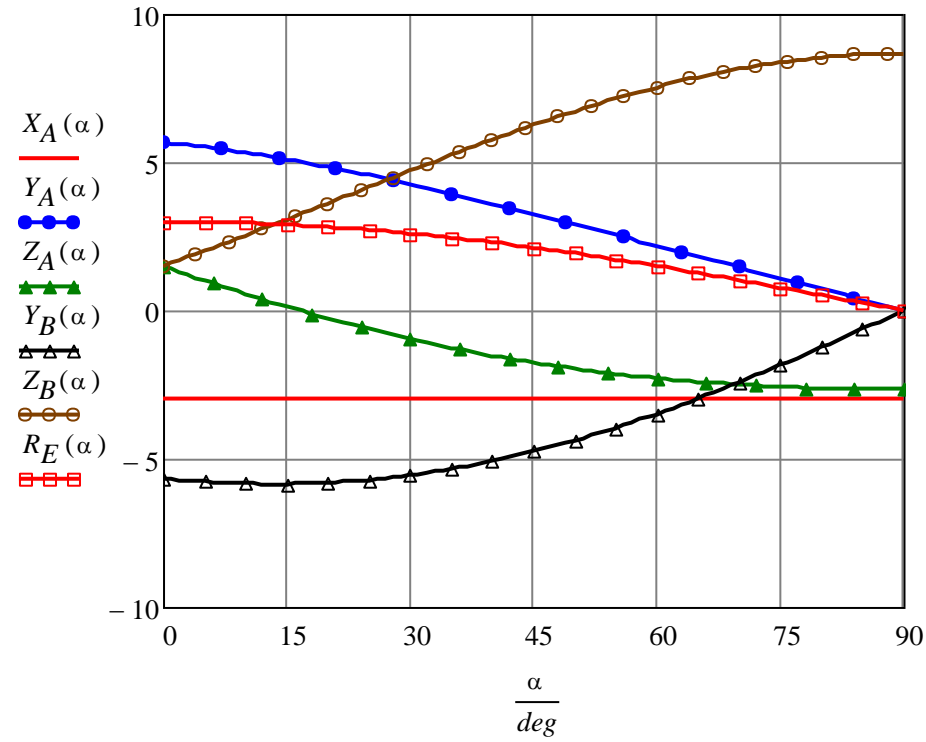
`\alpha := 0, \frac{\pi}{180} .. \frac{\pi}{2}`

← Параметру α присваиваются значения от 0 до $\pi/2$ с шагом $\pi/180$

$$X_A(\alpha) := R(\alpha)_1 \quad Y_A(\alpha) := R(\alpha)_2 \quad Z_A(\alpha) := R(\alpha)_3$$

$$Y_B(\alpha) := R(\alpha)_4 \quad Z_B(\alpha) := R(\alpha)_5$$

$$R_E(\alpha) := R(\alpha)_6$$



← Графики реакций
связей

ЧАСТЬ 4. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

В статике наряду с равновесием составных конструкций, т. е. механических систем, у которых число степеней свободы равно нулю, рассматривается равновесие механизмов – систем, число степеней свободы, которых отлично от нуля. Среди них можно выделить класс плоских шарнирных механизмов с одной степенью свободы.

Важной задачей статики плоских шарнирных механизмов является определение не только реакций внешних и внутренних связей, но и нахождение систем сил, обеспечивающих их равновесие. Основным способом их нахождения, как и ранее, является способ расчленения, при котором рассматривается равновесие отдельных звеньев механизма.

Цель задания

Целью курсовой работы является выработка навыков расчета и исследования равновесия плоских шарнирных механизмов.

Содержание задания

Объектом исследования является плоский шарнирный механизм, расположенный в вертикальной плоскости и представляющий собой совокупность абсолютно жестких стержневых звеньев, соединенных друг с другом идеальными шарнирами. Звенья механизма моделируются сплошными однородными стержнями, массы которых пропорциональны их длине. Погонная плотность каждого стержня равна ρ .

Схемы механизмов и таблицы исходных данных приведены в альбоме заданий, представленном в приложении 1.

Задаваемыми параметрами являются:

- геометрические размеры звеньев механизма;
- массовые характеристики механизма.

Требуется:

1. Определить:

- условия равновесия механизма под действием системы внешних сил в произвольном положении;
- реакции внешних и внутренних связей;
- величину уравновешивающего момента пары сил M (уравновешивающей силы \bar{P}), обеспечивающую равновесие механизма в произвольном положении.

2. Исследовать влияние положения ведущего звена на величины:

- реакций внешних и внутренних связей,
- уравновешивающего момента M (уравновешивающей силы \bar{P}), действующего на произвольное звено

и выбрать оптимальный вариант его приложения

Порядок выполнения работы

Порядок выполнения работ аналогичен порядку работ на равновесие составных конструкций.

Пример выполнения задания

Плоский шарнирный механизм (рис. 1), расположенный в вертикальной плоскости, находится в равновесии под действием внешнего момента M (внешней силы \bar{P}), приложенного к произвольному звену.

Определить реакции внешних и внутренних связей, а также величину уравнивающего момента M (внешней силы \bar{P} по указанию преподавателя) или в произвольном положении механизма, или в положении заданном преподавателем. Рассмотреть следующие варианты приложения внешних сил:

$$M = M_{OA}, \quad M = M_{AB}, \quad M = M_{O_1B}, \quad M = M_{KD}, \quad P_y = P_D.$$

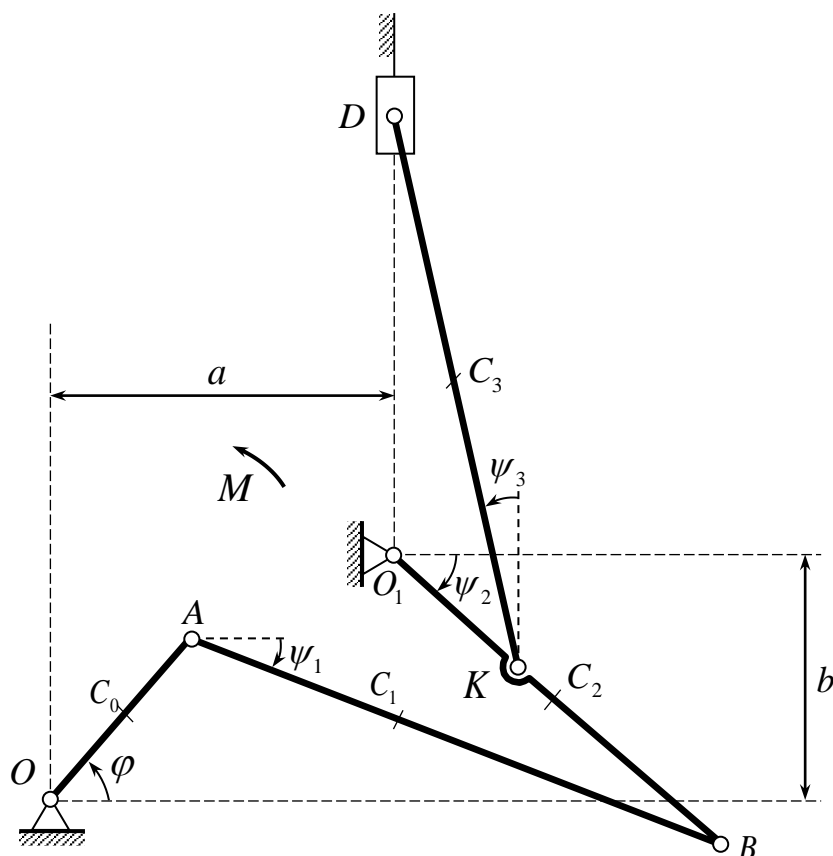


Рис. 1 Схема плоского механизма.

Исходные данные

$$\begin{aligned}
 OA = l_0 = 15 \text{ см}, & \quad AB = l_1 = 97 \text{ см}, & \quad O_1B = l_2 = 66 \text{ см}, & \quad O_1K = 25 \text{ см}, \\
 KD = l_3 = 86 \text{ см}, & \quad a = 50 \text{ см}, & \quad b = 37 \text{ см}, & \\
 \rho = 10 \text{ кг/м}, & \quad m_i = \rho l_i, & \quad i = \overline{0, 3}, & \quad m_4 = 20 \text{ кг}.
 \end{aligned}$$

1. Составление уравнений равновесия

Для решения поставленной задачи выберем правую систему координат, начало которой расположим в подшипнике O . Рассмотрим механизм в произвольном положении и изобразим силы, действующие на него (рис. 2): $\bar{G}_0, \bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3, \bar{G}_4$ — силы тяжести звеньев; $M = M_{OA}$ — уравновешивающий момент, приложенный к ведущему звену OA ; $\bar{R}_0 = \bar{X}_0 + \bar{Y}_0, \bar{R}_{0_1} = \bar{X}_{0_1} + \bar{Y}_{0_1}$ — реакции шарнирных опор, \bar{N}_4 — нормальная реакция направляющих ползуна.

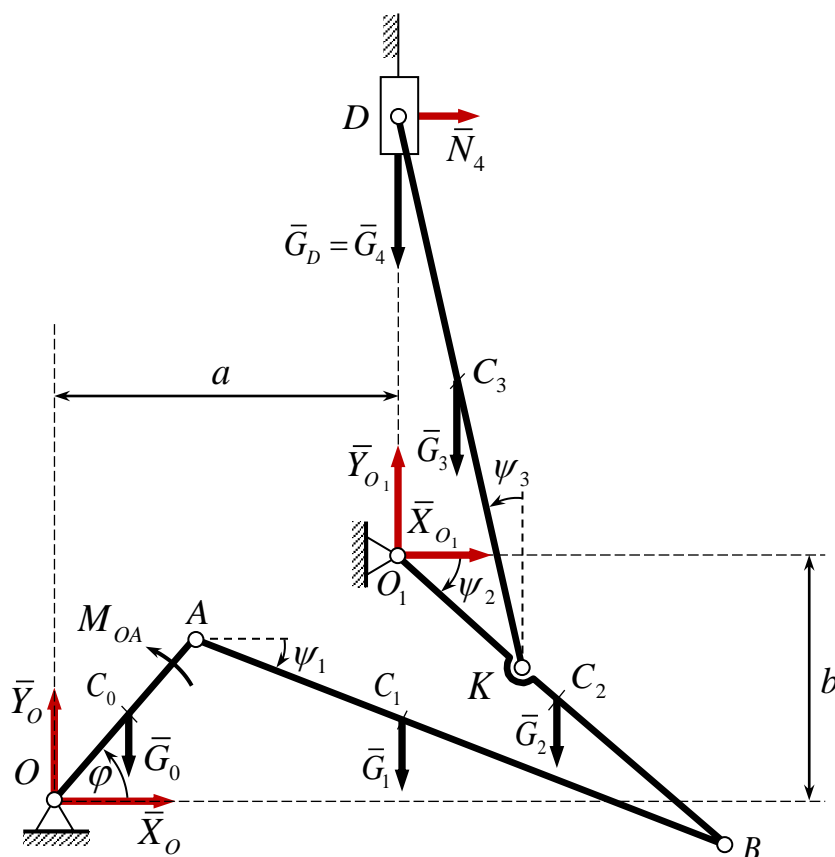


Рис. 2 Расчетная схема механизма.

На механизм действует произвольная плоская система сил, для которой можно записать не более трех условий равновесия. Незвестных сил, действующих на механизм шесть: $M_{OA}, \bar{R}_0 = \bar{X}_0 + \bar{Y}_0, \bar{R}_{0_1} = \bar{X}_{0_1} + \bar{Y}_{0_1}$ и \bar{N}_4 .

Расчленим плоский шарнирный механизм по шарнирам на отдельные звенья и изобразим реакции внешних и внутренних связей каждого звена и рассмотрим равновесие всех звеньев (рис. 3).

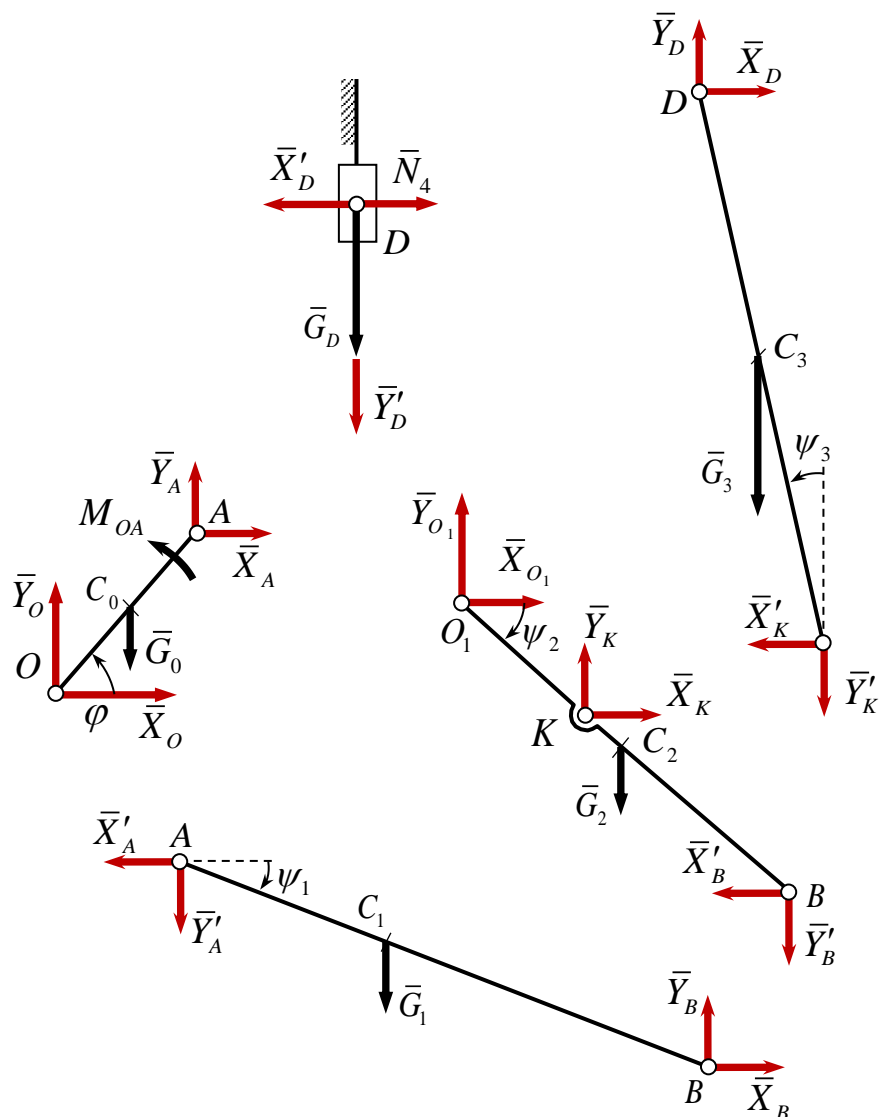


Рис. 3 Расчетные схемы звеньев плоского механизма.

На кривошипе OA действуют внешние силы $\bar{R}_O = \bar{X}_O + \bar{Y}_O, \bar{G}_0$, пара сил с моментом M_{OA} , а также реакция шарнира $A - \bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A$.

На шатуне AB кроме силы тяжести \bar{G}_1 действуют реакции $\bar{R}'_A = -\bar{R}_A, \bar{R}_B = \bar{X}_B + \bar{Y}_B$.

На кривошипе O_1B действуют силы $\bar{R}_{O_1} = \bar{X}_{O_1} + \bar{Y}_{O_1}, \bar{G}_2$ и внутренние реакции $\bar{R}_K = \bar{X}_K + \bar{Y}_K, \bar{R}'_B = -\bar{R}_B$.

На шатуне KD кроме силы тяжести \bar{G}_3 действуют реакции $\bar{R}'_K = -\bar{R}_K, \bar{R}_D = \bar{X}_D + \bar{Y}_D$.

На ползун действуют силы \bar{G}_4, \bar{N}_4 и реакция $\bar{R}'_D = -\bar{R}_D$.

Таким образом, на звенья механизма действует четырнадцать неизвестных сил: пара сил M_{OA} , а также реакции внешних и внутренних связей $\bar{R}_O = \bar{X}_O + \bar{Y}_O$, $\bar{R}_{O_1} = \bar{X}_{O_1} + \bar{Y}_{O_1}$, $\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A$, $\bar{R}_B = \bar{X}_B + \bar{Y}_B$, $\bar{R}_K = \bar{X}_K + \bar{Y}_K$, $\bar{R}_D = \bar{X}_D + \bar{Y}_D$ и \bar{N}_4 .

Звенья OA, AB, O_1B и KD механизма находятся в равновесии под действием произвольных плоских систем сил, а ползун D – под действием плоской сходящейся системы сил. Для каждого звена запишем следующие условия равновесия:

$$\text{Кривошип } OA \quad \sum_k \bar{F}_k = 0, \quad \sum_k \bar{M}_O(\bar{F}_k) = 0; \quad (1)$$

$$\text{Шатун } AB \quad \sum_k \bar{F}_k = 0, \quad \sum_k \bar{M}_A(\bar{F}_k) = 0; \quad (2)$$

$$\text{Кривошип } O_1B \quad \sum_k \bar{F}_k = 0, \quad \sum_k \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_k) = 0; \quad (3)$$

$$\text{Шатун } KD \quad \sum_k \bar{F}_k = 0, \quad \sum_k \bar{M}_K(\bar{F}_k) = 0; \quad (4)$$

$$\text{Ползун } D \quad \sum_k \bar{F}_k = 0. \quad (5)$$

Каждое из условий, обеспечивающее равенства нулю главного вектора системы сил $\sum_k \bar{F}_k = 0$, на плоскости эквивалентно двум уравнениям равновесия, а условия равновесия моментов $\sum_k \bar{M}_i(\bar{F}_k) = 0$, на плоскости эквивалентно одному уравнению равновесия. Таким образом, условиям равновесия в векторной форме (1) – (5) соответствуют 14 линейных алгебраических уравнений равновесия с 14-ю неизвестными, и задача является статически определимой.

Составляя уравнения равновесия, соответствующие условиям (1) – (5), в векторной форме получим:

$$\begin{aligned} \text{Кривошип } OA \quad \sum_k \bar{F}_k = 0; \quad \bar{R}_O + \bar{R}_A + \bar{G}_0 = 0, \\ \sum_k \bar{M}_O(\bar{F}_k) = 0; \quad \bar{M}_{OA} + \bar{\rho}_{C_0} \times \bar{G}_0 + \bar{\rho}_A \times \bar{R}_A = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{Шатун } AB \quad \sum_k \bar{F}_k = 0; \quad \bar{R}'_A + \bar{R}_B + \bar{G}_1 = 0, \\ \sum_k \bar{M}_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \bar{\rho}_{C_1} \times \bar{G}_1 + \bar{\rho}_{AB} \times \bar{R}_B = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{Кривошип } O_1B \quad \sum_k \bar{F}_k = 0; \quad \bar{R}_{O_1} + \bar{R}_K + \bar{R}'_B + \bar{G}_2 = 0, \\ \sum_k \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_k) = 0; \quad \bar{\rho}_{C_2} \times \bar{G}_2 + \bar{\rho}_K \times \bar{R}_K + \bar{\rho}_{O_1B} \times \bar{R}'_B = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{Шатун } KD \quad \sum_k \bar{F}_k = 0; \quad \bar{R}'_K + \bar{R}_D + \bar{G}_3 = 0, \\ \sum_k \bar{M}_K(\bar{F}_k) = 0; \quad \bar{\rho}_{C_3} \times \bar{G}_3 + \bar{\rho}_{KD} \times \bar{R}_D = 0; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{Ползун } D \quad \sum_k \bar{F}_k = 0; \quad \bar{R}'_D + \bar{N}_4 + \bar{G}_4 = 0. \quad (10)$$

Здесь $\bar{\rho}_i$ – радиус-векторы, определяющие положения соответствующих точек механизма на плоскости.

Ориентация векторов $\bar{\rho}_i$ на плоскости задается с помощью углов φ и ψ_k $k = \overline{1, 3}$, которые можно определить с помощью уравнений геометрических связей, записанных для узловых точек плоского механизма.

Ниже приведен пример документа Mathcad, в котором реализована процедура составления уравнений равновесия в символьном виде.

Составление уравнений равновесия звеньев плоского шарнирного механизма

Формирование радиус-векторов, определяющих точки приложения сил

$$\begin{aligned}
 r_A(\varphi) &:= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot L_0 & r_{C0}(\varphi) &:= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{L_0}{2} & r_{O1}(\varphi) &:= \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \rho_{AB}(\varphi) &:= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1(\varphi)) \\ \sin(\varphi_1(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot L_1 & \rho_{C1}(\varphi) &:= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1(\varphi)) \\ \sin(\varphi_1(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{L_1}{2} & \rho_K(\varphi) &:= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2(\varphi)) \\ \sin(\varphi_2(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot O1K \\
 \rho_B(\varphi) &:= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2(\varphi)) \\ \sin(\varphi_2(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot L_2 & \rho_{C2}(\varphi) &:= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2(\varphi)) \\ \sin(\varphi_2(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{L_2}{2} & \rho_{C3}(\varphi) &:= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3(\varphi)) \\ \sin(\varphi_3(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{L_3}{2} \\
 \rho_D(\varphi) &:= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3(\varphi)) \\ \sin(\varphi_3(\varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot L_3 & r_D(\varphi) &:= \begin{pmatrix} a \\ y_D(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Формирование векторов активных сил

$$\begin{aligned}
 G_0 &:= \begin{pmatrix} 0 \\ -m_0 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix} & G_1 &:= \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix} & G_2 &:= \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix} \\
 G_3 &:= \begin{pmatrix} 0 \\ -m_3 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix} & G_4 &:= \begin{pmatrix} 0 \\ -m_4 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Формирование векторов неизвестных сил и реакций связей

$$\begin{aligned}
 R_O &:= \begin{pmatrix} X_O \\ Y_O \\ 0 \end{pmatrix} & R_A &:= \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix} & R_{O1} &:= \begin{pmatrix} X_{O1} \\ Y_{O1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 R_B &:= \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{pmatrix} & R_K &:= \begin{pmatrix} X_K \\ Y_K \\ 0 \end{pmatrix} & R_D &:= \begin{pmatrix} X_D \\ Y_D \\ 0 \end{pmatrix} \\
 N_4 &:= \begin{pmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & M_{OA} &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} & R'_A &:= -R_A \\
 R'_B &:= -R_B & R'_K &:= -R_K & R'_D &:= -R_D
 \end{aligned}$$

Вычисление главных векторов и главных моментов внешних сил, действующих на звенья плоского механизма

	$\bar{P} = \sum_k \bar{F}_k$	$\bar{M} = \sum_k \bar{M}(\bar{F}_k)$
Звено		
<i>OA</i>	$P_{OA} := \mathbf{R}_O + \mathbf{R}_A + \mathbf{G}_0$	$M_O := M_{OA} + \mathbf{r}_A(\varphi) \times \mathbf{R}_A + \mathbf{r}_{CO}(\varphi) \times \mathbf{G}_0$
<i>AB</i>	$P_{AB} := \mathbf{G}_1 + \mathbf{R}_B + \mathbf{R}'_A$	$M_A := \rho_{C1}(\varphi) \times \mathbf{G}_1 + \rho_{AB}(\varphi) \times \mathbf{R}_B$
<i>O₁B</i>	$P_{O_1B} := \mathbf{R}_{O_1} + \mathbf{R}_K + \mathbf{G}_2 + \mathbf{R}'_B$	$M_{O_1} := \rho_{K}(\varphi) \times \mathbf{R}_K + \rho_{C2}(\varphi) \times \mathbf{G}_2 + \rho_B(\varphi) \times \mathbf{R}'_B$
<i>KD</i>	$P_{KD} := \mathbf{G}_3 + \mathbf{R}'_K + \mathbf{R}_D$	$M_K := \rho_{C3}(\varphi) \times \mathbf{G}_3 + \rho_D(\varphi) \times \mathbf{R}_D$
<i>D</i>	$P_D := \mathbf{G}_4 + \mathbf{R}'_D + \mathbf{N}_4$	

Формирование уравнений равновесия

$$UR := \left(P_{OA_1} \quad P_{OA_2} \quad M_{O_3} \quad P_{AB_1} \quad P_{AB_2} \quad M_{A_3} \quad P_{O_1B_1} \quad P_{O_1B_2} \quad M_{O_1_3} \quad P_{KD_1} \quad P_{KD_2} \quad M_{K_3} \quad P_{D_1} \quad P_{D_2} \right)$$

Формирование системы уравнений равновесия

$$UR^T \rightarrow \left(\begin{array}{c} X_A + X_O \\ Y_A + Y_O - g \cdot m_0 \\ M - L_0 \cdot X_A \cdot \sin(\varphi) + L_0 \cdot Y_A \cdot \cos(\varphi) - \frac{L_0 \cdot g \cdot m_0 \cdot \cos(\varphi)}{2} \\ X_B - X_A \\ Y_B - Y_A - g \cdot m_1 \\ L_1 \cdot Y_B \cdot \cos(\varphi_1(\varphi)) - L_1 \cdot X_B \cdot \sin(\varphi_1(\varphi)) - \frac{L_1 \cdot g \cdot m_1 \cdot \cos(\varphi_1(\varphi))}{2} \\ X_K - X_B + X_{O_1} \\ Y_K - Y_B + Y_{O_1} - g \cdot m_2 \\ L_2 \cdot X_B \cdot \sin(\varphi_2(\varphi)) - L_2 \cdot Y_B \cdot \cos(\varphi_2(\varphi)) - O1K \cdot X_K \cdot \sin(\varphi_2(\varphi)) + O1K \cdot Y_K \cdot \cos(\varphi_2(\varphi)) - \frac{L_2 \cdot g \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2(\varphi))}{2} \\ X_D - X_K \\ Y_D - Y_K - g \cdot m_3 \\ L_3 \cdot Y_D \cdot \cos(\varphi_3(\varphi)) - L_3 \cdot X_D \cdot \sin(\varphi_3(\varphi)) - \frac{L_3 \cdot g \cdot m_3 \cdot \cos(\varphi_3(\varphi))}{2} \\ N - X_D \\ -Y_D - g \cdot m_4 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\varphi) &:= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{g} & \frac{1}{2} \cdot L_0 \cdot \mathbf{g} \cdot m_0 \cdot \cos(\varphi) & 0 & m_1 \cdot \mathbf{g} & \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot \mathbf{g} \cdot m_1 \cdot \cos(\varphi_1(\varphi)) & 0 & m_2 \cdot \mathbf{g} & \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot \mathbf{g} \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2(\varphi)) & 0 & m_3 \cdot \mathbf{g} & \frac{1}{2} \cdot L_3 \cdot \mathbf{g} \cdot m_3 \cdot \cos(\varphi_3(\varphi)) & 0 & m_4 \cdot \mathbf{g} \end{pmatrix}^T \\
\mathbf{A}(\varphi) &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_0 \cdot \sin(\varphi) & L_0 \cdot \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_1 \cdot \sin(\varphi_1(\varphi)) & L_1 \cdot \cos(\varphi_1(\varphi)) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_2 \cdot \sin(\varphi_2(\varphi)) & -L_2 \cdot \cos(\varphi_2(\varphi)) & 0 & 0 & -OIK \cdot \sin(\varphi_2(\varphi)) & OIK \cdot \cos(\varphi_2(\varphi)) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L_3 \cdot \sin(\varphi_3(\varphi)) & L_3 \cdot \cos(\varphi_3(\varphi)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Рис. 4. Матрица коэффициентов A и вектор правой части B .

Решение полученной системы уравнений может быть найдено в Mathcad с помощью блока решений *Given – Find*. Однако наиболее эффективным способом решения и анализа результатов вычислений систем линейных алгебраических уравнений является матричный метод. Для его применения представим уравнения равновесия в матричной форме:

$$A \cdot X = B$$

где A – матрица коэффициентов при неизвестных величинах, X – вектор столбец неизвестных, B – вектор столбец правой части (известных слагаемых в уравнениях равновесия) системы алгебраических уравнений (рис. 4).

Этому уравнению соответствует решение вида $X = A^{-1} \cdot B$.

При этом определитель матрицы A не должен быть равен нулю

$$\det(A) \neq 0.$$

Уравнения равновесия для других вариантов приложения уравновешивающих сил составляются аналогично.

2. Составление уравнений геометрических связей

Рассматриваемый механизм представляет собой механическую систему с одной степенью свободы. Положение его звеньев будем определять с помощью угла поворота ведущего звена φ . Углы, характеризующие ориентацию звеньев механизма на плоскости φ_k ($k=1, 2, 3$), отсчитываемые от горизонтальной оси Ox в положительном направлении (см. задание К1 рис. 2 разд. 1), связаны с острыми углами ψ_k , изображенными на рисунках 1, 2 и 3, соотношениями

$$\varphi_1 = 2\pi + \psi_1, \quad \varphi_2 = 2\pi + \psi_2, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{2} + \psi_1.$$

Уравнения геометрических связей, позволяющие определить положение звеньев механизма на плоскости в зависимости от угла поворота ведущего звена, имеют вид (см. задание К1, разд. 1):

$$\begin{aligned} AB \cos(\varphi_1) - O_1B \cos(\varphi_2) &= a - OA \cos(\varphi), \\ AB \sin(\varphi_1) - O_1B \sin(\varphi_2) &= b - OA \sin(\varphi), \\ O_1K \cos(\varphi_2) + KD \cos(\varphi_3) &= 0, \\ O_1K \sin(\varphi_2) + KD \sin(\varphi_3) + b &= y_D. \end{aligned} \quad (11)$$

Решение системы уравнений (11) было получено ранее (см. К1, разд. 1):

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha + \arccos\left(\frac{O_1B^2 - O_1A^2 - AB^2}{2 AB O_1A}\right), & \varphi_2 &= \alpha + \arccos\left(\frac{O_1B^2 + O_1A^2 - AB^2}{2 O_1B O_1A}\right), \\ \varphi_3 &= \arccos\left[-\frac{O_1K}{KD} \cos(\varphi_2)\right], & y_D &= b + O_1K \sin(\varphi_2) + KD \sin(\varphi_3). \end{aligned} \quad (12)$$

где $O_1A = \sqrt{O_1A^2 + OA^2 - 2 OA \cdot OO_1 \cos(\varphi_o - \beta)}$, $OO_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\beta = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$,

$$\cos \alpha = \frac{OA \cos(\varphi) - a}{O_1A}, \quad \sin \alpha = \frac{OA \sin(\varphi) - b}{O_1A}.$$

Выражения (12) позволяют определить положения всех узловых точек (шарнирных соединений) плоского механизма при произвольном значении

угла поворота ведущего звена.

3. Результаты расчетов

Решение системы линейных алгебраических уравнений (6) – (10) совместно с выражениями (12) можно реализовать в пакете Mathcad, в котором для этого существует несколько способов [1, 10].

Ниже приведен пример документа Mathcad, в котором вычисления реакций внешних и внутренних связей механизма, а также величины уравновешивающего момента M (силы P), представлены матричным методом.

Расчет плоского механизма при действии момента $M = M_{OA}$, приложенного к звену OA .

