

Пример решения задачи о коммивояжере

Пример. Решить задачу о коммивояжере с матрицей затрат

$$C_0 = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 10 & \infty & 8 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & \infty & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & \infty & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 5 & 8 & \infty \end{array}$$

Решение.

1. Получение нулей.

Выберем в каждой строке минимальный элемент и вычтем его из элементов данной строки. В результате получим матрицу C_1 .

$$C_0 = \begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 1 & \infty & 2 & 3 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 10 & \infty & 8 & 7 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & \infty & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & \infty & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 5 & 8 & \infty & 1 \end{array}$$

Общая сумма вычитаемых элементов равна 9.

Аналогичную процедуру проведем со столбцами. Получим матрицу C_2 .

$$C_1 = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & \infty & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & \infty & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 5 & \infty & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 4 & 7 & \infty \end{array}$$

Общая сумма вычитаемых элементов равна 2.

$$C_2 = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & \infty & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & \infty & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 4 & \infty & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 3 & 6 & \infty \end{array}$$

Таким образом, нижняя граница затрат равна $r = 9+2=11$. Параллельно решению задачи будем строить дерево решаемых подзадач. Каждой вершине дерева будем приписывать оценку затрат для данной подзадачи. Обозначим

$S(0)$ – множество замкнутых маршрутов, удовлетворяющих условию задачи. Итак, начальная вершина $S(0)$ имеет оценку 11.

$$\textcircled{S(0)} \quad r=11$$

2. Назначение штрафов и выбор наибольшего штрафа.

Каждому нулевому элементу приписываем штраф p_{hk} за неиспользование соответствующей нулю дуги (h,k) , равный сумме минимального элемента в столбце и минимального элемента в строке, на пересечении которых стоит выбранный нуль, за исключением самого нуля. Среди нулей выбираем нуль с наибольшим штрафом

$$C_2 = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \infty & 0^2 & 0^3 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & \infty & 4 & 3 & 0^3 \\ 3 & 4 & 3 & \infty & 0^2 & 0^0 \\ 4 & 4 & 6 & 4 & \infty & 0^4 \\ 5 & \underline{0^6} & 2 & 3 & 6 & \infty \end{array}$$

Таким образом, множество замкнутых маршрутов, удовлетворяющих условию исходной задачи разбивается на два подмножества:

$\overline{S(5,1)}$ - множество маршрутов, не содержащих дугу $(5,1)$;

$S(5,1)$ - множество маршрутов, содержащих дугу $(5,1)$.

3. Вычисление оценок затрат для каждого полученного подмножества маршрутов.

– Рассмотрим множество $\overline{S(5,1)}$. Для этого множества оценка считается так: к оценке предыдущей вершины добавляется штраф. В нашем случае $\theta(5,1) = r + p_{51}$. Т.к. дуга $(5,1)$ не используется, то в матрице C_2 необходимо положить элемент $c_{51}^{(2)} = \infty$. После этого матрицу надо привести к виду, чтобы в каждой строке и в каждом столбце был хотя бы один нуль. В результате получим матрицу C_3 (операция **приведения**).

$$C = \begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 1 & \infty & 0 & 0 & 2 & 4 & \\ 2 & 7 & \infty & 4 & 3 & 0 & \\ 3 & 4 & 3 & \infty & 0 & 0 & \\ 4 & 4 & 6 & 4 & \infty & 0 & \\ 5 & \underline{\infty} & 2 & 3 & 6 & \infty & 2 \\ \hline & 4 & & & & & 6 \end{array}$$

