

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА № 4

Исследование релейных систем автоматического регулирования методом фазовой плоскости

Цель работы: исследование релейной автоматической системы 2-го порядка на фазовой плоскости. В работе рассматриваются свободные движения системы, обусловленные ненулевыми начальными условиями, периодические режимы, способы стабилизации релейных систем.

Теоретические положения

Релейные автоматические системы являются важной разновидностью нелинейных систем и нашли широкое применение, благодаря конструктивной простоте и быстрдействию.

В работе рассматриваются процессы, протекающие в системе с одним релейным элементом, структурную схему которой можно представить в виде рис.1.1. На рисунке **НЭ** - нелинейный (релейный) элемент, имеющий статическую нелинейную характеристику **F(x)**; **W(p)** - передаточная функция линейной части системы; **u, z** - сигналы на входе, выходе системы; **x** - сигнал отклонения (ошибки) системы; **y** - сигнал на выходе нелинейного элемента.

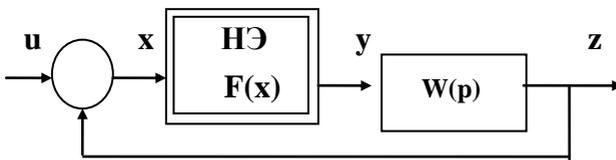


Рис.1.1

Описание нелинейных систем автоматического управления можно получить из уравнений в изображениях по Лапласу, записанных в соответствии со структурной схемой:

$X(p) = U(p) - Z(p); \quad Z(p) = W(p)Y(p); \quad Y(p) = L \{F(x)\},$
где **L** - прямое преобразование Лапласа.

Из уравнений следует $X(p) = U(p) - W(p) L \{F(x)\}, \quad (1.1)$

откуда при известной передаточной функции линейной части системы легко получить ее дифференциальное уравнение, связывающее выходной и входной сигналы системы.

В данной работе рассматривается автономная ($u=0$) нелинейная система второго порядка с передаточной функцией: $W(p) = 1 / p^2$, для которой легко получить уравнение в изображениях

$$p^2 X(p) = -L\{F(x)\}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + F(x) = 0 \quad (1.2)$$

и дифференциальное уравнение

При заданных начальных условиях $x(0)$ и $x'(0)$ получим однозначно определяемое решение уравнения, т.е. кривую $x(t)$. Таким образом, для системы второго порядка две величины: сигнал отклонение (ошибки) $x(t)$ и его производная $v=x'(t)$ определяют состояние системы. Плоскость, координатами которой являются переменные, полностью определяющие состояние системы, называется **фазовой плоскостью** (рис.1.2). Метод исследования автоматических систем на фазовой плоскости носит название **метода фазовой плоскости**. Состояние системы 2-го порядка характеризуется точкой на фазовой плоскости, называемой **изображающей точкой**. При изменении состояния системы изображающая точка перемещается на фазовой плоскости, описывая кривую, называемую **фазовой траекторией**. Совокупность фазовых траекторий, построенных при всевозможных начальных условиях, составляет **фазовый портрет**.

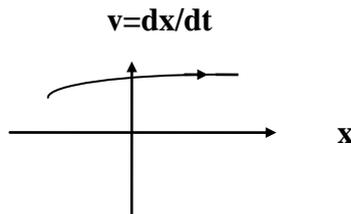


Рис.1.2

Фазовые траектории имеют ряд общих черт: они не пересекаются друг с другом (кроме особых точек); перемещение изображающей точки в верхней полуплоскости производится слева

направо, а в нижней - справа налево (т.е. по часовой стрелке); пересечение фазовыми траекториями оси абсцисс происходит под прямым углом. На оси абсцисс (при $\mathbf{v}=\mathbf{0}$) \mathbf{x} достигает экстремальных (максимального или минимального значений).

Для исследования нелинейной автоматической системы, описываемой уравнением (1.2), опишем ее системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \mathbf{dx}/dt &= \mathbf{v} \\ \mathbf{dv}/dt &= -\mathbf{F}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Исключив время t из системы получим

$$\mathbf{dv}/\mathbf{dx} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}) / \mathbf{v}, \quad (1.3)$$

$$\text{или в общем случае: } \frac{dv}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) представляет собой уравнение фазовых траекторий. Решением этого уравнения является кривая $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, начинающаяся из точки, определяемой начальными условиями $(\mathbf{x}^0, \mathbf{v}^0)$, и заканчивающаяся (для устойчивой системы) в особой точке - положении равновесия, определяемой из системы уравнений:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

В линейных системах существует шесть типов особых точек: центр, устойчивый и неустойчивый фокус, устойчивый и неустойчивый узел, "седло".