Ввод исходных данных				
$a := .50$	$b := .37$	$OA := .15$	$O1K := .25$	$O1B := .66$
$KB := O1B - O1K$		$KD := .86$	$AB := .97$	
$L_0 := OA$	$L_1 := AB$	$L_2 := O1B$	$L_3 := KD$	
$g := 9.81$	$\rho := 10$			
$m_0 := \rho \cdot OA$	$m_1 := \rho \cdot AB$	$m_2 := \rho \cdot O1B$	$m_3 := \rho \cdot KD$	$m_4 := 20$
$ORIGIN := 1$				
Вычисление вспомогательных функций				
$\beta := \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right)$		$\alpha(\varphi) := \operatorname{angle}(OA \cdot \cos(\varphi) - a, OA \cdot \sin(\varphi) - b)$		
$O1A(\varphi) := \sqrt{a^2 + b^2 + OA^2 - 2 \cdot OA \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos(\varphi - \beta)}$				
Решение уравнений геометрических связей				
$\varphi_1(\varphi) := \alpha(\varphi) + \operatorname{acos}\left(\frac{O1B^2 - AB^2 - O1A(\varphi)^2}{2 \cdot O1A(\varphi) \cdot AB}\right)$				
$\varphi_2(\varphi) := \alpha(\varphi) + \operatorname{acos}\left(\frac{O1A(\varphi)^2 + O1B^2 - AB^2}{2 \cdot O1A(\varphi) \cdot O1B}\right)$				
$\varphi_3(\varphi) := \operatorname{acos}\left(-\frac{O1K}{KD} \cdot \cos(\varphi_2(\varphi))\right)$				

$$y_D(\varphi) := b + O1K \cdot \sin(\varphi_2(\varphi)) + KD \cdot \sin(\varphi_3(\varphi))$$

Решение системы уравнений равновесия

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_0 \cdot \sin(\varphi) & L_0 \cdot \cos(\varphi) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 \cdot \cos(\varphi_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B(\varphi) := \begin{pmatrix} 0 \\ g \cdot m_0 \\ \frac{1}{2} \cdot L_0 \cdot g \cdot m_0 \cdot \cos(\varphi) \\ 0 \\ g \cdot m_1 \\ \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot g \cdot m_1 \cdot \cos(\varphi_1(\varphi)) \\ 0 \\ g \cdot m_2 \\ \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot g \cdot m_2 \cdot \cos(\varphi_2(\varphi)) \\ 0 \\ g \cdot m_3 \\ \frac{1}{2} \cdot L_3 \cdot g \cdot m_3 \cdot \cos(\varphi_3(\varphi)) \\ 0 \\ g \cdot m_4 \end{pmatrix}$$

$$|A| \text{ simplify} \rightarrow L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \sin(\varphi_3)$$

$$R(\varphi) := A(\varphi)^{-1} \cdot B(\varphi)$$

Формирование реакций внешних и внутренних связей

$$X_O(\varphi) := R(\varphi)_1$$

$$Y_O(\varphi) := R(\varphi)_2$$

$$X_A(\varphi) := R(\varphi)_3$$

$$Y_A(\varphi) := R(\varphi)_4$$

$$X_B(\varphi) := R(\varphi)_5$$

$$Y_B(\varphi) := R(\varphi)_6$$

$$X_K(\varphi) := R(\varphi)_9$$

$$Y_K(\varphi) := R(\varphi)_{10}$$

$$Y_{O1}(\varphi) := R(\varphi)_8$$

$$X_{O1}(\varphi) := R(\varphi)_7$$

$$X_D(\varphi) := R(\varphi)_{11}$$

$$Y_D(\varphi) := R(\varphi)_{12}$$

$$N(\varphi) := R(\varphi)_{13}$$

$$M(\varphi) := R(\varphi)_{14}$$

$$R_O(\varphi) := \begin{pmatrix} X_O(\varphi) \\ Y_O(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$R_A(\varphi) := \begin{pmatrix} X_A(\varphi) \\ Y_A(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$R_B(\varphi) := \begin{pmatrix} X_B(\varphi) \\ Y_B(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$R_K(\varphi) := \begin{pmatrix} X_K(\varphi) \\ Y_K(\varphi) \end{pmatrix}$$

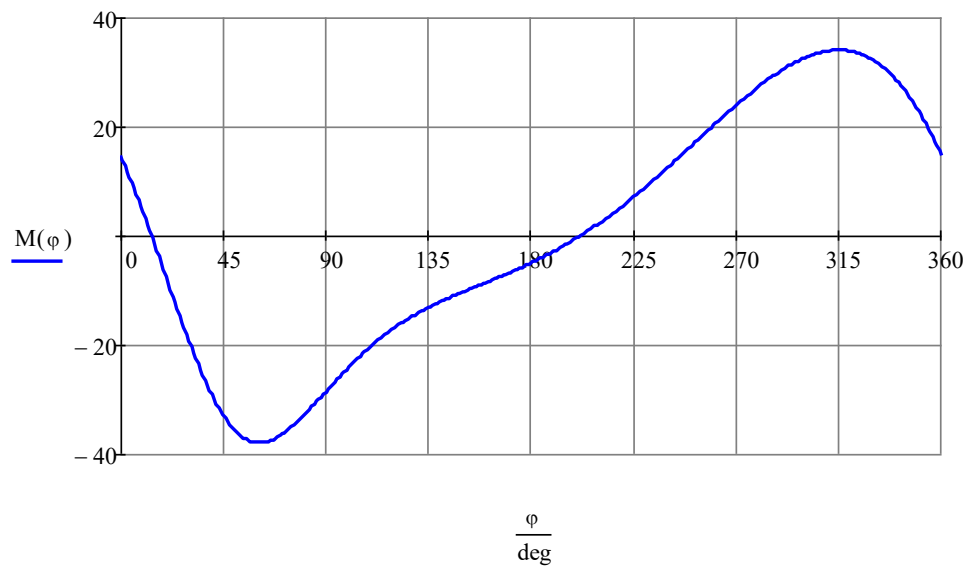
$$R_{O1}(\varphi) := \begin{pmatrix} X_{O1}(\varphi) \\ Y_{O1}(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$R_D(\varphi) := \begin{pmatrix} X_D(\varphi) \\ Y_D(\varphi) \end{pmatrix}$$

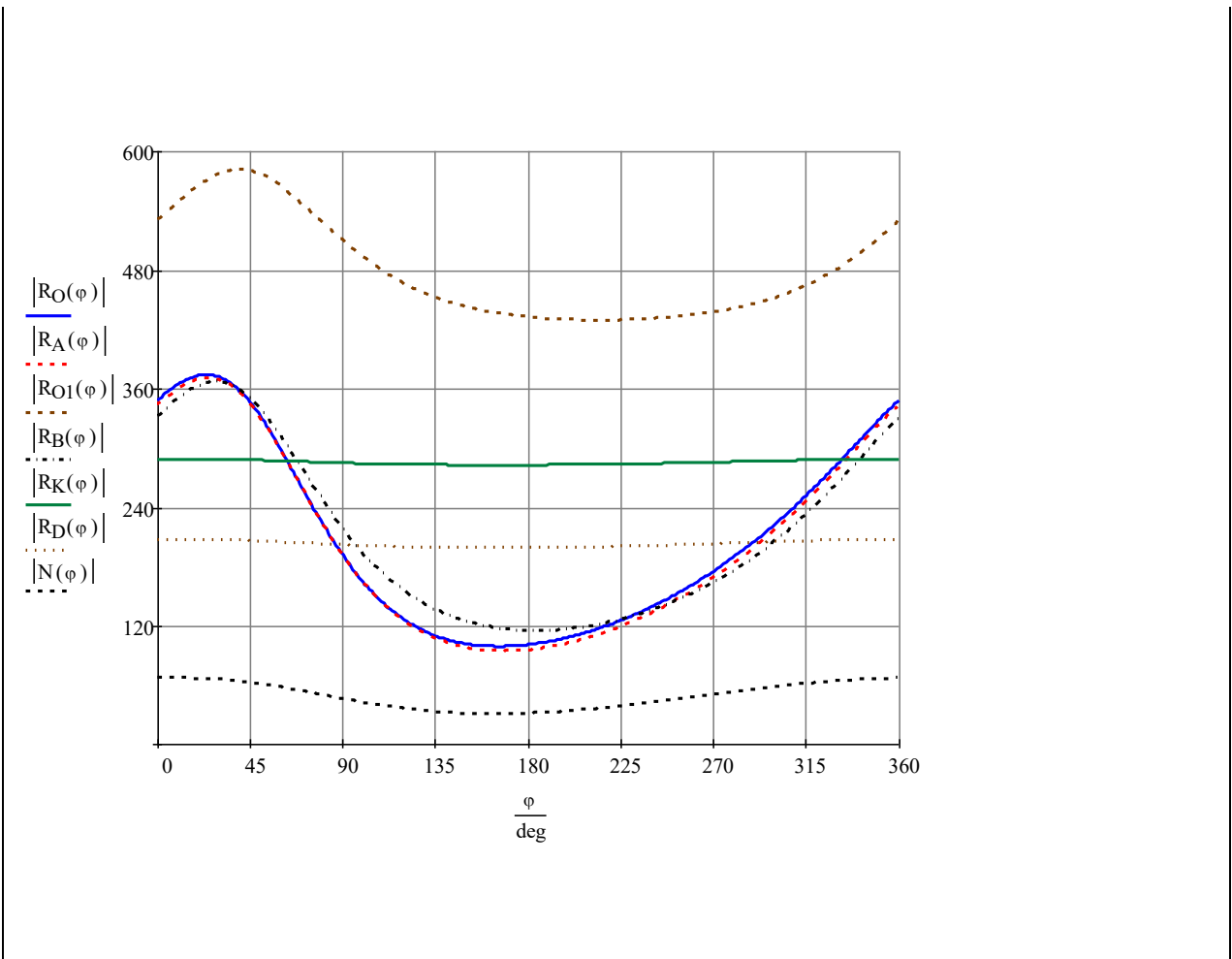
Построение графиков функций

$$\varphi := 0, \frac{\pi}{180} \dots 2 \cdot \pi$$

Зависимость момента пары сил, обеспечивающего равновесие механизма, от угла поворота ведущего звена



Зависимость реакций внешних и внутренних связей от угла поворота ведущего звена



Расчет плоского механизма при действии момента $M = M_{AB}$, приложенного к звену AB .

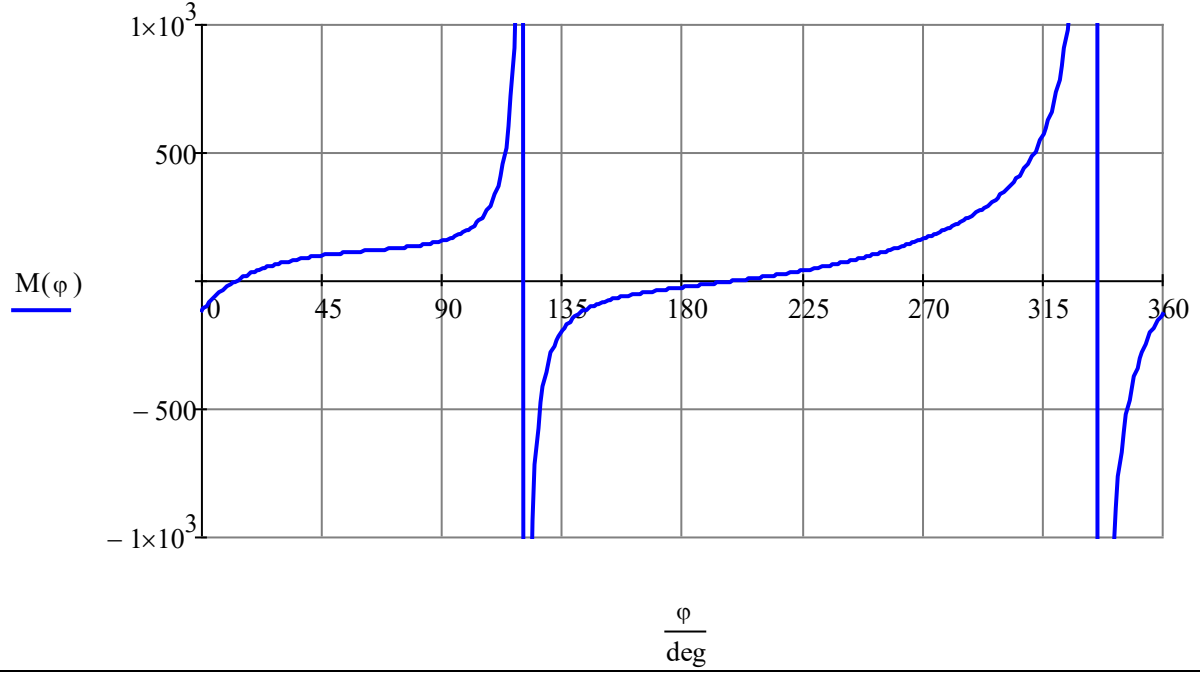
Ввод исходных данных

 Решение системы уравнений равновесия

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_0 \cdot \sin(\varphi) & L_0 \cdot \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 \cdot \cos(\varphi_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots \dots$$

$|A(\varphi)| \text{ simplify } \rightarrow -L_0 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot \sin(\varphi_3(\varphi)) \cdot \sin(\varphi - \varphi_2(\varphi))$

Зависимость момента пары сил, обеспечивающего равновесие механизма, от угла поворота ведущего звена



Расчет плоского механизма при действии момента $M = M_{O_1B}$, приложенного к звену O_1B .

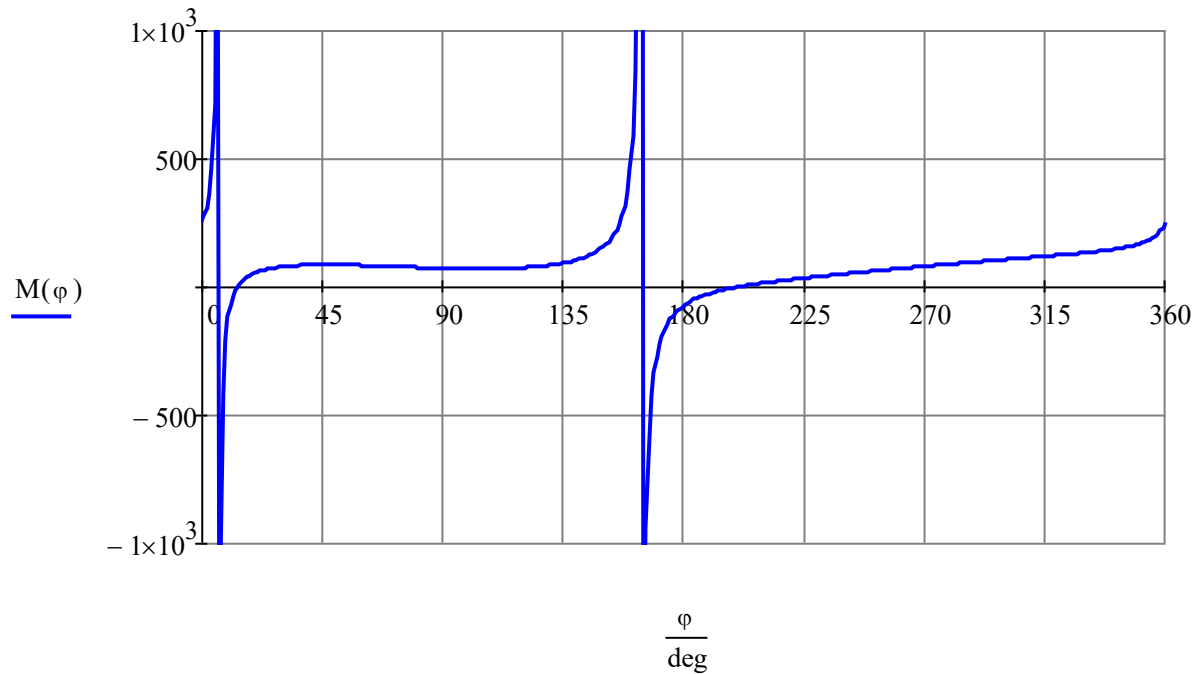
Ввод исходных данных

 Решение системы уравнений равновесия

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_0 \cdot \sin(\varphi) & L_0 \cdot \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 \cdot \cos(\varphi_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots \dots$$

$$|A(\varphi)| \text{ simplify } \rightarrow -L_0 \cdot L_1 \cdot L_3 \cdot \sin(\varphi_3(\varphi)) \cdot \sin(\varphi - \varphi_1(\varphi))$$

... ..
 Зависимость момента пары сил, обеспечивающего равновесие механизма, от угла поворота ведущего звена



Расчет плоского механизма при действии момента $M = M_{KD}$, приложенного к звену KD .

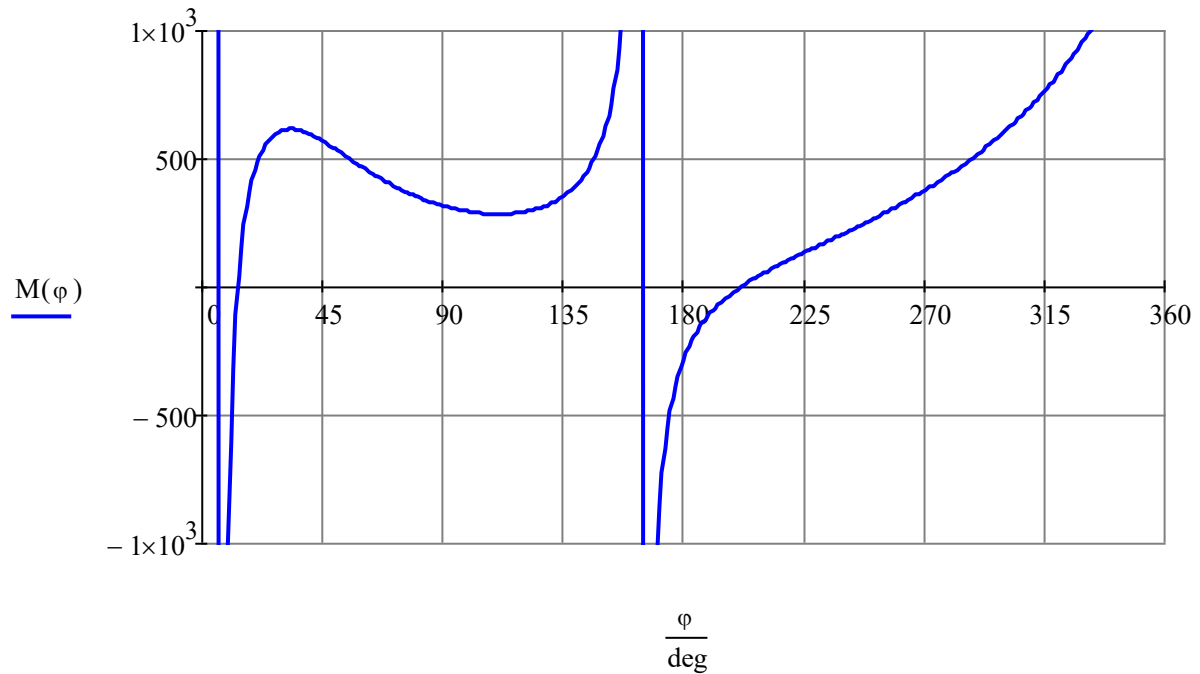
Ввод исходных данных

 Решение системы уравнений равновесия

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_0 \cdot \sin(\varphi) & L_0 \cdot \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 \cdot \cos(\varphi_3) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots \dots$$

$$|A(\varphi)| \text{ simplify } \rightarrow L_0 \cdot L_1 \cdot O1K \cdot \sin(\varphi_2(\varphi)) \cdot \sin(\varphi - \varphi_1(\varphi))$$

... ..
 Зависимость момента пары сил, обеспечивающего равновесие механизма, от угла поворота ведущего звена



Расчет плоского механизма при действии силы $P = P_D$, приложенной к ползуну D.

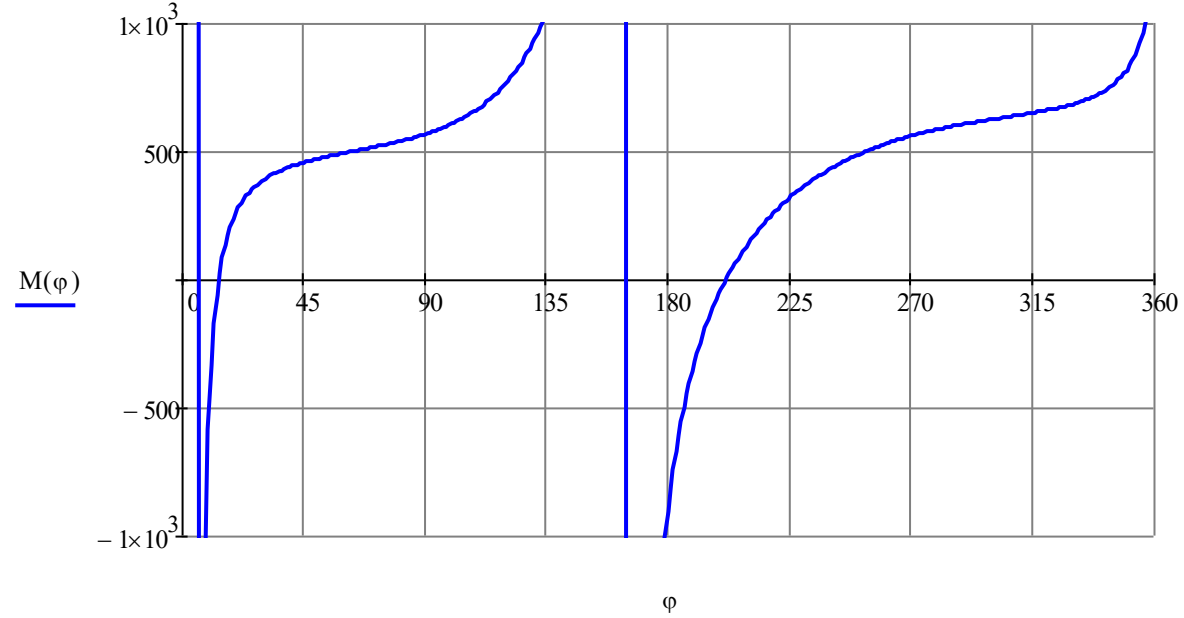
Ввод исходных данных

 Решение системы уравнений равновесия

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_0 \cdot \sin(\varphi) & L_0 \cdot \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 \cdot \cos(\varphi_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \dots$$

$$|A(\varphi)| \text{ simplify } \rightarrow \frac{L_0 \cdot L_1 \cdot L_3 \cdot OIK \cdot (\cos(\varphi_1(\varphi) - \varphi + \varphi_2(\varphi) - \varphi_3(\varphi)) - \cos(\varphi_1(\varphi) - \varphi - \varphi_2(\varphi) + \varphi_3(\varphi)))}{2}$$

... ..
 Зависимость силы, приложенной к ползуну и удерживающей механизм в равновесии, от угла поворота ведущего звена



4. Анализ результатов вычислений и выводы

Плоские шарнирные механизмы широко используются при дискретном цикле осуществления различных операций, когда возникает необходимость

возврата выходного звена в исходное положение после внешнего возмущения. Поэтому необходимо определить величину внешнего воздействия обеспечивающее требуемое положение выходного звена механизма. Также необходима предварительная оценка прочности шарнирных соединений.

Анализ результатов расчета рассмотренных схем приложения удерживающих пар сил с моментом M (силы P) показывает, что в некоторых положениях механизма величина внешнего воздействия, а также реакции внешних и внутренних связей становятся бесконечно большими. Данная ситуация возможна при равенстве нулю определителя матрицы коэффициентов A . Т.е. система линейных алгебраических уравнений становится вырожденной.

Сведем уравнения, обеспечивающие выполнение условия $\det A = 0$ и его возможные решения в таблицу.

Схема	$\det A = 0$	Решения
$M = M_{OA}$	$\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\sin(\varphi_3) = 0$	$\varphi_1 - \varphi_2 = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_3 = 0 \pm \pi \cdot n$
$M = M_{AB}$	$\sin(\varphi - \varphi_2)\sin(\varphi_3) = 0$	$\varphi_2 - \varphi = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_3 = 0 \pm \pi \cdot n$
$M = M_{O_1B}$	$\sin(\varphi - \varphi_1)\sin(\varphi_3) = 0$	$\varphi_1 - \varphi = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_3 = 0 \pm \pi \cdot n$
$M = M_{KD}$	$\sin(\varphi - \varphi_1)\sin(\varphi_2) = 0$	$\varphi_1 - \varphi = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_2 = 0 \pm \pi \cdot n$
$P = P_D$	$\sin(\varphi - \varphi_1)\sin(\varphi_2 - \varphi_3) = 0$	$\varphi_1 - \varphi = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_2 - \varphi_3 = 0 \pm \pi \cdot n$

где

$$n = 1, 2, \dots$$

Возможные решения уравнения $\det A = 0$ изобразим на графиках (рис. 5, рис. 6) из которых следует, что решения

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_3 = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_2 = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_2 - \varphi_3 = 0 \pm \pi \cdot n \quad n = 1, 2, \dots$$

невозможны.

Таким образом, корни уравнения $\det A = 0$ имеют вид (рис. 6)

$$\varphi_1 - \varphi = 0 \pm \pi \cdot n, \varphi_2 - \varphi = 0 \pm \pi \cdot n \quad n = 1, 2, \dots$$

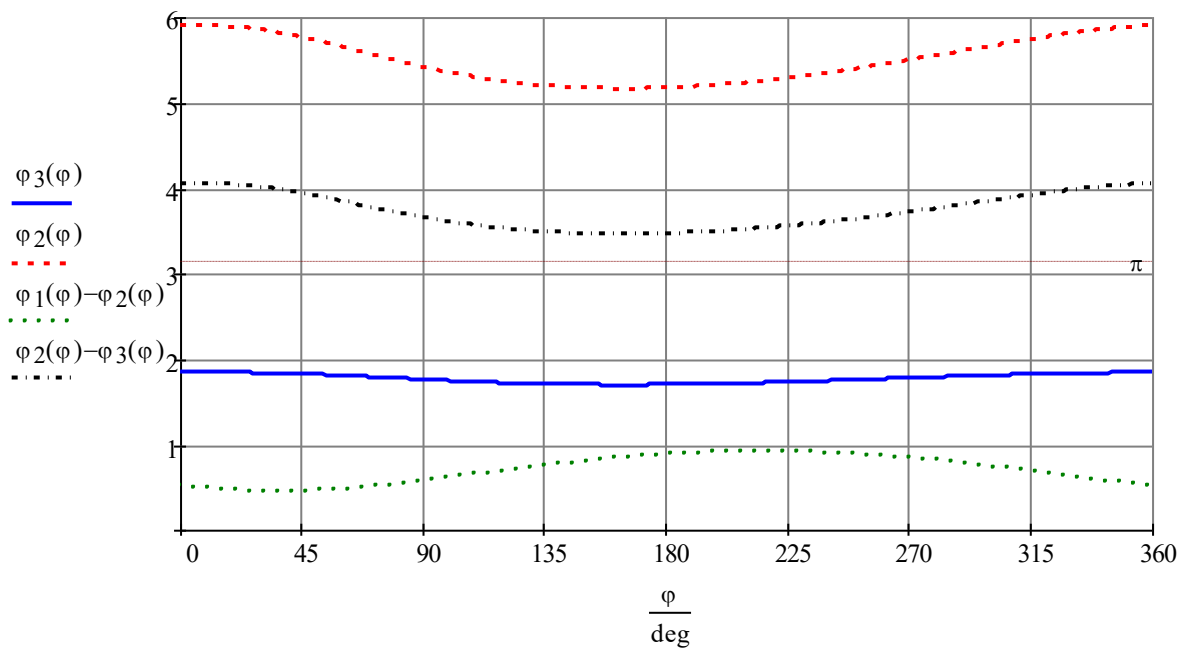


Рис. 5 Зависимость углов поворота φ_2, φ_3 и разностей $\varphi_1 - \varphi_2, \varphi_2 - \varphi_3$ от угла поворота ведущего звена.

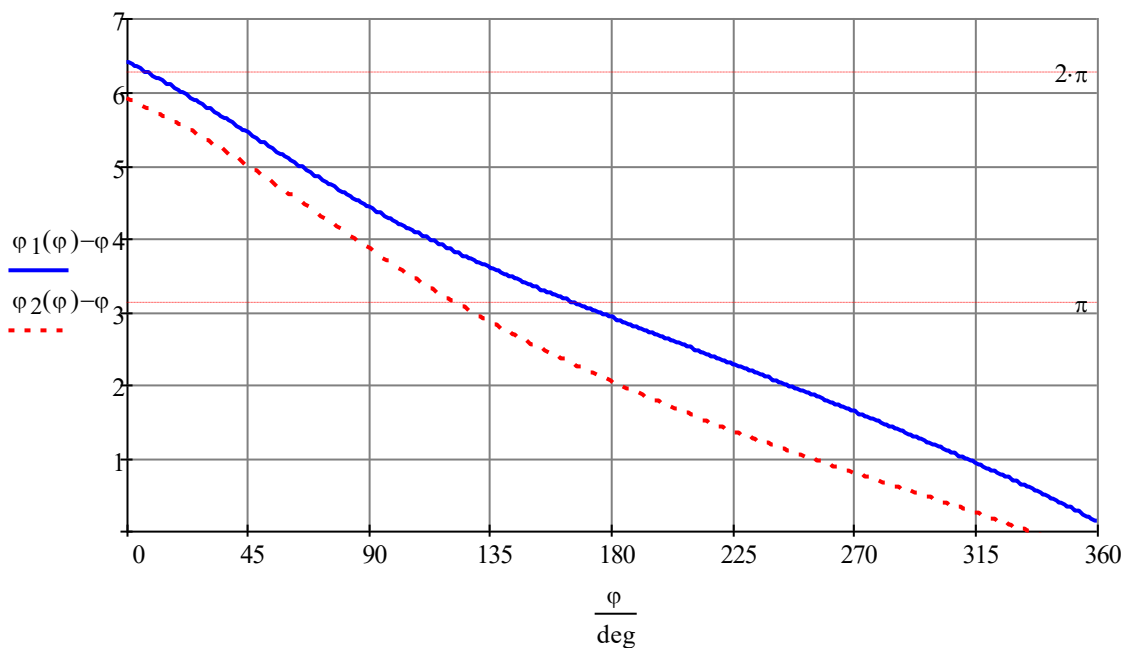


Рис. 6 Зависимость разностей $\varphi_1 - \varphi, \varphi_2 - \varphi$ от угла поворота ведущего звена.

При значениях угла поворота ведущего звена $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, решения уравнения $\det A = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi &= 2\pi, & \varphi_1 - \varphi &= \pi, \\ \varphi_2 - \varphi &= 0, & \varphi_2 - \varphi &= \pi. \end{aligned}$$

Найдем значения углов поворота ведущего звена, при которых $\det A = 0$

$$\begin{aligned}\varphi_{kp_1} &:= \text{root}\left(\varphi_1(\varphi) - \varphi - 2 \cdot \pi, \varphi, 0, \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{\text{deg}} = 6.424 \\ \varphi_{kp_2} &:= \text{root}\left(\varphi_1(\varphi) - \varphi - \pi, \varphi, \frac{\pi}{2}, \pi\right) \cdot \frac{1}{\text{deg}} = 164.193 \\ \varphi_{kp_3} &:= \text{root}\left(\varphi_2(\varphi) - \varphi - \pi, \varphi, \frac{\pi}{2}, \pi\right) \cdot \frac{1}{\text{deg}} = 120.686 \\ \varphi_{kp_4} &:= \text{root}\left(\varphi_2(\varphi) - \varphi, \varphi, \pi, 2\pi\right) \cdot \frac{1}{\text{deg}} = 334.097\end{aligned}$$

Таким образом, условия $\varphi_1 - \varphi_2 = 0 \pm \pi \cdot n$, $\varphi_3 = 0 \pm \pi \cdot n$ $n = 1, 2, \dots$ не выполняются ни при каких значениях φ и, следовательно, значения момента пары сил, приложенного к ведущему звену, конечны при любых значениях φ .

Изобразим положения механизма при найденных значениях углов φ_{kp} и рассмотрим физические причины, обеспечивающие выполнение условия $\det A = 0$.

Для изображения механизма, воспользуемся результатами, приведенными в работе *K1*, позволяющими отобразить его положение при заданном угле поворота ведущего звена.