Вычтем из элементов 1 столбца 4, а из элементов 5 строки 2

		1	2	3	4	5
	1	∞	0	0	2	4
	2	3	∞	4	3	0
$C_3 =$	3	0	3	∞	0	0
	4	0	6	4	∞	0
	5	∞	0	1	4	∞

– Рассмотрим множество $S(5,1)$. Т.к. дуга $(5,1)$ включается в маршрут, то все остальные дуги, выходящие из 5 вершины, и дуги, заходящие в первую вершину, должны быть исключены. Поэтому в матрице C_2 исключаем 5 строку и первый столбец. Параллельно с решением будем строить цикл. Чтобы избежать образования цикла раньше, чем будут пройдены все вершины, надо исключить дугу $(1,5)$, т.е. в матрице C_2 положить $c_{15}^{(2)} = \infty$. Полученную матрицу надо привести. Получим матрицу C_4 . Пусть r_{51} вычитаемая при этом сумма элементов. Тогда оценка для этого множества будет равна сумме предыдущей оценки и суммы вычитаемых элементов. В нашем случае $\theta(5,1) = r + r_{51}$.



		1	2	3	4	5
	1	∞	0^2	0^3	2	4
	2	7	∞	4	3	0^3
$C_2 =$	3	4	3	∞	0^2	0^0
	4	4	6	4	∞	0^4
	5	<u>0^6</u>	2	3	6	∞

		2	3	4	5
	1	0	0	2	∞
	2	∞	4	3	0
$C_4 =$	3	3	∞	0	0
	4	6	4	∞	0

Т.к. в каждой строке и каждом столбце есть хотя бы один ноль, то матрица уже приведена, поэтому сумма вычитаемых элементов равна 0, т.е. $r_{51} = 0$. А значит, $\theta(5,1) = r + 0 = 11$.



Из полученных подмножеств выбираем подмножество с минимальной оценкой, т.е. $S(5,1)$. Далее работаем с матрицей C_4 .

4. Назначение штрафов и выбор наибольшего штрафа.

$$C_4 = \begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0^3 & \underline{0^4} & 2 & \infty \\ 2 & \infty & 4 & 3 & 0^3 \\ 3 & 3 & \infty & 0^2 & 0^0 \\ 4 & 6 & 4 & \infty & 0^4 \end{array}$$

Два нуля имеют наибольший штраф 4. Можно выбрать любой. Выберем дугу (1,3).

Таким образом, множество замкнутых маршрутов, удовлетворяющих условию исходной задачи разбивается на два подмножества:

$\overline{S(1,3)}$ - множество маршрутов, не содержащих дугу (1,3);

$S(1,3)$ - множество маршрутов, содержащих дугу (1,3);

5. Вычисление оценок затрат для каждого полученного подмножества маршрутов.

Рассмотрим множество $\overline{S(1,3)}$. Его оценка будет равна

$$\overline{\theta(1,3)} = 11 + 4 = 15$$

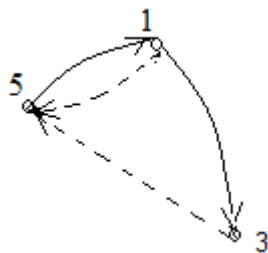
Преобразуем матрицу C_4 , положив $c_{13}^{(4)} = \infty$. Приведем полученную матрицу, получим матрицу C_5 .

$$C = \begin{array}{c|ccccc|c} & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 1 & 0 & \infty & 2 & \infty & 0 \\ 2 & \infty & 4 & 3 & 0 & \\ 3 & 3 & \infty & 0 & 0 & \\ 4 & 6 & 4 & \infty & 0 & \\ \hline & & 4 & & & 4 \end{array}$$

$$C_5 = \begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & \infty & 2 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & \infty & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & \infty & 0 \end{array}$$

Рассмотрим множество $S(1,3)$. Исключим из матрицы C_4 первую строку и третий столбец. Для того, чтобы не образовался цикл раньше времени,

исключим дугу (3,5), положив $c_{35}^{(4)} = \infty$. Полученную матрицу надо привести. В результате получим матрицу C_6



