ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА 5

Исследование нелинейных систем автоматического управления методом гармонического баланса

Цель работы: исследование периодических процессов в автономных нелинейных системах автоматического управление (автоколебаний), условий возникновения устойчивых автоколебаний и определение их параметров.

Теоретические положения

Рассматривается нелинейная система, структурная схема которой представлена на рис.1.1,

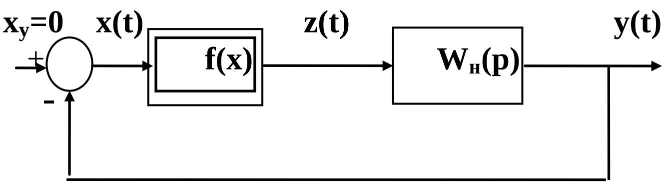


Рис.1.1

где **f(x)** - характеристика статического нелинейного элемента, **W(p)** - передаточная функция линейной динамической части системы автоматического управления. Из схемы (рис.1.1) при $\mathbf{x_y=0}$ следует

$$x(t)+y(t)=0. \qquad (1.1)$$

Для анализа периодических процессов, протекающих в схеме, предположим, что сигнал ошибки **x(t)** можно представить в виде гармонического сигнала, т. е. $x(t)=Xm\sin\omega t.$ (1.2)

Тогда на выходе нелинейного элемента сигнал можно представить рядом Фурье

$$z(t)=\sum_{k=0}^{\infty} z_{mk}\sin(\omega kt+\varphi_k). \qquad (1.3)$$

Для нелинейных элементов с нечетными характеристиками постоянная составляющая сигнала **z(t)** ($\mathbf{z_{mo}}$) равна нулю и суммирование в (1.3), начинается с к=1. В зависимости от вида нелинейности соотношение амплитуд гармонических составляющих в (1.3) будет различным. При прохождении сигнала **z(t)** через линейное динамическое звено соотношение амплитуд гармонических составляющих изменится, при этом амплитуды высших гармоник уменьшатся из-за фильтрующих свойств линейной части системы. В методе гармонического баланса принимается **гипотеза фильтра**, согласно которой всеми гармоническими составляющими сигнала **y(t)**, кроме первой, можно пренебречь. При выполнении гипотезы фильтра

$$\mathbf{y(t)=Y_{m1}\sin(\omega t+\varphi)} \qquad (1.4)$$

и равенство (1.1) распадается на два:

$$\mathbf{X_m=Y_{m1}; \quad \varphi=\pi.} \qquad (1.5)$$

Уравнения (1.5) носят название **уравнений гармонического баланса**.

Комплексный коэффициент усиления нелинейного звена

При выполнении гипотезы фильтра в схеме учитывается только первая гармоническая составляющая сигнала **z(t),** т.е.

$$\bar{z}(t) \cong \mathbf{Z_{m1}\sin(\omega t+\varphi_1)} \qquad (1.6)$$

С использованием формулы Эйлера выражение (1.6) может быть представлено следующим образом: $\bar{z}(t)$ $\mathbf{=Im\{Z_{m1}e^{j(\omega t+\varphi_1)}\}=Im\{Z\}}$

В то же время выражение (1.6) может быть записано в виде

$$\bar{z}(t) = X_m[K_s \sin\omega t + K_c \cos\omega t] =$$

$$= X_m\sqrt{K_s^2+K_c^2}\left(\frac{K_s}{\sqrt{K_s^2+K_c^2}}\sin\omega t + \frac{K_c}{\sqrt{K_s^2+K_c^2}}\cos\omega t\right)$$

(1.7)

откуда следует, что Z можно представить как

$$Z = X_m\sqrt{K_s^2+K_c^2}\,e^{j(\omega t+arctg\frac{K_c}{K_s})} = X_m(K_s + jK_c).$$

Комплексным коэффициентом усиления нелинейного звеня (ККУ) называют отношение первых гармоник выходного и входного сигналов, выраженных в комплексной форме. В отличие от линейных звеньев ККУ нелинейного звена зависит не от частоты, а от амплитуды входного сигнала

$$W_H(X_m) = \frac{\dot{Z}}{\dot{X}} = \frac{X_m \sqrt{K_s^2 + K_c^2} e^{j(\omega t + arctg \frac{K_c}{K_s})}}{X_m e^{j\omega t}} = \qquad (1.8)$$

$$= \sqrt{K_s^2 + K_c^2} e^{jarctg \frac{K_c}{K_s}}.$$

Как видно из (1.8), комплексный коэффициент определяется коэффициентами K_s и K_c, которые называются **коэффициентами гармонической линеаризации.**