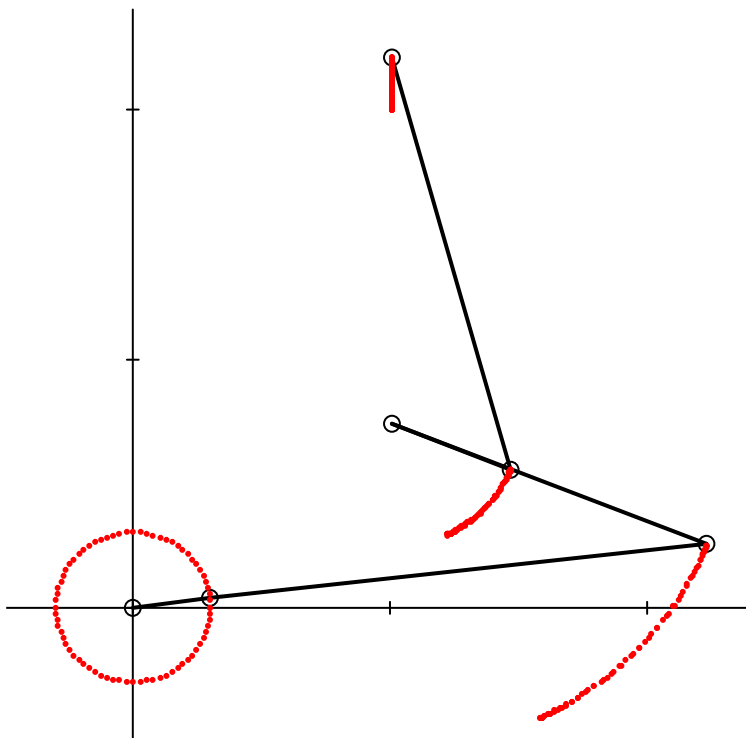
$$\text{Для условий } \varphi_1 - \varphi = 2\pi \Rightarrow \varphi = \varphi_{kp_1}, \quad \varphi_1 - \varphi = \pi, \Rightarrow \varphi = \varphi_{kp_2}.$$

При значении $\varphi = \varphi_{kp_1} = 6.424^\circ$ кривошип O_1B занимает крайнее верхнее положение; при значении $\varphi = \varphi_{kp_2} = 164.193^\circ$ кривошип O_1B занимает крайнее нижнее положение (в этих случаях в точке B расположен мгновенный центр вращений). Возможные угловые скорости звеньев O_1B , KD и скорость ползуна D одновременно равны нулю.

$$\text{Для условий } \varphi_2 - \varphi = \pi \Rightarrow \varphi = \varphi_{kp_3}, \quad \varphi_2 - \varphi = 0, \Rightarrow \varphi = \varphi_{kp_4}.$$

При значениях $\varphi = \varphi_{kp_3} = 120.684^\circ$ и $\varphi = \varphi_{kp_4} = 334.097^\circ$ мгновенный центр вращений звена AB находится в бесконечности. Возможная угловая скорость звена AB в этих случаях равна нулю.

$$M = M_{O_1B}, M = M_{KD}, P = P_D$$



$$i := 1$$

$$\varphi_0 := \varphi_{kp_i} \cdot \text{deg}$$

$$\frac{\varphi_0}{\text{deg}} = 6.424$$

$$\frac{\varphi_1(\varphi_0)}{\text{deg}} = 366.424$$

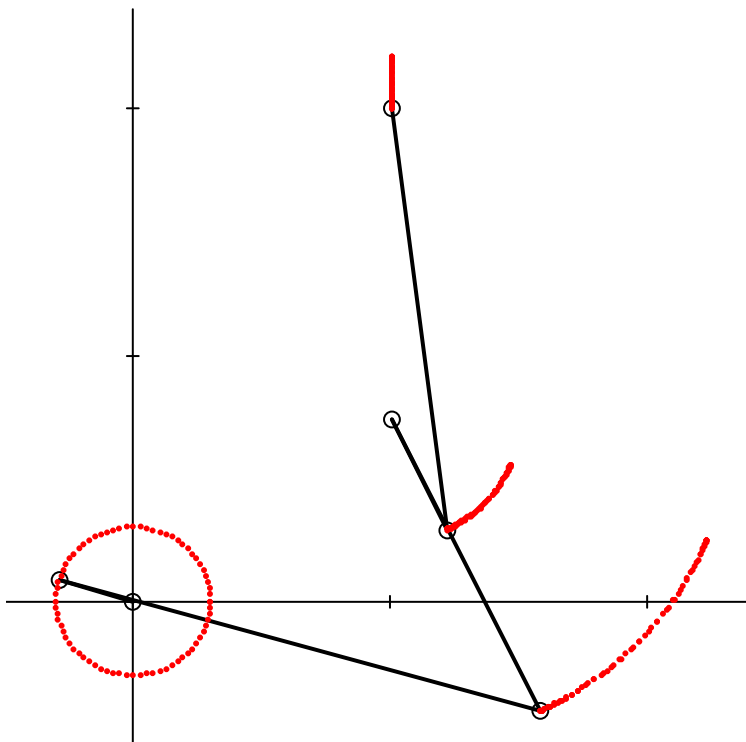
$$\frac{\varphi_2(\varphi_0)}{\text{deg}} = 338.239$$

$$\frac{\varphi_3(\varphi_0)}{\text{deg}} = 105.663$$

$$\frac{\varphi_1(\varphi_0) - \varphi_0}{\text{deg}} = 360$$

$$\frac{\varphi_2(\varphi_0) - \varphi_0}{\text{deg}} = 331.815$$

$$M = M_{O_1B}, M = M_{KD}, P = P_D$$



$$i := 2$$

$$\frac{\varphi_0}{\text{deg}} = 164.193$$

$$\frac{\varphi_1(\varphi_0)}{\text{deg}} = 344.193$$

$$\frac{\varphi_2(\varphi_0)}{\text{deg}} = 295.968$$

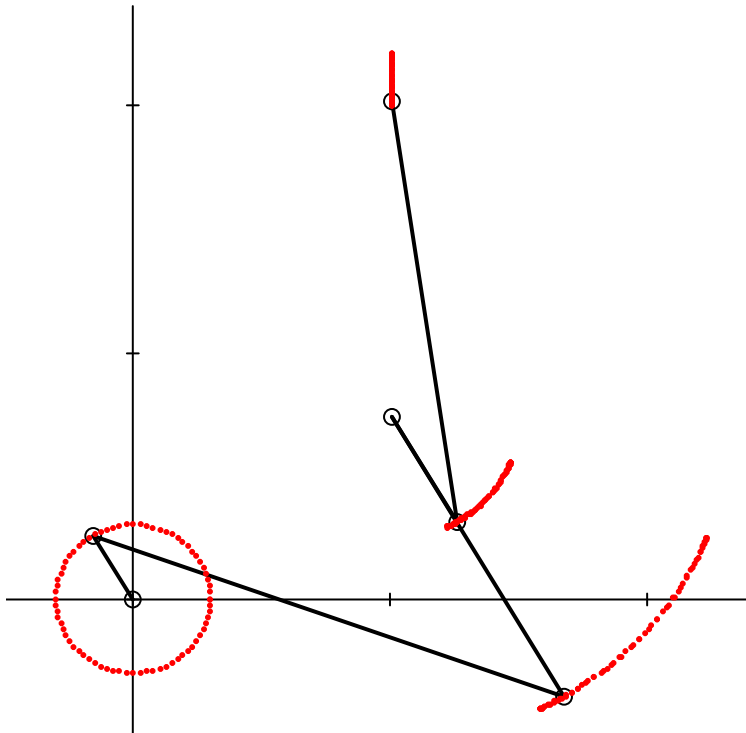
$$\frac{\varphi_3(\varphi_0)}{\text{deg}} = 97.313$$

$$\frac{\varphi_1(\varphi_0) - \varphi_0}{\text{deg}} = 180$$

$$\frac{\varphi_2(\varphi_0) - \varphi_0}{\text{deg}} = 131.775$$

В точке B расположен мгновенный центр вращений (крайнее положение кривошипа O_1B). Возможные угловые скорости звеньев O_1B , KD и скорость ползуна D равны нулю.

$$M = M_{AB}$$



$$i := 3$$

$$\frac{\varphi_0}{\text{deg}} = 120.686$$

$$\frac{\varphi_1(\varphi_0)}{\text{deg}} = 340.325$$

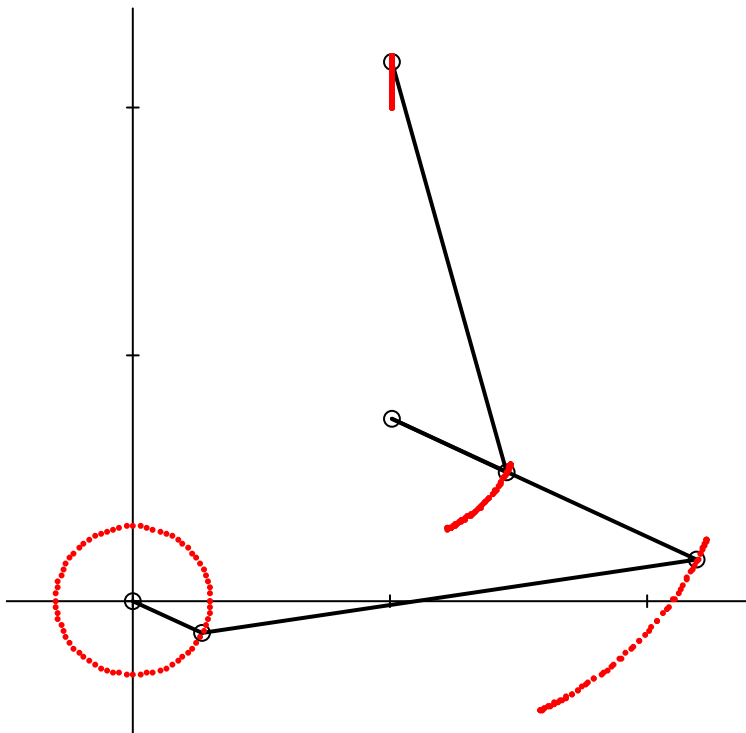
$$\frac{\varphi_2(\varphi_0)}{\text{deg}} = 300.686$$

$$\frac{\varphi_3(\varphi_0)}{\text{deg}} = 98.531$$

$$\frac{\varphi_1(\varphi_0) - \varphi_0}{\text{deg}} = 219.639$$

$$\frac{\varphi_2(\varphi_0) - \varphi_0}{\text{deg}} = 180$$

$$M = M_{AB}$$



$$i := 4$$

$$\frac{\varphi_0}{\text{deg}} = 334.097$$

$$\frac{\varphi_1(\varphi_0)}{\text{deg}} = 368.729$$

$$\frac{\varphi_2(\varphi_0)}{\text{deg}} = 334.097$$

$$\frac{\varphi_3(\varphi_0)}{\text{deg}} = 105.159$$

$$\frac{\varphi_1(\varphi_0) - \varphi_0}{\text{deg}} = 34.632$$

$$\frac{\varphi_2(\varphi_0) - \varphi_0}{\text{deg}} = 0$$

Мгновенный центр вращений звена AB находится в бесконечности. Возможная угловая скорость звена AB равна нулю.

5. Выводы

Результаты анализа рассмотренных схем приложения внешних сил, удерживающих механизм в положении равновесия, позволяют определить область допустимых значений углов поворота, при которых значения сил конечны. Результаты сведем в таблицу

Схема	Область допустимых значений для угла φ .
$M = M_{OA}$	$0 \leq \varphi \leq 2\pi(1+n), \quad n = 1, 2, \dots$
$M = M_{AB}$	$\varphi \neq \varphi_{kp3} + 2\pi n, \quad \varphi \neq \varphi_{kp4} + 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots$
$M = M_{O_1B}$	$\varphi \neq \varphi_{kp1} + 2\pi n, \quad \varphi \neq \varphi_{kp2} + 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots$
$M = M_{KD}$	$\varphi \neq \varphi_{kp1} + 2\pi n, \quad \varphi \neq \varphi_{kp2} + 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots$
$P = P_D$	$\varphi \neq \varphi_{kp1} + 2\pi n, \quad \varphi \neq \varphi_{kp2} + 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots$

Таким образом, оптимальной является схема, в которой удерживающими механизм в положении равновесия силами является пара сил с моментом $M = M_{OA}$ приложенная к ведущему звену OA .

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. АЛЬБОМ ЗАДАНИЙ ПО СТАТИКЕ

Альбом заданий включает схемы конструкций, исходные данные и варианты искомых величин по каждой из частей курсовой работы.

► Часть 1

Альбом содержит 30 схем плоских ферм, каждая из которых нагружена пятью силами. Схемы ферм расположены на стр. 88-92. Номера схем содержат символ «Ф», например, Ф09 – это девятая схема. На стр. 93 приводится таблица вариантов расчета (пять вариантов) и числовых значений исходных величин. При выдаче задания студенту сообщается номер схемы фермы и номер варианта расчета (см. таблицу, расположенную на стр. 93).

Внимание: расчет проводится для нагрузки, указанной в варианте расчета, т.е. во внимание принимаются только силы, указанные в заданном варианте (их несколько), *остальные во внимание не принимаются!*

► Часть 2

Альбом содержит 120 схем плоских составных конструкций, расположенных на с. 94-108. Вариант задания включает 4 конструкции разных типов. На каждой странице приведено по два варианта. Номера схем содержат три цифры, например, 123, 223, 323, 423. Здесь первые цифры, т.е. 1, 2, 3, 4, означают тип конструкции, вторые две, т.е. 23 – номер варианта, в который включены эти схемы. Вариант задания включает, кроме схем конструкций, вариант числовых значений исходных величин (см. таблицу, расположенную на стр. 109) и вариант искомых реакций. Таблица вариантов искомых реакций расположена на с. 110-113.

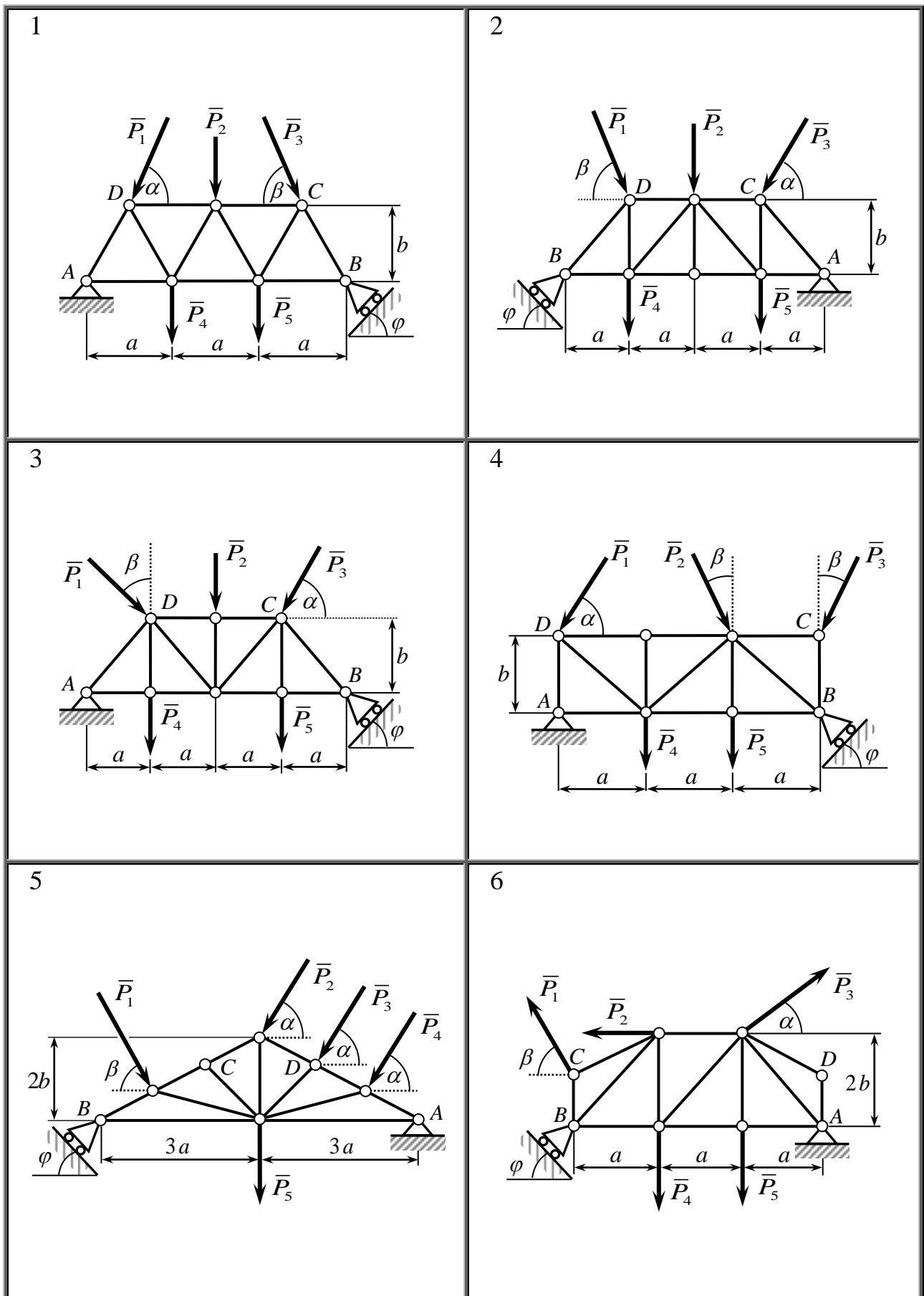
► Часть 3

Альбом заданий содержит 30 схем пространственных конструкций, схемы которых приведены на с. 114-118. Номера схем содержат символ «П», например, П09 и П30 – это номера девятой и тридцатой конструкции. При выдаче задания студенту указывается номер конструкции и вариант числовых значений исходных величин (см. таблицу, расположенную на стр. 119).

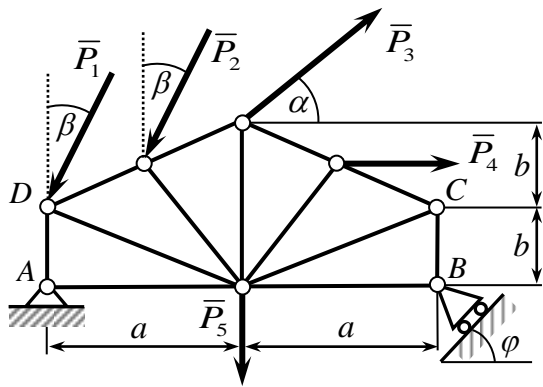
► Часть 4

Альбом заданий содержит 30 схем плоских шарнирных механизмов, схемы которых приведены на с. 120-124. Номера схем содержат символ «М», например, М09 и М30 – это номера девятого и тридцатого механизма. При выдаче задания студенту указывается номер конструкции и вариант числовых значений исходных величин (см. таблицы, расположенную на стр. 125, 126).

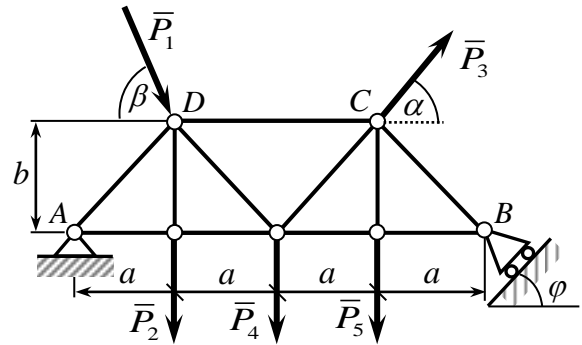
Схемы плоских шарнирных ферм



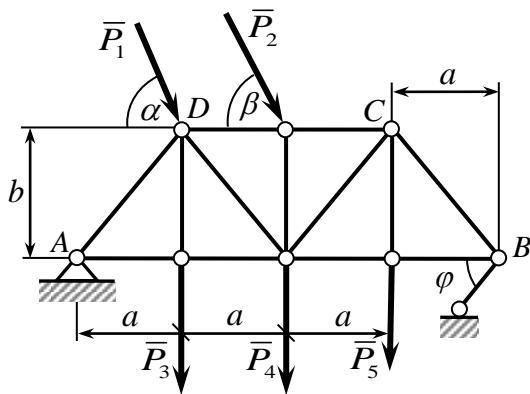
7



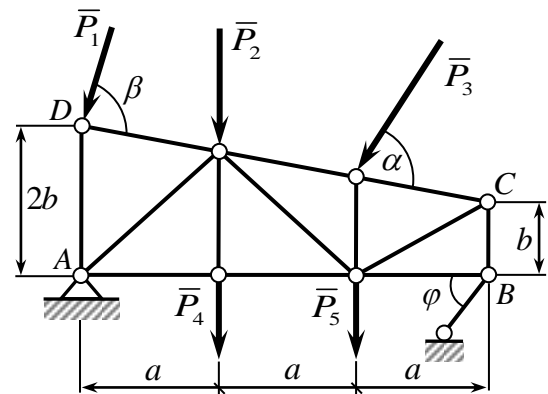
8



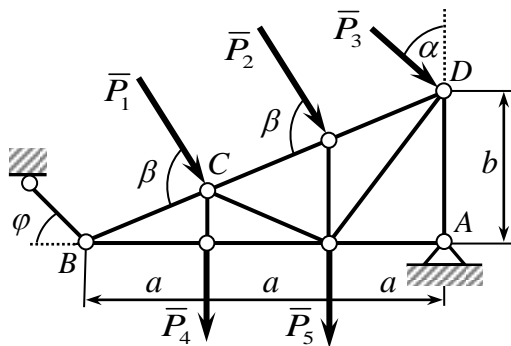
9



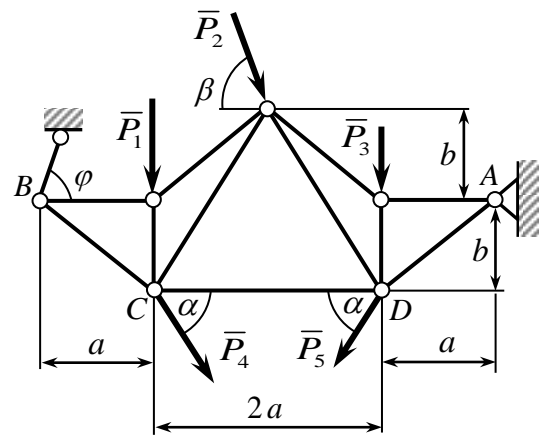
10



11

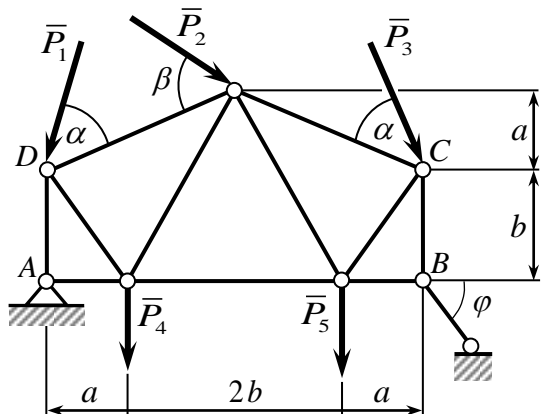


12

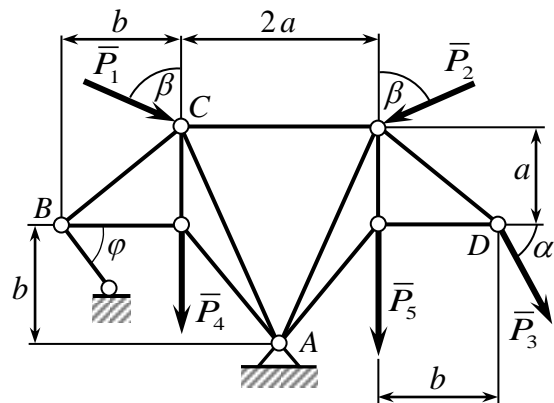


Приложение 1. Альбом заданий

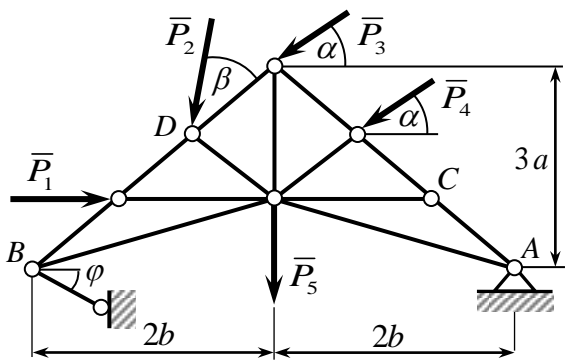
13



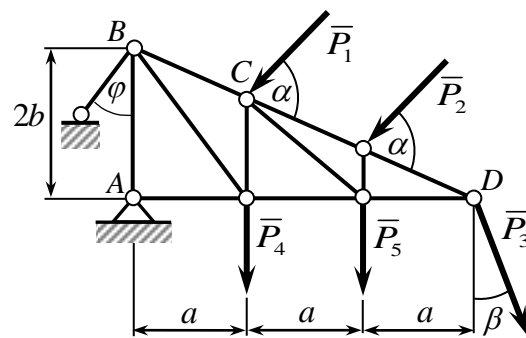
14



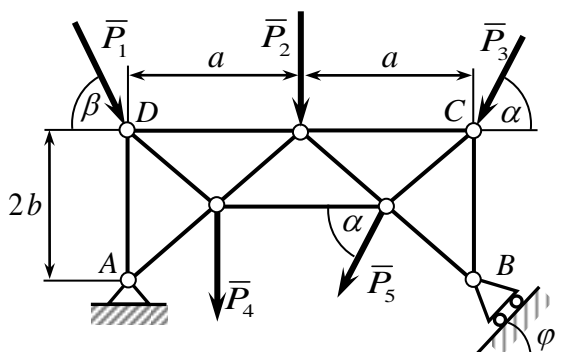
15



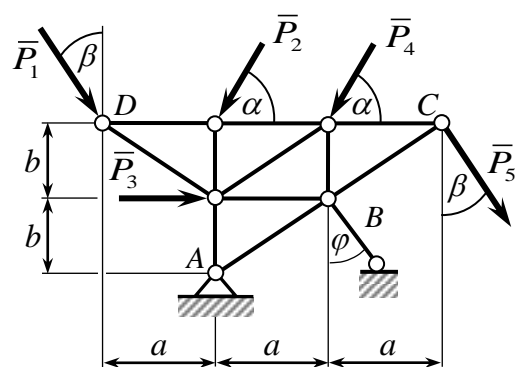
16



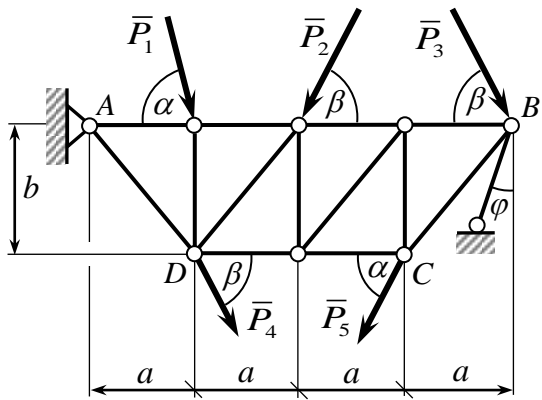
17



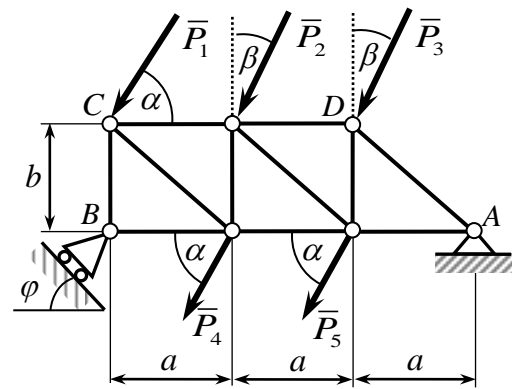
18



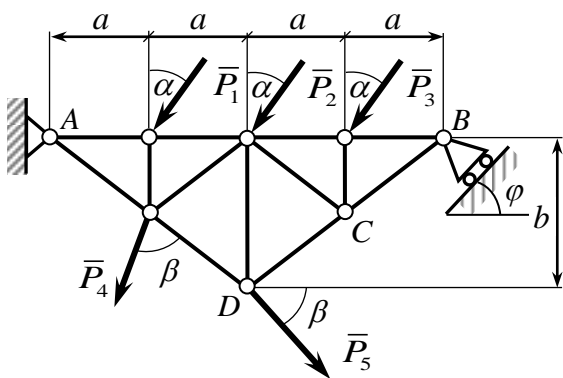
19



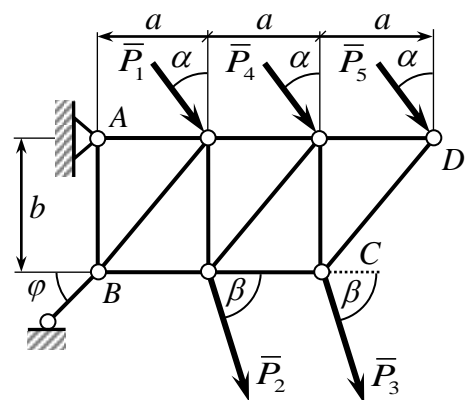
20



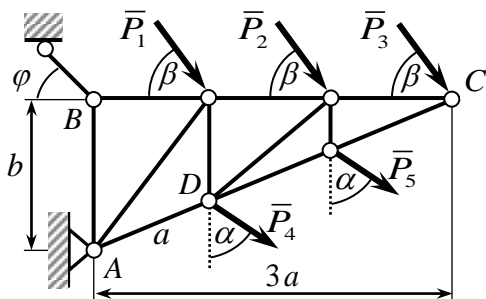
21



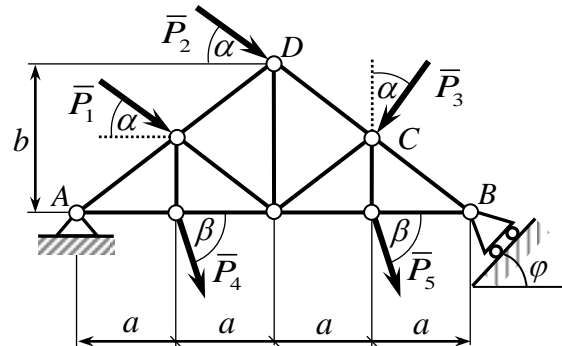
22



23

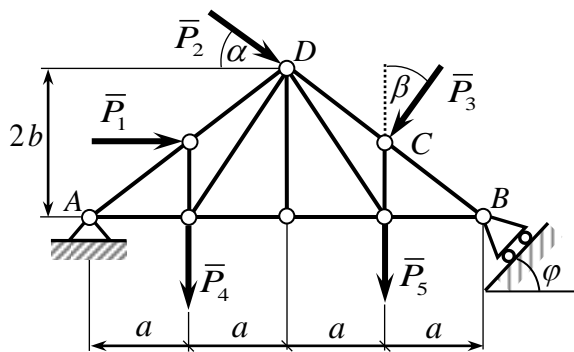


24

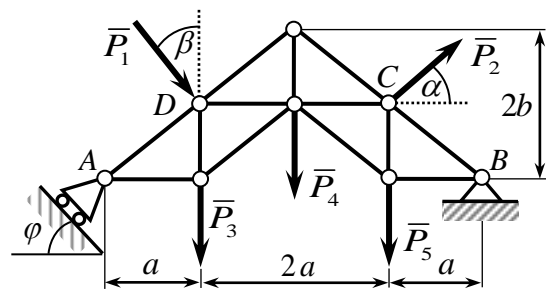


Приложение 1. Альбом заданий

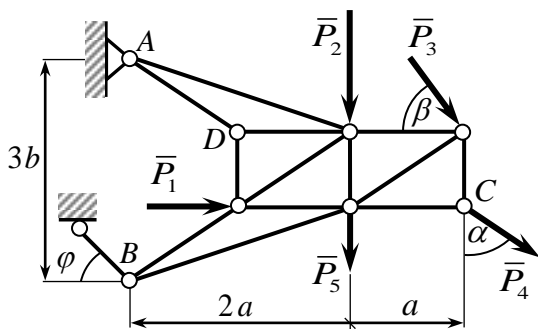
25



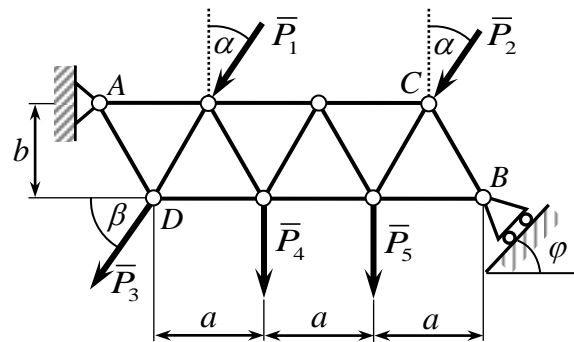
26



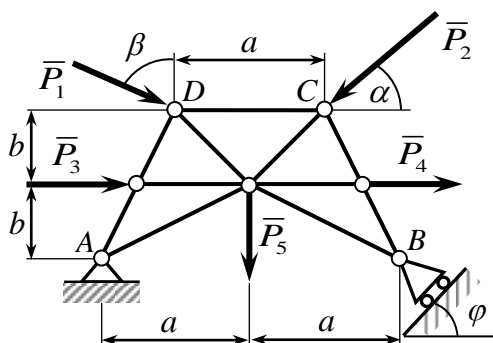
27



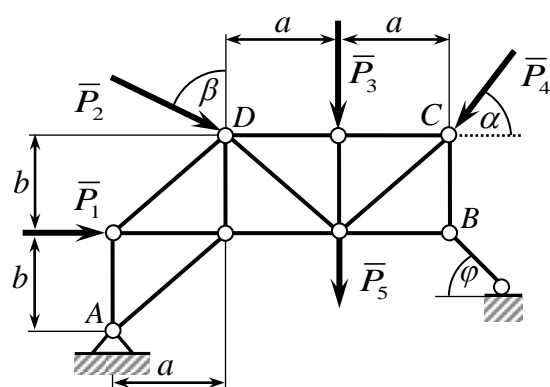
28



29



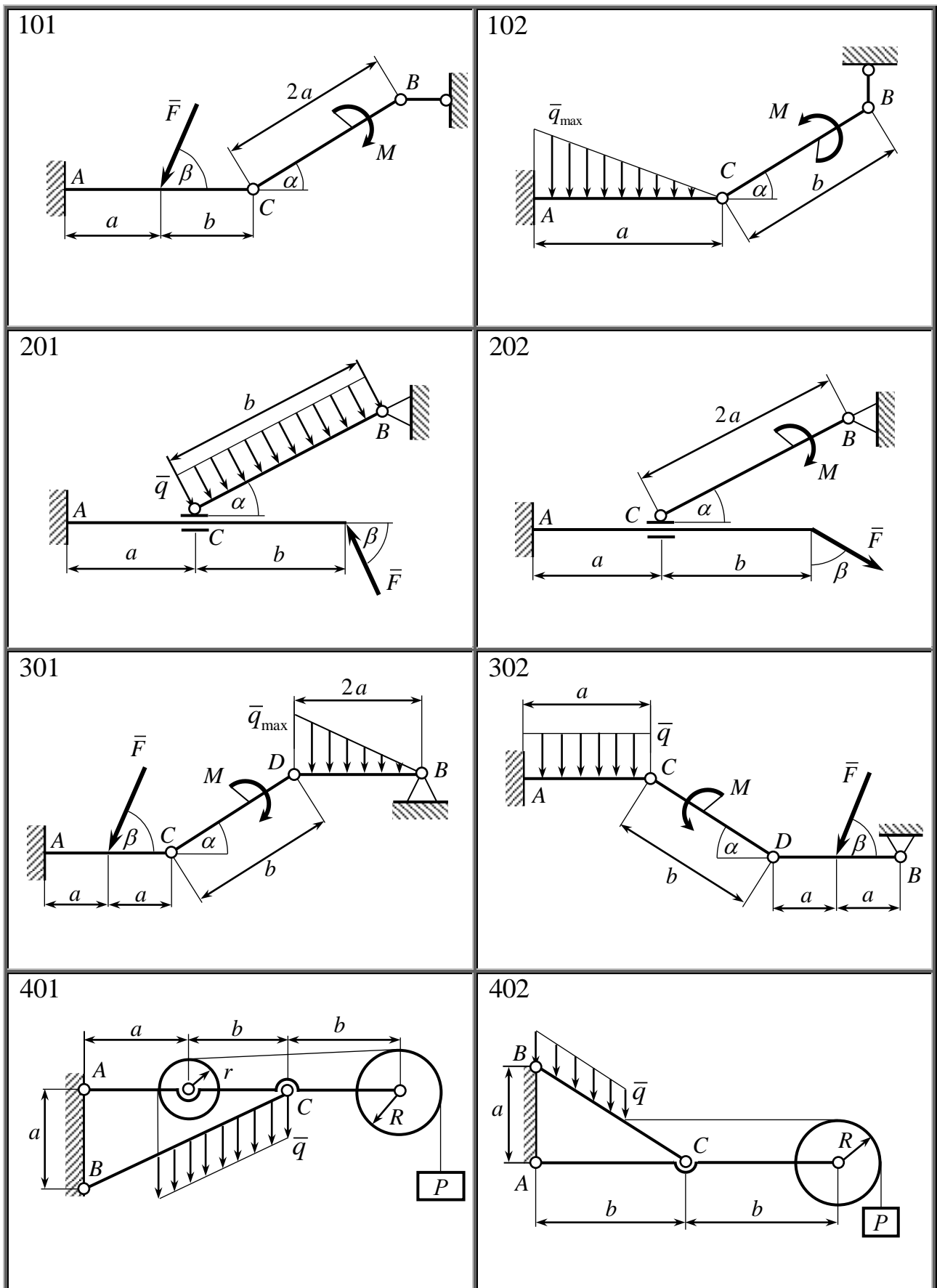
30



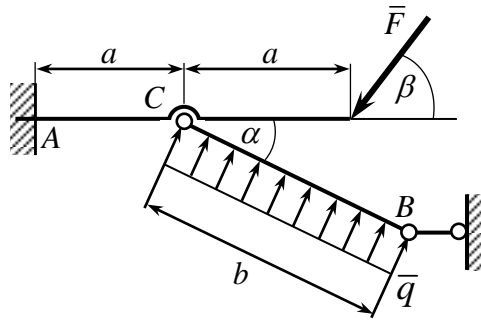
Исходные данные для ферм

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a, [м]$	0,2	0,3	0,5	0,4	1,1	0,6	0,9	0,7	1,0	0,8
$b, [м]$	0,3	0,4	0,6	0,5	1,3	0,9	1,3	1,1	1,5	1,0
$P_1, [кН]$	100	150	200	250	300	250	200	150	100	250
$P_2, [кН]$	150	200	250	300	100	300	200	100	150	100
$P_3, [кН]$	200	250	300	100	150	100	250	300	250	100
$P_4, [кН]$	250	300	100	150	250	150	150	100	150	200
$P_5, [кН]$	300	100	150	200	250	200	100	300	200	150
$\alpha, [^\circ]$	15	30	45	60	75	15	45	60	15	75
$\beta, [^\circ]$	60	45	15	30	60	75	60	75	30	30
$\varphi, [^\circ]$	30	15	30	45	15	30	30	60	45	15
Силы	1,2, 3,4	1,3, 4,5	1,2, 3,5	2,3, 4,5	1,2, 4,5	1,2, 3,4	1,3, 4,5	1,2, 3,5	2,3, 4,5	1,2, 4,5