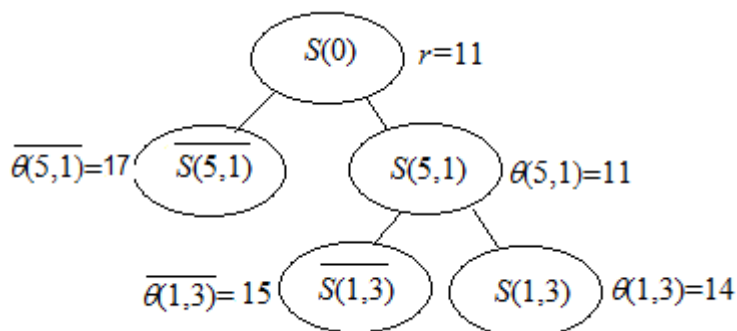
$$C_4 = \begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0^3 & 0^4 & 2 & \infty \\ 2 & \infty & 4 & 3 & 0^3 \\ 3 & 3 & \infty & 0^2 & 0^0 \\ 4 & 6 & 4 & \infty & 0^4 \end{array}$$

$$C = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 5 \\ \hline 2 & \infty & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & \infty \\ 4 & 6 & \infty & 0 \\ \hline & 3 & & \end{array}$$

$$C_6 = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 5 \\ \hline 2 & \infty & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \infty \\ 4 & 3 & \infty & 0 \end{array}$$

Сумма вычитаемых элементов при выполнении операции приведения была равна 3, т.е. $r_{13}=3$. Значит, оценка будет равна

$$\theta(1,3) = 11 + 3 = 14$$



Из полученных подмножеств выбираем подмножество с минимальной оценкой, т.е. $S(1,3)$. Далее работаем с матрицей C_6 .

6. Назначение штрафов и выбор наибольшего штрафа

$$C_6 = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 5 \\ \hline 2 & \infty & 3 & \underline{0^3} \\ 3 & 0^3 & 0^3 & \infty \\ 4 & 3 & \infty & 0^3 \end{array}$$

Все нули имеют штраф 3. Можно выбрать любой. Выберем дугу (2,5).

Таким образом, множество замкнутых маршрутов, удовлетворяющих условию исходной задачи разбивается на два подмножества:

$\overline{S(2,5)}$ - множество маршрутов, не содержащих дугу (2,5);

$S(2,5)$ - множество маршрутов, содержащих дугу (2,5);

7. Вычисление оценок затрат для каждого полученного подмножества маршрутов.

Рассмотрим множество $\overline{S(2,5)}$. Его оценка будет равна

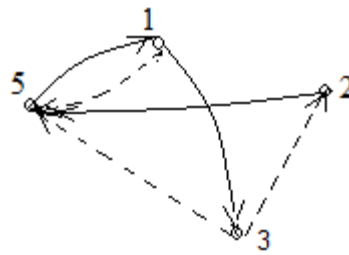
$$\overline{\theta(2,5)} = 14 + 3 = 17$$

Преобразуем матрицу C_6 , положив $c_{25}^{(6)} = \infty$. Приведем полученную матрицу, получим матрицу C_7 .

$$C = \begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 4 & 5 & \\ \hline 2 & \infty & 3 & \infty & 3 \\ 3 & 0 & 0 & \infty & \\ 4 & 3 & \infty & 0 & \end{array}$$

$$C_7 = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 5 \\ \hline 2 & \infty & 0 & \infty \\ 3 & 0 & 0 & \infty \\ 4 & 3 & \infty & 0 \end{array}$$

Рассмотрим множество $S(2,5)$. Исключим из матрицы C_6 вторую строку и пятый столбец. Для того, чтобы не образовался цикл раньше времени, исключим дугу (3,2), положив $c_{32}^{(6)} = \infty$. Полученную матрицу надо привести. В результате получим матрицу C_8