В нелинейных системах, в отличие от линейных, тип особой точки не всегда определяет поведение изображающей точки на всей фазовой плоскости. Фазовые траектории нелинейной системы могут иметь разный вид в разных областях фазовой плоскости. Фазовые портреты могут содержать: 1) особые точки; 2) сепаратриссы - особые траектории, разделяющие области с траекториями разного типа; 3) предельные циклы - особые траектории, представляющие собой изолированные замкнутые фазовые траектории.

В работе исследуются релейные системы со следующими нелинейными элементами:

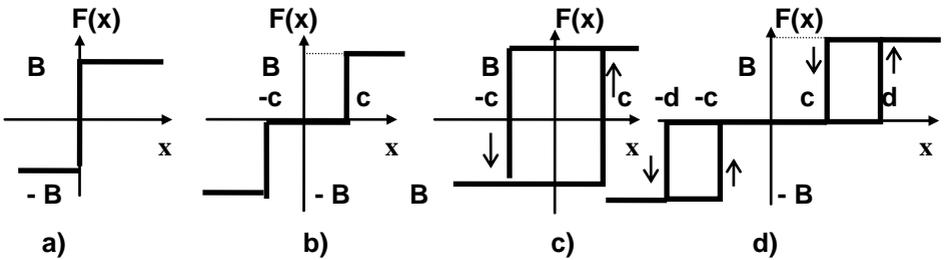


Рис.1.3

Нелинейные элементы относятся к классу кусочно-линейных, принимающих три различных значения: $-B$, 0 , $+B$ на разных участках фазовой плоскости. Решим уравнение (1.2) для этих трех значений нелинейной характеристики

$$dv/dx = \{-B, 0, +B\}/v$$

1. $F(x) = 0$; $dv/dx = 0$; $v = C(\text{const})$;

2. $F(x) = -B$; $dv/dx = -B/v$; $v dv = -B dx$; $v^2/2 = -Bx + C$;

3. $F(x) = +B$; $dv/dx = +B/v$; $v dv = +B dx$; $v^2/2 = +Bx + C$.

Вид фазовых траекторий для 3-х значений представляет собой параболы и константы, имеющие вид (рис. 1.4).

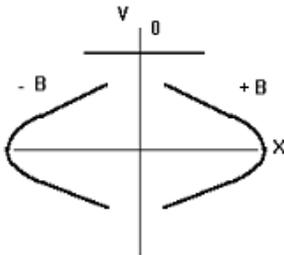


Рис.1.4

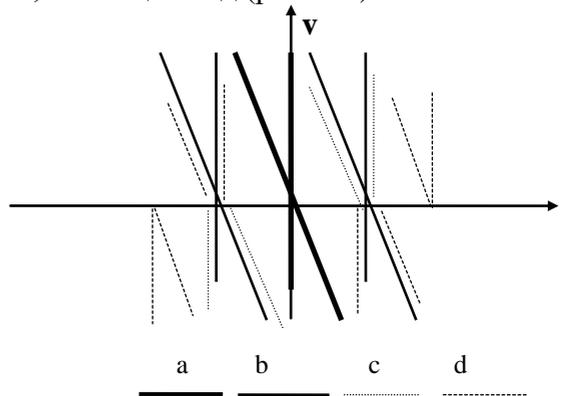


Рис.1.5

Изображающая точка из положения, определяемого начальными условиями, движется по одной из траекторий, соответствующих значению нелинейной характеристики, меняя вид траектории на **линиях переключения**, показанных для

нелинейностей $3a, b, c, d$ на рис 1.5 прямыми, параллельными оси ординат. В замкнутой системе с нелинейностями (рис. 1.3) возникают незатухающие периодические процессы, и такая система работает неудовлетворительно.