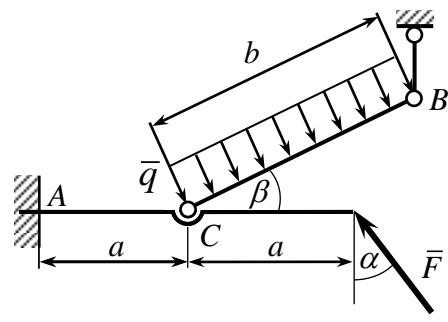
Схемы составных конструкций



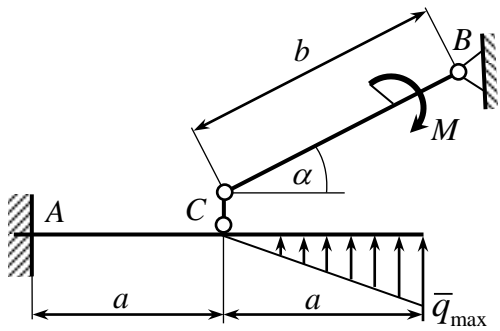
103



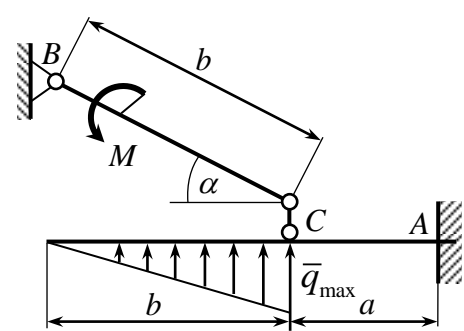
104



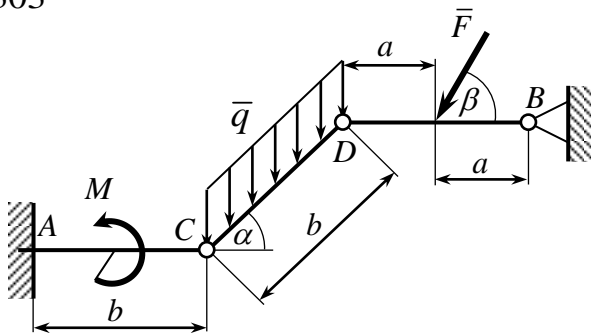
203



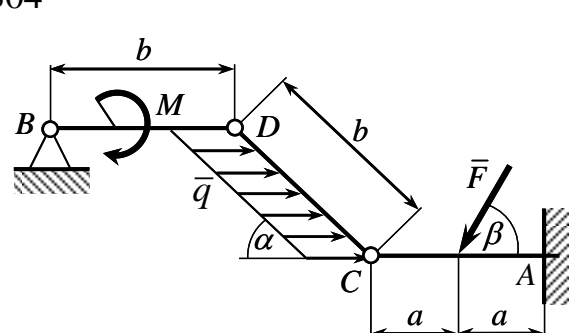
204



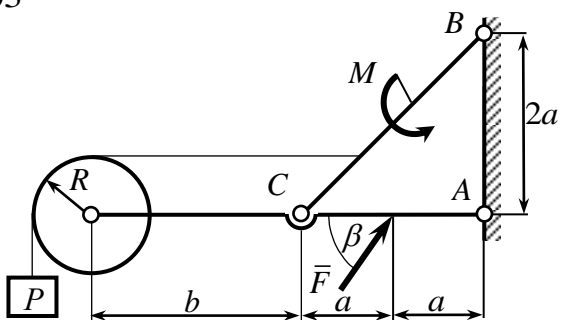
303



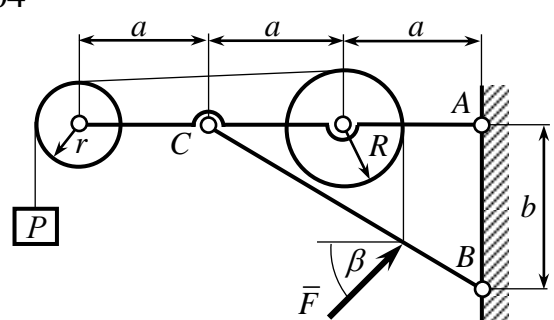
304



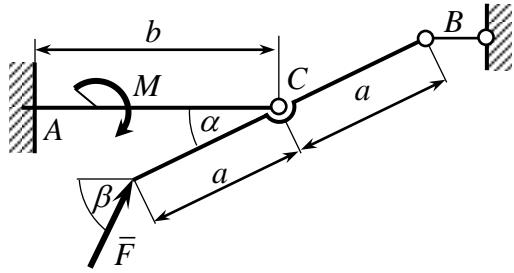
403



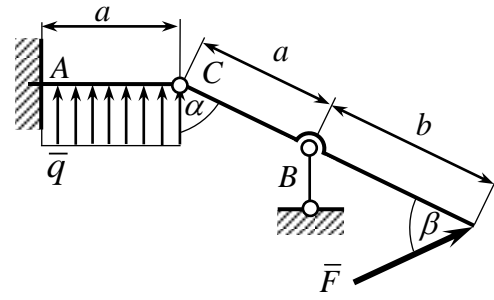
404



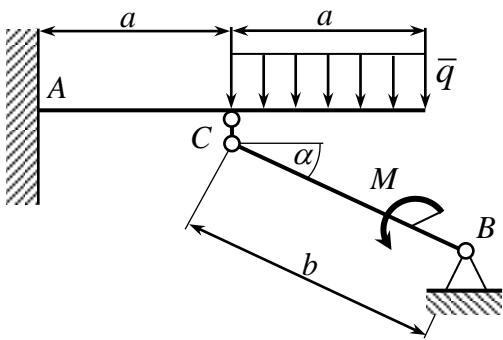
105



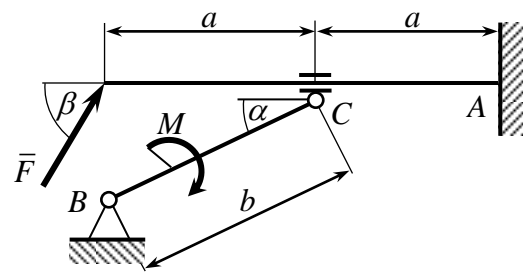
106



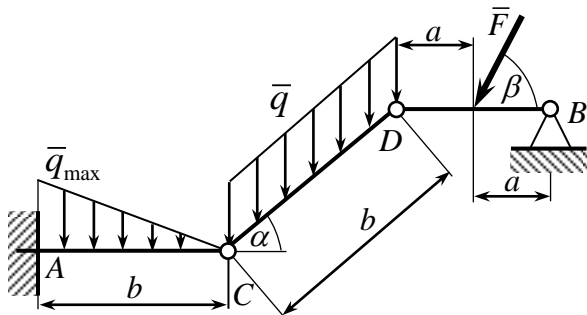
205



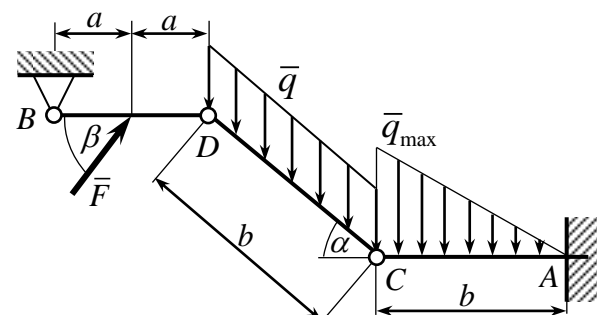
206



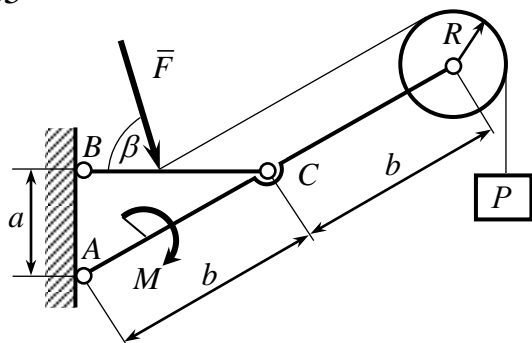
305



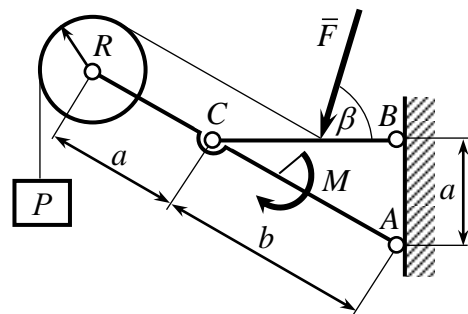
306



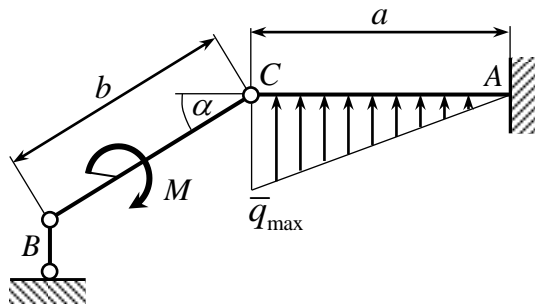
405



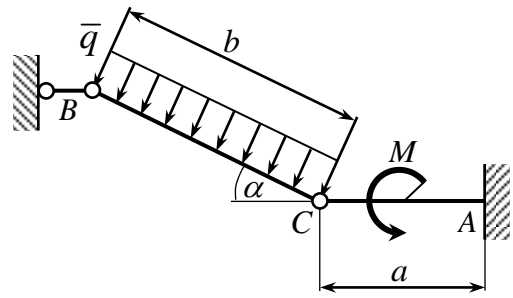
406



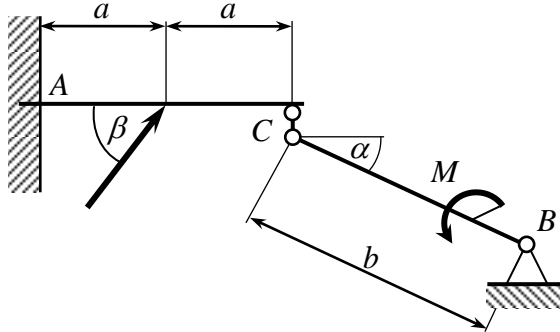
107



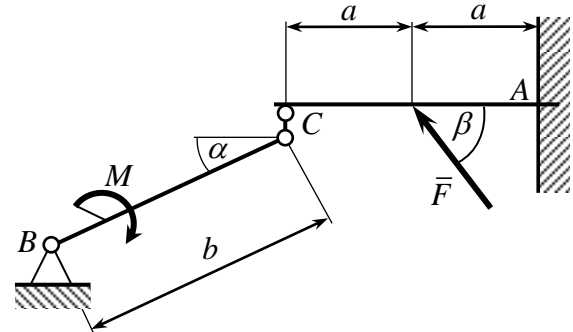
108



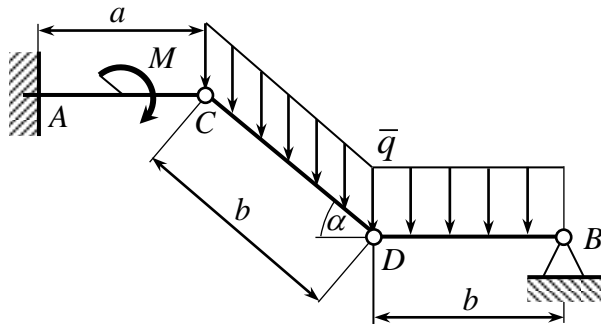
207



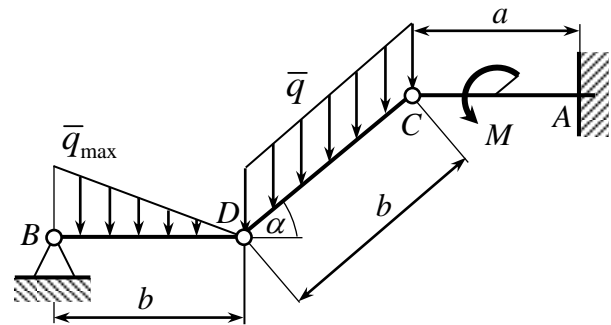
208



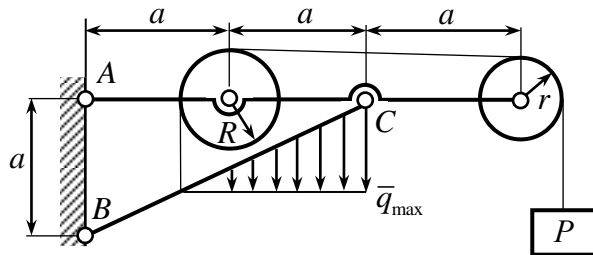
307



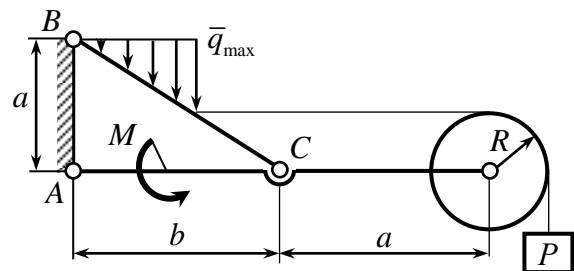
308

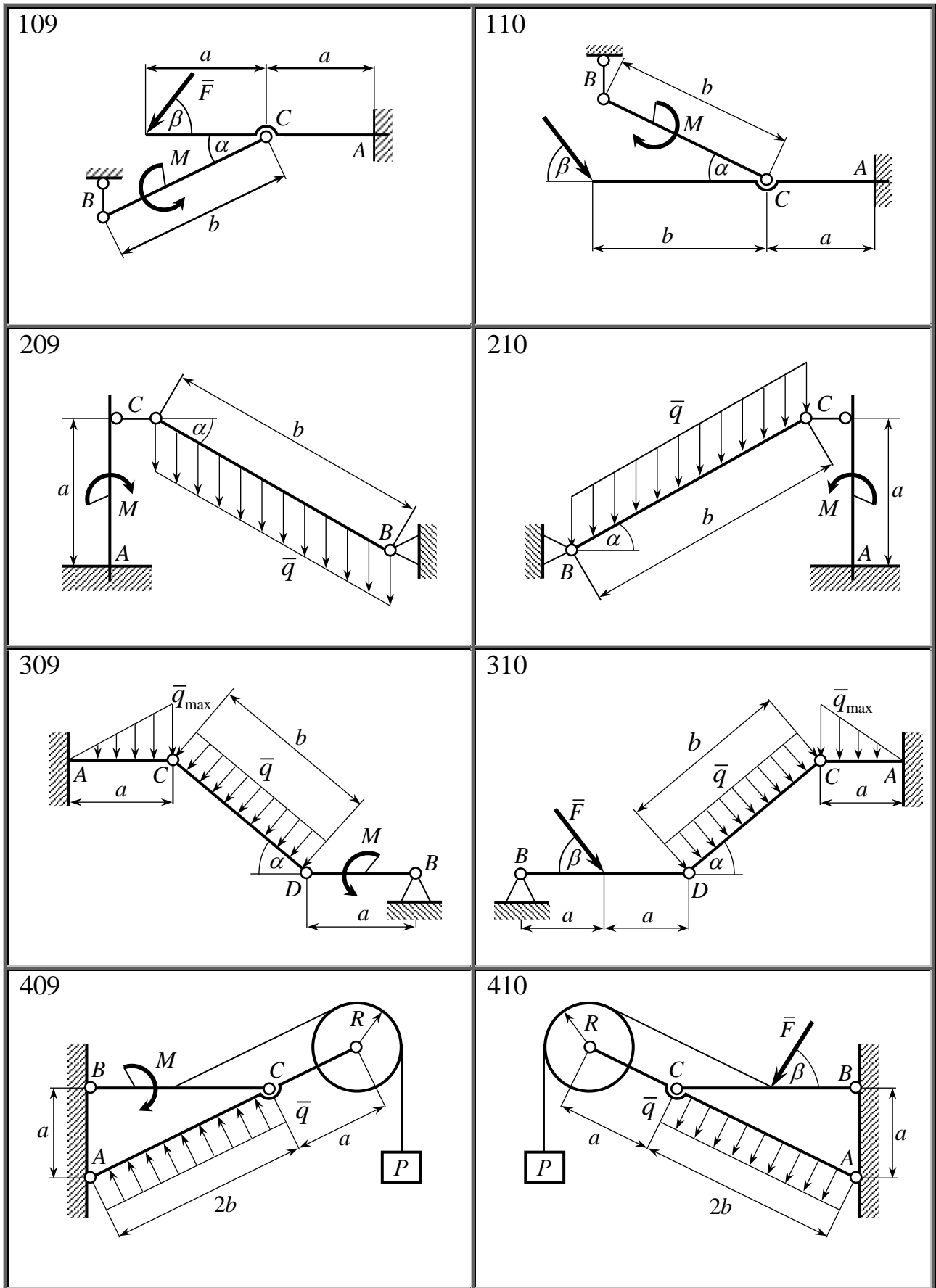


407

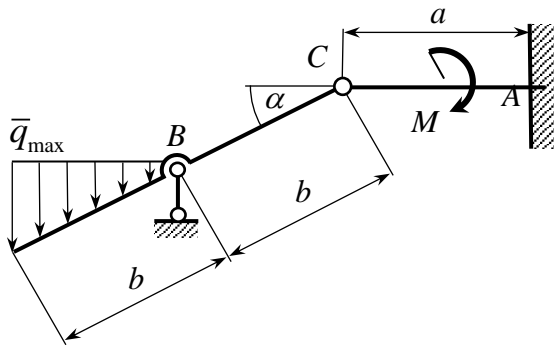


408

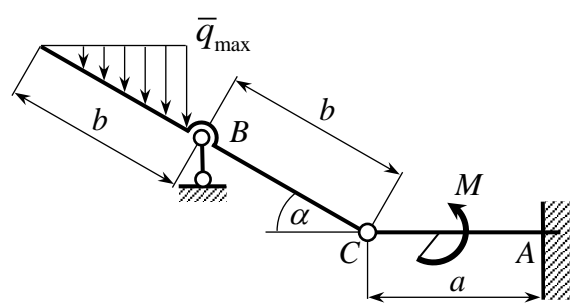




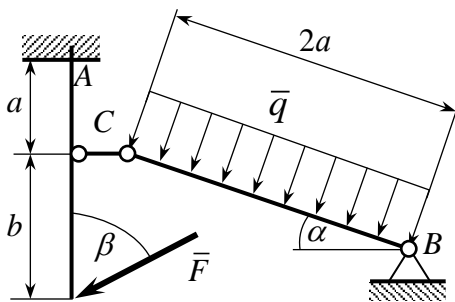
111



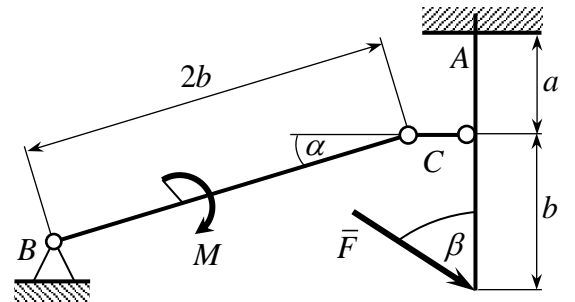
112



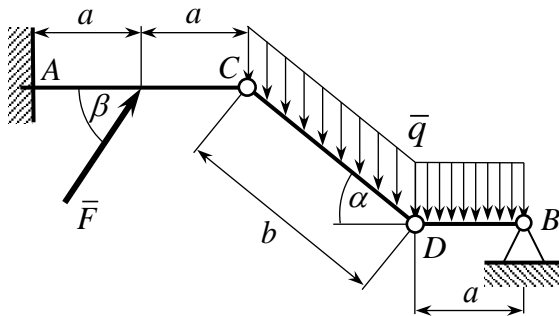
211



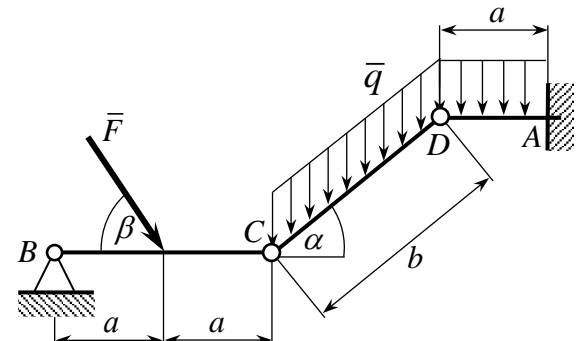
212



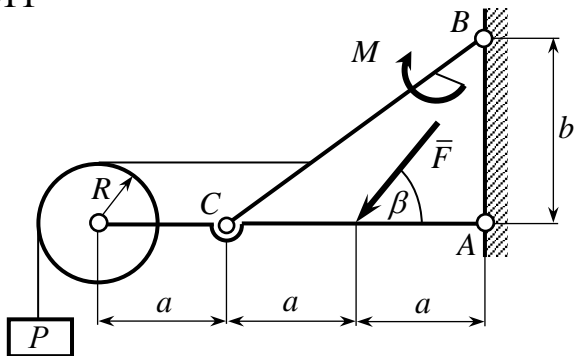
311



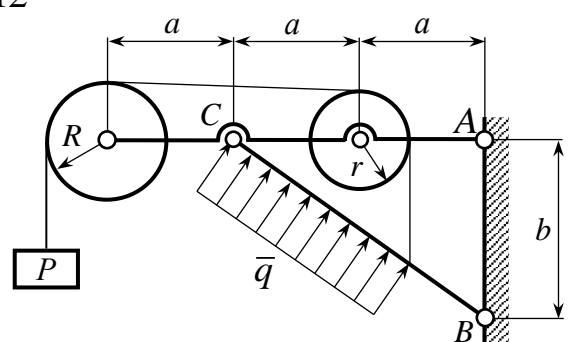
312

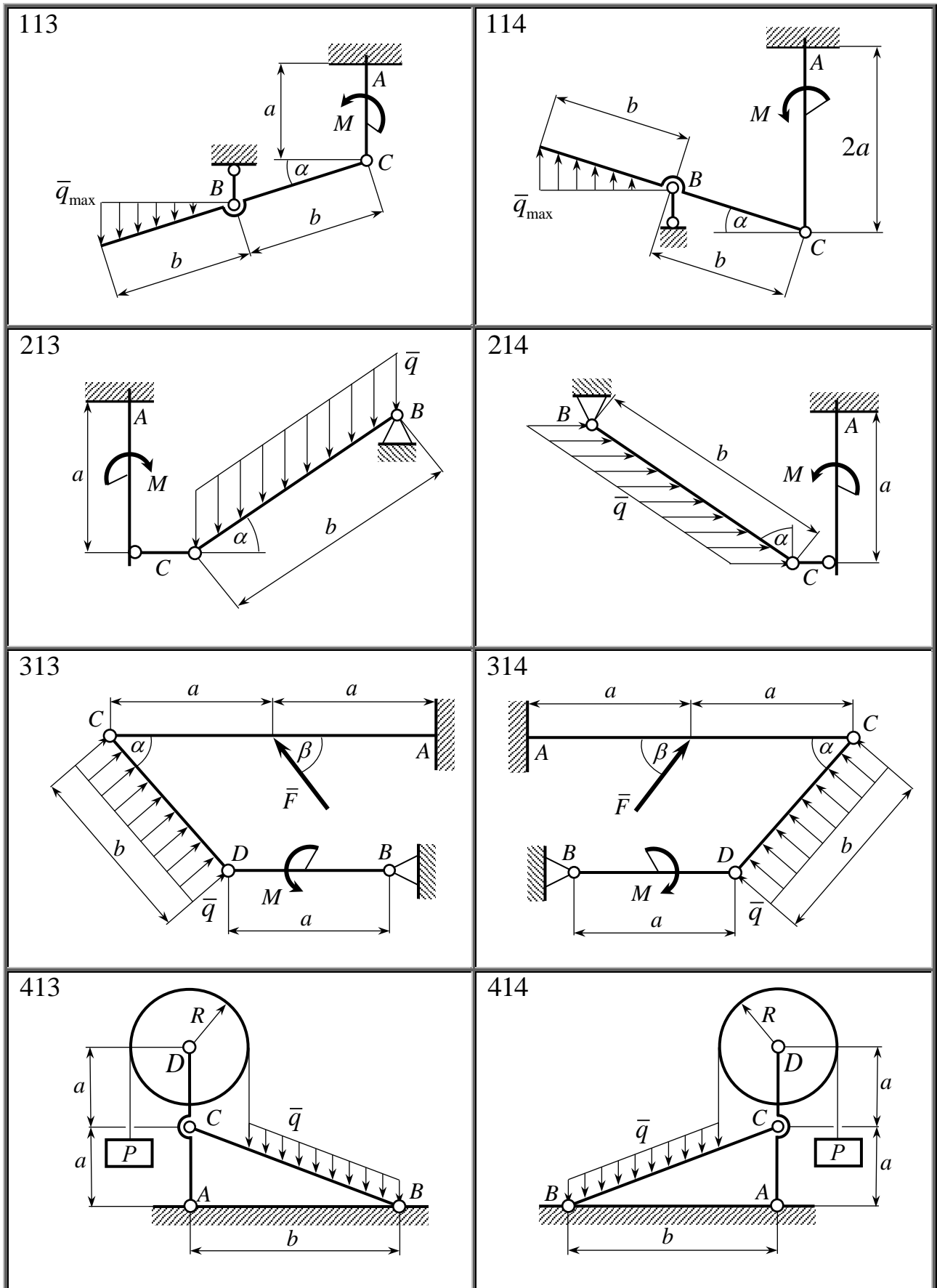


411

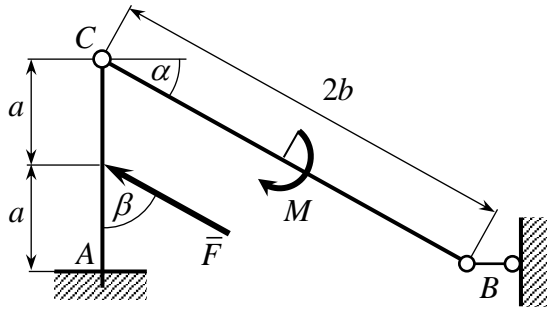


412

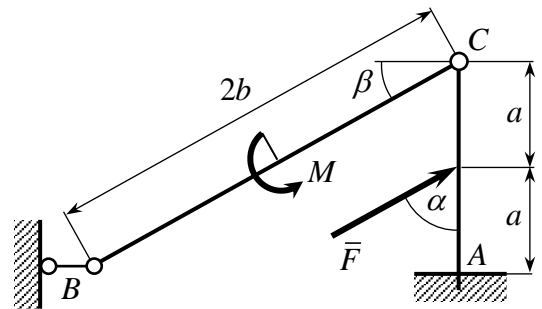




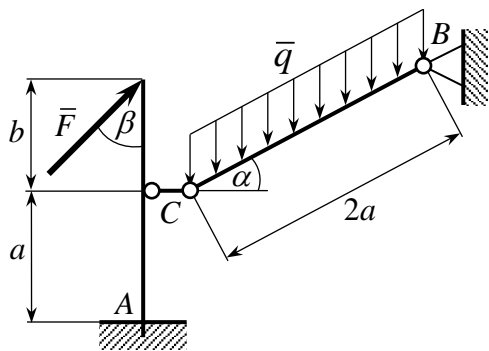
115



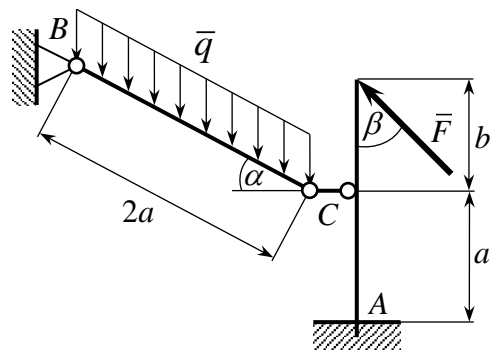
116



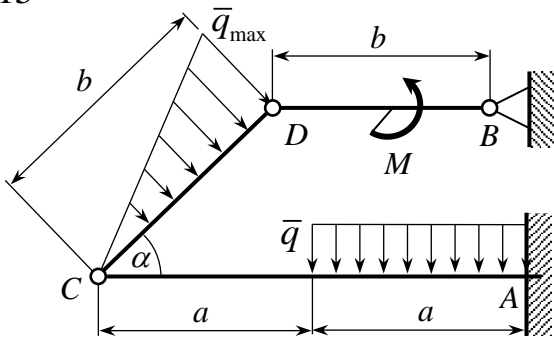
215



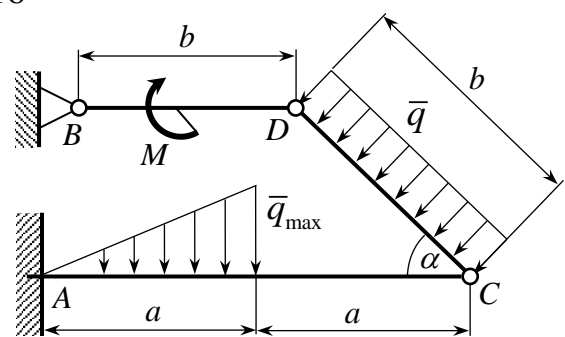
216



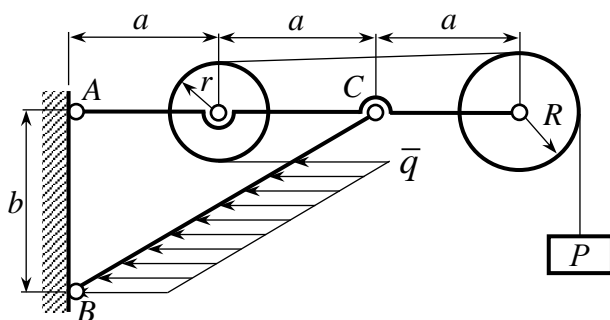
315



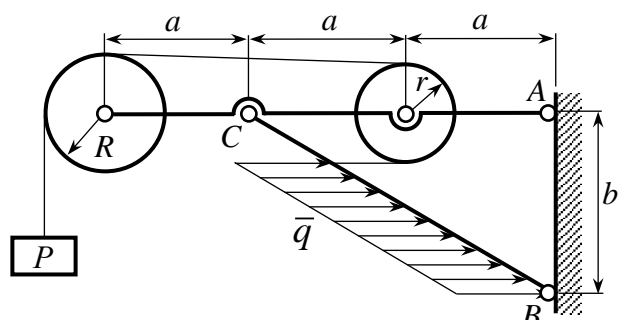
316

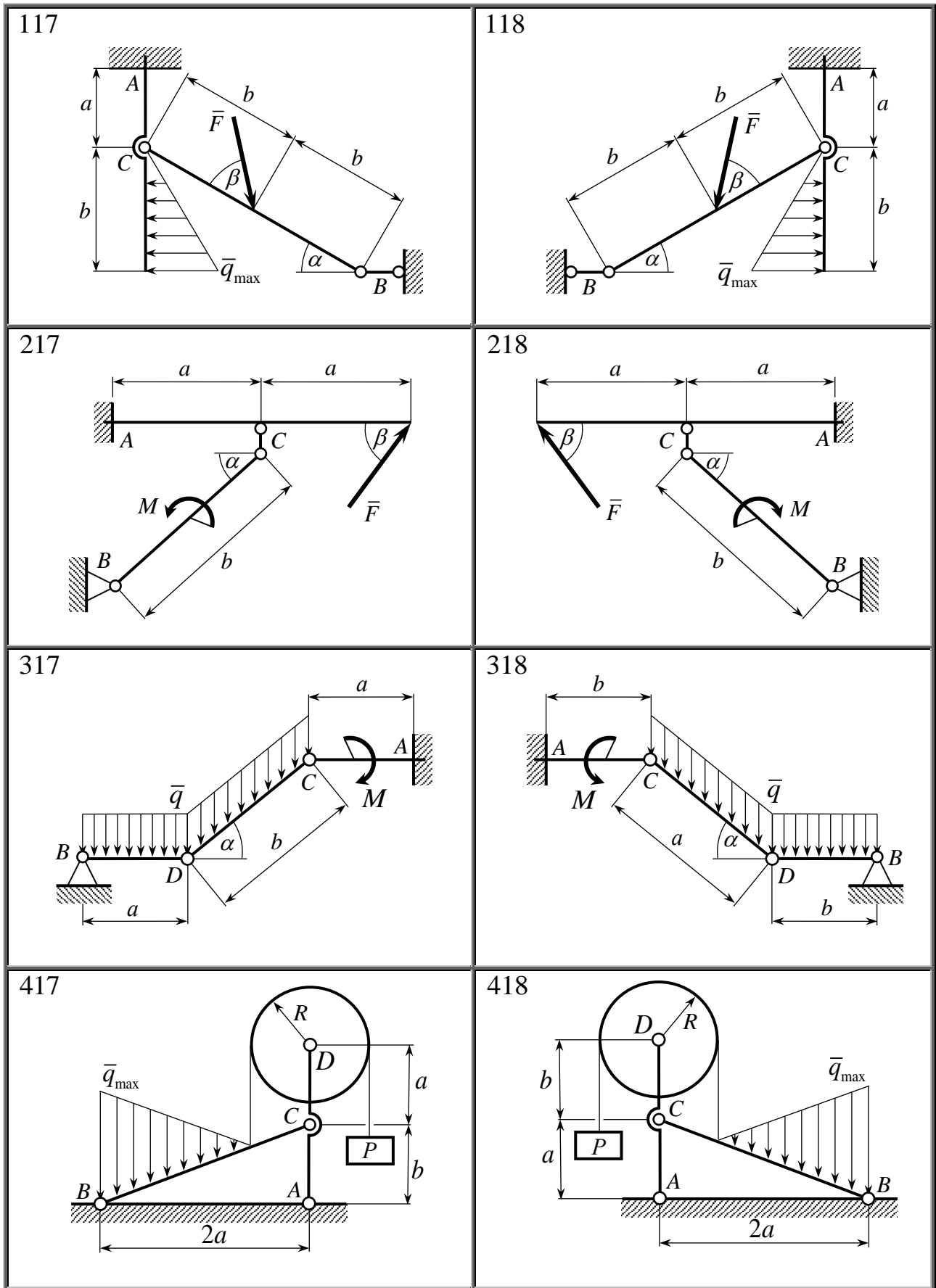


415

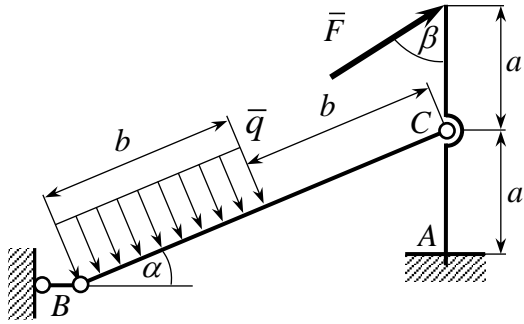


416

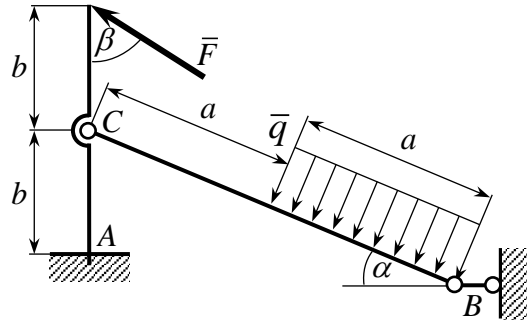




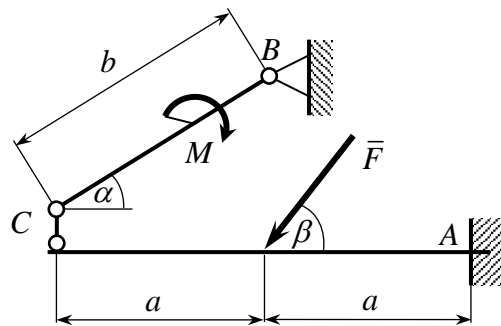
119



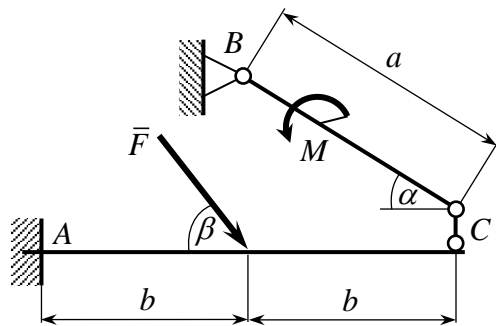
120



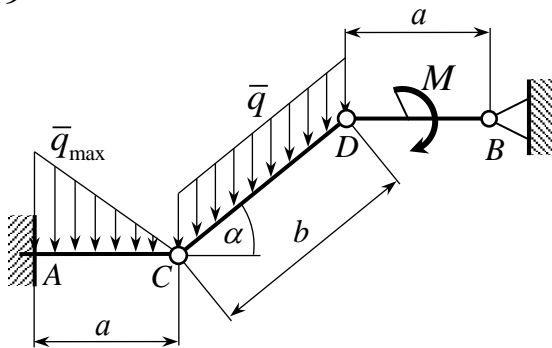
219



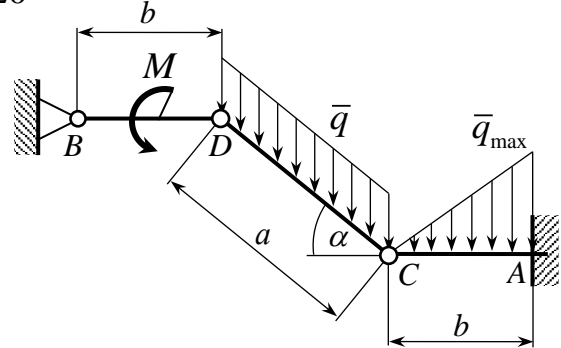
220



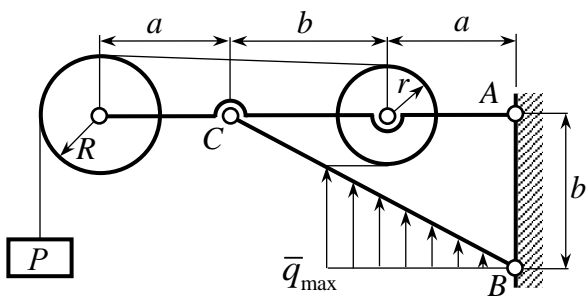
319



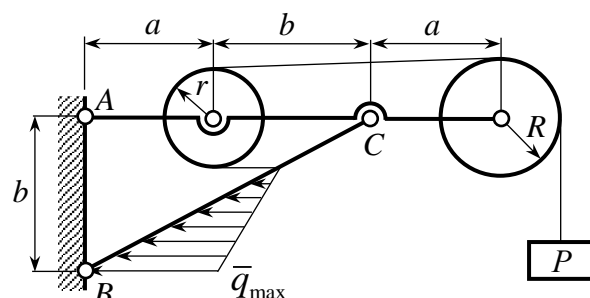
320

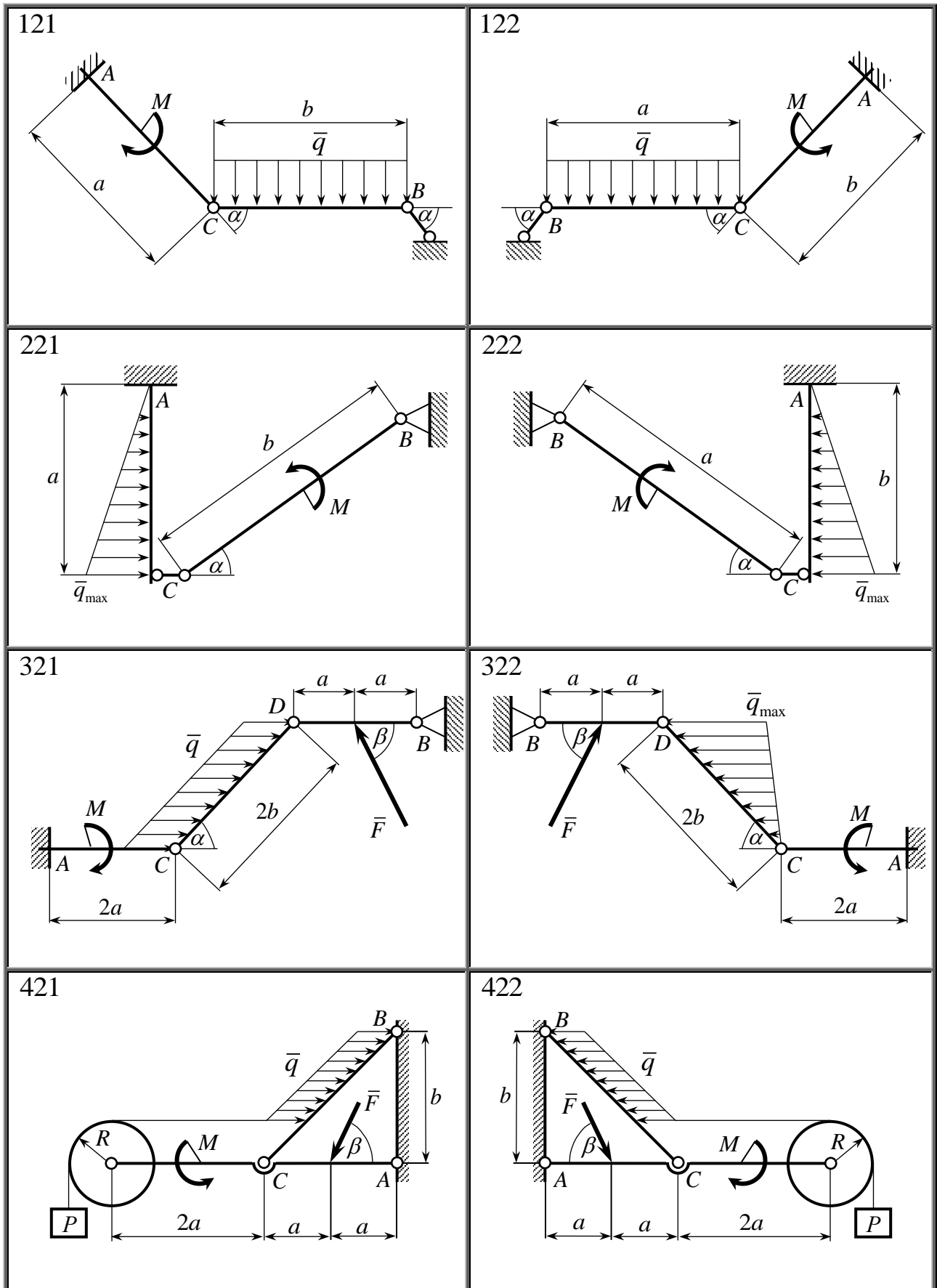


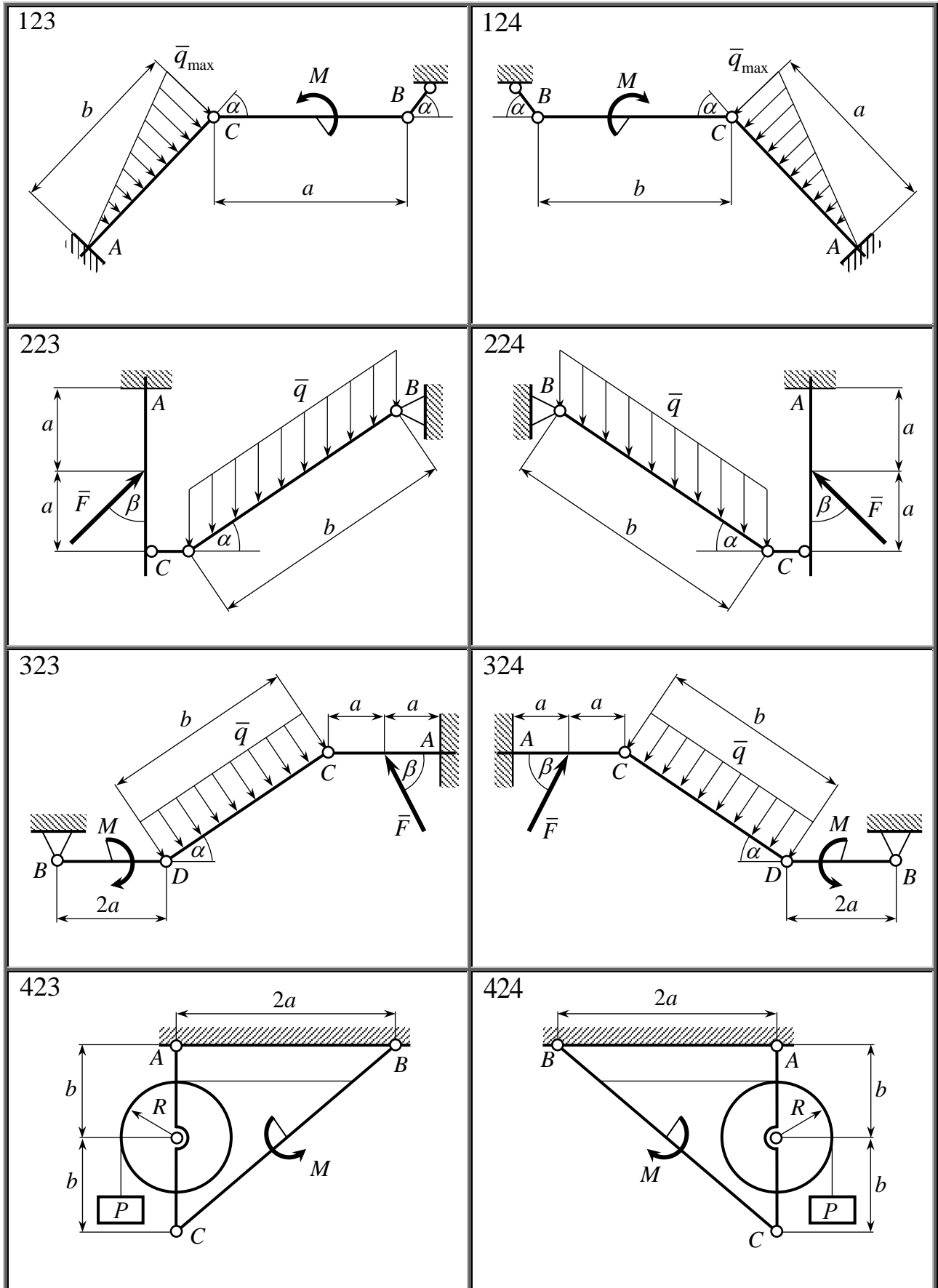
419

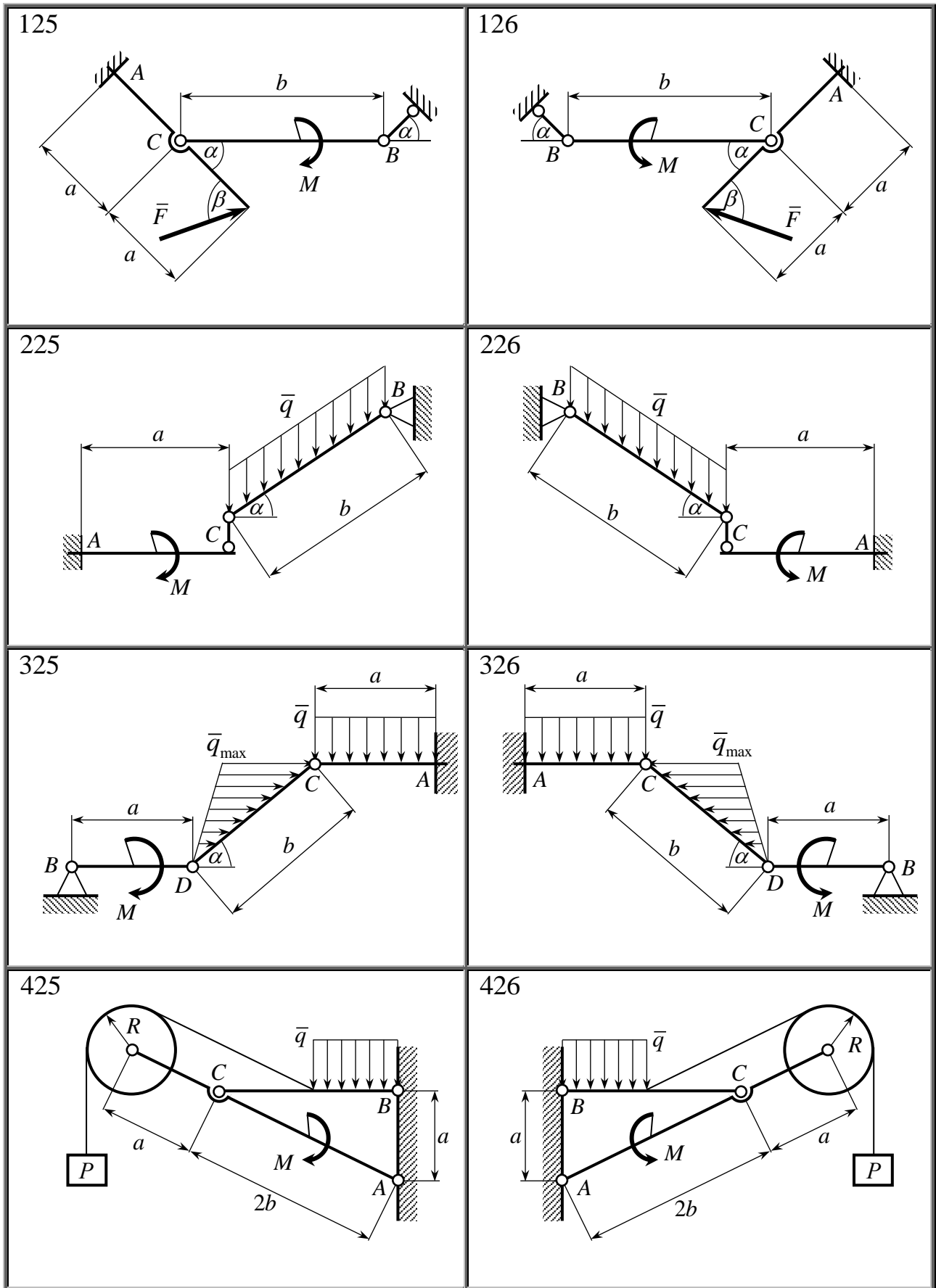


420

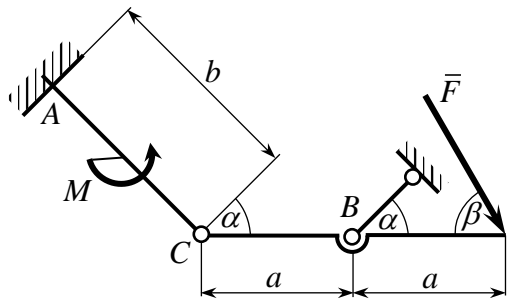




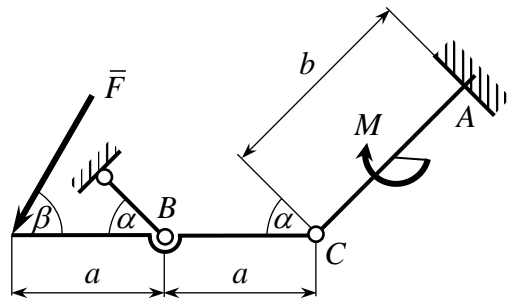




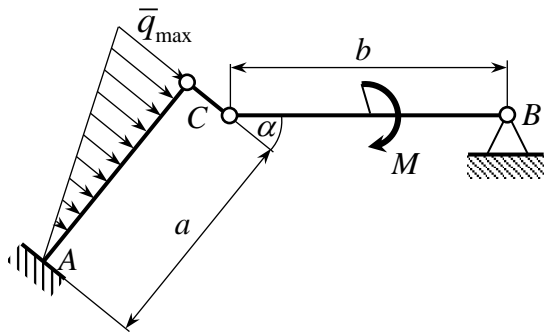
127



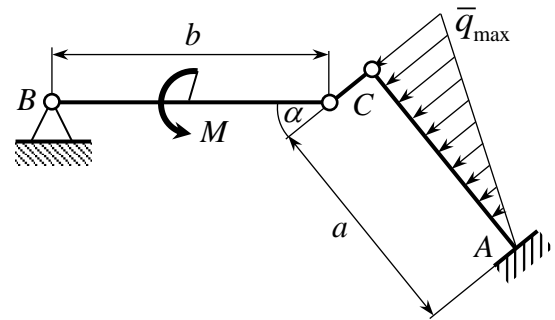
128



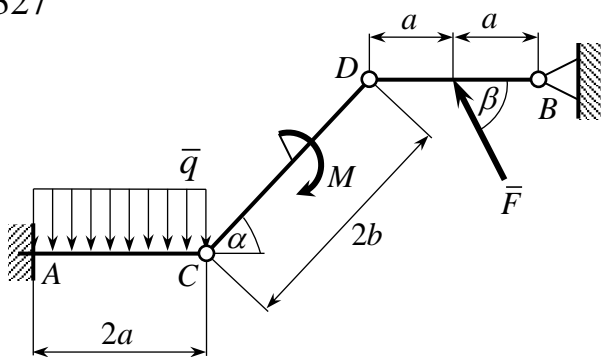
227



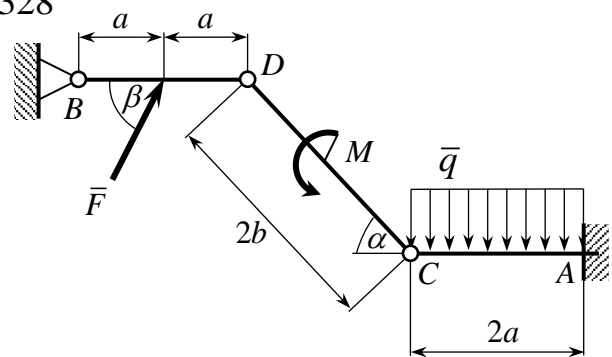
228



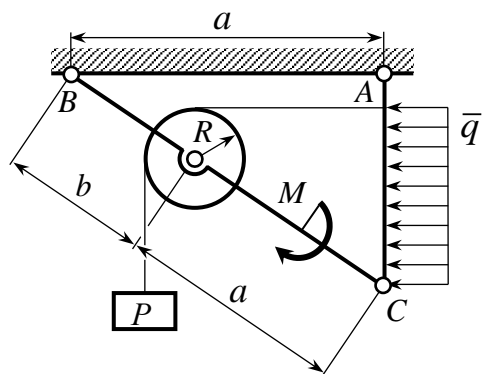
327



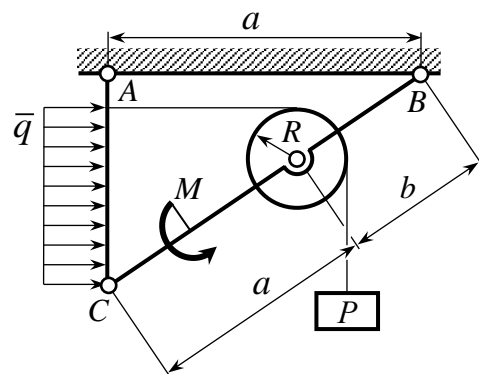
328

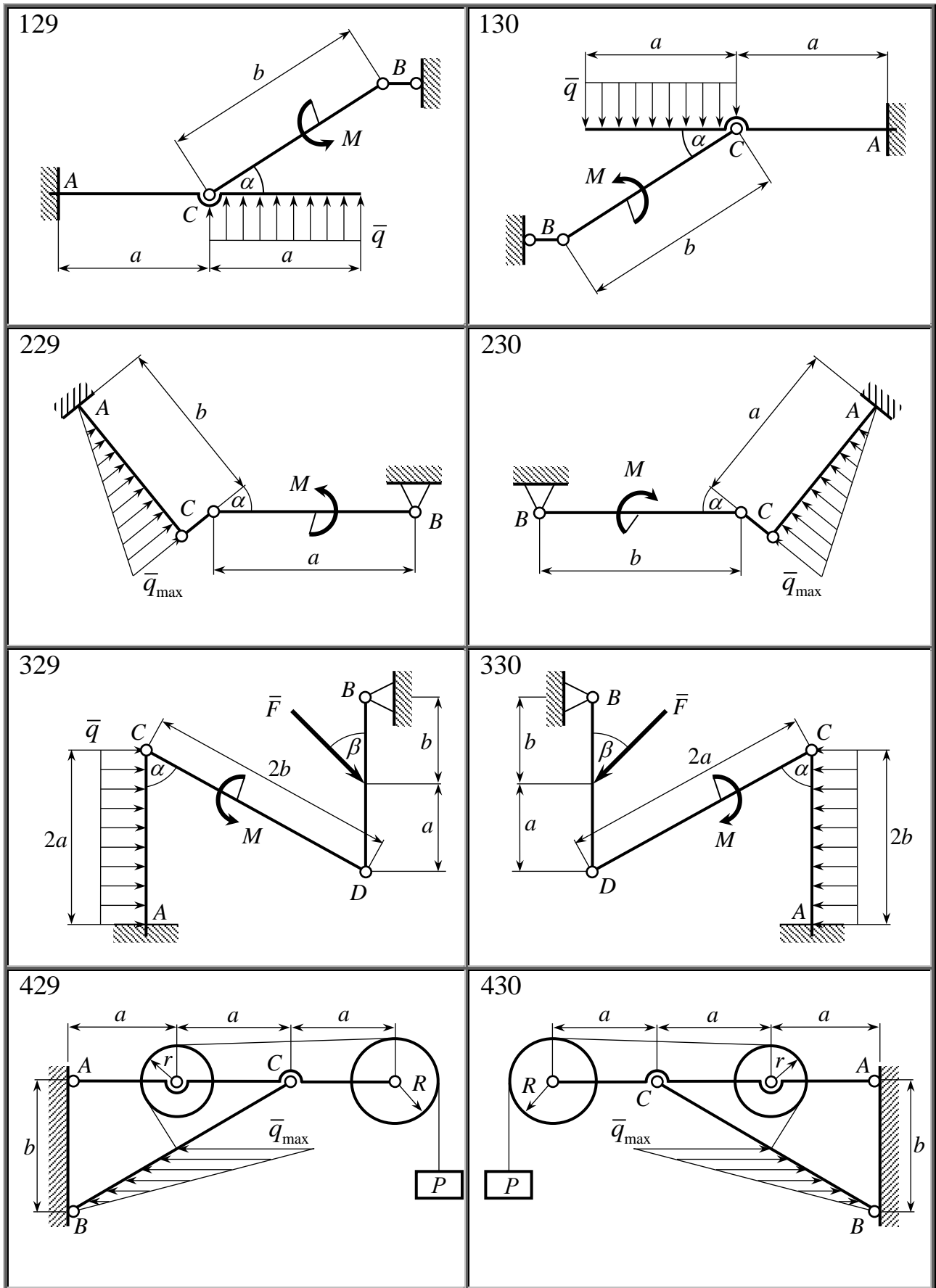


427



428





Исходные данные для составных конструкций

№	F кН	P кН	q кН/м	q_{\max} кН/м	M кН м	a м	b м	r м	R м	α град	β град
1	14	11	4,0	9,0	21	1,5	1,8	0,20	0,50	30	75
2	16	14	2,0	7,5	23	1,2	1,9	0,30	0,55	15	45
3	13	15	5,2	8,0	23	1,3	1,6	0,30	0,45	60	30
4	18	13	3,6	6,5	18	1,2	1,8	0,15	0,30	75	60
5	16	12	2,8	7,0	25	1,0	1,7	0,15	0,30	45	30
6	12	10	5,2	8,0	22	1,1	1,5	0,15	0,20	30	75
7	15	14	4,4	9,5	25	1,1	1,5	0,15	0,25	60	60
8	13	8	4,0	5,5	16	1,3	1,8	0,15	0,40	15	15
9	13	14	5,6	9,5	22	1,4	1,9	0,20	0,30	30	45
10	16	13	5,2	5,5	16	1,4	2,2	0,25	0,30	45	60
11	18	8	4,4	6,0	20	1,0	1,4	0,25	0,35	45	30
12	16	6	2,4	9,5	21	1,3	1,9	0,25	0,40	45	15
13	16	7	2,8	8,5	21	1,3	1,5	0,25	0,35	30	75
14	18	8	4,0	7,0	16	1,5	1,7	0,10	0,20	30	45
15	13	14	5,2	9,0	19	1,0	1,3	0,15	0,25	30	60
16	13	11	3,6	9,5	25	1,4	1,8	0,10	0,15	60	15
17	13	11	3,2	9,0	20	1,3	1,7	0,20	0,25	45	75
18	10	14	3,2	5,0	20	1,5	2,0	0,30	0,40	75	60
19	19	7	4,4	9,0	17	1,4	1,8	0,20	0,45	30	45
20	14	12	2,8	5,5	23	1,1	1,8	0,15	0,30	60	45
21	18	7	5,2	7,0	21	1,2	2,1	0,15	0,20	60	30
22	17	8	6,0	6,0	21	1,1	2,0	0,25	0,30	45	15
23	11	9	4,8	9,5	23	1,2	2,0	0,10	0,15	60	45
24	17	13	5,6	7,5	20	1,1	2,1	0,20	0,25	60	30
25	18	13	4,4	6,0	25	1,2	1,9	0,15	0,35	60	15
26	17	6	5,6	8,0	23	1,3	1,6	0,25	0,45	45	60
27	19	11	2,4	8,5	21	1,3	2,2	0,25	0,30	45	15
28	20	8	4,8	5,5	22	1,2	2,1	0,10	0,20	60	30
29	13	8	3,2	9,5	18	1,1	1,6	0,25	0,30	60	75
30	12	6	4,8	7,5	24	1,0	1,8	0,20	0,30	45	60

Приложение 1. Альбом заданий

Таблица определяемых реакций

№	101–130	201–230	301–330	401–430
1	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_A, M_A	\bar{R}_A
2	\bar{R}_A, M_A	\bar{X}_B, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
3	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{X}_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_A, \bar{X}_B
4	M_A, \bar{Y}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
