

Разностная схема решения краевой задачи

Задача Дирихле:
$$\begin{cases} -(\alpha(x) y'(x))' + p(x) y(x) = f(x) \\ y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \end{cases}$$

Задача Неймана:
$$\begin{cases} -(\alpha(x) y'(x))' + p(x) y(x) = f(x) \\ y'(a) = 0, \quad y'(b) = 0. \end{cases}$$

Сетка: $h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + i \cdot h, \quad x_0 = a, \quad x_n = b. \quad \text{Ищем } y_i \approx y(x_i).$

Разностная аппроксимация производных:

$$y'(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + O(h^2), \quad y'(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h} + O(h^2),$$

$$\begin{aligned} (\alpha(x) y'(x))' \big|_{x=x_i} &= \frac{\alpha(x_{i+\frac{1}{2}}) y'(x_{i+\frac{1}{2}}) - \alpha(x_{i-\frac{1}{2}}) y'(x_{i-\frac{1}{2}})}{h} + O(h^2) = \\ &= \frac{\alpha(x_{i+\frac{1}{2}})(y(x_{i+1}) - y(x_i)) - \alpha(x_{i-\frac{1}{2}})(y(x_i) - y(x_{i-1})))}{h^2} + O(h^2) \end{aligned}$$

(можно доказать, что и на последнем шаге оценка $O(h^2)$ корректна).

Заменяя в дифференциальном уравнении точные производные конечноразностными, получим для внутренних узлов $(n-1)$ линейных уравнений для $(n+1)$ неизвестных y_i :

$$-\frac{\alpha_{i-\frac{1}{2}}}{h^2} y_{i-1} + \frac{\alpha_{i-\frac{1}{2}} + \alpha_{i+\frac{1}{2}}}{h^2} y_i - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}}{h^2} y_{i+1} + p_i y_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

(подразумевается $\alpha_{i\pm\frac{1}{2}} = \alpha(x_{i\pm\frac{1}{2}}) = \alpha\left(x_i \pm \frac{h}{2}\right)$, $p_i = p(x_i)$ и $f_i = f(x_i)$).

Недостающие два крайних уравнения получаются из граничных условий. В случае задачи Дирихле это просто уравнения $y_0 = 0$ и $y_n = 0$, что приводит к системе разностных уравнений с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \left(-\frac{\alpha_{\frac{1}{2}}}{h^2}\right) & \left(\frac{\alpha_{\frac{1}{2}} + \alpha_{\frac{3}{2}}}{h^2} + p_1\right) & \left(-\frac{\alpha_{\frac{3}{2}}}{h^2}\right) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & f_1 \\ 0 & \left(-\frac{\alpha_{\frac{3}{2}}}{h^2}\right) & \left(\frac{\alpha_{\frac{3}{2}} + \alpha_{\frac{5}{2}}}{h^2} + p_2\right) & \left(-\frac{\alpha_{\frac{5}{2}}}{h^2}\right) & 0 & \dots & 0 & 0 & f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Матрица системы трёхдиагональна, поэтому система эффективно решается методом прогонки (в данном случае под ним понимается обычный метод Гаусса с обратным ходом и без перестановки строк или столбцов) — требуется лишь $O(n)$ операций по сравнению с $O(n^3)$ в общем случае. Можно доказать, что порядок

точности такой схемы тот же, что и у разностных производных, т.е. что погрешность решения также оценивается как $O(h^2)$.

С задачей Неймана дело обстоит несколько сложнее. Простейший способ аппроксимации граничных условий — это замена производных в них на двухточечные конечноразностные:

$$y'(x_0) = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} + O(h), \quad y'(x_n) = \frac{y(x_n) - y(x_{n-1})}{h} + O(h).$$

Получается система уравнений

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(-\frac{\alpha_{\frac{1}{2}}}{h^2}\right) & \left(\frac{\alpha_{\frac{1}{2}} + \alpha_{\frac{3}{2}}}{h^2} + p_1\right) & \left(-\frac{\alpha_{\frac{3}{2}}}{h^2}\right) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{\alpha_{\frac{3}{2}}}{h^2}\right) & \left(\frac{\alpha_{\frac{3}{2}} + \alpha_{\frac{5}{2}}}{h^2} + p_2\right) & \left(-\frac{\alpha_{\frac{5}{2}}}{h^2}\right) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Матрица по-прежнему трёхдиагональна, однако высокой точности эта схема не даёт — порядок у неё всего лишь первый (погрешность $O(h)$, с которыми оценивались производные на границах, распространяется и на решение в целом. Для сохранения второго порядка точности можно использовать на концах трёхточечные разностные производные

$$y'(x_0) = \frac{-y(x_2) + 4y(x_1) - 3y(x_0)}{2h} + O(h^2), \quad y'(x_n) = \frac{3y(x_n) - 4y(x_{n-1}) + y(x_{n-2}))}{2h} + O(h^2).$$