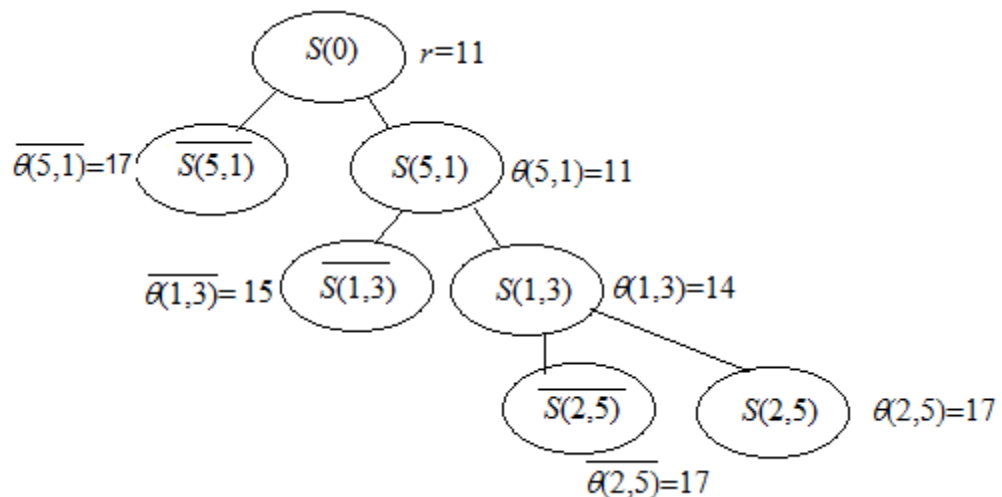
$$C_6 = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 4 & 5 \\ \hline 2 & \infty & 3 & 0^3 \\ 3 & 0^3 & 0^3 & \infty \\ 4 & 3 & \infty & 0^3 \end{array}$$

$$C = \begin{array}{c|cc} & 2 & 4 \\ \hline 3 & \infty & 0 \\ 4 & 3 & \infty \\ \hline & 3 & \end{array}$$

$$C_8 = \begin{array}{c|cc} & 2 & 4 \\ \hline 3 & \infty & 0 \\ 4 & 0 & \infty \end{array}$$

Сумма вычитаемых элементов при выполнении операции приведения была равна 3, т.е. $r_{25}=3$. Значит, оценка будет равна

$$\theta(2,5) = 14 + 3 = 17$$



Из полученных подмножеств выбираем подмножество с минимальной оценкой, т.е. $\overline{S(1,3)}$. Его оценка 15. Далее работаем с матрицей C_5 . И возвращаемся к циклу



		2	3	4	5
	1	0	∞	2	∞
$C_5 =$	2	∞	0	3	0
	3	3	∞	0	0
	4	6	0	∞	0

8. Назначение штрафов и выбор наибольшего штрафа.

		2	3	4	5
	1	<u>0⁵</u>	∞	2	∞
$C_5 =$	2	∞	0 ⁰	3	0 ⁰
	3	3	∞	0 ²	0 ⁰
	4	6	0 ⁰	∞	0 ⁰

Наибольший штраф 5. Выбираем дугу (1,2).

Таким образом, множество замкнутых маршрутов, удовлетворяющих условию исходной задачи разбивается на два подмножества:

$\overline{S(1,2)}$ - множество маршрутов, не содержащих дугу (1,2);

$S(1,2)$ - множество маршрутов, содержащих дугу (1,2).

9. Вычисление оценок затрат для каждого полученного подмножества маршрутов.

Рассмотрим множество $\overline{S(1,2)}$. Его оценка будет равна

$$\overline{\theta(1,2)} = 15 + 5 = 20$$

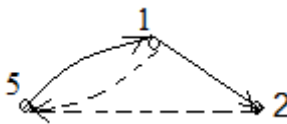
Преобразуем матрицу C_5 , положив $c_{12}^{(5)} = \infty$. Приведем полученную матрицу, получим матрицу C_9 .

