Задача 6

Точка M движется относительно тела D согласно закону движения OM. По заданным уравнениям относительного движения точки M и движения тела D определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 2.3

Таблица 2.3

Строка	OM, см	$\varphi = \varphi(t)$, рад	$x = x(t)$, см	t_1, с	R, м
1	$10\,\pi\cdot t^2$	$t+5\cdot t^2$	$t^3-2\cdot t^2$	1	0,1
2	$20\cos(\pi\cdot t/4)$	$-4\,\pi\cdot t$	$4\,\pi\cdot t^2$	0,5	0,2
3	$3\,\pi\cdot t^3/4$	$6\cdot t^3-3\cdot t^2+t$	$5\cdot t^3+t$	2	0,15
4	$10\sin(\pi\cdot t/2)$	$2\,\pi\cdot t^3$	$7\,t^3$	3	0,1
5	$10\cdot t^2-3\cdot t$	$0,5\cdot t^2$	$5\cdot t^2$	1,5	0,25

Пример решения задачи 6

Прямоугольная пластина вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 2t^2$. Ось вращения проходит через точку O перпендикулярно плоскости рисунка. Вдоль отрезка BD прямоугольной пластины движется точка M. Закон ее относительного движения, выраженный в естественной форме, $AM=60(t - t^3) + 24$ (см).

Определить абсолютную скорость v_a и абсолютное ускорение a_a точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки M как сложное, состоящее из относительного движения точки вдоль диагонали BD пластины и переносного вращения точки вместе с самой пластиной.

Установим положение точки M на диагонали BD при $t_1 = 1$ с.

Относительное движение точки M происходит по закону

$$S = 60(t - t^3) + 24 \text{ (см)}. \tag{2.1}$$

Полагая здесь $t = 1$ с, получим $S = 24$ см. Изображаем соответствующее положение точкой M_1 на рис. 2.5

Определяем кинематические характеристики относительного и переносного движений. Находим векторы относительной скорости v_r и ускорения a_r. Дифференцируя зависимость $S(t)$ по времени, получим выражение для величины относительной скорости:

$v_r = \dot{S} = 60(1 - 3t^2), \frac{см}{с}.$ (2.2)

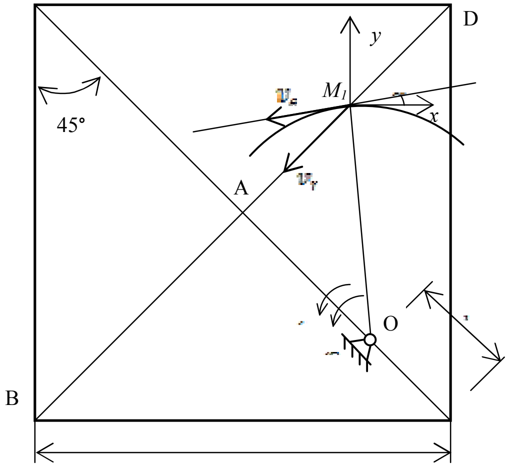


Рис. 2.5

Для момента времени $t_1 = 1$ с получаем $v_r = -120$ см/с.

Поскольку траекторией относительного движения является прямая, то величина относительного ускорения точки M выражается второй производной от S, либо первой производной от функции (2) по времени:

$$a_r = \dot{v}_r = 60 - 180t^2 = -360t, \frac{см}{с^2}. \quad (2.3)$$

Для момента времени $t_1 = 1$ с получаем $a_r = -360$ см/с^2.

Отрицательное значение производных (2.2) и (3), указывает, что вектор v_r, a_r направлены в сторону отрицательного отсчета координаты S. Изображаем эти векторы на рис. 2.5 и 2.6, приложенными к точке M_1.