Соответственно, система примет вид

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(-\frac{\alpha_{\frac{1}{2}}}{h^2}\right) & \left(\frac{\alpha_{\frac{1}{2}} + \alpha_{\frac{3}{2}}}{h^2} + p_1\right) & \left(-\frac{\alpha_{\frac{3}{2}}}{h^2}\right) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{\alpha_{\frac{3}{2}}}{h^2}\right) & \left(\frac{\alpha_{\frac{3}{2}} + \alpha_{\frac{5}{2}}}{h^2} + p_2\right) & \left(-\frac{\alpha_{\frac{5}{2}}}{h^2}\right) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Трёхдиагональность формально теряется, но это не имеет значения — добавляется лишь несколько арифметических операций в конце прямого хода метода прогонки и несколько в конце обратного.

Есть и другой способ обеспечить второй порядок точности для задачи Неймана, основанный на довольно часто используемой идее — введении фиктивных узлов. Добавим узлы x_{-1} , $x_{-\frac{1}{2}}$ слева, $x_{n+\frac{1}{2}}$, x_{n+1} справа и составим уравнения для $i = 0$ и для $i = n$ точно так же, как это делалось для внутренних узлов:

$$-\frac{\alpha_{-\frac{1}{2}}}{h^2} y_{-1} + \frac{\alpha_{-\frac{1}{2}} + \alpha_{\frac{1}{2}}}{h^2} y_0 - \frac{\alpha_{\frac{1}{2}}}{h^2} y_1 + p_0 y_0 = f_0,$$

$$-\frac{\alpha_{n-\frac{1}{2}}}{h^2} y_{n-1} + \frac{\alpha_{n-\frac{1}{2}} + \alpha_{n+\frac{1}{2}}}{h^2} y_n - \frac{\alpha_{n+\frac{1}{2}}}{h^2} y_{n+1} + p_n y_n = f_n.$$

Теперь для получения второго порядка точности в граничных условиях можно использовать симметричную разностную производную:

$$y'(x_0) = \frac{y(x_1) - y(x_{-1})}{2h} + O(h^2) = 0, \quad y'(x_n) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_{n-1}))}{2h} + O(h^2) = 0.$$

Поэтому полагаем $y_{-1} = y_1$ и $y_{n+1} = y_{n-1}$, а заодно и $\alpha_{-\frac{1}{2}} = \alpha_{\frac{1}{2}}$, $\alpha_{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{n-\frac{1}{2}}$; уравнения примут вид

$$\frac{2\alpha_{\frac{1}{2}}}{h^2} y_0 - \frac{2\alpha_{\frac{1}{2}}}{h^2} y_1 + p_0 y_0 = f_0, \quad -\frac{2\alpha_{n-\frac{1}{2}}}{h^2} y_{n-1} + \frac{2\alpha_{n-\frac{1}{2}}}{h^2} y_n + p_n y_n = f_n.$$

Если перед добавлением в систему разделить каждое из них на два, то матрица системы окажется не только трёхдиагональной, но и симметричной:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \left(\frac{\alpha_{\frac{1}{2}}}{h^2} + \frac{p_0}{2}\right) & \left(-\frac{\alpha_{\frac{1}{2}}}{h^2}\right) & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{f_0}{2} \\ \left(-\frac{\alpha_{\frac{1}{2}}}{h^2}\right) & \left(\frac{\alpha_{\frac{1}{2}} + \alpha_{\frac{3}{2}}}{h^2} + p_1\right) & \left(-\frac{\alpha_{\frac{3}{2}}}{h^2}\right) & \dots & 0 & 0 & f_1 \\ 0 & \left(-\frac{\alpha_{\frac{3}{2}}}{h^2}\right) & \left(\frac{\alpha_{\frac{3}{2}} + \alpha_{\frac{5}{2}}}{h^2} + p_2\right) & \dots & 0 & 0 & f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(-\frac{\alpha_{n-\frac{1}{2}}}{h^2}\right) & \left(\frac{\alpha_{n-\frac{1}{2}}}{h^2} + \frac{p_n}{2}\right) & \frac{f_n}{2} \end{array} \right)$$

Эта же схема, причём сразу в симметричном варианте, получается при использовании вариационного подхода, заключающегося в следующем. Решение краевой задачи равносильно минимизации функционала

$$\Phi[y] = \int_a^b \left(\frac{1}{2} \alpha(x) (y'(x))^2 + \frac{1}{2} p(x) y^2(x) - f(x) y(x) \right) dx$$

на всех достаточно гладких функциях; в случае задачи Неймана никаких граничных условий на функции при этом не накладывается. Если заменить интеграл от первого слагаемого на квадратурную формулу центральных прямоугольников, от двух последних — на формулу трапеций и приравнять нулю частные производные полученной суммы по всем узловым значениям y_i , то получится именно такая система линейных уравнений.