Определение коэффициентов гармонической линеаризации

Определение коэффициентов гармонической линеаризации следует проводить, исходя из тех соображений, что сигнал $\bar{z}(t)$ является приближением сигнала **z(t)**. Учитывая периодичность сигналов, приближение можно проводить на периоде, минимизируя среднюю квадратическую ошибку (СКО) между сигналами **z(t)** и $\bar{z}(t)$, т.е.

$$J = \int_0^{2\pi} (z(t) - \bar{z}(t))^2 d\omega t \to \min_{K_s, K_c}. \qquad (1.9)$$

Выражения коэффициентов гармонической линеаризации получаются из очевидных соотношений $\frac{\partial J}{\partial K_s} = 0; \frac{\partial J}{\partial K_c} = 0$ и имеют вид:

$$K_c = K_c(X_m) = \frac{1}{X_m \pi} \int_0^{2\pi} f(X_m \sin \omega t) \cos \omega t d\omega t;$$

$$K_s = K_s(X_m) = \frac{1}{X_m \pi} \int_0^{2\pi} f(X_m \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t. \qquad (1.10)$$

Выражения коэффициентов гармонической линеаризации для различных нелинейностей приведены в табл. 1.2. Следует заметить, что для всех однозначных нелинейных характеристик коэффициенты гармонической линеаризации K_c равны нулю.

Определение параметров автоколебаний по годографам

Уравнения гармонического баланса (1.5) с использованием комплексных коэффициентов усиления линейного и нелинейного звеньев можно записать следующим образом:

$$\mathbf{W_н(X_m)W_л(j\omega)=-1} \tag{1.11}$$

или $\mathbf{W_л(j\omega)=-1/W_н(X_m)=V_н(X_m)}$.

Из последнего равенства очевидно, что параметры автоколебаний (частоту ω и амплитуду X_m) можно найти на пересечении годографа линейной динамической части и инверсного годографа нелинейного элемента, взятого со знаком "минус" (рис.1.2). Как видно из рисунка, два годографа пересекаются в двух точках **M** и **N**, определяющих возможные автоколебания с параметрами $(X_m^M;\omega^M);(X_m^N;\omega^N)$ соответственно.

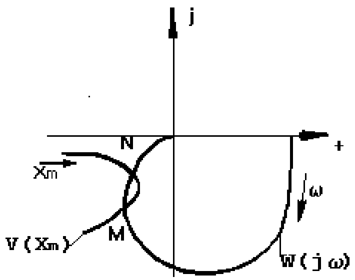


Рис.1.2

Не каждое из найденных решений соответствует устойчивым автоколебаниям, т.е. таким, которые после кратковременного воздействия на систему, восстанавливаются. Для определения устойчивости автоколебаний можно воспользоваться достаточным критерием Гольдфарба, справедливым для устойчивой линейной части системы, который формулируется следующим образом.

При движении по годографу $\mathbf{V(X_m)}$ в сторону увеличения амплитуды $\mathbf{X_m}$ точке пересечения годографов, проходя через которую мы выходим из контура амплитудно-фазовой характеристики линейной части системы, соответствует устойчивое автоколебание. Таким образом, параметры автоколебаний в системе определяются по пересечению двух годографов в точке **M**.

Определение параметров автоколебаний по логарифмическим характеристикам

Для определения параметров автоколебаний нелинейных систем с однозначными нелинейностями удобно пользоваться логарифмическими амплитудными и фазовыми характеристиками на основе соотношений, полученных из (1.11)

$$|\mathbf{W_н(X_m)}|*|\mathbf{W_л(j\omega)}|=1,$$

$$\varphi_н(X_m)+\varphi_л(\omega)=-\pi. \qquad (1.12)$$

Из первого соотношения следует $|W_л(j\omega)|=|1/W_н(X_m)|$ или с учетом того, что для однозначных нелинейных характеристик $K_c=0$ $|W_л(j\omega)|=|1/K_s(X_m)|$, или после логарифмирования правой и левой частей

$$L_л(\omega)=-L_н(X_m), \qquad (1.13)$$

где $L_л(\omega)=20lg|W_л(j\omega)|$, $\qquad -L_н(X_m)=20lg|1/K_s(X_m)|$.

Из второго соотношения для однозначных нелинейных характеристик, для которых $\varphi_н(X_m)=0$, следует $\varphi_л(\omega)=-\pi$. (1.14)

Таким образом, равенства (1.13) и (1.14) определяют условия возникновения автоколебаний и из них могут быть найдены параметры возможных автоколебаний. Однако не всякое решение соответствует устойчивым автоколебаниям. Для определения устойчивости автоколебаний пользуются следующими правилами:

1. если при увеличении амплитуды X_m ординаты логарифмической характеристики $–L_н(X_M)$ увеличиваются, то линия “$-\pi$” штрихуется сверху, а в противном случае - снизу;
2. если при увеличении частоты ω фазовая характеристика линейной части $\varphi_л(\omega)$ пересекает прямую "$-\pi$", переходя с заштрихованной стороны на незаштрихованную, то автоколебания - устойчивы, а в противном случае - неустойчивы.