5	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_A, M_A	\bar{Y}_B, \bar{Y}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
6	M_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{X}_B, \bar{X}_C
7	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{X}_A, \bar{R}_B	\bar{X}_A, \bar{X}_C
8	\bar{R}_A, \bar{R}_B	\bar{Y}_B, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
9	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{Y}_A, \bar{Y}_B
10	\bar{Y}_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_A, \bar{Y}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
11	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{X}_A, \bar{X}_B	\bar{R}_C	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
12	\bar{R}_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{X}_B, \bar{R}_C
13	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_B	\bar{R}_A, \bar{Y}_B
14	\bar{Y}_A, \bar{R}_C	\bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
15	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{X}_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_A, \bar{X}_C
16	\bar{X}_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	M_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
17	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_A, \bar{R}_B	\bar{X}_C, \bar{Y}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
18	\bar{R}_B, \bar{X}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{Y}_B, \bar{R}_C
19	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	M_A, \bar{R}_B	\bar{X}_A, \bar{X}_C
20	\bar{X}_A, \bar{X}_C	\bar{X}_A, \bar{Y}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
21	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{Y}_A, \bar{R}_C
22	\bar{Y}_A, \bar{Y}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_C, \bar{Y}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
23	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_A, \bar{R}_C	M_A, \bar{R}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
24	\bar{R}_B, \bar{Y}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_B
25	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_A, \bar{Y}_B	\bar{R}_A, \bar{Y}_C

Приложение 1. Альбом заданий

№	101–130	201–230	301–330	401–430
26	\bar{X}_A, \bar{R}_C	\bar{R}_B, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
27	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	M_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_C
28	M_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_B, \bar{Y}_C	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
29	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	M_A, \bar{R}_B	\bar{R}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
30	\bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_B, \bar{Y}_C
31	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_A, M_A	\bar{R}_A, \bar{Y}_C
32	\bar{R}_A, M_A	\bar{R}_B, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
33	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{X}_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_C
34	M_A, \bar{Y}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_B, \bar{Y}_C	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
35	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_A, M_A	\bar{R}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
36	M_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_A, \bar{Y}_C
37	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{X}_A, \bar{R}_B	\bar{R}_A
38	\bar{R}_A, \bar{R}_B	\bar{X}_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
39	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_A, \bar{X}_B
40	\bar{Y}_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
41	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{X}_A, \bar{X}_B	\bar{Y}_B, \bar{Y}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
42	\bar{R}_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{X}_B, \bar{X}_C
43	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_B	\bar{X}_A, \bar{X}_C
44	\bar{Y}_A, \bar{R}_C	\bar{Y}_B, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
45	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{X}_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{Y}_A, \bar{Y}_B
46	\bar{X}_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_A, \bar{Y}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
47	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_A, \bar{R}_B	\bar{R}_C	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
48	\bar{R}_B, \bar{X}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{X}_B, \bar{R}_C
49	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_B	\bar{R}_A, \bar{Y}_B
50	\bar{X}_A, \bar{X}_C	\bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
51	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_A, \bar{X}_C