В работе требуется:

- решить краевые задачи по каждой из четырёх схем (задачу Дирихле по стандартной схеме второго порядка, задачу Неймана по схеме первого порядка и по двум схемам второго порядка точности: с использованием трёхточечных производных на краях и с использованием фиктивных узлов);
- вычисления по каждой схеме проводить по 100, 200 и 400 узлам;
- оценить погрешности для 200 и для 400 узлов по правилу Рунге в соответствии с порядком точности схемы (вычислить массивы погрешностей и найдя максимумы их модулей);
- проверить правильность порядка точности, вычислив отношение максимума модулей погрешностей для 200 узлов к максимуму для 400 узлов.

Отчёт должен содержать:

- постановку задачи;
- все четыре схемы (достаточно выписать три уравнения на каждую: по одному для краёв промежутка и общее уравнение для внутренних узлов);
- графики коэффициентов $\alpha(x)$, $p(x)$ и $f(x)$;
- для каждой схемы: общий график решений для 100, 200, 400 узлов и общий график погрешностей для 200 и 400 узлов;
- для каждой схемы: максимумы модулей погрешностей для 200 и для 400 узлов, а также отношение между ними (в формате short g).

Графики трёх решений должны практически полностью перекрывать друг друга, за исключением схемы задачи Неймана первого порядка, где обычно наблюдаются слабые, но заметные расхождения (иногда — лишь еле заметные на краях).

Отношения максимумов должны равняться двум для схемы первого порядка точности и четырём для схем второго порядка — но, разумеется, лишь приближённо, причём в некоторых вариантах эти приближения весьма грубы (в тех, где слишком круто изменяются коэффициенты). Тем не менее: если, допустим, это отношение оказалось равным 3.45, то это явно второй порядок, а если 2.31 — явно первый. Как правило, вычисления по четвёртой схеме точнее, чем по третьей, но порядок точности — тот же.

В архиве DEMO_1.rar содержатся рабочие m-файлы для демонстрационного варианта (в подкаталоге DEMO_1\PNG\ — графики результатов):

- **alpha.m**, **p.m**, **f.m** — функции $\alpha(x)$, $p(x)$ $f(x)$, отвечающие уравнению

$$-\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{6}+1} y'(x)\right)' + \ln(1+e^{-(x-1)^2}) y(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

- **getah.m** — создание базового варианта трёхдиагональной матрицы разностного оператора. Затем для каждой схемы приходится переопределять первую и последнюю строки этой матрицы (для схемы с фиктивными узлами корректируются только два крайних элемента главной диагонали; можно было бы делать это непосредственно в этой процедуре, но не хотелось её загромождать). Используемая здесь матлабовская команда вида $A = \text{diag}(b, k)$ работает следующим образом: создаётся матрица A , у которой диагональ, смещённая на k позиций относительно главной, заполнена элементами вектора b , а все остальные элементы равны нулю. Кстати, эта же функция работает и в обратную сторону: команда $b = \text{diag}(A, k)$ вырезает диагональ из матрицы.

- **wb.m** — стартовый файл: установка формата вывода результатов, задание границ промежутка $([0; 3])$ для демонстрационного варианта) и начального n , вывод графиков коэффициентов дифференциального уравнения. Левый конец промежутка во всех вариантах — ноль, но для красоты он определяется как $a = 0$.

- **wd.m** — расчёт задачи Дирихле
- **wn.m** — расчёт задачи Неймана, 1-й порядок точности
- **wn2.m** — расчёт задачи Неймана, трёхточечные производные на краях
- **wns.m** — расчёт задачи Неймана, схема с фиктивными узлами

В работе системы линейных уравнений решаются по стандартной схеме — умножением на обратную матрицу. Это неэффективно, т.к. трёхдиагональность исходной матрицы фактически не используется. В Matlab есть средства работы с разреженными матрицами, но их применение лишь затемнило бы логику программы; эффективность же для учебной работы не принципиальна.