Возникает задача стабилизации релейных систем, которую можно проводить двумя способами: 1) коррекцией по скорости; 2) введением демпфирования - жесткой обратной связи.

Коррекция по скорости проводится согласно схеме рис.1.6. Нелинейный элемент с характеристикой $F(\sigma)$ имеет линии переключения в виде прямых, параллельных оси ординат в координатных осях σ, v (рис.1.5). Построенные же в координатных осях x, v они будут иметь вид прямых, наклоненных к оси ординат на угол γ , причем $\operatorname{tg}\gamma = \alpha$, что следует из соотношений: $\sigma = x + \alpha v = \{-d, -c, 0, c, d\}$, или $v = -x/\alpha + \{-d, -c, 0, c, d\}/\alpha$ (рис.1.5).

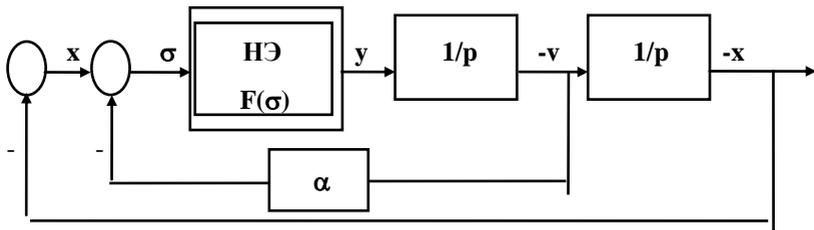


Рис.1.6

(В фигурных скобках показаны все возможные значения для нелинейностей, представленных на рис. 1.3). Изменение линий переключения приводит к изменению фазовых портретов и стабилизации систем, хотя форма фазовых траекторий не изменится, и будет иметь вид, представленный на рис. 1.4.

Коррекция жесткой обратной связью проводится согласно схеме рис. 1.7.

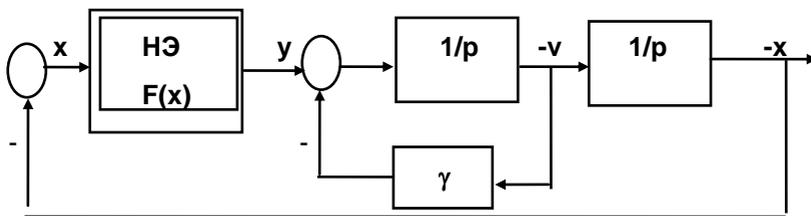


Рис.1.7

Уравнение (1.1), записанное относительно изображений сигналов при подстановке в него передаточной функции линейной части системы рис.1.7 $W(p) = 1/(p(p+\gamma))$ преобразуется в дифференциальное уравнение, описывающее процессы в системе в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + F(x) = 0. \quad (1.5)$$

Запишем систему уравнений: $dx/dt=v$; $dv/dt=-F(x)-\gamma v$, из которой, исключив время, получим дифференциальное уравнение, аналогичное (1.3):

$$dv/dx = -(\gamma v + F(x))/v, \text{ или } dv v / ((\gamma v + F(x)) = -dx,$$

откуда для трех значений нелинейных функций (рис.1.2), легко получить

1. $F(x) = 0$; $dv/dx = -\gamma$; $v = -\gamma x + \text{const}$;

2. $F(x) = -B$; $dv v / (\gamma v - B) = -dx$;

$$\frac{1}{\gamma} v + \frac{B}{\gamma^2} \ln |\gamma v - B| = -x + \text{const};$$

3. $F(x) = +B$; $dv v / (\gamma v + B) = -dx$;