Определим переносную скорость v_e, и ускорение a_e. Уравнение переносного вращения пластины: $\varphi = 2t^2$ (рад). Положительное направление отсчета угла φ указано на рис. 2.5 дуговой стрелкой φ . Дифференцируя зависимость $\varphi(t)$ по времени, найдем выражения для переносной угловой скорости:

$$\omega_e = \dot{\varphi} = 4t, c^{-1}, \quad (2.4)$$

и переносного углового ускорения

$$\varepsilon_e = \ddot{\varphi} = 4, c^{-2}. \quad (2.5)$$

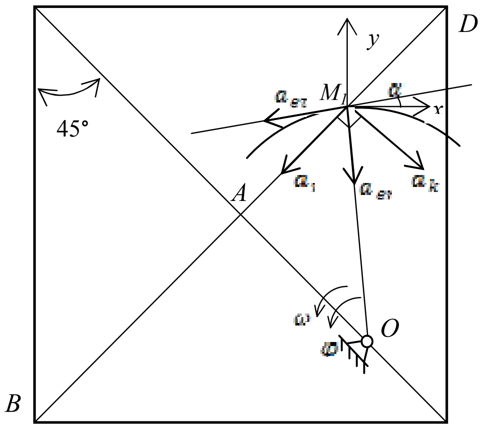


Рис. 2.6

Для момента времени t_1 = 1 с из выражения (2.4) имеем $\omega_e = 4\ \text{с}^{-1}$. Положительное значение производной (2.4) указывает, что направление вращения пластины совпадает с положительным направлением отсчета угла φ . Покажем направление вращения пластины на рис. 2.5дуговой стрелкой с буквой ω_e. Вектор переносной угловой скорости ω_e направлен вдоль оси вращения пластины перпендикулярно плоскости рисунка так, что с его конца вращение наблюдается происходящим против хода часовой стрелки.

Знаки при ω_e и ε_e одинаковы (оба положительны), следовательно, вращение пластины является ускоренным. Изображаем это дуговой стрелкой ε_e на рис. 2.6, б.

Переносные скорость и ускорение точки M_1 в момент времени t_1 – это скорость и ускорение точки M_1 пластины. При вращении пластины ее точка M_1 описывает окружность радиуса $h = OM = \sqrt{AM_1{}^2 + AO^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40$ см. Тогда модуль вектора переносной скорости:

$$v_e = |\omega_e| \cdot h = 160 \frac{\text{см}}{\text{с}}. \tag{2.6}$$

Вектор переносного ускорения складывается из касательной $a_{e\tau}$ и нормальной a_{en} :

$$a_e = a_{e\tau} + a_{en},\qquad (2.7)$$

модули которых определяются по формулам

$$a_{e\tau} = |\varepsilon_e| \cdot h = 160\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2};\; a_{en} = \omega_e{}^2 \cdot h = 640\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.\qquad (2.8)$$

Изображаем векторы v_e, $a_{e\tau}$, a_{en} приложенными в точке M_1 на рис. 2.5 и 2.6. Векторы v_e, $a_{e\tau}$ направлены по касательной к траектории точки M_1 (окружности) в сторону вращения пластины; вектор a_{en} направлен вдоль радиуса окружности к оси вращения O.

Находим вектор ускорения Кориолиса a_k, используя известную формулу

$$a_k = 2\omega_e \times v_r.\qquad (2.9)$$

Модуль этого векторного произведения $a_k = 2|\omega_e| \cdot v_r \cdot \sin(v_r \wedge \omega_e)$, где угол между векторами относительной скорости v_r и переносной угловой скорости ω_e составляет 90°. С учетом выражений (2.2) и (2.4) для момента времени $t_1 = 1$ получаем

$$a_k = 2 \cdot 4 \cdot 120 \cdot \sin(90°) = 960\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Направление a_k удобно находить по правилу Жуковского, - по которому устанавливаем, что направление вектора a_k перпендикулярно BD.