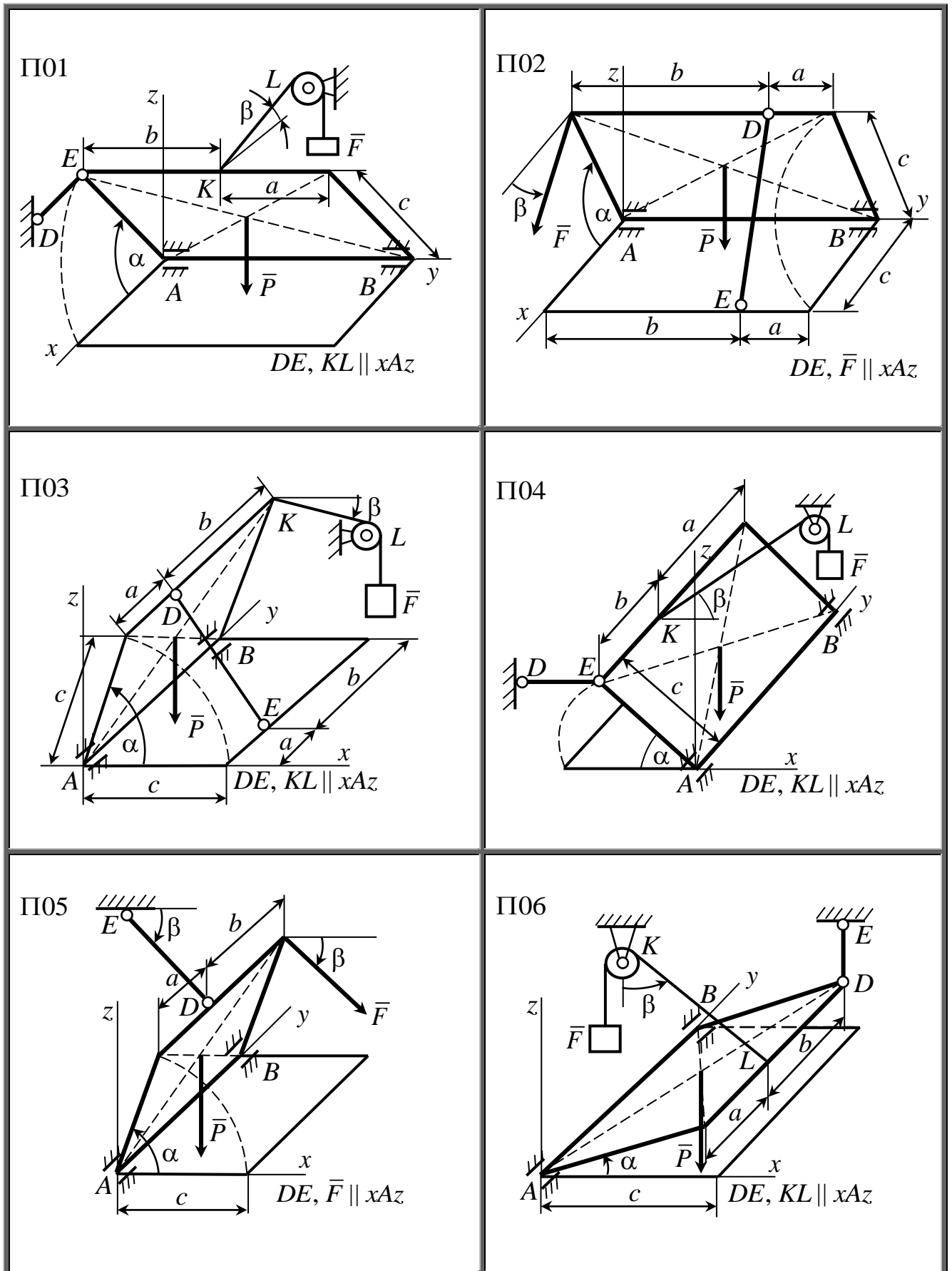
Приложение 1. Альбом заданий

№	101–130	201–230	301–330	401–430
52	\bar{Y}_A, \bar{Y}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	M_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
53	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_A, \bar{R}_C	\bar{X}_C, \bar{Y}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
54	\bar{R}_B, \bar{Y}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{Y}_B, \bar{R}_C
55	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_A, \bar{Y}_B	\bar{X}_A, \bar{X}_C
56	\bar{X}_A, \bar{R}_C	\bar{Y}_A, \bar{Y}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
57	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	M_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{Y}_A, \bar{R}_C
58	M_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_C, \bar{Y}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
59	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	M_A, \bar{R}_B	M_A, \bar{R}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
60	\bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_B
61	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_A, M_A	\bar{R}_A, \bar{Y}_C
62	\bar{R}_A, M_A	\bar{Y}_A, \bar{Y}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
63	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_C
64	M_A, \bar{Y}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_C, \bar{Y}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
65	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_A, M_A	M_A, \bar{R}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
66	M_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_B, \bar{Y}_C
67	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{X}_A, \bar{R}_B	\bar{R}_A, \bar{Y}_C
68	\bar{R}_A, \bar{R}_B	\bar{R}_B, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
69	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_C
70	\bar{Y}_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_B, \bar{Y}_C	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
71	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{X}_A, \bar{X}_B	\bar{R}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
72	\bar{R}_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_A, \bar{Y}_C
73	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_B	\bar{R}_A
74	\bar{Y}_A, \bar{R}_C	\bar{X}_B, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
75	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{X}_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_A, \bar{X}_B
76	\bar{X}_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
77	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_A, M_A	\bar{Y}_B, \bar{Y}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$

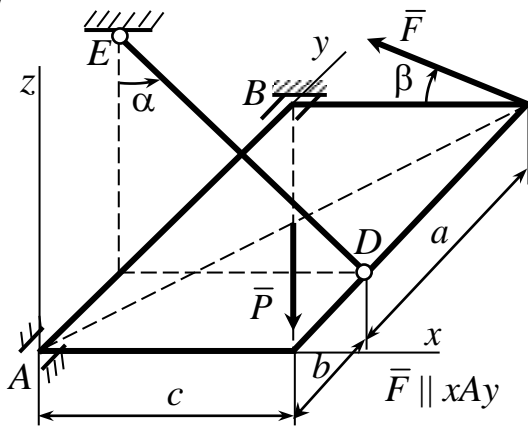
Приложение 1. Альбом заданий

№	101–130	201–230	301–330	401–430
78	\bar{R}_B, \bar{X}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{X}_B, \bar{X}_C
79	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	M_A, \bar{R}_B	\bar{X}_A, \bar{X}_C
80	\bar{X}_A, \bar{X}_C	\bar{Y}_B, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
81	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{Y}_A, \bar{Y}_B
82	\bar{Y}_A, \bar{Y}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_A, \bar{Y}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
83	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{X}_A, \bar{X}_B	\bar{R}_C	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
84	\bar{R}_B, \bar{Y}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{X}_B, \bar{R}_C
85	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_A, \bar{Y}_B	\bar{R}_A, \bar{Y}_B
86	\bar{X}_A, \bar{R}_C	\bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
87	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{X}_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_A, \bar{X}_C
88	M_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	M_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
89	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_A, \bar{R}_B	\bar{X}_C, \bar{Y}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
90	\bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{Y}_B, \bar{R}_C
91	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_A, M_A	\bar{X}_A, \bar{X}_C
92	\bar{R}_A, M_A	\bar{X}_A, \bar{Y}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
93	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{Y}_A, \bar{R}_C
94	M_A, \bar{Y}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	M_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
95	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{R}_A, \bar{R}_C	\bar{X}_C, \bar{Y}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
96	M_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_B
97	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{X}_A, \bar{R}_B	\bar{R}_A, \bar{Y}_C
98	\bar{R}_A, \bar{R}_B	\bar{R}_B, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$
99	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	M_A, \bar{R}_C	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_D$	\bar{R}_C
100	\bar{Y}_A, \bar{R}_B	$\bar{R}_A, M_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$	\bar{Y}_C, \bar{Y}_D	$\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C$

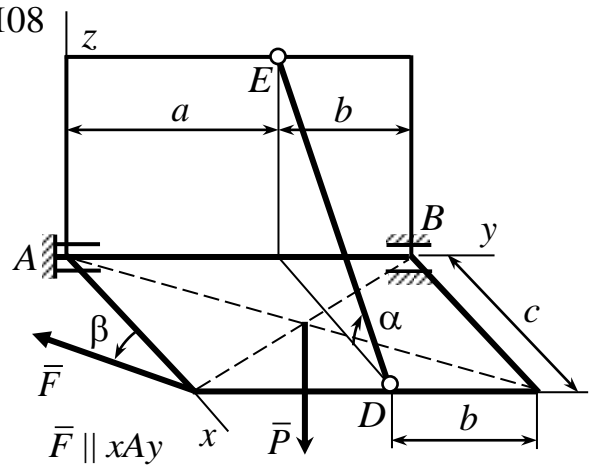
Схемы пространственных систем



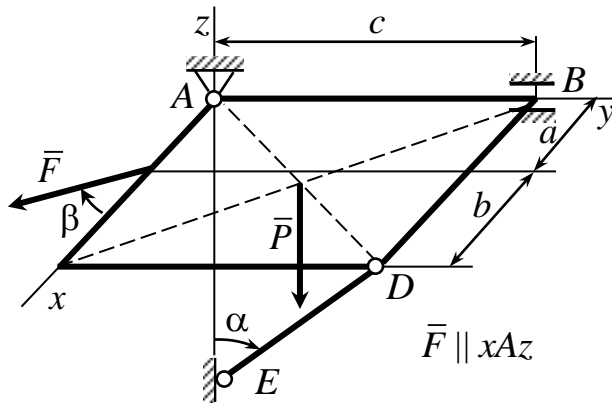
Π07



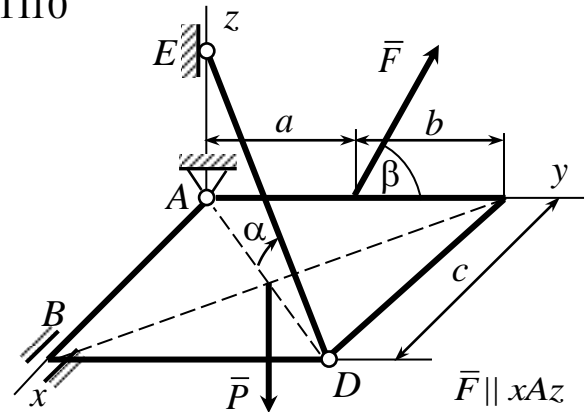
Π08



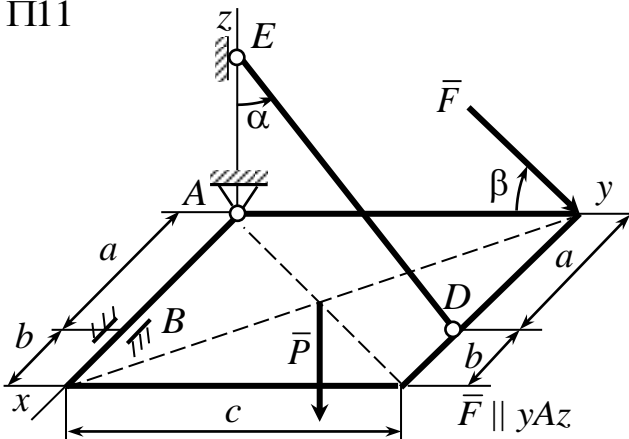
Π09



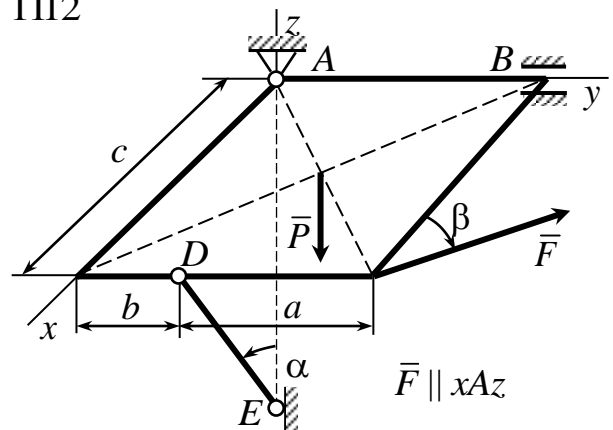
Π10

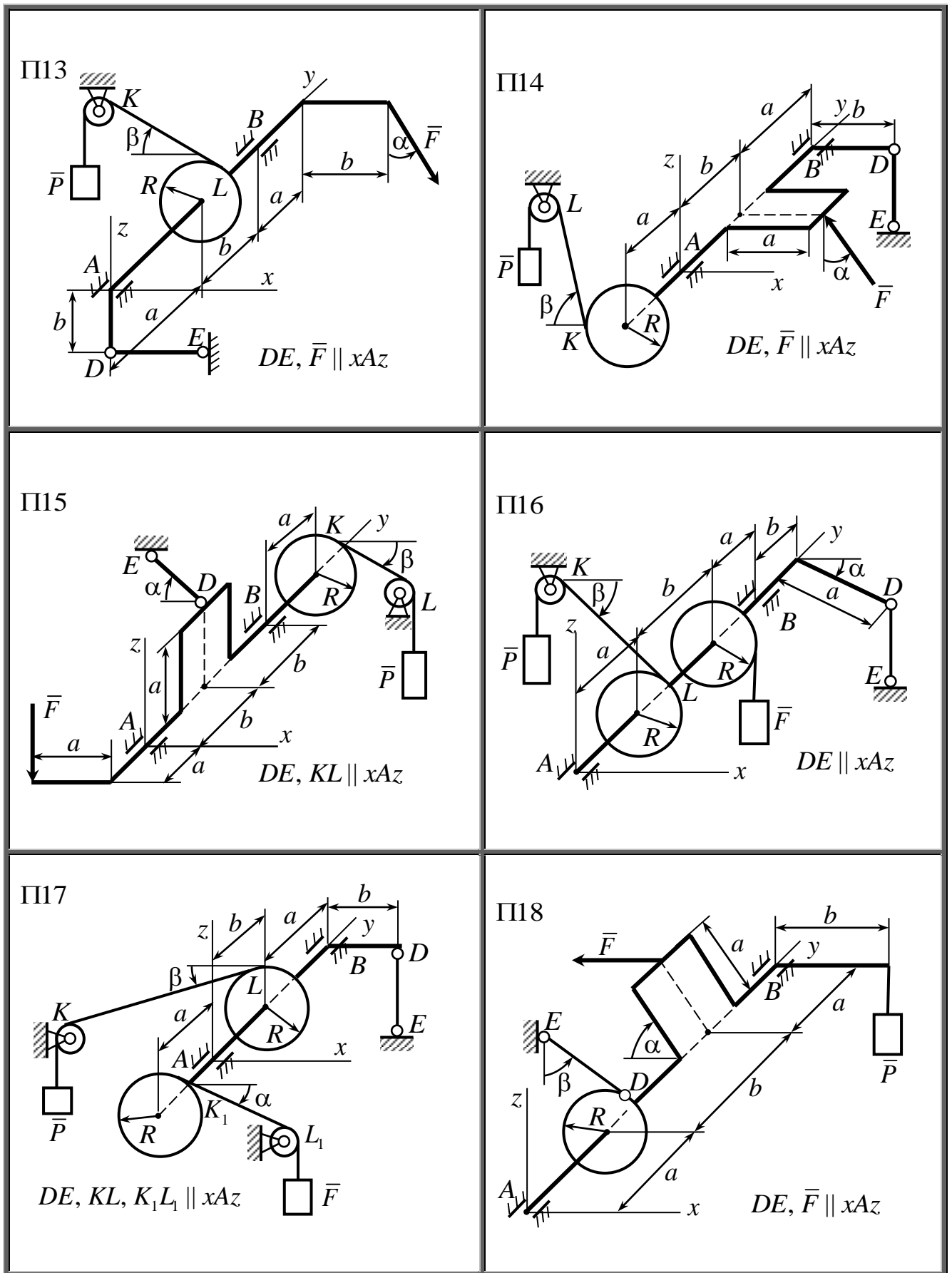


Π11

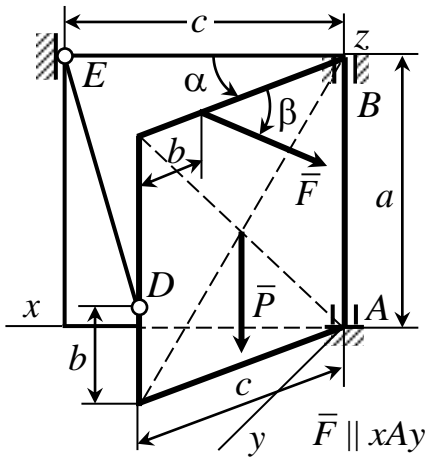


Π12

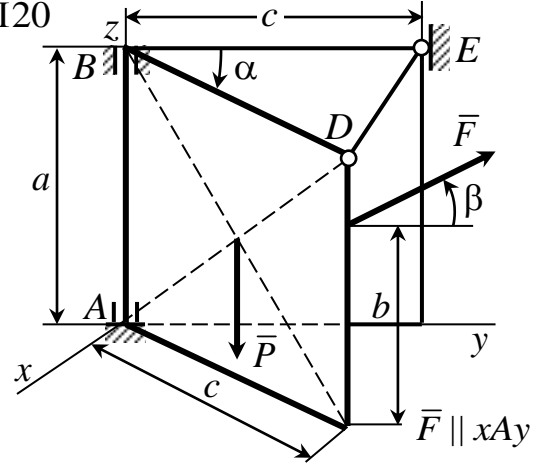




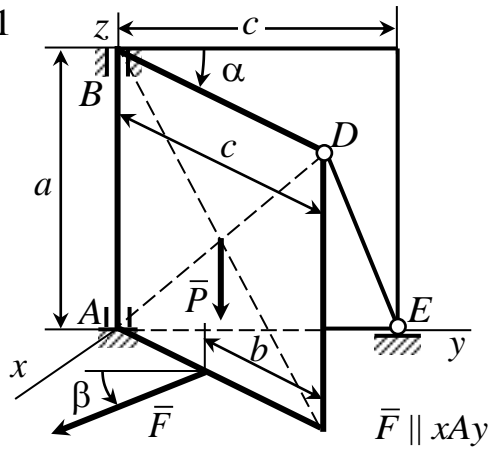
П19



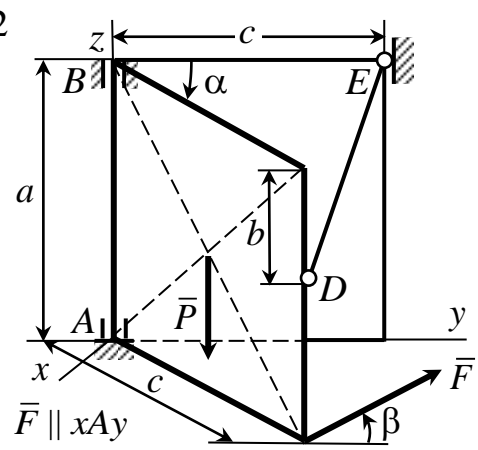
П20



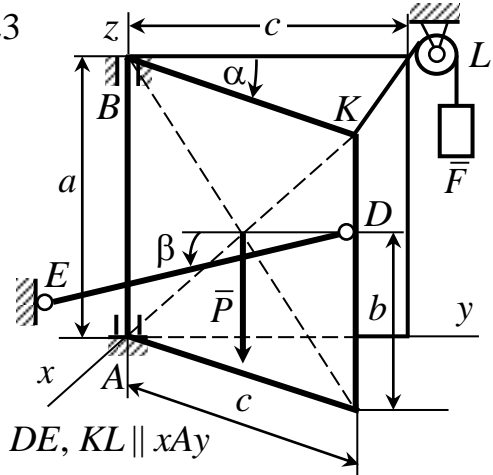
П21



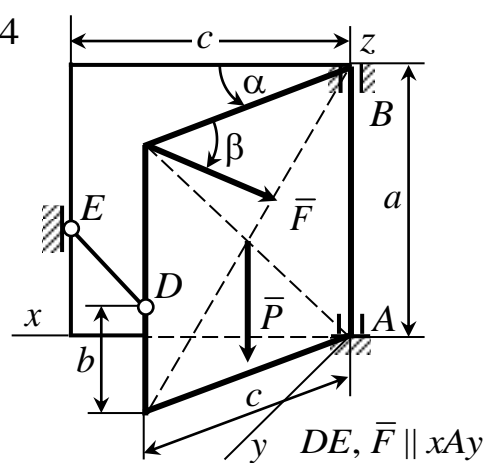
П22



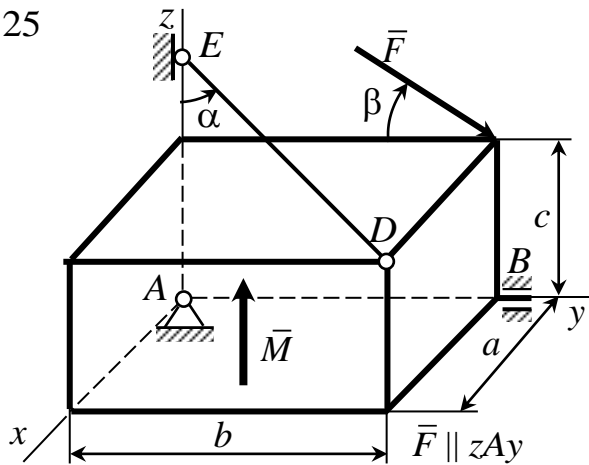
П23



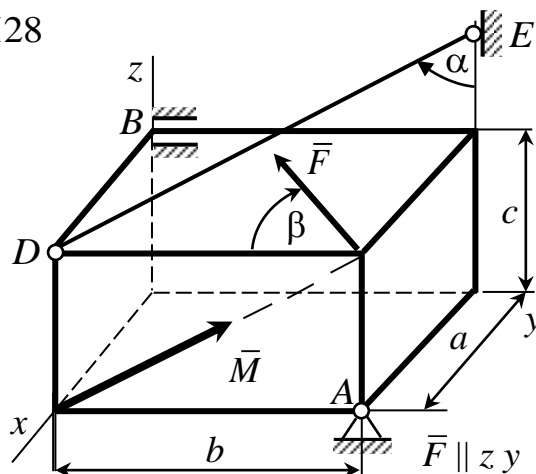
П24



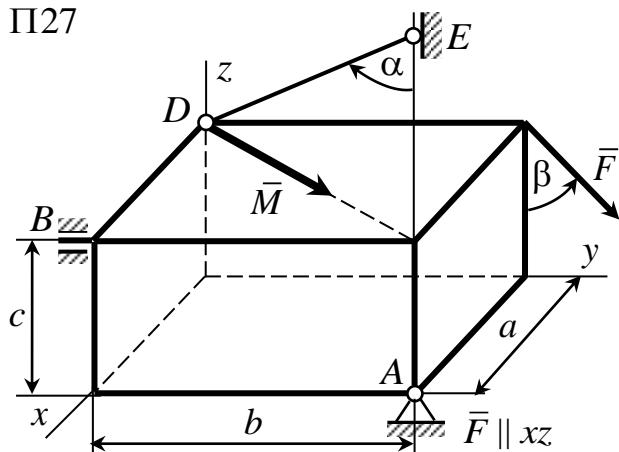
П25



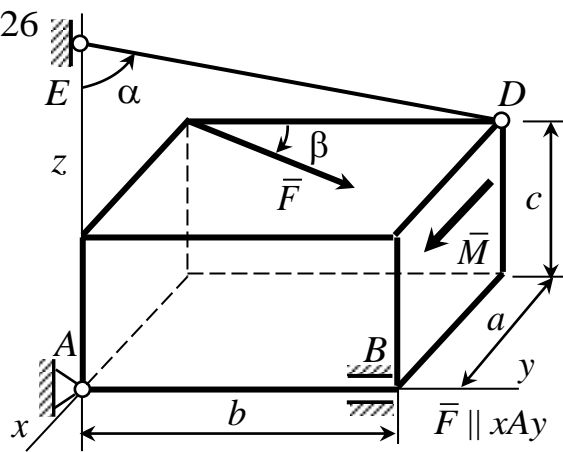
П28



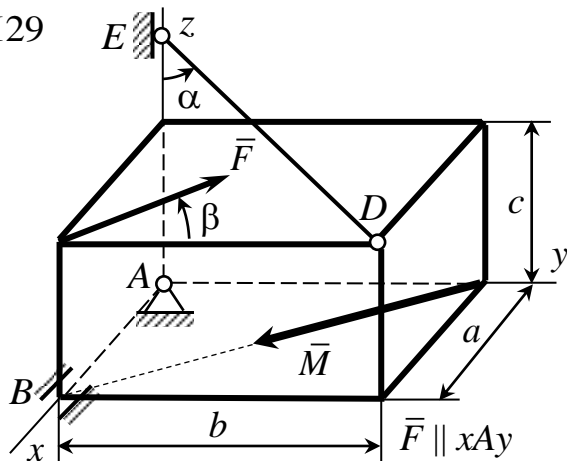
П27



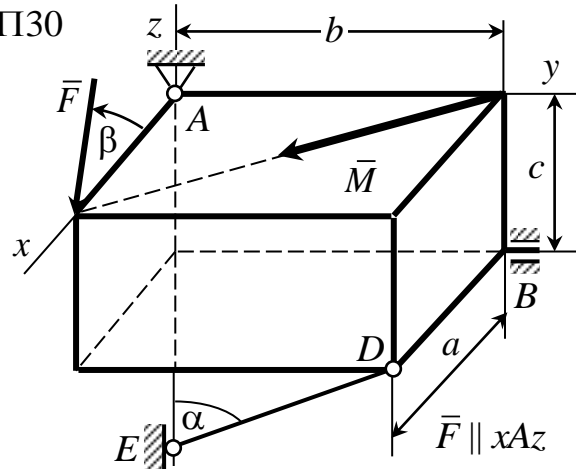
П26



П29



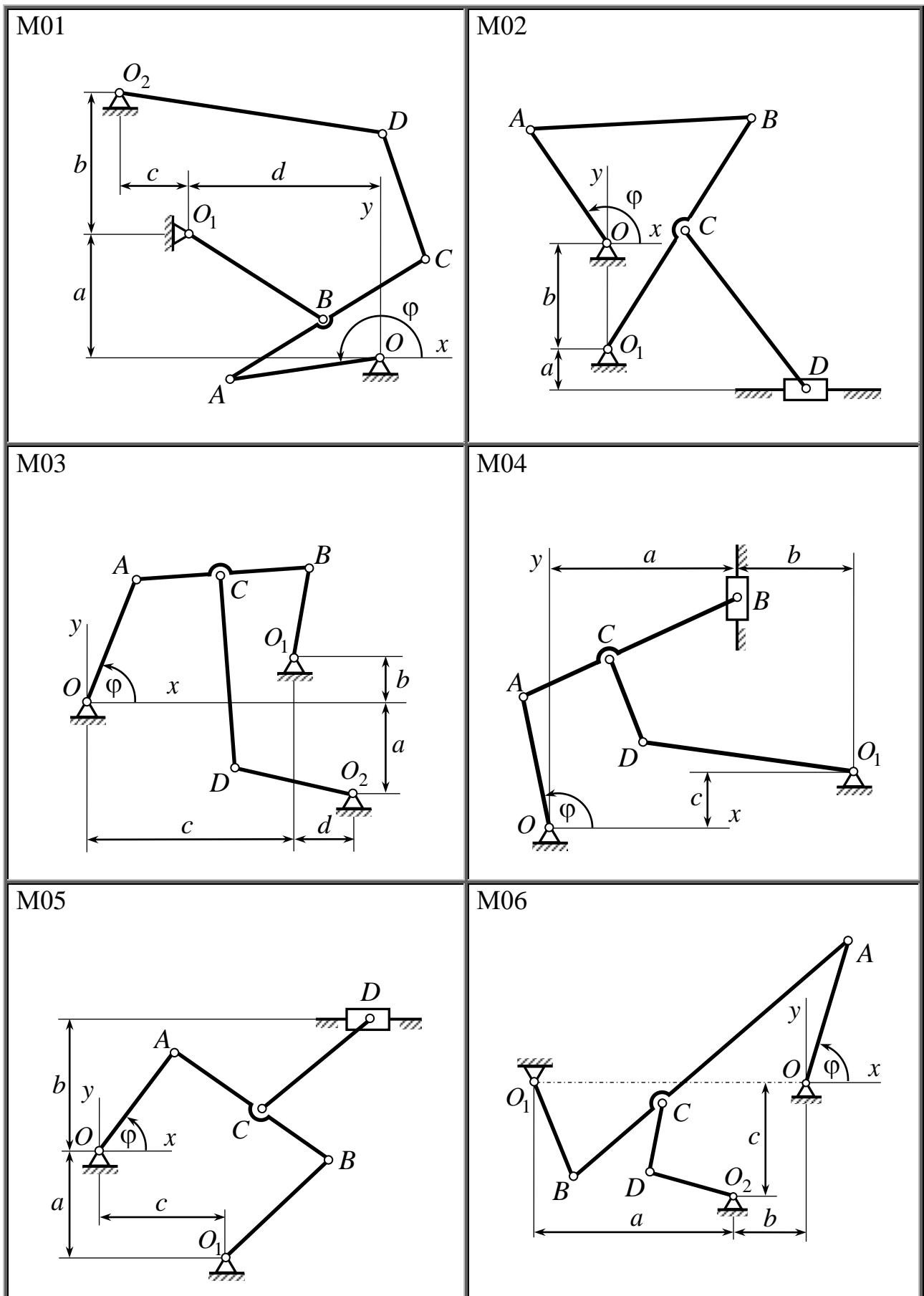
П30



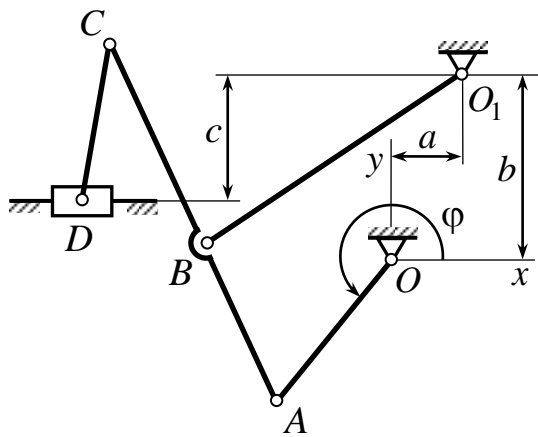
Исходные данные для пространственных систем

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a, [м]$	0,2	0,3	0,5	0,4	1,1	0,6	0,9	0,7	1,0	0,8
$b, [м]$	0,3	0,4	0,6	0,5	1,3	0,9	1,3	1,1	1,5	1,0
$c, [м]$	0,4	0,5	0,4	0,6	1,5	1,0	1,1	1,4	1,2	1,3
$F, [кН]$	100	150	200	250	300	250	200	150	100	250
$P, [кН]$	150	200	250	300	100	300	200	100	150	100
$M, [кНм]$	200	250	300	100	150	100	250	300	250	100
$\alpha, [^\circ]$	15	30	45	60	75	30	45	60	15	75
$\beta, [^\circ]$	60	45	15	30	60	75	45	75	15	30