Таким образом, для определения параметров автоколебаний в замкнутой системе с нелинейным элементом, имеющим однозначную характеристику, на одном графике строятся характеристики $L_л(\omega)$ и $-L_н(X_m)$ (очевидно, что ω и X_m откладываются на разных участках одной оси абсцисс в логарифмическом масштабе); фиксируется точка ω_0, для которой выполняется условие (1.14) и из равенства (1.13) определяется амплитуда X_{m0} возможных автоколебаний; проверяется устойчивость автоколебаний.

На рис.1.3 показан пример определения параметров автоколебаний в замкнутой системе с нелинейностью типа "насыщение", коэффициенты гармонической линеаризации которой приведены в табл. 1.2.

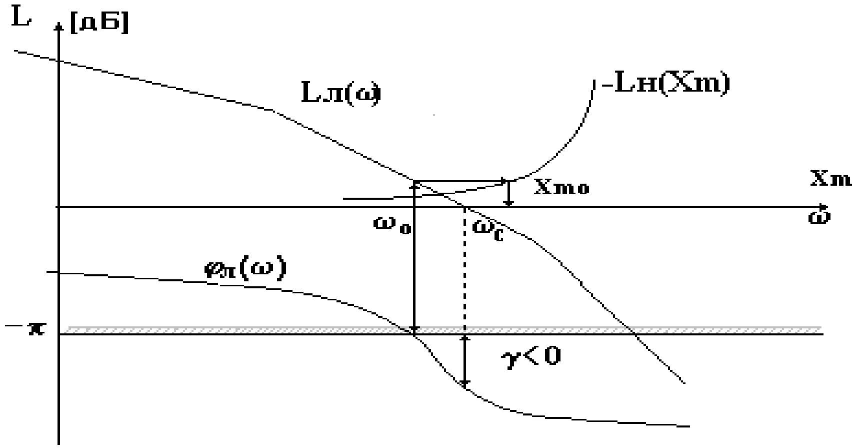


Рис.1.3

В письменной работе исследуется автономная нелинейная система (рис.1.1), линейная часть которой задана на рисунке 1.5 с нелинейностью, заданной в табл.1.1 с параметрами, соответствующими номеру варианта. При этом для неоднозначной нелинейной характеристики рекомендуется пользоваться построением годографов, а для однозначной - логарифмических характеристик линейной и нелинейной частей разомкнутой системы.

Задание на письменную работу

1. Построить амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы $\mathbf{W_л(j\omega)}$, показанной на рис. 1.5, с параметрами из табл. 1.3, определяемыми в соответствии с номером варианта. (Для однозначных нелинейностей рекомендуется строить характеристику $\mathbf{L_л(\omega)}$).

2. На том же графике построить инверсный годограф нелинейного статического элемента, заданного в табл. 1.1 с параметрами, заданными

в табл. 1.2 в соответствии с номером варианта. (Для однозначных нелинейностей – характеристику - $\mathbf{L_н(X_m)}$).

3. Определить диапазон изменения коэффициента усиления разомкнутой системы, при котором в нелинейной замкнутой системе могут возникнуть устойчивые автоколебания.

Методические указания

Определение параметров автоколебаний по фазовому портрету производится, исходя из следующих соображений. При $\mathbf{x(t)=X_m \sin\omega t}$ $\mathbf{dx(t)/dt=X_m \omega \sin\omega t}$ и фазовый портрет будет представлять собой эллипс, из которого можно найти параметры автоколебаний (см. рис. 1.4).

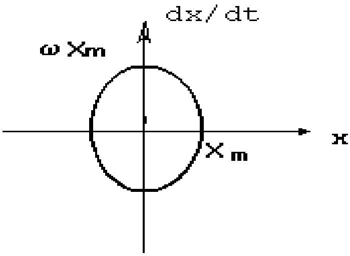


Рис.1.4

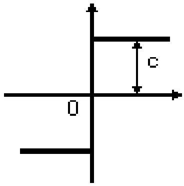
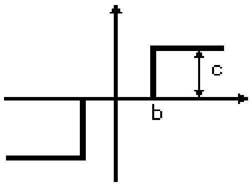
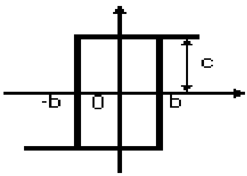
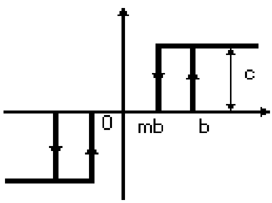
Таблица 1.1

