

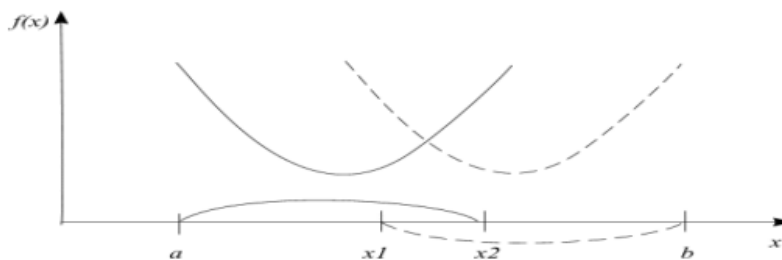
Лабораторная работа №1

Тема: Методы одномерной безусловной оптимизации

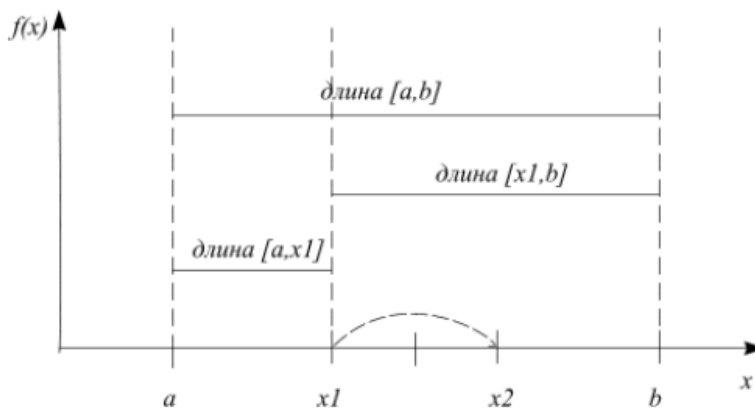
Цель работы: знакомство с оптимизационными задачами, изучение различных методов одномерной оптимизации и сравнение эффективности их применения для конкретных целевых функций.

1.3.4 Метод золотого сечения

Для того чтобы уменьшить отрезок неопределённости $[a, b]$, нам необходимо вычислить значение целевой функции $f(x)$, по крайней мере, в двух точках на отрезке $[a, b]$.



В результате этих двух экспериментов отрезок неопределённости сузится до отрезка $[a, x_2]$ или $[x_1, b]$. Так как у нас нет никаких оснований предпочесть один из этих вариантов, то точки x_1 и x_2 должны быть симметричны относительно середины отрезка $[a, b]$. В этом случае длины отрезков $[a, x_2]$ и $[x_1, b]$ будут равны. Таким образом, остаётся вопрос как выбрать точку x_1 .

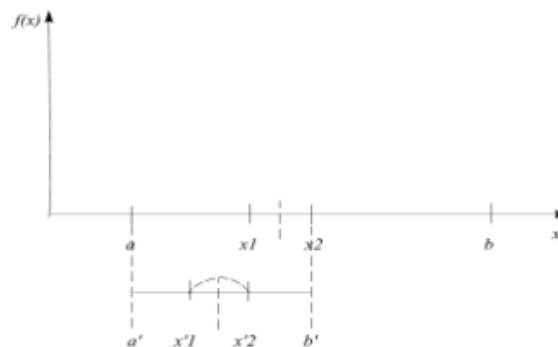


В методе золотого сечения точка x_1 выбирается из соображения, что должно выполняться соотношение:

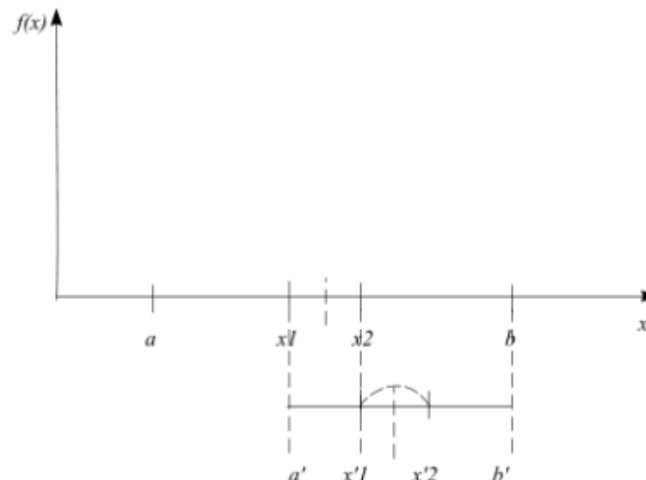
$$\frac{\text{длина}[a,b]}{\text{длина}[x_1,b]} = \frac{\text{длина}[x_1,b]}{\text{длина}[a,x_1]} = \lambda = 1.618033989...$$

т.е. точка x_1 делит отрезок $[a,b]$ по правилу «золотого сечения», где λ - есть «золотое отношение». Точка x_2 определяется как точка симметричная к x_1 относительно середины отрезка. В результате экспериментов у нас получается отрезок неопределённости $[a, x_2]$, содержащий точку x_1 , или отрезок неопределённости $[x_1, b]$, содержащий точку x_2 . Оказывается, что остающаяся точка на суженном отрезке неопределённости делит его вновь по правилу «золотого сечения». Следовательно, чтобы, в свою очередь, уменьшить новый отрезок неопределённости, нам не достаёт одного эксперимента, который осуществим выполняя вычисление целевой функции в точке, симметричной к оставшейся относительно середины этого нового отрезка. Всё это продемонстрировано на рисунке,

а)



б)



где буквы со штрихами обозначают новый отрезок неопределённости. Вариант а) соответствует случаю, если новым отрезком неопределённости будет $[a, x_2]$, а вариант б) – отрезку $[x_1, b]$.

В приводимой ниже схеме алгоритма остающиеся отрезки неопределённости переименовываются каждый раз как $[a, b]$, а точки, в которых проводятся эксперименты на этом отрезке, обозначаются через x_1 и x_2 , причём $x_1 < x_2$. Кроме того, y_1 и y_2 имеют следующие значения: $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$.

Схема алгоритма

Шаг 1. Задаются a, b, ε и $\lambda = 1.618 \dots$.

Шаг 2. Вычисляем $x_1 = b - \frac{b-a}{\lambda}, x_2 = a + \frac{b-a}{\lambda}, y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$.

Шаг 3. а) Если $y_1 \leq y_2$, то полагаем $b = x_2, x_2 = x_1, y_2 = y_1$ и вычисляем $x_1 = a + b - x_2, y_1 = f(x_1)$.

б) Если $y_1 > y_2$, то полагаем $a = x_1, x_1 = x_2, y_1 = y_2$ и вычисляем $x_2 = a + b - x_1, y_2 = f(x_2)$.

Шаг 4. Если $b - a > 2\lambda \varepsilon$, то переходим к шагу 3, иначе к шагу 5.

Шаг 5. Если $y_1 < y_2$, то полагаем $b = x_2$, иначе $a = x_1$.

Шаг 6. Определяем $\tilde{x} = (a+b)/2, \tilde{y} = f(\tilde{x})$ и поиск заканчивается.

После каждой итерации длина отрезка неопределённости уменьшается в λ раз. Так как первая итерация начинается после двух экспериментов, то после N экспериментов длина отрезка неопределённости будет

$$L_N = \frac{b-a}{\lambda^{N-1}}.$$

<i>№</i>	<i>Целевая функция</i>	<i>Отрезок [a,b]</i>	<i>Точность ε или число экспериментов N</i>
9	$ x + e^{10x}$	[-1,0]	$\varepsilon = 10^{-3}$