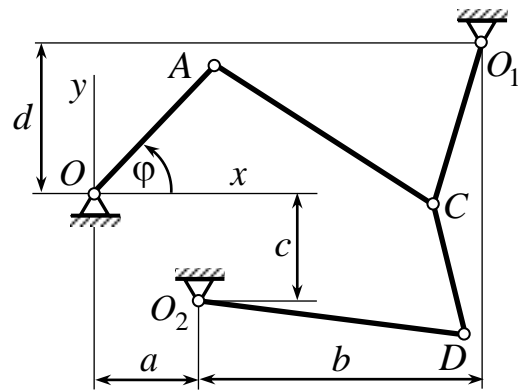
Схемы плоских шарнирных механизмов



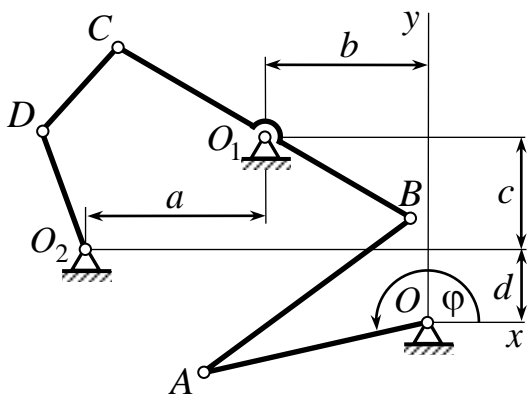
M07



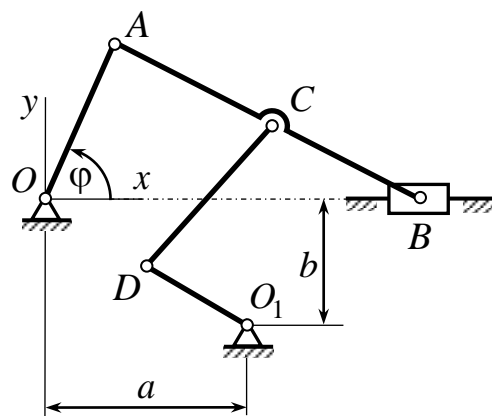
M08



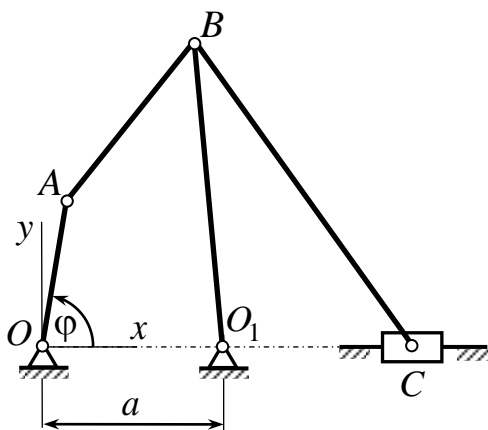
M09



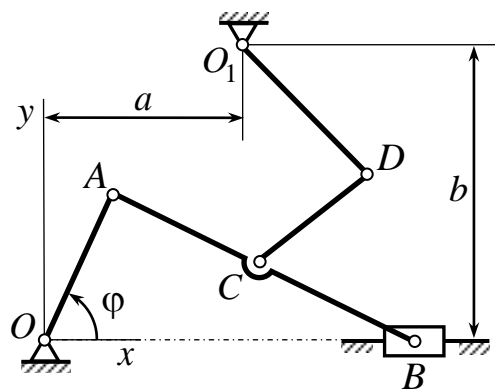
M10



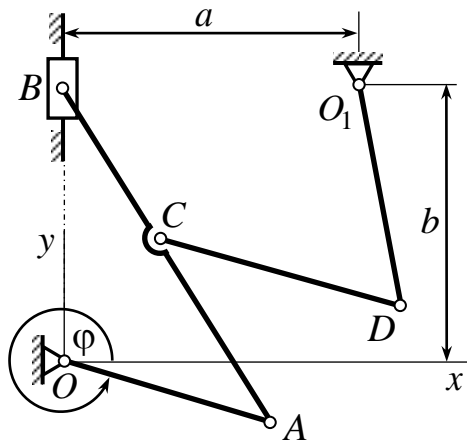
M11



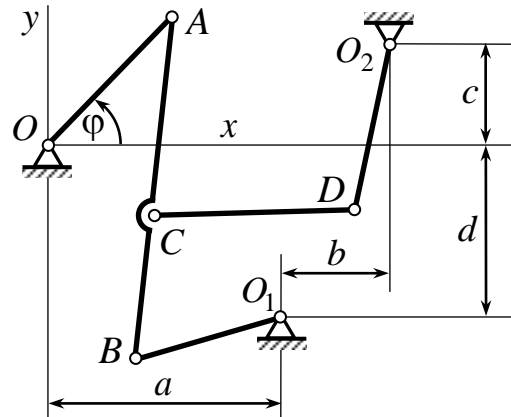
M12



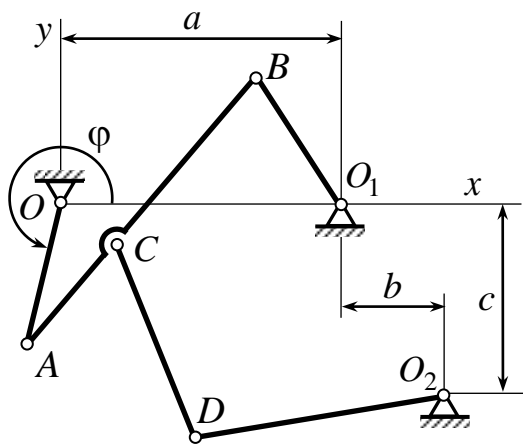
M13



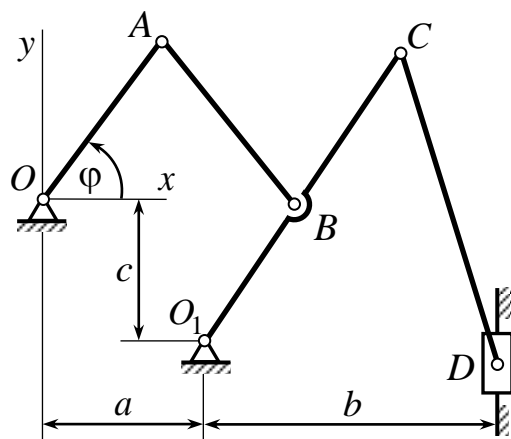
M14



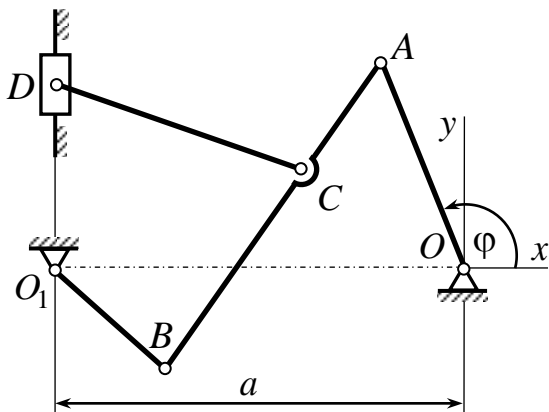
M15



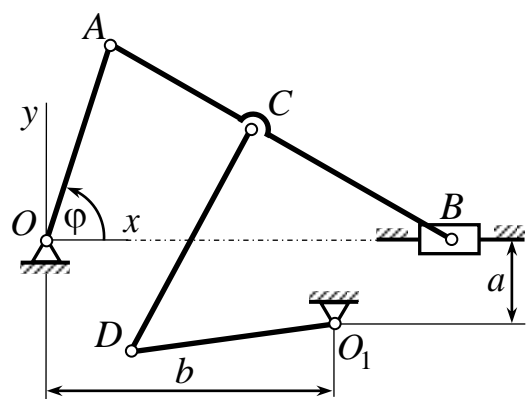
M16



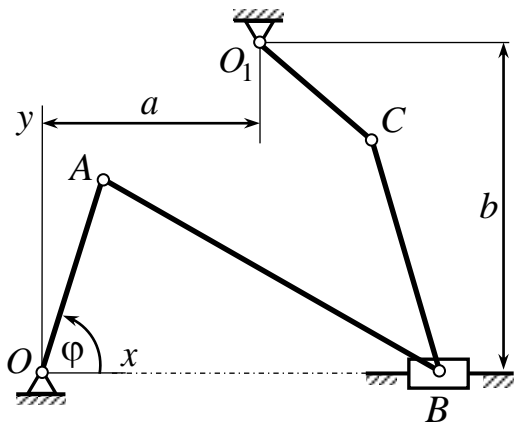
M17



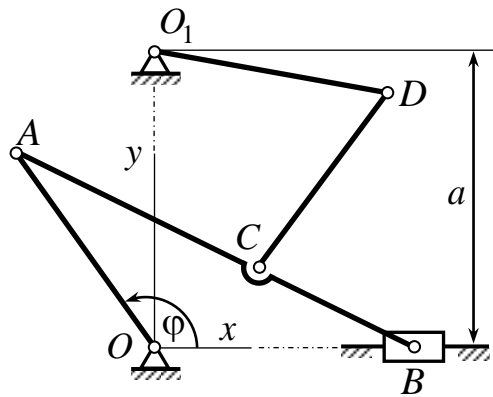
M18



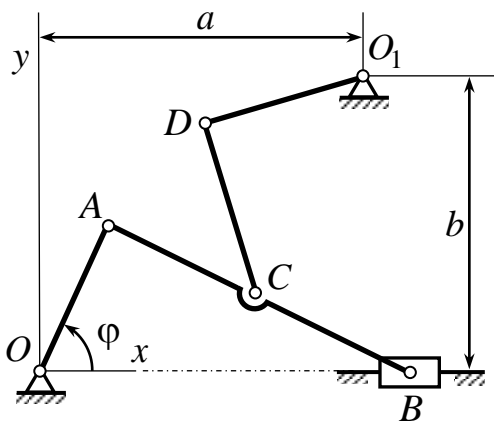
M19



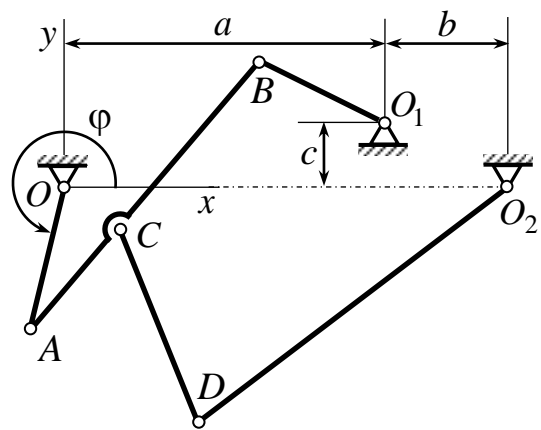
M20



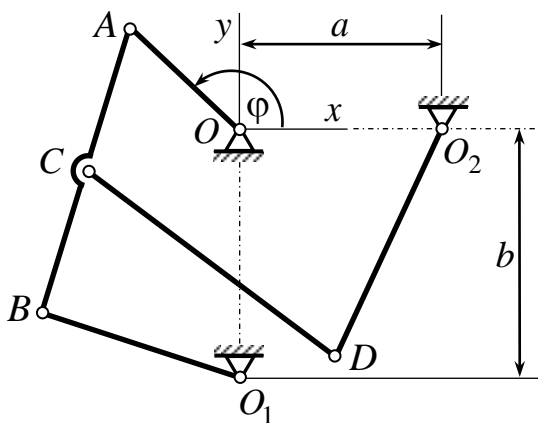
M21



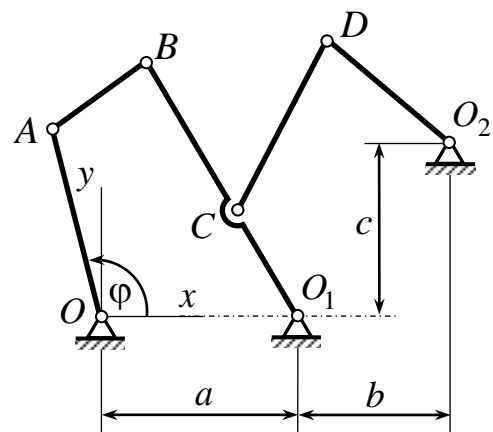
M22



M23

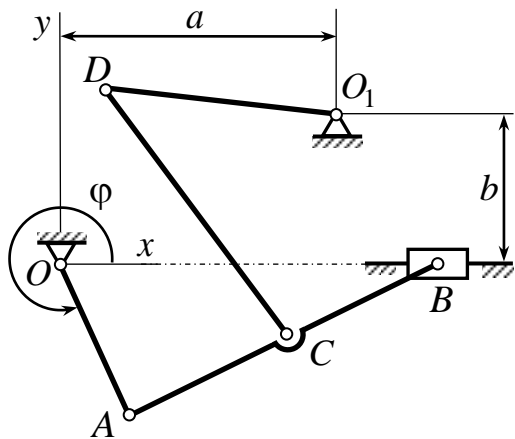


M24

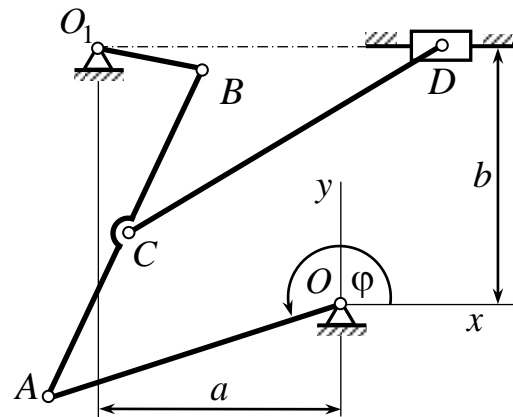


Приложение 1. Альбом заданий

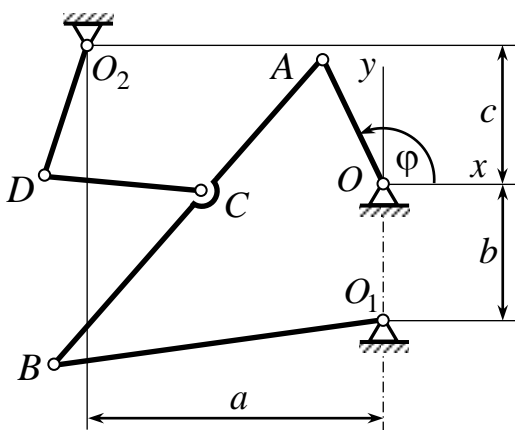
M25



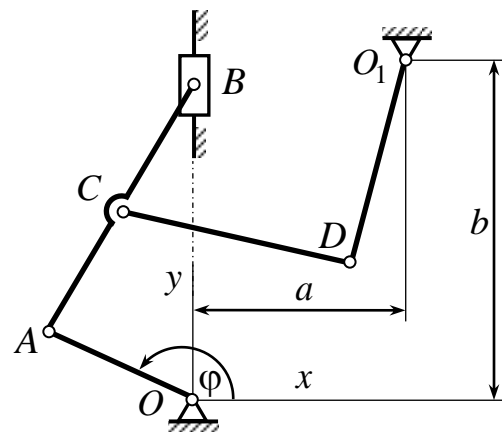
M26



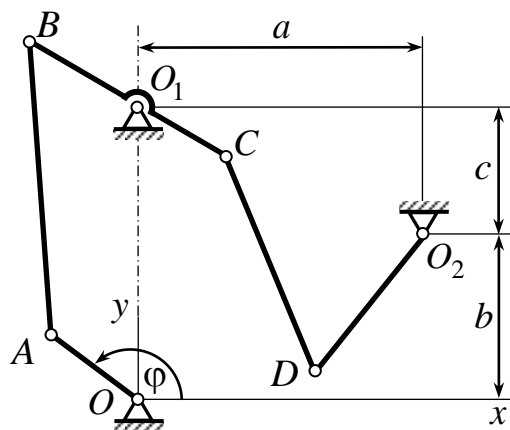
M27



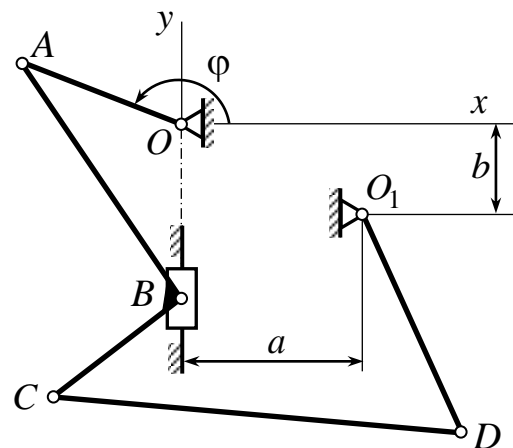
M28



M29



M30



Исходные данные для плоских механизмов

Геометрические размеры механизмов, [см]													
№	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>OA</i>	<i>AB</i>	<i>CD</i>	<i>O₁C</i>	<i>O₂D</i>	<i>AC</i>	<i>O₁B</i>	<i>O₁D</i>	<i>BC</i>
1	18	45	18	23	14	21	46	–	32	42	28	–	–
2	15	38	–	–	15	51	60	33	–	19	66	–	–
3	10	15	40	54	15	42	70	–	32	21	28	–	–
4	20	20	22	–	12	76	25	–	–	38	–	20	–
5	25	15	50	–	20	60	70	–	–	30	30	–	–
6	65	10	40	–	10	80	50	–	25	25	30	–	–
7	10	50	10	–	16	50	60	–	–	80	35	–	30
8	27	18	30	30	14	–	63	20	25	55	–	–	–
9	19	20	28	21	10	40	30	31	25	–	–	–	62
10	55	25	–	–	15	70	33	–	–	35	–	24	35
11	50	–	–	–	15	50	–	–	–	–	30	–	60
12	15	60	–	–	20	60	60	–	–	15	–	35	45
13	17	54	–	–	15	50	40	–	–	15	–	24	–
14	42	20	40	10	10	50	60	–	20	25	20	–	–
15	50	10	30	–	12	50	45	–	20	30	20	–	–
16	36	22	15	–	10	45	60	40	–	–	20	–	20
17	96	–	–	–	15	90	75	–	–	42	28	–	48
18	40	70	–	–	20	78	40	–	–	40	–	30	–
19	42	40	–	–	17	70	–	30	–	–	–	–	40
20	40	–	–	–	22	60	50	–	–	30	–	20	–
21	20	60	–	–	20	80	50	–	–	40	–	30	–
22	50	25	10	–	15	47	35	–	45	22	20	–	–
23	60	50	–	–	12	50	60	–	32	30	30	–	–
24	36	40	10	–	16	45	45	15	20	–	26	–	–
25	55	22	–	–	20	40	42	–	–	15	–	30	25
26	50	40	–	–	25	65	70	–	–	35	30	–	–
27	35	45	20	–	10	50	54	–	28	–	23	–	22
28	70	30	–	–	30	55	70	–	–	30	–	25	25
29	55	20	30	–	13	60	70	14	33	–	–	–	39
30	70	20	–	–	19	47	81	–	–	–	–	36	30

Приложение 1. Альбом заданий

Значение угла поворота ведущего звена – φ_k , град.										
№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	330	0	105	300	165	240	210	150	255	330
2	135	75	210	150	90	195	165	75	150	150
3	195	0	165	0	0	300	255	180	120	165
4	255	60	45	30	15	225	225	270	75	180
5	300	285	135	30	15	45	285	90	90	330
6	300	150	105	165	240	60	195	210	270	30
7	210	285	330	75	120	180	30	90	225	75
8	315	330	225	90	90	60	60	105	150	240
9	225	135	165	255	210	180	90	135	315	105
10	270	150	45	210	210	150	240	300	45	210
11	315	45	210	0	105	255	225	300	165	330
12	240	300	210	15	345	75	270	135	240	75
13	345	300	120	180	315	30	45	75	195	225
14	120	120	315	195	105	225	210	135	45	15
15	225	300	135	315	315	345	180	105	45	75
16	330	240	15	195	330	330	285	30	150	150
17	90	165	195	150	165	75	165	150	240	45
18	345	75	45	90	75	105	345	255	135	150
19	240	45	15	90	240	45	240	60	75	315
20	60	285	45	315	0	210	150	345	315	210
21	165	195	105	270	345	270	120	105	285	345
22	135	30	90	330	285	15	135	165	105	225
23	180	285	0	270	0	75	30	15	330	60
24	285	300	30	60	75	285	120	225	15	45
25	90	60	300	60	315	330	120	315	300	195
26	120	195	180	105	60	270	45	60	180	255
27	15	300	255	255	45	90	105	240	120	105
28	195	180	150	210	300	270	135	45	0	30
29	255	135	15	15	45	270	75	60	255	210
30	120	315	210	210	90	90	345	345	345	240

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ОФОРМЛЕНИЕ И ЗАЩИТА КУРСОВОЙ РАБОТЫ

1. Оформление курсовой работы

Курсовая работа представляется к защите в виде пояснительной записки.

Пояснительная записка, объемом 20-30 страниц, аккуратно оформляется (в печатном или рукописном виде) на листах писчей бумаги формата А4. Текст располагается на одной стороне листа. Каждый лист должен быть пронумерован. Разделы и параграфы должны быть озаглавлены и пронумерованы. Формулы, на которые есть ссылки в тексте пояснительной записки, обязательно нумеруются. Страницы нумеруются и располагаются в следующем порядке:

- с. 1 – титульный лист с названием работы и учётными данными о вузе, исполнителе (номер группы и студенческого билета, фамилия и инициалы) и руководителе (см. с. 89);
- с. 2 – оглавление с указанием глав, параграфов и страниц (см. с. 90);
- с. 3 – аннотация (сжатая характеристика курсовой работы в изложении автора) (см. с. 91);
- на последующих страницах – расчёты; в каждой части приводится описание рассчитываемой системы с указанием принимаемых допущений, схемы конструкций и исходные данные, а также задание на расчет;
- предпоследняя страница – выводы;
- последняя страница – список использованной литературы.

Главы и параграфы курсовой работы должны быть озаглавлены и пронумерованы. Курсовая работа должна содержать подробное описание проводимых расчётов. Формулы, на которые имеются ссылки в тексте, нумеруются, изложение сопровождается расчётными схемами. Не допускается совмещение расчётных схем для различных методов на одном рисунке.

Изложение сопровождается расчетными схемами и рисунками, располагаемыми в тексте (при необходимости – на отдельных листах), имеющими номер и название. Все схемы и чертежи должны быть аккуратным и наглядным (с использованием чертежных инструментов или на компьютере), а их размеры

Приложение 2. Требования к оформлению и защите

должны позволять ясно показать все векторы и размеры. Рисунки выполняются карандашом; толщина линий строго выдерживается (контурные, выносные, штрихпунктирные). Схемы (рисунки) и составляемые на их основе уравнения по возможности располагаются на одной странице. Показывать все эти векторы и координатные оси на чертежах, а также указывать единицы получаемых величин нужно обязательно.

Материал в курсовой работе располагается так, чтобы его было удобно читать (и, конечно, проверять!).

- заголовки глав и параграфов выполняются шрифтом большего размера, чем основной текст; допускается их подчёркивание;
- между заголовками и текстом оставляется пробел по вертикали (1,5-2 см);
- основной текст разбивается на абзацы, между которыми оставляется вертикальный пробел (~ 1 см); такой же пробел оставляется между текстом и формулами, а также между формулами, если они записываются по вертикали одна за другой;
- формулы – это часть предложения: если предложение заканчивается формулой, то после неё ставится точка; если в конце предложения располагаются несколько формул, то они разделяются запятыми (после последнего слова текста нет никакого знака препинания) или точкой с запятой (после последнего слова текста стоит двоеточие);
- формулы располагаются по центру страницы;
- номера формул выравниваются по правому краю страницы;
- поля страницы: верхнее и нижнее - 2 см., левое – 2,5 см., правое - 1 см.;
- нумерация страниц снизу и справа.

При оформлении пояснительной записки в печатной форме основной текст набирается на компьютере в текстовом редакторе шрифтом «Times New Roman» величиной 14 пт. с полуторным интервалом. Текст на странице выравнивается по ширине. Перенос - автоматический, ширина зоны переноса - 0,5 см. Абзацный отступ – 1,25 см.

Для заголовков и подзаголовков запрещается использовать специальные стили и подчеркивания.

Приложение 2. Требования к оформлению и защите

Ссылки в тексте на литературу даются в квадратных скобках.

Все аббревиатуры, сокращения и условные обозначения расшифровываются в тексте.

Формулы следует набирать в редакторе формул, встроенном или внешнем. Основной размер – 14 пт.

2. Защита курсовой работы

Выполненную курсовую работу необходимо сдать на проверку руководителю. После исправления замечаний руководителя курсовая работа сдаётся на рецензию одному из преподавателей кафедры (при этом к работе прилагается бланк рецензии). При отрицательной рецензии работа должна быть переделана и вновь представлена на рецензию.

Приём курсовых работ, допущенных к защите, проводится комиссией, обычно состоящей из двух преподавателей, как правило, – руководителя и рецензента.

Сроки защиты: в осеннем семестре – с 10 декабря, в весеннем – с 10 мая.

На защите студент делает доклад, в котором рассказывает о постановке задачи, условиях расчета, применяемых методах механики и полученных результатах. После этого он отвечает на вопросы членов комиссии. Максимальная оценка за курсовую работу – 100 баллов.

При защите курсовой работы оцениваются:

- качество оформления работы – до 10 баллов;
- отзыв рецензента – до 5 баллов;
- качество доклада автора – до 20 баллов;
- ответы на вопросы – до 65 баллов.

По курсовой работе выставляется одна из следующих оценок: *отлично* (81-100 баллов), *хорошо* (61-80 баллов), *удовлетворительно* (40-60 баллов) и *неудовлетворительно* (менее 40 баллов).

При *неудовлетворительной* оценке студенту выдаётся новое задание.

3. Образец титульного листа курсовой работы

Министерство образования и науки России
ФГБОУ ВО ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра теоретической механики

КУРСОВАЯ РАБОТА ПО РАЗДЕЛУ "СТАТИКА"

«РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ»

Вариант № 28-5

Рецензия на курсовую работу

Курсовая работа по содержанию *соответствует* / *не соответствует*
выданному заданию и выполнена *в полном объеме* / *не в полном объеме*.

По содержанию и тексту курсовой работы можно сделать вывод об освоении в полном объеме компетенций, определенных во ФГОС, предусмотренных ОХООП по теоретической механике.

Курсовая работа может быть допущена к защите с добавлением ____ баллов рецензента после успешной защиты.

Рецензент _____ 201 г.
(ФИО) (Подпись) (Дата)

Выполнил студент: _____ Сидоров С.С.
(группа) (Фамилия И.О.)

№ студенческого билета _____ 156828

Научный руководитель: _____ Петров П.П.
(ученая степень, звание) (Фамилия И.О.)

Тула, 2021

4. Образец листа оглавления курсовой работы

ОГЛАВЛЕНИЕ

АННОТАЦИЯ.....	3
1. РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ ШАРНИРНОЙ ФЕРМЫ	4
1.1. ЗАДАНИЕ НА РАСЧЕТ	
1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ ФЕРМЫ.....	
1.2.1. <i>Определение опорных реакций аналитическим способом</i>	
1.2.2. <i>Определение опорных реакций графическим способом</i>	
1.3. РАСЧЕТ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМЫ	
1.3.1. <i>Определение усилий в стержнях фермы аналитическим методом вырезания узлов</i>	
1.3.2. <i>Определение усилий в стержнях фермы графическим методом вырезания узлов ..</i>	
1.3.3. <i>Определение усилий в стержнях фермы построением диаграммы Максвелла–Кремоны</i>	
1.3.4. <i>Определение усилий в стержнях фермы методом Риттера</i>	
2. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ	
2.1. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИИ № 1	
2.1.1. <i>Задание на расчет</i>	
2.1.2. <i>Определение опорных реакций</i>	
2.2. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИИ № 2	
2.2.1. <i>Задание на расчет</i>	
2.2.2. <i>Определение опорных реакций</i>	
2.3. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИИ № 3	
2.3.1. <i>Задание на расчет</i>	
2.3.2. <i>Определение опорных реакций</i>	
2.4. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИИ № 4	
2.4.1. <i>Задание на расчет</i>	
2.4.2. <i>Определение опорных реакций</i>	
3. РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ.....	
3.1 ЗАДАНИЕ НА РАСЧЕТ	
3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ	
ВЫВОДЫ	??
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	??

5. Образец листа аннотации курсовой работы

АННОТАЦИЯ

Исследуется равновесие твердых тел и их систем на примере таких технически важных конструкций, как плоские шарнирные фермы, балки, валы, плиты и пластинки с использованием аналитических и графических методов. Для каждой расчетной схемы составлены уравнения равновесия и определены реакции внешних и внутренних связей разными методами.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. КРАТКАЯ СПРАВКА ПО ТЕОРИИ

Приведена информация о системах сил, встречающихся при выполнении курсовой работы, и условиях их равновесия, а также сведения о связях, используемых в плоских и пространственных конструкциях.

I. Информация о системах сил и условиях их равновесия

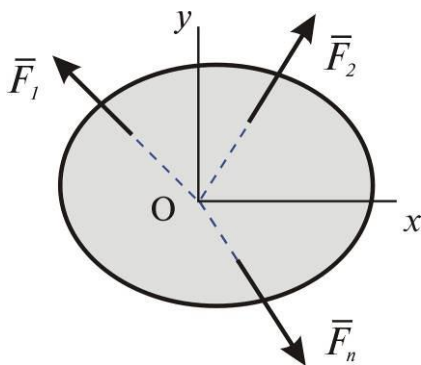
1. Плоская система сходящихся сил

► Силы называются сходящимися, если их линии действия пересекаются в одной точке. Если силы расположены в одной плоскости, то они составляют плоскую систему сходящихся сил.

В курсовой работе плоская система сходящихся сил встречается при расчете стержневой конструкции (фермы).

Условия равновесия плоской системы сходящихся сил

1. Аналитические условия равновесия



Для равновесия плоской системы сходящихся сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из координатных осей x и y равнялась бы нулю:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0.$$

Аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил используются при определении усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов.

2. Графическое условие равновесия

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнут.

В замкнутом силовом многоугольнике конец последней силы совпадает с началом первой.

Графическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил используется при определении усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов и построении диаграммы Максвелла-Кремоны.

2. Произвольная плоская система сил

► *Произвольной плоской системой сил называется совокупность сил, как угодно расположенных в одной плоскости.*

В курсовой работе плоская система сил встречается при определении опорных реакций фермы и усилий в ее стержнях методом Риттера, а также при расчете составных конструкций.

Условия равновесия произвольной плоской системы сил

Условия равновесия произвольной плоской системы сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ могут быть записаны в трёх формах (предполагается, что силы расположены в плоскости Oxy , а точки, относительно которых записываются уравнения моментов, лежат в этой плоскости).

► Первая форма условий равновесия

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на произвольно выбранные оси x и y прямоугольных декартовых координат и сумма моментов этих сил относительно произвольно выбранной в плоскости сил точки A равнялись бы нулю:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0.$$

► Вторая форма условий равновесия

Условия равновесия можно составлять в виде одного уравнения проекций и двух уравнений моментов:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0.$$

Внимание. Ось x выбирается так, чтобы она не была перпендикулярной прямой, проходящей через точки A и B , относительно которых составляются уравнения моментов.

► **Третья форма условий равновесия**

Условия равновесия плоской системы сил можно составлять в виде трёх уравнений моментов относительно точек, лежащих в плоскости действия сил:

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0.$$

Внимание. Точки A , B и C , относительно которых составляются уравнения моментов, не должны лежать на одной прямой.

Замечание. Вторую и третью форму часто используют при автономном определении реакций связей.

3. Произвольная пространственная система сил

► *Произвольной пространственной системой сил называется совокупность сил, как угодно расположенных в пространстве.*

При выполнении курсовой работы произвольная система сил встречается при расчете пространственной конструкции.

Условия равновесия произвольной системы сил

Для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил на оси прямоугольной системы координат и суммы моментов сил относительно этих осей равнялись нулю:

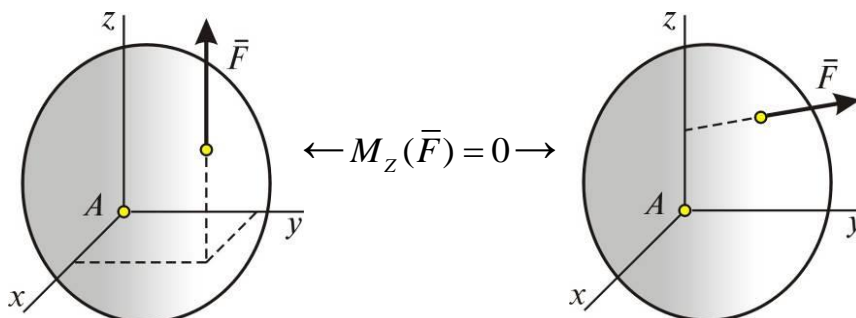
$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i) = 0.$$

Внимание. При составлении уравнений моментов следует помнить, что момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях:

1. Сила параллельна оси.

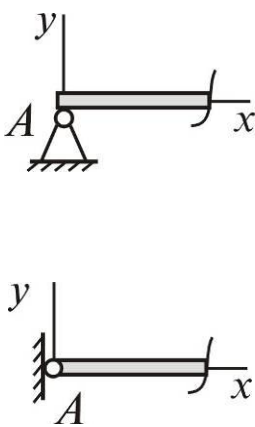
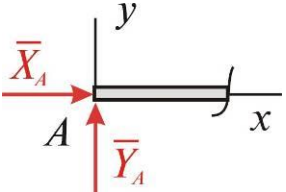
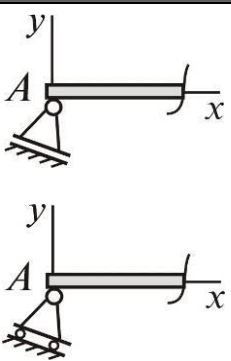
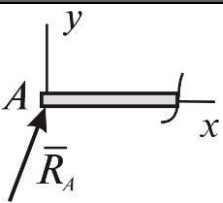
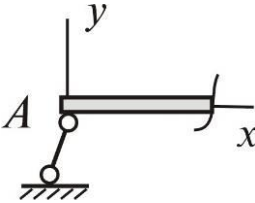
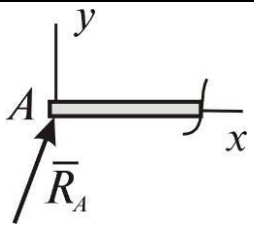
2. Линия действия силы пересекает ось.



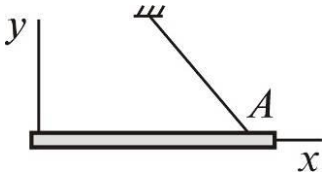
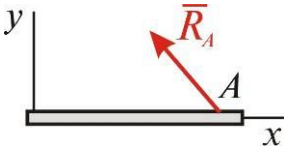

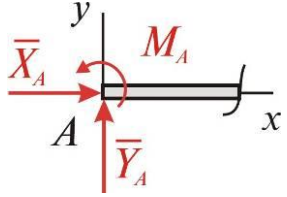
II. Сведения о связях и их реакциях

1. Внешние связи и их реакции в плоских конструкциях

Внешними связями называются устройства, используемые для соединения тел, входящих в состав системы (конструкции), с телами, не входящими в ее состав.

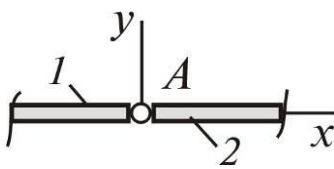
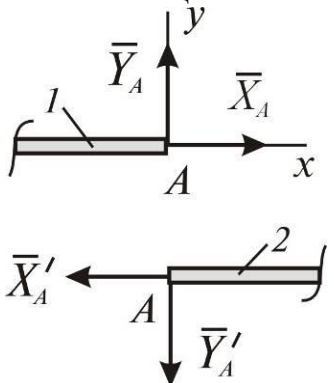
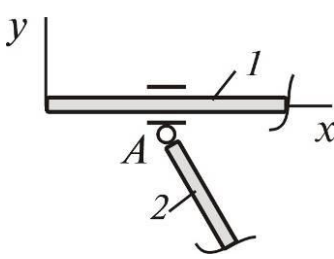
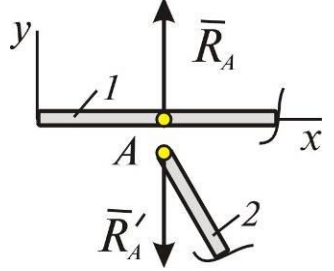
№	Название связи	Условное обозначение	Реакция связи
1	<p>Неподвижная шарнирная опора (цилиндрический шарнир).</p> <p>Запрещает все движения тела, кроме вращения вокруг оси A, перпендикулярной плоскости xAy. Трение в шарнире не учитывается.</p>		<p>Направление и модуль реакции \bar{R}_A заранее неизвестны.</p>  <p>Поэтому ее представляют обычно двумя взаимно перпендикулярными составляющими \bar{X}_A и \bar{Y}_A, направляемыми в положительную сторону по координатным осям:</p> $\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A.$
2	<p>Подвижная шарнирная опора</p> <p>Ограничивает перемещение в направлении, перпендикулярном к опорной плоскости. Трение на опорной плоскости не учитывается.</p>		 <p>Реакция \bar{R}_A перпендикулярна к опорной плоскости.</p>
3	<p>Невесомый стержень с шарнирами на концах (стержневая опора)</p> <p>Ограничивает перемещения вдоль оси стержня.</p>		 <p>Реакция направлена по оси стержня: к точке A, если стержень сжат и от точки A, если стержень растянут.</p>

Приложение 3. Краткая справка по теории

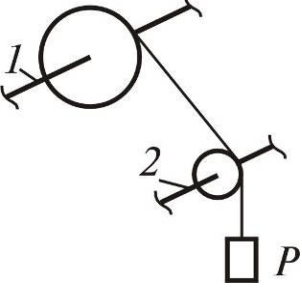
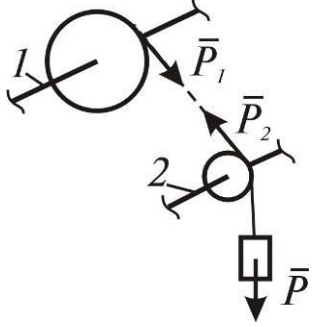
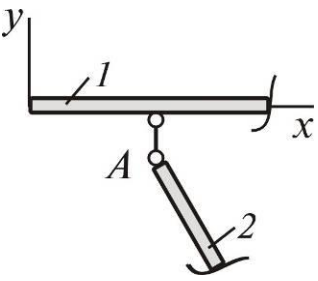
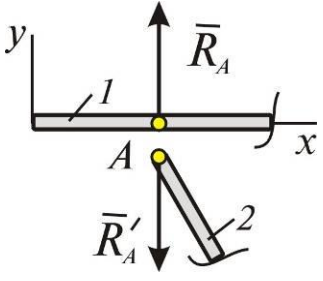
№	Название связи	Условное обозначение	Реакция связи
4	<p>Гибкая связь (невесомый трос, канат и т.п.) Односторонняя связь — воспринимает только растягивающие усилия.</p>		 <p>Реакция направлена по связи от точки А.</p>
5	<p>Жёсткая заделка</p> <p>Запрещает все движения тела:</p> <p>1) любое поступательное перемещение в плоскости xAy, т. е. перемещение, при котором тело не совершает поворотов;</p> <p>2) любое вращение в плоскости $xу$.</p>		<p>Реакция заделки – совокупность силы \bar{R}_A и пары сил с моментом M_A.</p>  <p>При решении задач сила \bar{R}_A представляется двумя взаимно перпендикулярными составляющими:</p> $\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A.$ <p>Момент M_A направляется обычно против хода часовой стрелки.</p>

2. Внутренние связи и их реакции в плоских составных конструкциях

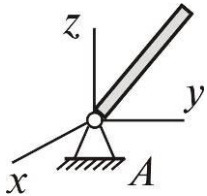
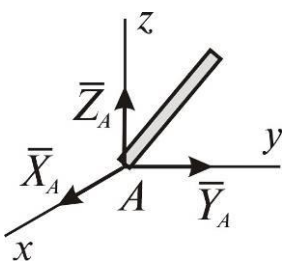
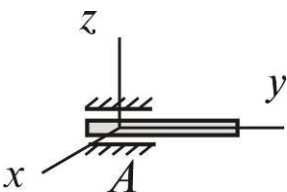
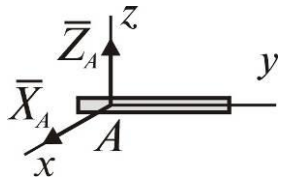
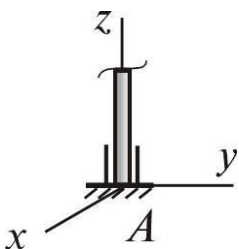
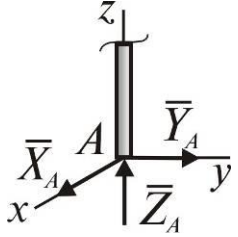
Внутренними связями называются устройства, используемые для соединения тел, входящих в состав системы (конструкции), между собой.