		2	3	4	5	
	1	∞	∞	2	∞	2
$C =$	2	∞	0	3	0	
	3	3	∞	0	0	
	4	6	0	∞	0	
		3				

		2	3	4	5
	1	∞	∞	0	∞
$C_9 =$	2	∞	0	3	0
	3	0	∞	0	0
	4	3	0	∞	0

Рассмотрим множество $S(1,2)$. Исключим из матрицы C_5 первую строку и второй столбец. Для того, чтобы не образовался цикл раньше

времени, исключим дугу (2,5), положив $c_{25}^{(5)} = \infty$. Полученную матрицу надо привести. В результате получим матрицу C_{10}

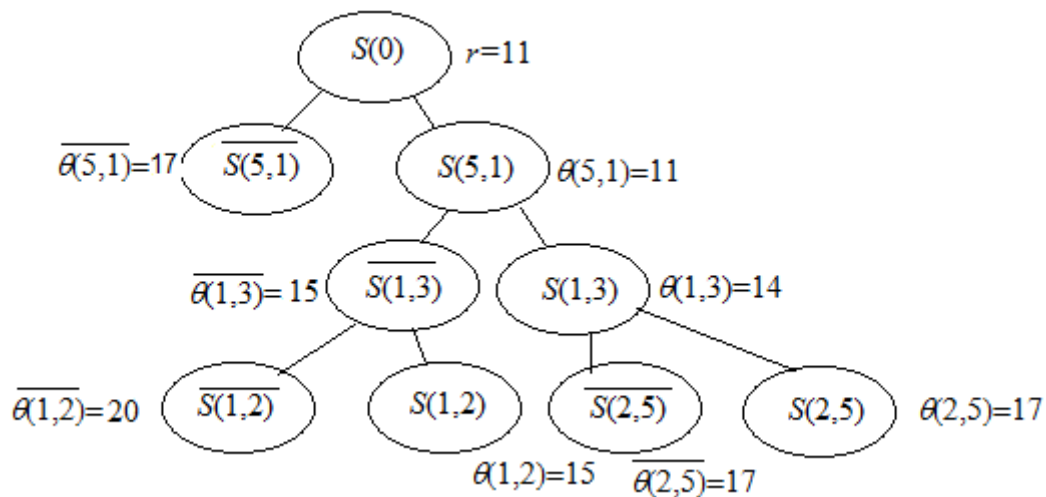


$$C_5 = \begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \underline{0^5} & \infty & 2 & \infty \\ 2 & \infty & 0^0 & 3 & 0^0 \\ 3 & 3 & \infty & 0^2 & 0^0 \\ 4 & 6 & 0^0 & \infty & 0^0 \end{array}$$

$$C_{10} = \begin{array}{c|ccc} & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 0 & 3 & \infty \\ 3 & \infty & 0 & 0 \\ 4 & 0 & \infty & 0 \end{array}$$

Сумма вычитаемых элементов при выполнении операции приведения была равна 0, т.е. $r_{12}=0$. Значит, оценка будет равна

$$\theta(1,2) = 15 + 0 = 15$$



Из полученных подмножеств выбираем подмножество с минимальной оценкой, т.е. $S(1,2)$. Его оценка 15. Далее работаем с матрицей C_{10} .

10. Назначение штрафов и выбор наибольшего штрафа.

$$C_{10} = \begin{array}{c|ccc} & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & \underline{0^3} & 3 & \infty \\ 3 & \infty & 0^3 & 0^0 \\ 4 & 0^0 & \infty & 0^0 \end{array}$$

Наибольший штраф 3. Выбираем дугу (2,3).

Таким образом, множество замкнутых маршрутов, удовлетворяющих условию исходной задачи разбивается на два подмножества:

$\overline{S(2,3)}$ - множество маршрутов, не содержащих дугу (2,3);

$S(2,3)$ - множество маршрутов, содержащих дугу (2,3).

11. Вычисление оценок затрат для каждого полученного подмножества маршрутов.

