Лабораторная работа №3
ИССЛЕДОВАНИЕ ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Цель работы

Целью работы является приобретение практических навыков нахождения двойственной задачи линейного программирования и оптимального допустимого решения с использованием программы MS Excel.

2. Теоретическая часть

Задачи линейного программирования, как и любая задача исследования операций, включает три основных элемента:

1. Переменные, которые следует определить.
2. Целевая функция, подлежащая оптимизации.
3. Ограничения, которым должны удовлетворять переменные.

Рассмотрим пример с двумя переменными. Компания «Российские краски» производит краску для внутренних и внешних работ из сырья двух типов – M_1 и M_2, представленные в таблице 1.

Таблица 1. Основные данные для задачи

Параметры / Наименование	Расход сырья (т) на 1т краски		Максимально возможный ежедневный расход сырья
	Для наружных работ	Для внутренних работ	
Сырье M_1	6	4	24
Сырье M_2	1	2	6
Доход (тыс. у.е.) на 1т краски	5	4	

Отдел маркетинга компании ограничил ежедневное производство краски для внутренних работ до 2т, а также поставил условие, чтобы этот вид продукции не превышал более чем на 1т аналогичный показатель производства краски для внешних работ. Компания хочет определить оптимальное соотношение между видами выпускаемой продукции для максимизации общего ежедневного дохода.

В примере необходимо определить ежедневные объемы производства краски для внутренних и наружных работ. Обозначим их как переменные модели: x_1 – ежедневный объем производства краски для наружных работ; x_2 – ежедневный объем производства краски для внутренних работ.

Используя эти переменные, строим целевую функцию Z, отражающую получение суммарного ежедневного дохода компании, который необходимо максимизировать:

$$Z=5x_1+4x_2.$$

Ограничения на сырье можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix}\text{Используемый объем} \\ \text{сырья для производства} \\ \text{обоих видов краски}\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}\text{Максимально возможный} \\ \text{ежедневный расход сырья}\end{pmatrix}$$

Из таблицы с данными получим используемые объемы (т):

- для сырья M_1

$$6x_1+4x_2.$$

- для сырья M_2

$$1x_1+2x_2$$

Поскольку ежедневный расход сырья M_1 и M_2 ограничен соответственно 24 и 6 т, получаем следующие ограничения:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24; \\ 1x_1 + 2x_2 \le 6. \end{cases}$$

Существует еще два ограничения по спросу на готовую продукцию. Первое из них указывает, что ежедневный объем производства краски для внутренних работ не должен превышать ежедневный объем производства краски для наружных работ более чем на 1т, т.е. $x_2-x_1\le1$. Второе ограничение максимального ежедневного объема производства краски для внутренних работ 2т запишем, как $x_2\le2$. Учтем условие неотрицательности переменных: $x_1\ge0$, $x_2\ge0$.

Окончательно задача будет записана следующим образом:

$$Z = 5x_1 + 4x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24; \\ x_1 + 2x_2 \le 6; \\ -x_1 + x_2 \le 1; \\ x_2 \le 2; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2.1. Структура и свойства двойственной задачи линейного программирования

Каждой задаче линейного программирования соответствует другая задача, называемая двойственной или сопряженной по отношению к исходной. Теория двойственности полезна для проведения качественных исследований задач линейного программирования.

Рассмотрим задачу о распределении ресурсов (левая часть таблицы 2). В приведенной модели b_i ($i=1,2, \dots ,m$) обозначает запас ресурса S_i; a_{ij} – число единиц ресурса S_i, потребляемого при производстве единицы продукции P_j ($j=1,2, \dots , n$); c_j – прибыль (выручка) от реализации единицы продукции P_j (или цена продукции P_j).

Предположим, что некоторая организация решила закупить ресурсы S_1, S_2, … , S_m, необходимо установить оптимальные цены на эти ресурсы y_1, y_2, … ,y_n. Очевидно, что покупающая организация заинтересована в том, чтобы затраты на все ресурсы Z в количествах b_1, b_2, … , b_m по ценам соответственно y_1, y_2, … ,y_m были минимальны, т.е.

$$Z=b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m \rightarrow \min.$$

Таблица 2. Двойственные задачи линейного программирования

Задач 1 (исходная) «Оптимизация выпуска продукции»	Задача 2 (двойственная) «Оптимизация продажи ресурсов сторонней организации»
$F = c_1x_1 + c_2x_2+\ldots+c_nx_n \rightarrow max$ при ограничениях $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$ и условии неотрицательности $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots , x_n \ge 0.$ Составить такой план выпуска продукции $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, при котором прибыль (выручка) от реализации продукции будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не превзойдет имеющихся запасов.	$F = b_1y_1 + b_2y_2+\ldots+b_my_m \rightarrow min$ при ограничениях $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2+\ldots+a_{m1}y_m \ge c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2+\ldots+a_{m2}y_m \ge c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2+\ldots+a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$ и условии неотрицательности $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots , y_m \ge 0.$ Найти такой набор цен ресурсов $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$, при котором общие затраты на покупку ресурсов сторонней организацией будут минимальны при условии, что доход от продажи ресурсов, расходуемых на производство каждого вида продукции, будет не менее прибыли (выручки) от реализации этой продукции.