№	Название связи	Условное обозначение	Реакция связи
1	<p>Цилиндрический шарнир</p> <p>Используется для соединения тел 1 и 2, входящих в состав конструкции. Допускает взаимный поворот соединяемых тел относительно друг друга, т.е. поворот относительно оси A, перпендикулярной плоскости рисунка</p>	 <p>A — шарнирное соединение двух тел</p>	<p>Силы взаимодействия частей конструкции представляются двумя взаимно перпендикулярными составляющими.</p>  <p>Согласно аксиоме о равенстве действия и противодействия $\bar{X}'_A = -\bar{X}_A$, $\bar{Y}'_A = -\bar{Y}_A$.</p>
2	<p>Подвижное шарнирное соединение</p> <p>Ограничивает относительное перемещение тел 1 и 2 только в направлении, перпендикулярном к оси соединения (ось x). Трение не учитывается.</p>		 <p>Силы взаимодействия тел направлены перпендикулярно к оси соединения, причём $\bar{R}'_A = -\bar{R}_A$.</p>

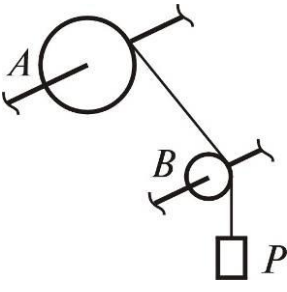
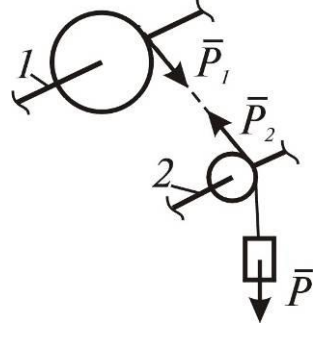
Приложение 3. Краткая справка по теории

№	Название связи	Условное обозначение	Реакция связи
3	<p>Гибкая связь (невесомый трос, канат и т.п.)</p> <p>Работает только на растяжение.</p>		 <p>Реакции связи \bar{P}_1 и \bar{P}_2 на тела 1 и 2 направлены по связи. Если трение не учитывать, то</p> $P_1 = P_2 = P.$
4	<p>Невесомый стержень</p> <p>Ограничивает относительное перемещение соединяемых тел 1 и 2 в направлении оси стержня, который воспринимает как растягивающие, так и сжимающие силы. На рисунке в правой крайней ячейке данной строки таблицы силы \bar{R}_A и \bar{R}'_A направлены в предположении, что стержень сжат.</p>		 <p>Силы взаимодействия тел направлены по оси стержня</p> $\bar{R}'_A = -\bar{R}_A.$

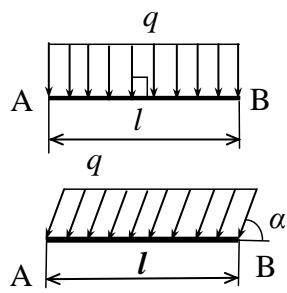
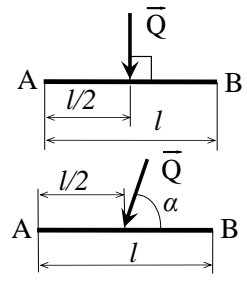
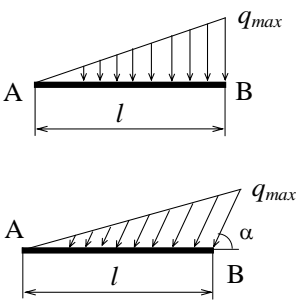
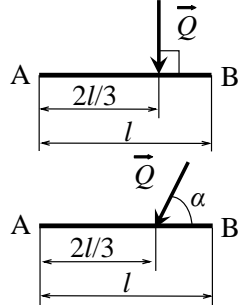
3. Связи и их реакции в пространственных конструкциях

№	Название связи	Условное обозначение	Реакция связи
1	<p>Сферический (шаровой) шарнир</p> <p>Обеспечивает неподвижность точке A: тело может поворачиваться вокруг этой точки, если нет других связей. Трение в шарнире не учитывается.</p>		<p>Направление реакции заранее неизвестно. Реакция представляется тремя взаимно перпендикулярными составляющими:</p> $\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A + \bar{Z}_A.$ 
2	<p>Цилиндрический шарнир (радиальный подшипник, дверная петля и т.п.)</p> <p>Ограничивает перемещения в направлении, перпендикулярном к оси шарнира (ось y), если не учитывать трение в шарнире. Длина подшипника невелика, т.е. размер в направлении оси y.</p>		<p>Реакция перпендикулярна к оси шарнира (оси Ay) и представляется составляющими по двум другим осям:</p> $\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Z}_A.$ 
3	<p>Подпятник (совокупность опорной плоскости и радиального подшипника, ось которого совпадает с осью z, — радиально-упорный подшипник)</p>		<p>Направление реакции заранее неизвестно. Реакция представляется тремя взаимно перпендикулярными составляющими:</p> $\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A + \bar{Z}_A.$ 

Приложение 3. Краткая справка по теории

№	Название связи	Условное обозначение	Реакция связи
4	Гибкая связь (невесомый трос, канат и т.п.)		 <p>Реакция \bar{P}_1 направлена по связи, причём $P_1 = P_2 = P$, если трением на блоке B пренебречь.</p>

III. Распределенные силы

Название нагрузки	Условное обозначение	Модуль равнодействующей	Направление и точка приложения равнодействующей
Равномерно распределенная (q – интенсивность нагрузки, $\kappa\text{H}/\text{м}$)		$Q = ql$	
Линейная (q_{max} – максимальное значение интенсивности, $\kappa\text{H}/\text{м}$)		$Q = \frac{1}{2} q_{\text{max}} l$	

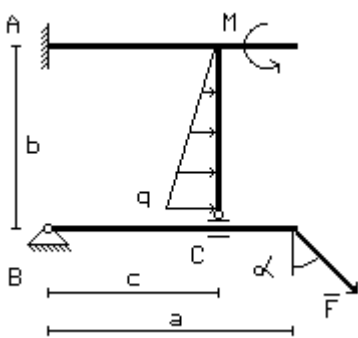
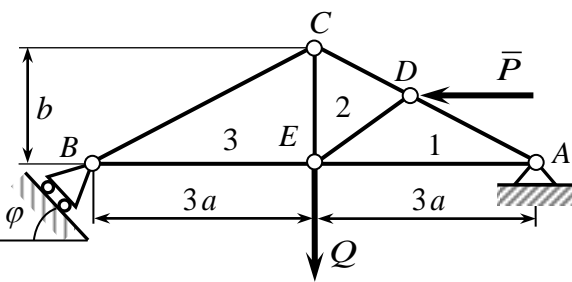
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЗАЩИТЫ РАБОТЫ

Билет № 1

Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в шарнире С и момент в заделке А, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	20
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 1 и 2 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 3 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> $b = a\sqrt{3}, \varphi = 30^\circ, P = Q = P_0, BD = DC$	45

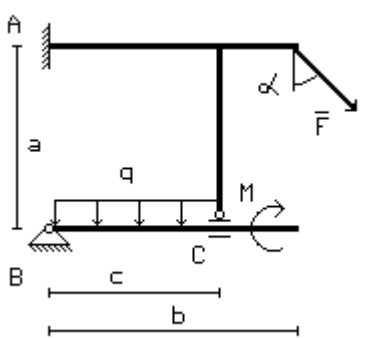
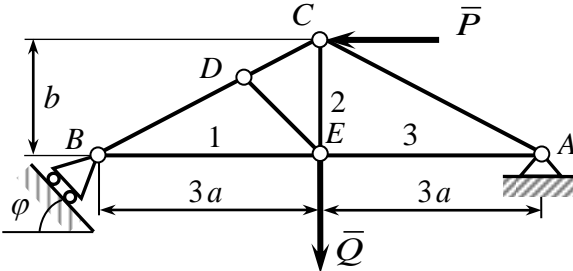
Приложение 4. Задания для защиты курсовой работы

Билет № 2

Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в шарнире C и момент в заделке A, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 1 и 3 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 2 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> <p>$b = a\sqrt{3}$, $\varphi = 30^\circ$, $P = Q = P_0$, $AD = DC$</p>	<p>45</p>

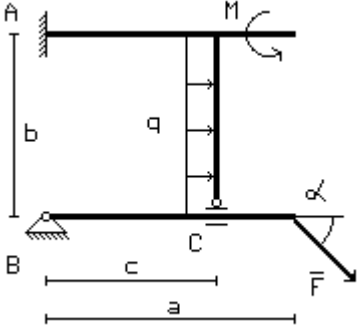
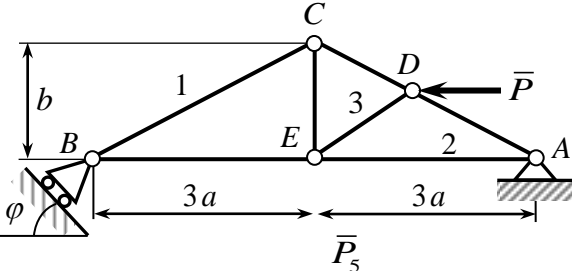
Приложение 4. Задания для защиты курсовой работы

Билет № 3

Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в шарнире C и момент в заделке A, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 1 и 3 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 2 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> <p>$b = a\sqrt{3}$, $\varphi = 30^\circ$, $P = Q = P_0$, $BD = DC$</p>	<p>45</p>

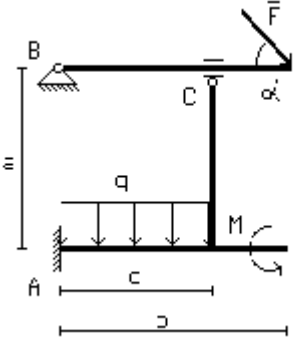
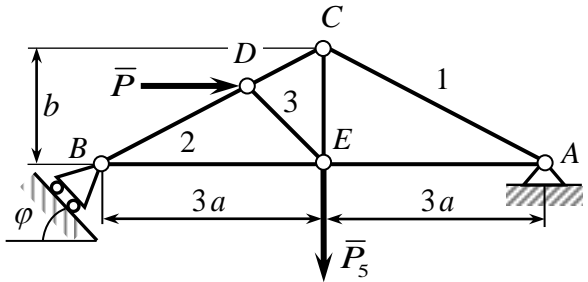
Приложение 4. Задания для защиты курсовой работы

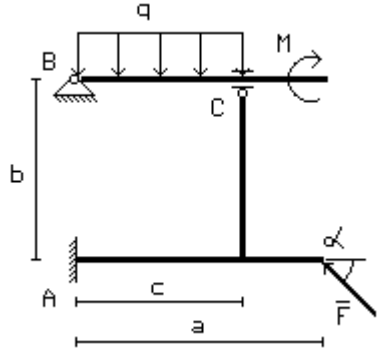
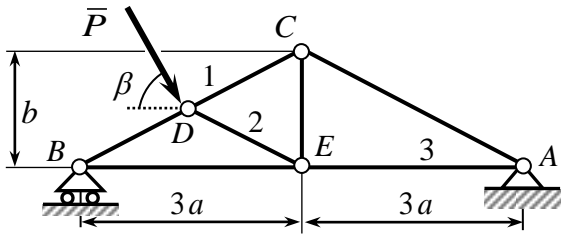
Билет № 4

Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в шарнире C и момент в заделке A, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 1 и 3 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 2 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> <p>$b = a\sqrt{3}$, $\varphi = 30^\circ$, $P = Q = P_0$, $AD = DC$</p>	<p>45</p>

Приложение 4. Задания для защиты курсовой работы

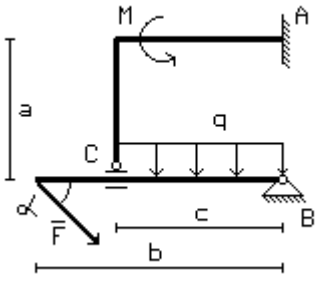
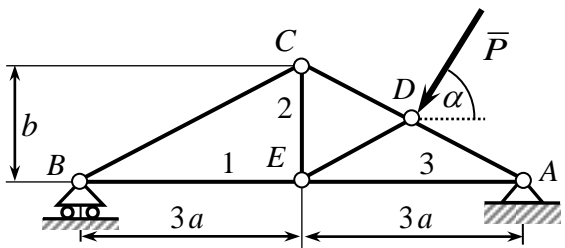
Билет № 5

Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в шарнире C и момент в заделке A, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 1 и 3 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 2 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> $b = a\sqrt{3}, P = P_0, BD = DC$	<p>45</p>

Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в шарнире C и момент в заделке A, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 1 и 3 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 2 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> $b = a\sqrt{3}, \beta = 30^\circ, P = P_0, BD = DC$	<p>45</p>

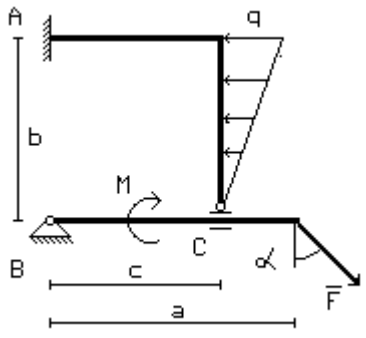
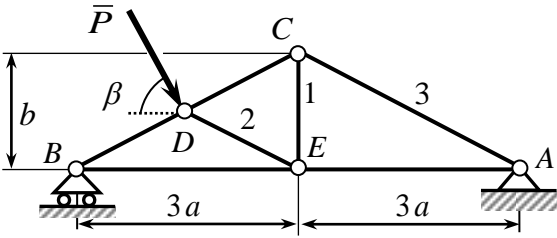
Приложение 4. Задания для защиты курсовой работы

Билет № 7

Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в шарнире C и момент в заделке A, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 1 и 2 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 3 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> $b = a\sqrt{3}, \alpha = 30^\circ, P = P_0, AD = DC$	<p>45</p>

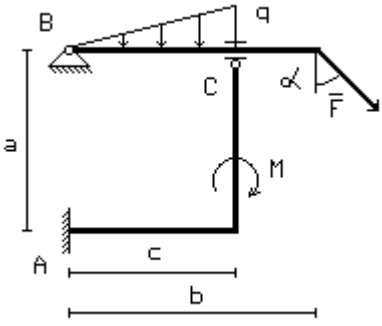
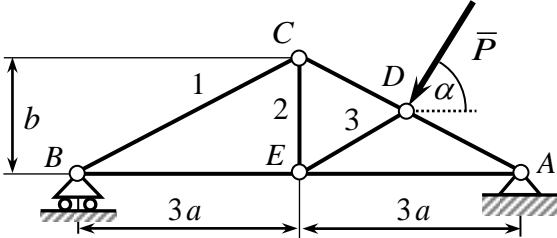
Приложение 4. Задания для защиты курсовой работы

Билет № 8

Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в шарнире C и момент в заделке A, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 1 и 3 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 2 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> $b = a\sqrt{3}, \beta = 30^\circ, P = P_0, BD = DC$	<p>45</p>

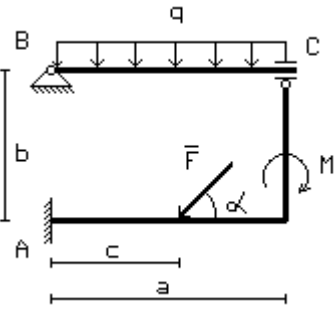
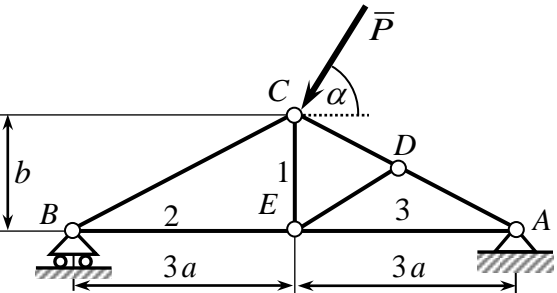
Приложение 4. Задания для защиты курсовой работы

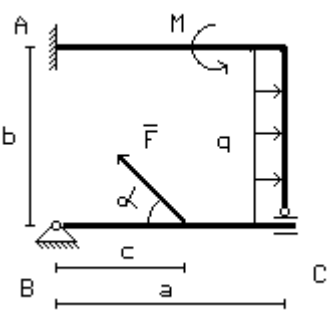
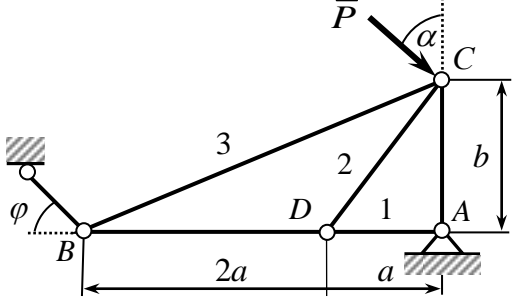
Билет № 9

Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в шарнире C и момент в заделке A, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 1 и 2 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 3 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> <p>$b = a\sqrt{3}$, $\alpha = 30^\circ$, $P = P_0$, $AD = DC$</p>	<p>45</p>

Приложение 4. Задания для защиты курсовой работы

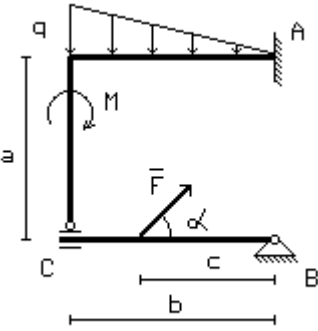
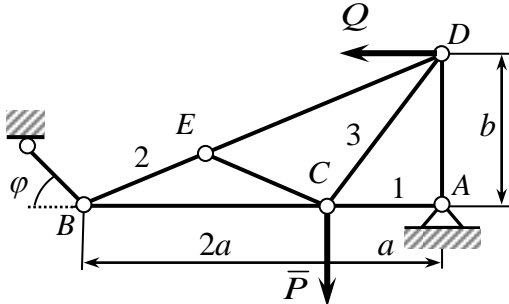
Билет № 10

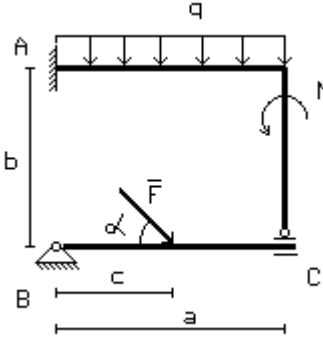
Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в шарнире C и момент в заделке A, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 1 и 2 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 3 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> <p>$b = a\sqrt{3}, \alpha = 30^\circ, P = P_0, AD = DC$</p>	<p>45</p>

Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в шарнире C и момент в заделке A, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 2 и 1 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 3 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> $b = a\sqrt{3}, \varphi = 90^\circ, \alpha = 30^\circ, P = Q = P_0$	<p>45</p>

Приложение 4. Задания для защиты курсовой работы

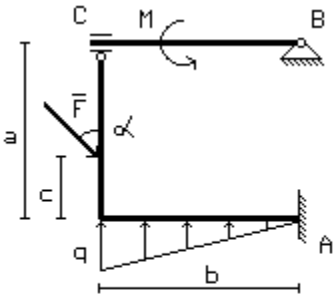
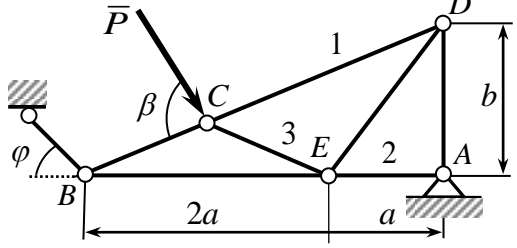
Билет № 12

Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в шарнире C и момент в заделке A, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 2 и 1 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 3 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> <p>$b = a\sqrt{3}$, $\varphi = 90^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $P = Q = P_0$, $DC = CE$</p>	<p>45</p>

Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в шарнире C и момент в заделке A, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 2 и 3 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 1 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> <p>$b = a\sqrt{3}$, $\varphi = 90^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $P = Q = Q_0$,</p>	<p>45</p>

Приложение 4. Задания для защиты курсовой работы

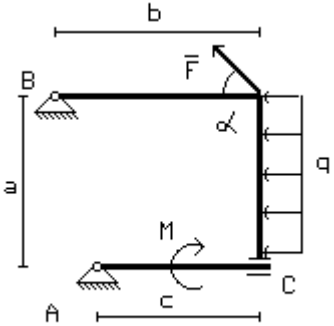
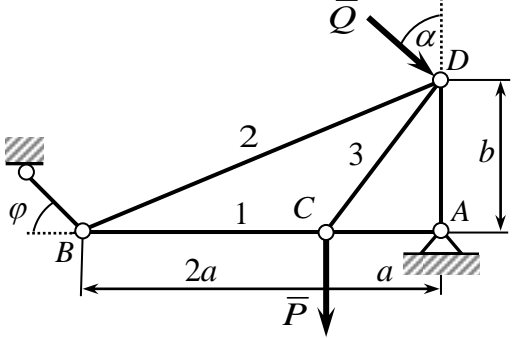
Билет № 14

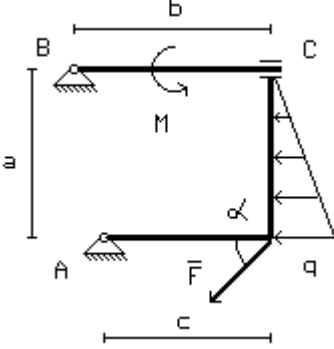
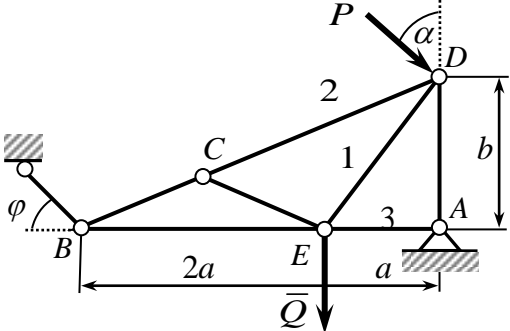
Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в шарнире C и момент в заделке A, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 1 и 3 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 2 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> <p>$b = a\sqrt{3}$, $\varphi = 90^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $P = Q = P_0$, $DC = CE$</p>	<p>45</p>

Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в шарнире C и момент в заделке A, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 2 и 3 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 1 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> <p>$b = a\sqrt{3}$, $\varphi = 90^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $P = Q = P_0$, $DC = CE$</p>	<p>45</p>

Приложение 4. Задания для защиты курсовой работы

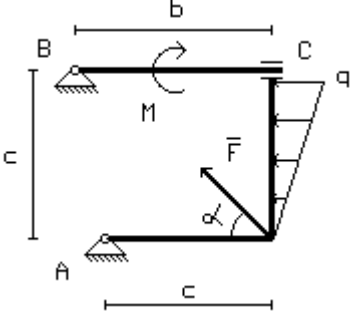
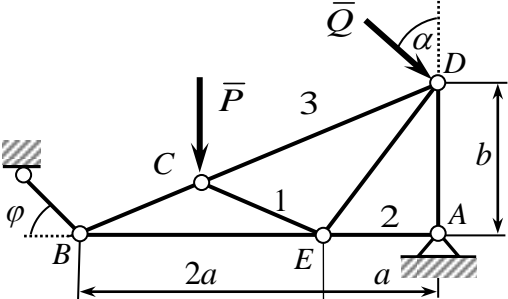
Билет № 16

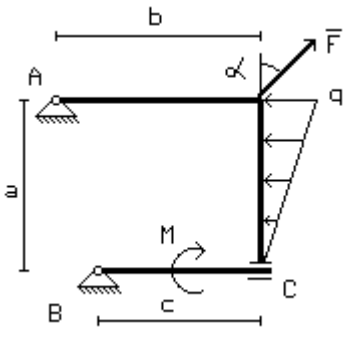
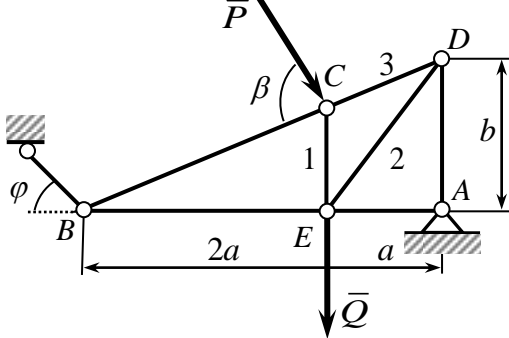
Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в скользящей заделке С, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 2 и 3 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 1 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> $b = a\sqrt{3}, \varphi = 90^\circ, \alpha = 60^\circ, P = Q = Q_0,$	<p>45</p>

Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в скользящей заделке С</p> <p>, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 2 и 3 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 1 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> <p>$b = a\sqrt{3}$, $\varphi = 90^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $P = Q = P_0$, $DC = CE$</p>	<p>45</p>

Приложение 4. Задания для защиты курсовой работы

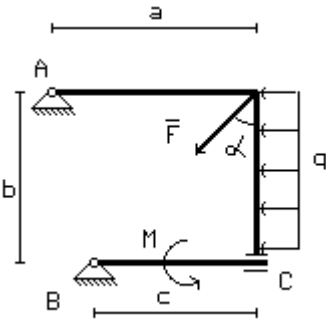
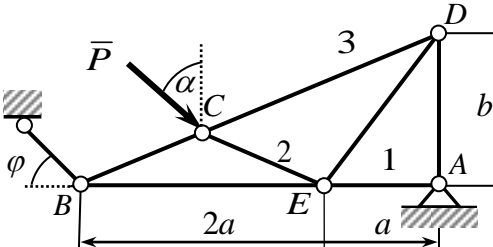
Билет № 18

Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в скользящей заделке C, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 2 и 3 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 1 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> <p>$b = a\sqrt{3}$, $\varphi = 90^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $P = Q = P_0$, $DC = CE$</p>	<p>45</p>

Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в скользящей заделке С, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 2 и 3 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 1 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремоны [25]</p> <p>Дано</p> <p>$b = a\sqrt{3}$, $\varphi = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $P = Q = Q_0$,</p>	<p>45</p>

Приложение 4. Задания для защиты курсовой работы

Билет № 20

Расчетная схема	Определить (и указать):	Баллы
	<p>А) Реакции в скользящей заделке C, составляя минимально необходимое число уравнений равновесия</p>	<p>20</p>
	<p>В) Для заданной фермы определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. - Реакции внешних связей [10]; 2. - Реакции стержней 2 и 3 методом вырезания узлов [5]; 3. - Реакцию стержня 1 методом Риттера. [5]. <p>Построить диаграмму Максвелла-Кремона [25]</p> <p>Дано</p> <p>$b = a\sqrt{3}$, $\varphi = 90^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $P = P_0$, $BC = CE$</p>	<p>45</p>

МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Бутенин Н.В., Лунц Я. Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. 1. Статика и кинематика. – 6-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2004,– 272 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учебник для втузов. 15-е изд., стер.– М.: Высш.шк., 2005.– 416с.: ил.
3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Учебник для втузов. 12-е изд., испр. – М.: Интеграл-Пресс, 2006.– 8 с.
4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Учебное пособие для втузов. Под редакцией А.А.Яблонского. – 16-е изд., стер.– М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 384 с.
5. Бертяев В.Д. Теоретическая механика на базе Mathcad. Учебное пособие.– СПб.: БХВ – Петербург, 2005.– 752 с.
6. Примеры и задачи в теоретической механике ч.1. Пособие для самостоятельной работы. Под. ред. В.Д. Кухаря. – М.: Изд-во Ассоциации строит. вузов. – 2004. – 192 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ.....	3
СОДЕРЖАНИЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ	4
<i>Часть 1. Расчёт плоской шарнирной фермы</i>	4
<i>Часть 2. Расчёт плоских составных конструкций</i>	4
<i>Часть 3. Расчет пространственной конструкции</i>	4
<i>Часть 4. Равновесие плоского шарнирного механизма</i>	5
ЧАСТЬ 1. РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ ШАРНИРНОЙ ФЕРМЫ.....	6
1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ ФЕРМЫ.....	7
1.1.1. <i>Определение опорных реакций аналитическим способом</i>	7
1.1.2. <i>Определение опорных реакций графическим способом</i>	9
1.2. РАСЧЕТ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМЫ	11
1.2.1. <i>Определение усилий в стержнях фермы аналитическим методом вырезания узлов</i>	11
1.2.3. <i>Определение усилий в стержнях фермы графическим методом вырезания узлов</i>	24
1.2.4. <i>Определение усилий в стержнях фермы построением диаграммы Максвелла – Кремоны</i>	28
1.2.5. <i>Определение усилий в стержнях фермы методом Риттера</i>	31
ЧАСТЬ 2. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ.....	36
2.1. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЕРВОГО ТИПА	38
2.2. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ТИПА	42
2.3. ПРОВЕДЕНИЕ РАСЧЕТОВ В СРЕДЕ МАТНСАД	46
ЧАСТЬ 3. РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ.....	51
3.1. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ	52
3.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА ЭВМ.....	56
ЧАСТЬ 4. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ.....	63
<i>Цель задания</i>	63
<i>Содержание задания</i>	63
<i>Порядок выполнения работы</i>	64
ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ	65
1. <i>Составление уравнений равновесия</i>	66
2. <i>Составление уравнений геометрических связей</i>	74
3. <i>Результаты расчетов</i>	75
4. <i>Анализ результатов вычислений и выводы</i>	82
5. <i>Выводы</i>	88
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. АЛЬБОМ ЗАДАНИЙ ПО СТАТИКЕ	89
СХЕМЫ ПЛОСКИХ ШАРНИРНЫХ ФЕРМ.....	90
<i>Исходные данные для ферм</i>	95
СХЕМЫ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ	96
<i>Исходные данные для составных конструкций</i>	111
<i>Таблица определяемых реакций</i>	112
СХЕМЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИСТЕМ	116
<i>Исходные данные для пространственных систем</i>	121
СХЕМЫ ПЛОСКИХ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ	122
<i>Исходные данные для плоских механизмов</i>	127

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ОФОРМЛЕНИЕ И ЗАЩИТА КУРСОВОЙ РАБОТЫ.....	129
1. ОФОРМЛЕНИЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ.....	129
2. ЗАЩИТА КУРСОВОЙ РАБОТЫ.....	131
3. ОБРАЗЕЦ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА КУРСОВОЙ РАБОТЫ.....	132
4. ОБРАЗЕЦ ЛИСТА ОГЛАВЛЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ	133
5. ОБРАЗЕЦ ЛИСТА АННОТАЦИИ КУРСОВОЙ РАБОТЫ	134
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. КРАТКАЯ СПРАВКА ПО ТЕОРИИ.....	135
I. ИНФОРМАЦИЯ О СИСТЕМАХ СИЛ И УСЛОВИЯХ ИХ РАВНОВЕСИЯ	135
1. Плоская система сходящихся сил	135
2. Произвольная плоская система сил	136
3. Произвольная пространственная система сил.....	137
II. СВЕДЕНИЯ О СВЯЗЯХ И ИХ РЕАКЦИЯХ.....	138
1. Внешние связи и их реакции в плоских конструкциях	138
2. Внутренние связи и их реакции в плоских составных конструкциях	140
3. Связи и их реакции в пространственных конструкциях	142
III. РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СИЛЫ	143
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЗАЩИТЫ РАБОТЫ	144
МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ	164
ОГЛАВЛЕНИЕ.....	165

Учебное издание

Бертяев Виталий Дмитриевич

Семенова Людмила Петровна

Ткач Ольга Александровна

**РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ
ТЕЛ И КОНСТРУКЦИЙ**

Учебное пособие

Авторское редактирование

Изд. лиц. ЛР № 020300 от 12.02.97. Подписано в печать 10.06.21.

Формат бумаги 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 9,60. Уч.–изд. л. 10,50.

Тираж 100 экз. Заказ № _____

Оригинал-макет отпечатан на кафедре «Теоретическая механика»
Тульского государственного университета

Тульский государственный университет
300600, Тула, просп. Ленина, 92

Отпечатано в издательстве ТулГУ
300012, г. Тула, просп. Ленина, 95