Рассмотрим множество $\overline{S(2,3)}$. Его оценка будет равна

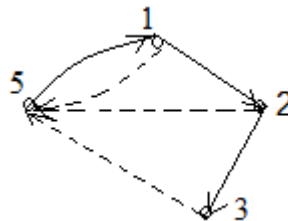
$$\overline{\theta(2,3)} = 15 + 3 = 18$$

Преобразуем матрицу C_{10} , положив $c_{23}^{(10)} = \infty$. Приведем полученную матрицу, получим матрицу C_{11} .

$$C = \begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 2 & \infty & 3 & \infty & 3 \\ 3 & \infty & 0 & 0 & \\ 4 & 0 & \infty & 0 & \end{array}$$

$$C_{11} = \begin{array}{c|ccc|} & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 2 & \infty & 0 & \infty & \\ 3 & \infty & 0 & 0 & \\ 4 & 0 & \infty & 0 & \end{array}$$

Рассмотрим множество $S(2,3)$. Исключим из матрицы C_{10} вторую строку и третий столбец. Для того, чтобы не образовался цикл раньше времени, исключим дугу (3,5), положив $c_{35}^{(10)} = \infty$. Полученную матрицу надо привести. В результате получим матрицу C_{12}

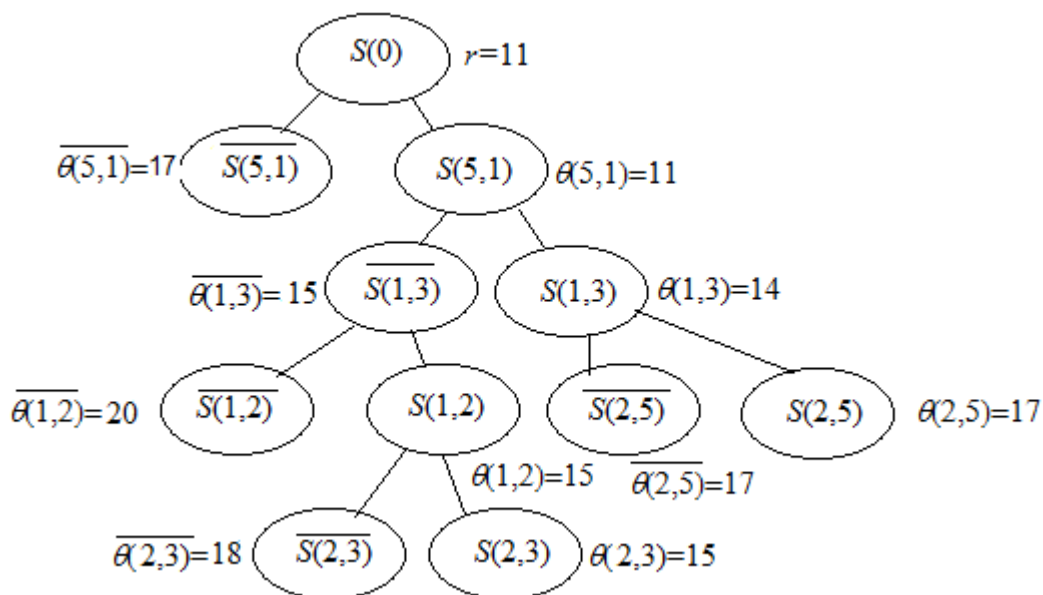


$$C_{10} = \begin{array}{c|ccc|} & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 2 & \infty & 3 & \infty & \\ 3 & \infty & 0 & 0 & \\ 4 & 0 & \infty & 0 & \end{array}$$

$$C_{12} = \begin{array}{c|cc|} & 4 & 5 & \\ \hline 3 & 0 & \infty & \\ 4 & \infty & 0 & \end{array}$$

Сумма вычитаемых элементов при выполнении операции приведения была равна 0, т.е. $r_{23}=0$. Значит, оценка будет равна

$$\theta(2,3) = 15 + 0 = 15$$



Из полученных подмножеств выбираем подмножество с минимальной оценкой, т.е. $S(2,3)$. Его оценка 15. Далее работаем с матрицей C_{12} .

12. Назначение штрафов и выбор наибольшего штрафа.

$$C_{12} = \begin{array}{c|cc} & 4 & 5 \\ \hline 3 & \underline{0^\infty} & \infty \\ 4 & \infty & 0^\infty \end{array}$$

Наибольший штраф ∞ . Выбираем дугу (3,4).