Находим абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M_1, используя теоремы сложения. Для нахождения суммы векторов используем метод проекций. Для этого необходимо найти угол α :

$$\alpha = 45° - \operatorname{arctg}\left(\frac{AM_1}{AO}\right) = 8{,}13°.\qquad (2.10)$$

Тогда

$$v_x = -v_r \cdot \cos(45°) - v_e \cdot \cos(8{,}13°) = -243{,}2\,\frac{\text{см}}{\text{с}};$$

$$v_x = -v_r \cdot \sin(45°) - v_e \cdot \sin(8{,}13°) = -107{,}5\,\frac{\text{см}}{\text{с}};$$

$$v_a = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = 265{,}9\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Аналогично с векторами ускорений:

$$a_x = a_k \cdot \cos(45°) + a_{en} \cdot \sin(8{,}13°) - a_r \cdot \sin(45°) - a_{e\tau} \cdot \cos(8{,}13°) = -872\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

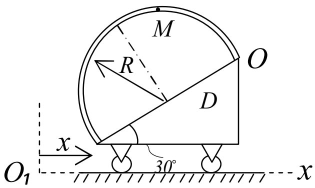
$$a_y = -a_k \cdot \sin(45°) - a_{en} \cdot \cos(8{,}13°) - a_r \cdot \cos(45°) - a_{e\tau} \cdot \sin(8{,}13°) = -1472\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

$$a_a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = 1711 \, \frac{см}{с^2}.$$

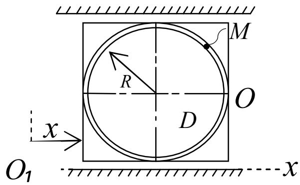
Ответ: $v_a = 265{,}9 \frac{см}{с}$; $a_a = 1711 \frac{см}{с^2}$.