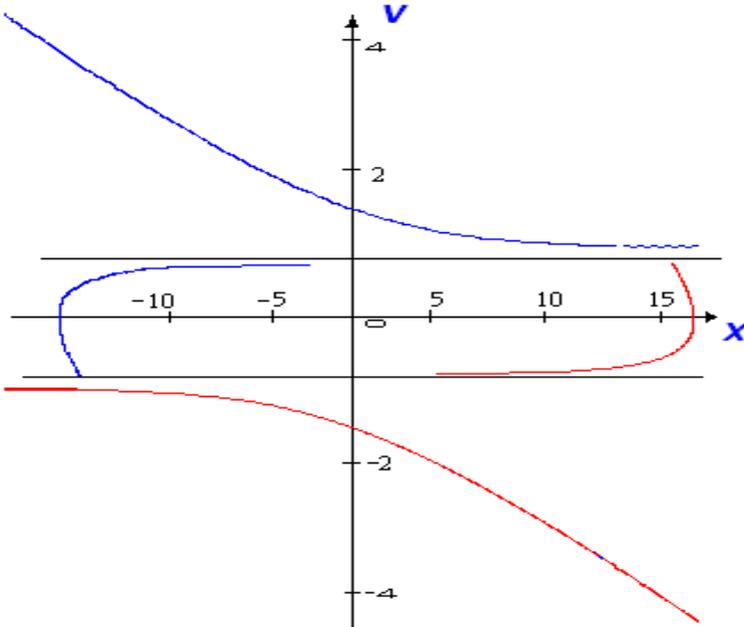
$$\frac{1}{\gamma} v - \frac{B}{\gamma^2} \ln |\gamma v + B| = -x + \text{const} .$$

Вид фазовых траекторий (для случаев **2** и **3**) может быть получен графическим суммированием относительно v двух графиков: $x = -v/\gamma$ и $x = -B/\gamma^2 \ln|\gamma v - B|$ (для $-B$);

$$x = -v/\gamma \text{ и } x = +B/\gamma^2 \ln|\gamma v + B| \text{ (для } +B\text{).}$$

Очевидно, что фазовые траектории при этом изменятся, что приведет к стабилизации замкнутой нелинейной системы, хотя линии переключения останутся прежними, параллельными оси

ординат. На рис.1.8 представлены фазовые траектории для $B=0.25$, $\gamma=0.3$.



, Рис.1.8

В нелинейных системах возможен режим, называемый **скользящим режимом**, когда фазовые траектории подходят к линии переключения так, как показано на рис.1.9. В этом режиме релейные элементы находятся в вибрационном режиме, а изображающая точка перемещается по линии переключения.

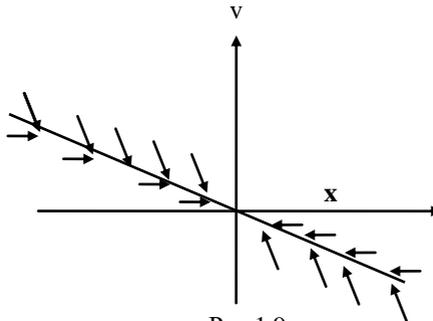


Рис.1.9

Задание к письменной работе

1. Для нелинейных характеристик и начальных значений, заданных в табл. 1.1 в соответствии с номером варианта, нарисовать вид фазовых траекторий для процессов в замкнутых системах рис.1.1 (без коррекции), рис.1,6 (с коррекцией по скорости), рис. 1.7 (с коррекцией жесткой обратной связью). Принять $V=0,25$; $c=0,1$; $d=0,2$.

2. Для указанных нелинейностей найти значение коэффициента α , при котором возникает скользящий режим, и зарисовать соответствующий фазовый портрет.

Таблица 1.1

№ варианта	Нелинейность (см. рис 1.3)	X(0) V(0)		α		γ	
1	a, c	0.5	0.8	0.3	0.6	0.2	0.8
2	a,d	0.0	0.5	0.5	0.2	0.3	0.7
3	b,c	0.8	0.0	0.4	0.8	0.25	0.75
4	b,d	0.7	0.7	0.7	0.35	0.4	0.9
5	a,b	1.0	0.0	0.5	1.0	0.3	1.0
6	c,d	0.0	1.0	0.75	0.25	0.5	1.0
7	a,d	0.75	0.25	0.3	0.5	0.4	0.9
8	b,c	0.3	0.5	0.5	0.8	0.25	1.0
9	b,d	0.5	0.8	0.2	1.0	0.4	1.0
10	b,c	0.2	1.0	0.5	0.75	0.5	0.2
11	a,b	0.4	-0.5	0.35	0.8	0.3	0.9
12	a, c	-0.8	-1.0	0.45	0.7	0.55	0.8
13	c,d	0.75	-0.5	0.6	0.4	0.45	0.6
14	a,d	-1.0	-1.0	0.85	0.2	0.35	0.7
15	b,c	0.9	-0.5	0.45	0.9	0.25	0.8