Таким образом, множество замкнутых маршрутов, удовлетворяющих условию исходной задачи разбивается на два подмножества:

$\overline{S(3,4)}$ - множество маршрутов, не содержащих дугу (3,4);

$S(3,4)$ - множество маршрутов, содержащих дугу (3,4).

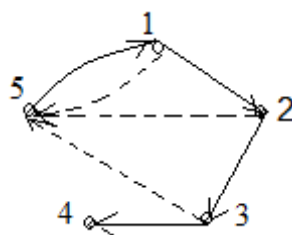
13. Вычисление оценок затрат для каждого полученного подмножества маршрутов.

Рассмотрим множество $\overline{S(3,4)}$. Его оценка будет равна

$$\theta(3,4) = 15 + \infty = \infty$$

Нет смысла рассматривать матрицу для этой подзадачи, т.к. этот вариант никогда не будет выбран.

Рассмотрим множество $S(3,4)$. Исключим из матрицы C_{12} третью строку и четвертый столбец. Т.к. это предпоследний шаг, то никакие дополнительные дуги исключать нельзя. Полученную матрицу надо привести. В результате получим матрицу C_{13}

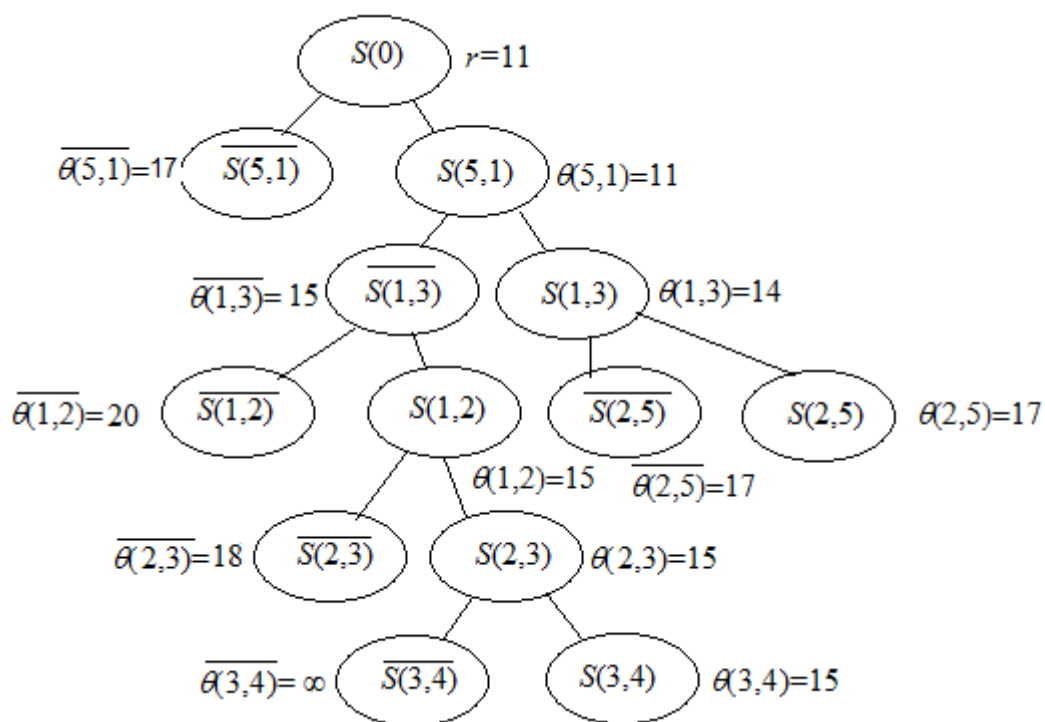


$$C_{12} = \begin{array}{c|cc} & 4 & 5 \\ \hline 3 & 0^\infty & \infty \\ \hline 4 & \infty & 0^\infty \end{array}$$

$$C_{13} = \begin{array}{c|c} & 5 \\ \hline 4 & 0 \end{array}$$

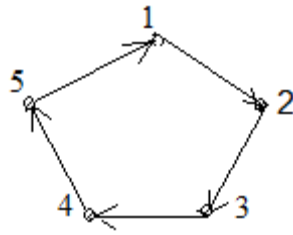
Сумма вычитаемых элементов при выполнении операции приведения была равна 0, т.е. $r_{13}=0$. Значит, оценка будет равна

$$\theta(1,3) = 15 + 0 = 15$$



Из полученных подмножеств выбираем подмножество с минимальной оценкой, т.е. $S(3,4)$. Его оценка 15. Далее работаем с матрицей C_{13} .