Варианты заданий

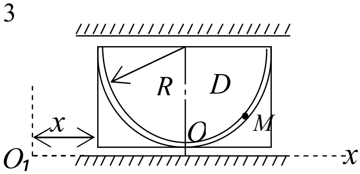
1



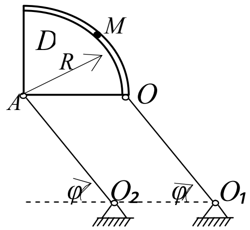
2



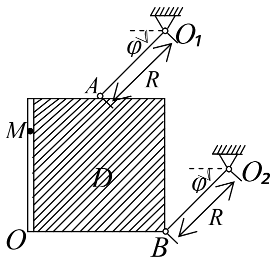
3



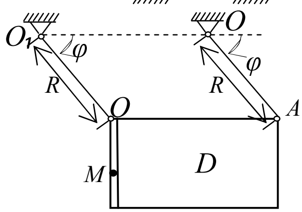
4



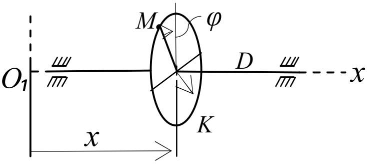
5



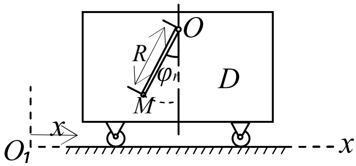
6



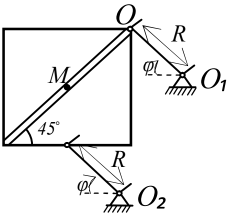
7



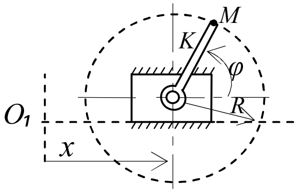
8



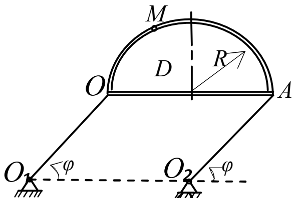
9



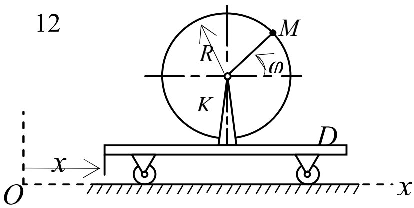
10



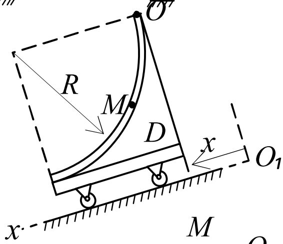
11



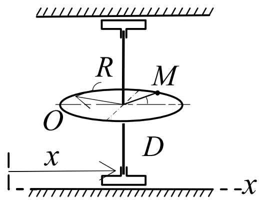
12



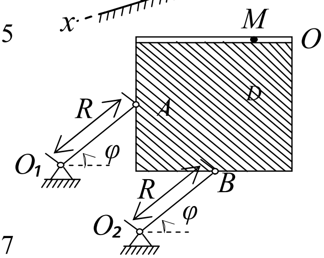
14



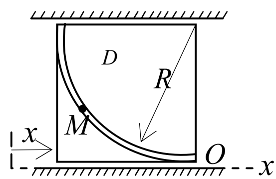
14



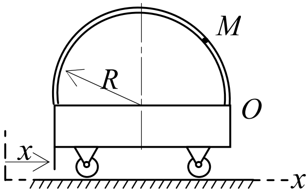
15



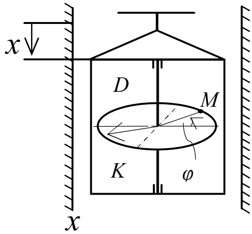
16



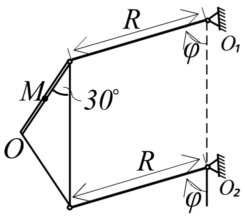
17



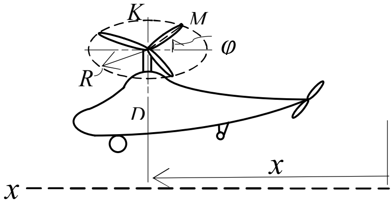
18



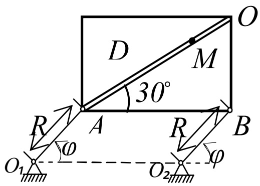
19



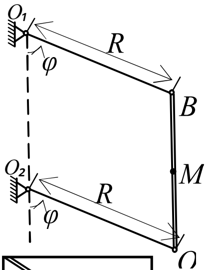
20



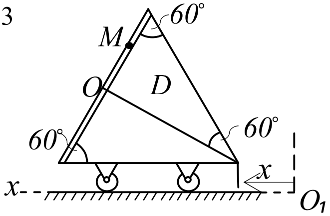
21



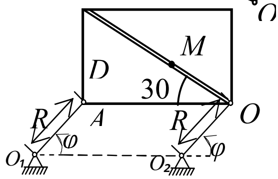
22



23



24



Варианты заданий

Вари-ант	Схема	Стро-ка	Вари-ант	Схема	Стро-ка	Вари-ант	Схема	Стро-ка	Вари-ант	Схема	Стро-ка
01	1	1	26	1	2	51	1	3	76	1	4
02	2	1	27	2	2	52	2	3	77	2	4
03	3	1	28	3	2	53	3	3	78	3	4
04	4	1	29	4	2	54	4	3	79	4	4
05	5	1	30	5	2	55	5	3	80	5	4
06	6	1	31	6	2	56	6	3	81	6	5
07	7	1	32	7	2	57	7	3	82	7	5
08	8	1	33	8	2	58	8	3	83	8	5
09	9	1	34	9	2	59	9	3	84	9	5
10	10	1	35	10	2	60	10	3	85	10	5
11	11	1	36	11	2	61	11	4	86	11	5
12	12	1	37	12	2	62	12	4	87	12	5
13	13	1	38	13	2	63	13	4	88	13	5
14	14	1	39	14	2	64	14	4	89	14	5
15	15	1	40	15	2	65	15	4	90	15	5
16	16	1	41	16	3	66	16	4	91	16	5
17	17	1	42	17	3	67	17	4	92	17	5
18	18	1	43	18	3	68	18	4	93	18	5
19	19	1	44	19	3	69	19	4	94	19	5
20	20	1	45	20	3	70	20	4	95	20	5
21	21	2	46	21	3	71	21	4	96	21	5
22	22	2	47	22	3	72	22	4	97	22	5
23	23	2	48	23	3	73	23	4	98	23	5
24	24	2	49	24	3	74	24	4	99	24	5
25	25	2	50	25	3	75	25	4	00	25	5