

Пример решения задачи

по теме «Задача о назначениях»

Пример. Найти решение задачи о назначениях с матрицей C , в которой требуется минимизировать суммарные затраты времени на выполнение работ всеми работниками.

		1	2	3	4	5
	1	10	5	9	18	11
	2	13	19	6	12	14
$C =$	3	3	2	4	4	5
	4	18	9	12	17	15
	5	11	6	14	19	10

(В матрице C строки соответствуют работам, а столбцы – работникам).

Решение.

1. Выберем в каждом столбце минимальный элемент и вычтем его из элементов данного столбца. В результате получим матрицу $C^{(1)}$.

		1	2	3	4	5
	1	10	5	9	18	11
	2	13	19	6	12	14
$C =$	3	3	2	4	4	5
	4	18	9	12	17	15
	5	11	6	14	19	10
		3	2	4	4	5

Общая сумма вычитаемых элементов равна $z_1 = 18$.

		1	2	3	4	5
	1	7	3	5	14	6
	2	10	17	2	8	9
$C^{(1)} =$	3	0	0	0	0	0
	4	15	7	8	13	10
	5	8	4	10	15	5

2. Аналогичную процедуру проведем со строками. Получим матрицу $C^{(2)}$.

		1	2	3	4	5	
	1	7	3	5	14	6	3
	2	10	17	2	8	9	2
$C^{(1)} =$	3	0	0	0	0	0	0
	4	15	7	8	13	10	7
	5	8	4	10	15	5	4

Общая сумма вычитаемых элементов равна $z_2 = 16$.

		1	2	3	4	5
	1	4	0	2	11	3
	2	8	15	0	6	7
$C^{(2)}=$	3	0	0	0	0	0
	4	8	0	1	6	3
	5	4	0	6	11	1

3. Получим нулевое решение в матрице $C^{(2)}$. Для этого будем пометать нули. Начинаем пометать со строк с наименьшим количеством нулей.

- Пометим в первой строке нуль. При этом все остальные нули в первой строке(их нет) и во втором столбце зачеркиваем.
- Пометим во второй строке нуль. При этом все остальные нули во второй строке и в третьем столбце зачеркиваем.
- Пометим в третьей строке любой нуль. При этом все остальные нули в третьей строке и в первом столбце зачеркиваем.
- Больше нулей нет. Всего получили три нуля, что меньше 5, где 5 – кол-во работников и работ. Это говорит о том, что решение не оптимально.

		1	2	3	4	5
	1	4	0	2	11	3
	2	8	15	0	6	7
$C^{(2)}=$	3	0	0	0	0	0
	4	8	0	1	6	3
	5	4	0	6	11	1

4. Найдем минимальное множество, которое содержит все нули. Для этого выполним следующее:

- Отметим знаком «+» все строки, не содержащие отмеченных нулей. Это 4 и 5 строки.
- Отметим знаком «+» все столбцы, на пересечении которых с отмеченными строками стоят зачеркнутые нули. Это второй столбец.
- Отметим знаком «+» те строки, на пересечении которых с отмеченным столбцом стоит помеченный нуль. Это первая строка.
- Этот процесс помечивания столбцов и строк продолжается до тех пор, пока можно пометать столбцы и строки. Т.к. в рассматриваемой задаче в помеченной первой строке нет зачеркнутых нулей, то процесс помечивания столбцов и строк прекращается.
- Зачеркнем полностью каждую неотмеченную строку (это 2 и 3 строки) и каждый отмеченный столбец (это второй столбец). Тем

самым мы получили минимальное множество строк и столбцов, которое содержит все нули

			+			
		1	2	3	4	5
	1	4	0	2	11	3
	2	8	15	0	6	7
$C^{(2)} =$	3	0	8	8	8	8
	4	8	8	1	6	3
	5	4	8	6	11	1

5. Получим дополнительный нуль. Для этого среди не вычеркнутых элементов выберем минимальный элемент (это 1), вычтем его из всех не вычеркнутых элементов и добавим к тем элементам, которые вычеркнуты дважды (это 15 и 0). В результате получим матрицу $C^{(3)}$.