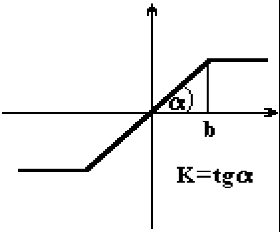
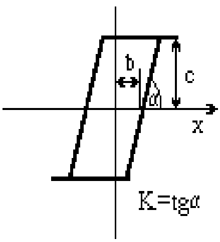
№ бригады	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
№ нелинейности	1	2	3	5	3	4	2	1	2	5	1	6	2	2	3
№ нелинейности	4	3	5	4	6	6	4	6	6	6	3	3	5	6	4

Параметры нелинейностей: $\alpha=45^0$, $b=0.5$, $b_1=0.25$, $b_2=0.5$, $c=0.75$, $m=0.5$.

Таблица 1.2

№	**Статическая характеристика нелинейного элемента**	$\mathbf{K_s(X_m)}$	$\mathbf{K_c(X_m)}$

<table>
<tr>
<td>1</td>
<td>Идеальная релейная

</td>
<td>$$\frac{4c}{\pi Xm}$$</td>
<td>0</td>
</tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>Релейная с зоной нечувствительности

</td>
<td>$$\frac{4c}{\pi Xm}\sqrt{1-\frac{b^2}{Xm^2}}$$</td>
<td>0</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>Релейная с гистерезисной петлей

</td>
<td>$$\frac{4c}{\pi Xm}\sqrt{1-\frac{b^2}{Xm^2}}$$</td>
<td>$$-\frac{4cb}{\pi Xm^2}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>Релейная с зоной нечувствительности

</td>
<td>$$\frac{2c}{\pi Xm}\left(\sqrt{1-\frac{b^2}{Xm^2}}+\right.$$ $$\left.+\sqrt{1-\frac{m^2b^2}{Xm^2}}\right)$$ при Xm>b</td>
<td>$$-\frac{2cb}{\pi Xm^2}*$$ $$*(1-m)$$</td>
</tr>
</table>

5	С насыщением 	$\frac{2k}{\pi}\left(\arcsin\frac{b}{Xm}+\frac{b}{Xm}\sqrt{1-\frac{b^2}{Xm^2}}\right)$ при Xm≥b	0
6	С насыщением и гистерезисной петлей 	$\frac{k}{\pi}\left[\arcsin\frac{c+kb}{kXm}+\arcsin\frac{c-kb}{kXm}+\frac{c+kb}{kXm}\sqrt{1-\frac{(c+kb)^2}{k^2Xm^2}}+\frac{c-kb}{kXm}\sqrt{1-\frac{(c-kb)^2}{K^2Xm^2}}\right]$ при $Xm\geq\frac{c+kb}{k}$	$-\frac{bc}{\pi Xm^2}$

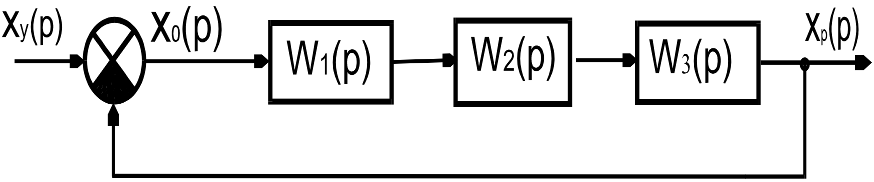


Рис.1.5. Структурная схема исследуемой САУ

$$W_1(p)=\frac{K_1}{1+pT_1};W_2(p)=\frac{K_2}{1+pT_2};W_3(p)=\frac{K_3}{p}.$$

.

Таблица 1.3

№ бригады	**K_1**	**K_2**	**K_3**	**T_1[c]**	**T_2[c]**
1	10	10	1	0.1	0.005
2	50	2.0	1	0.2	0.005

3	25	4.0	1	0.5	0.005
4	10	5.0	1	0.8	0.01
5	20	2.5	1	1.0	0.01
6	10	3.0	1	1.0	0.05
7	10	4.0	1	0.3	0.025
8	20	2.0	1	0.4	0.005
9	30	1.0	1	0.15	0.005
10	15	2.0	1	0.25	0.005
11	25	3.0	1	0.3	0.004
12	30	3.0	1	0.5	0.004
13	40	1.5	1	0.6	0.005
14	35	2.0	1	0.5	0.0025
15	45	1.5	1	0.4	0.0015