С другой стороны, предприятие, продающее ресурсы, заинтересовано в том, чтобы полученная выручка была не меньше той суммы, которую предприятие может получить при переработке ресурсов в готовую продукцию.

На изготовление единицы продукции P_1 расходуется a_{11} единиц ресурса S_1, a_{21} единиц ресурсы S_2, … , a_{i1} единиц ресурсы S_i, … , a_{m1} единиц ресурса S_m по цене соответственно y_1,y_2, … , y_i, … , y_m. Поэтому для удовлетворения требований продавца затраты на ресурсы, потребляемые при изготовлении единицы продукции P_1, должны быть не менее ее цены c_1, т.е.

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2+\ldots+a_{m1}y_m \ge \mathrm{c}_1.$$

Аналогично можно составить ограничения в виде неравенств по каждому виду продукции P_1,P_2,…,P_n. Постановка полученной таким образом двойственной задачи 2 приведена в правой части таблицы 2.

Цена ресурсов y_1,y_2,…,y_m являются внутренними, так как они задаются не извне, а определяются непосредственно в результате решения задачи, поэтому их чаще называют оценками ресурсов.

Рассмотрим формально две задачи 1 и 2 линейного программирования, представленные в таблице 2. Обе задачи обладают следующими свойствами:

1. В одной задаче ищут максимум целевой функции, в другой ищут минимум.

2. Коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений в другой.

3. Каждая из задач задана в стандартной форме, причем в задаче максимизации все неравенства вида «≤», а в задаче минимизации все неравенства вида «≥».

4. Матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений обеих задач являются транспонированными друг к другу:

- для задачи 1

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

- для задачи 2

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

5. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой задаче.

6. Условия неотрицательности переменных имеются в обеих задачах.

Задачи 1 и 2 линейного программирования, обладающие указанными свойствами, называются симметричными взаимно двойственными задачами. В дальнейшем для простоты будем называть их просто двойственными задачами.

Исходя из определения, можно предложить следующий **алгоритм составления двойственной задачи**:

1. Привести все неравенства системы ограничений исходной задачи к одному смыслу: если в исходной задаче ищут максимум целевой функции, то все неравенства системы ограничений привести к виду «≤», а если минимум – к виду «≥». Для этого неравенства, в которых данное требование не выполняется, умножить на -1.

2. Составить расширенную матрицу системы A_1, в которую включить матрицу коэффициентов при переменных A, столбец свободных членов системы ограничений и строку коэффициентов при переменных в целевой функции.

3. Найти матрицу A_1', транспонированную к матрице A_1.

4. Сформулировать двойственную задачу на основании полученной матрицы A_1' и условия неотрицательности переменных.

Двойственную задачу выгоднее решать, чем прямую, если в прямой задаче при малом количестве переменных имеется большое количество ограничений ($m>n$).

2.2. Нахождение двойственной задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу с двумя переменными, состоящую в определении максимального значения функции $F=2x_1+7x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geq -14; \\ x_1 + x_2 \leq 8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Необходимо составить двойственную задачу и найти решение обеих задач.

Так как в исходной задаче необходимо максимизировать функцию F, то необходимо привести все неравенства системы ограничений к виду «≤», для чего обе части первого неравенства умножим на -1. Получим:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 14; \\ x_1 + x_2 \leq 8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Составим расширенную матрицу системы:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 14 \\ 1 & 1 & 8 \\ \hline 2 & 7 & F \end{array}\right)$$

Найдем матрицу A_1', транспонированную к A:

$$A_1' = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \\ \hline 14 & 8 & F \end{array}\right).$$

Сформулируем двойственную задачу:

$$F^* = 14y_1 + 8y_2 \rightarrow min,$$

при условиях

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \geq 2; \\ 3y_1 + y_2 \geq 7, \end{cases}$$
$$y_1, y_2 \geq 0.$$

3. Задание на лабораторную работу

Найти и решить двойственную задачу линейного программирования. Вариант задания выдается преподавателем.

4. Методика выполнения работы

1. Изучить теоретический материал.
2. Сформулировать двойственную задачу для задания (по вариантам) из лабораторной работы №1.
3. Найти двойственную задачу.
4. Найти оптимально допустимое решение двойственной задачи с использованием MS Excel.
5. Сделать выводы по работе.
6. Сформировать отчет.

5. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

а) название и цель работы;
б) вариант задания;
в) описание хода работы;
г) выводы по работе;
д) ответы на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы

1. Назовите три элемента задачи линейного программирования.
2. Прокомментируйте этапы применения графического метода при решении.
3. Для чего полезна двойственная задача?
4. Алгоритм составления двойственной задачи.
5. В каком случае двойственную задачу решать выгоднее, чем прямую?