		1	2	3	4	5
	1	3	0	1	10	2
	2	8	16	0	6	7
$C^{(3)} =$	3	0	1	0	0	0
	4	7	0	0	5	2
	5	3	0	5	10	0

Т.к. мы вычитали 1 из элементов не вычеркнутых столбцов, т.е. 4 раза, и добавляли к элементам вычеркнутых строк, т.е. 2 раза, то общая сумма вычитаемых при этом элементов будет равна $z_3 = 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 = 2$.

6. Перейдем к шагу 3. Получим нулевое решение. Т.к. итерационный процесс повторяется, то подробно его уже описывать не будем.

			+	+		
		1	2	3	4	5
	1	3	0	1	10	2
	2	8	16	0	6	7
$C^{(3)} =$	3	0	1	0	0	0
	4	7	0	0	5	2
	5	3	0	5	10	0

Т.к. помеченных нулей 4, что меньше 5, то решение не оптимально

7. Перейдем к шагу 4. Найдем минимальное множество, которое содержит все нули. Сначала помечаем 4 строку, затем 2,3 столбцы, 1,2 строки. Процесс помечивания завершен. Вычеркиваем 3,5 строки и 2,3 столбцы.

8. Получим дополнительный нуль. Минимальный элемент из не вычеркнутых элементов равен 2. В результате получаем матрицу $C^{(4)}$.

		1	2	3	4	5	
	1	1	0	1	8	0	
	2	6	16	0	4	5	
$C^{(4)}=$	3	0	3	2	0	0	
	4	5	0	0	3	0	
	5	3	2	7	10	0	

Общая сумма вычитаемых при этом элементов будет равна $z_4=2+2+2-2-2=2$.

9. Получим нулевое решение. Помечаем нули сначала во 2 строке, потом в 5, в первой и третьей. Помеченных нулей 4, что меньше 5, значит, решение не оптимально.

		1	2	3	4	5	
	1	1	0	1	8	0	+
	2	6	16	0	4	5	+
$C^{(4)}=$	3	0	3	2	0	0	+
	4	5	0	0	3	0	+
	5	3	2	7	10	0	+

10. Найдем минимальное множество, которое содержит все нули. Сначала помечаем 4 строку, затем 2,3,5 столбцы, 1,2,5 строки. Процесс помечивания завершен. Вычеркиваем 3 строку и 2,3,5 столбцы.

11. Получим дополнительный нуль. Минимальный элемент из не вычеркнутых элементов равен 1. В результате получаем матрицу $C^{(5)}$.

		1	2	3	4	5
	1	0	0	1	7	0
	2	5	16	0	3	5
$C^{(5)}=$	3	0	4	3	0	1
	4	4	0	0	2	0
	5	2	2	7	9	0

Общая сумма вычитаемых при этом элементов будет равна $z_5=1+1-1=1$.

12. Получим нулевое решение. Помечаем нули сначала во 2 строке, потом в 5, в четвертой, первой и третьей. Помеченных нулей 5, значит, решение оптимально.

	1	2	3	4	5
1	0	8	1	7	8
2	5	16	0	3	5
3	8	4	3	0	1
4	4	0	8	2	8
5	2	2	7	9	0

13. Отметим это решение в матрице C и найдем f_{min} .

	1	2	3	4	5
1	10	5	9	18	11
2	13	19	6	12	14
3	3	2	4	4	5
4	18	9	12	17	15
5	11	6	14	19	10

$$f_{min} = 10 + 6 + 4 + 9 + 10 = 39.$$

14. Выполним проверку. Для этого найдем сумму вычитаемых элементов:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 18 + 16 + 2 + 2 + 1 = 39.$$

Сумма вычитаемых элементов должна совпадать с f_{min} .

Ответ: 1 работник назначается на 1 работу, 2 работник на 4 работу, 3 работник на 2 работу, 4 работник на 3 работу, 5 работник на 5 работу.