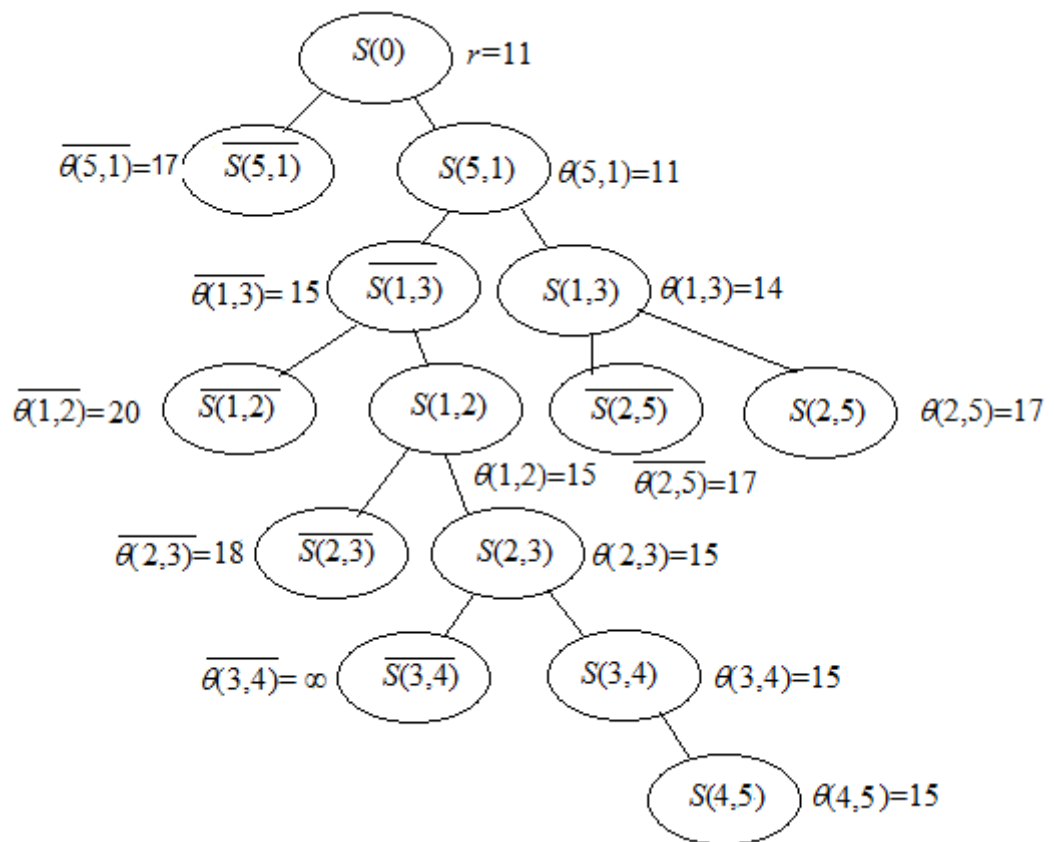
14. Т.к. в матрице C_{13} остался только один элемент, то добавляем дугу(4,5) в цикл. Окончательно получаем цикл



Не трудно проверить, что длина этого цикла равна 15.

$$L_{\text{цикла}} = 2 + 8 + 2 + 2 + 1 = 15.$$

Окончательное дерево решений имеет вид



Замечание. В приведенном примере для наглядности были приведены частичные деревья решений. При решении домашнего примера можно построить только окончательное дерево.