ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Тема: «Транспортная задача. Метод потенциалов»
Цель работы: Получить практические навыки решения транспортной задачи методом потенциалов.
Предварительная подготовка: спец. дисциплина «Математические методы»
Количество часов: 2 часа

Краткая теория

Нахождения решения транспортной задачи методом потенциалов включает следующие этапы:

1. Находят опорный план. При этом число заполненных клеток должно быть равным n+m-1.
2. Находят потенциалы β_{ij} и α_{ij} соответственно пунктов назначения и отравления.
3. Для каждой свободной клетки определяют число α_{ij}. Если среди чисел α_{ij} нет положительных, то получен оптимальный план транспортной задачи; если же они имеются, то переходят к новому опорному плану.
4. Среди положительных чисел α_{ij} выбирают максимальное, строят для свободной клетки, которой оно соответствует, цикл пересчета и производят сдвиг по циклу пересчета.
5. Полученный опорный план проверяют на оптимальность, т.е. снова повторят все действия начиная с этапа 2.

В заключение отметим, что при определении опорного плана или в процессе решения задачи может быть получен вырожденный опорный план. Чтобы избежать в этом случае зацикливания, следует соответствующие нулевые элементы опорного плана заменить сколь угодно малым положительным числом ε и решать задачу как вырожденную. В оптимальном плане такой задачи необходимо считать ε равным нулю.

Пример. Для транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице, найти оптимальный план.

ПО	ПН				Запасы
	B1	B2	B3	B4	
A1	1 30	2 20	4	1	50
A2	2	3 10	1 10	5 10	30
A3	3	2	4	4 10	10
Потребности	30	30	10	20	90

Решение. Сначала, используя метод СЗУ, находим опорный план задачи. Этот план записан в таблице.

Найденный опорный план проверяем на оптимальность. В связи с этим находим потенциалы ПО и ПН. Для определения потенциалов получаем систему

$$\begin{cases} \beta_1 - \alpha_1 = 1 \\ \beta_2 - \alpha_1 = 2 \\ \beta_2 - \alpha_2 = 3 \\ \beta_3 - \alpha_2 = 1 \\ \beta_4 - \alpha_2 = 5 \\ \beta_4 - \alpha_3 = 4 \end{cases}$$

содержащую шесть уравнений с семью неизвестными. Полагая $\alpha_1 = 0$, находим $\alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = 2, \beta_3 = 0, \beta_4 = 4$. Для каждой свободной клетки вычисляем число $\Delta_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$: $\Delta_{13} = -4, \Delta_{14} = 3, \Delta_{21} = 0, \Delta_{32} = 0, \Delta_{31} = -2, \Delta_{33} = -4.$

Так как среди чисел Δ_{ij} имеются положительные , то построенный план перевозок не является оптимальным и надо перейти к новому опорному плану. Наибольшим среди положительных Δ_{ij} являются $\Delta_{14} = 3$, поэтому для данной свободной клетки строим цикл пересчета и проводим сдвиг по этому циклу

ПО	ПН				Запасы
	В1	В2	В3	В4	
А1	1 30	2 - 20	4	1 +	50
А2	2	3 + 10	1 10	5 - 10	30
А3	3	2	4	4 10	10
Потребности	30	30	10	20	90

Наименьшее из чисел в минусовых клетках равно 10. Клетка, в которой находится это число, становится свободной в новой таблице. Другие числа в новой таблице получаются так: числу 10, стоящему в плюсовой клетке, добавим 10 и вычтем 10 из числа 20, находящегося в минусовой клетке. Клетка на пересечении строки A_2 и столбца B_4 становится свободной.

После этих преобразований получаем новый опорный план.

ПО	ПН				Запасы
	В1	В2	В3	В4	
А1	1 30	2 - 10	4	1 + 10	50
А2	2	3 20	1 10	5	30
А3	3	2 +	4	4 - 10	10
Потребности	30	30	10	20	90

Этот план проверяем на оптимальность. Снова находим потенциалы ПО и ПН. Для этого составляем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \beta_1 - \alpha_1 = 1 \\ \beta_2 - \alpha_1 = 2 \\ \beta_2 - \alpha_2 = 3 \\ \beta_3 - \alpha_2 = 1 \\ \beta_4 - \alpha_1 = 1 \\ \beta_4 - \alpha_3 = 4 \end{cases}$$

Полагая $\alpha_1 = 0$, находим $\alpha_2 = -1, \alpha_3 = -3, \beta_1 = 1, \beta_2 = 2, \beta_3 = 0, \beta_4 = 1$. Для каждой свободной клетки вычисляем число $\Delta_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$: $\Delta_{13} = -2, \Delta_{21} = 0, \Delta_{24} = -3, \Delta_{32} = 3, \Delta_{31} = 1, \Delta_{33} = -1.$

Таким образом, видим, что данный план перевозок не является оптимальным. Поэтому переходим к новому опорному плану

ПО	ПН				Запасы
	В1	В2	В3	В4	
А1	1 30	2 0	4	1 20	50
А2	2	3 20	1 10	5	30
А3	3	2 10	4	4	10
Потребности	30	30	10	20	90

Сравнивая разности $\beta_j - \alpha_i$ новых потенциалов , отвечающих свободным клеткам таблицы, с соответствующими числами c_{ij}, видим, что указанные разности потенциалов для всех свободных клеток не превосходят соответствующих чисел c_{ij}. Следовательно, полученный план

$$x = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

является оптимальным. При данном плане стоимость перевозок $S = 1 \cdot 30 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 20 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 140$

Задание: Решить задачу оптимального планирования выпуска продукции.

В трех хранилищах A1, A2, A3 имеется соответственно а1, а2, а3 тонн топлива. Требуется спланировать перевозку топлива пяти потребителям B1, B2, B3, B4, B5, спрос которых равен соответственно в1, в2, в3, в4, в5 тонн, так, чтобы затраты на транспортировку были минимальны. Тарифы перевозок представлены в виде матрицы C_{ij}.

Конкретные данные приведены в нижеследующей таблице.

Вариант	*9*
а1	370
а2	450
а3	430
в1	300
в2	230
в3	330
в4	290
в5	100
с11	21
с12	18
с13	14
с14	3
с15	6
с21	7
с22	11
с23	10
с24	5
с25	12
с31	4
с32	8
с33	12
с34	8
с35	13