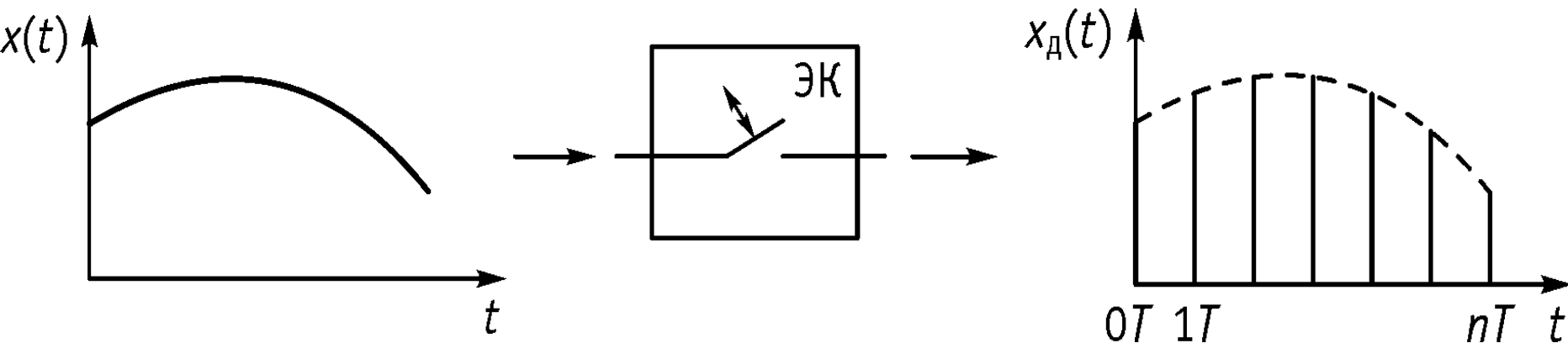


# Дискретизация непрерывных сигналов. Спектр.

**Цель:** научиться дискретизировать сигналы, определять их спектр.

**Дискретизация аналогового сигнала** – процесс преобразования сигнала в последовательность временных отсчетов



Дискретный сигнал может быть представлен в виде:

$$x(nT) = x(n) = x_n = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$$

где:

**T – интервал (период) дискретизации**

**N – число отсчетов диск. сигнала**

**n – номер отсчета диск. сигнала**

Если функция  $x(t)$  имеет спектр, ограниченный некоторой частотой  $\omega_B$ , то сигнал  $x(t)$  может быть полностью восстановлен по его отсчетам, взятым через время  $T \leq \frac{\pi}{\omega_B}$

$$f_d = \frac{1}{T} \quad [\text{Гц}]; \quad \omega_d = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_d \quad [\text{рад/с}]$$

# преобразование Фурье

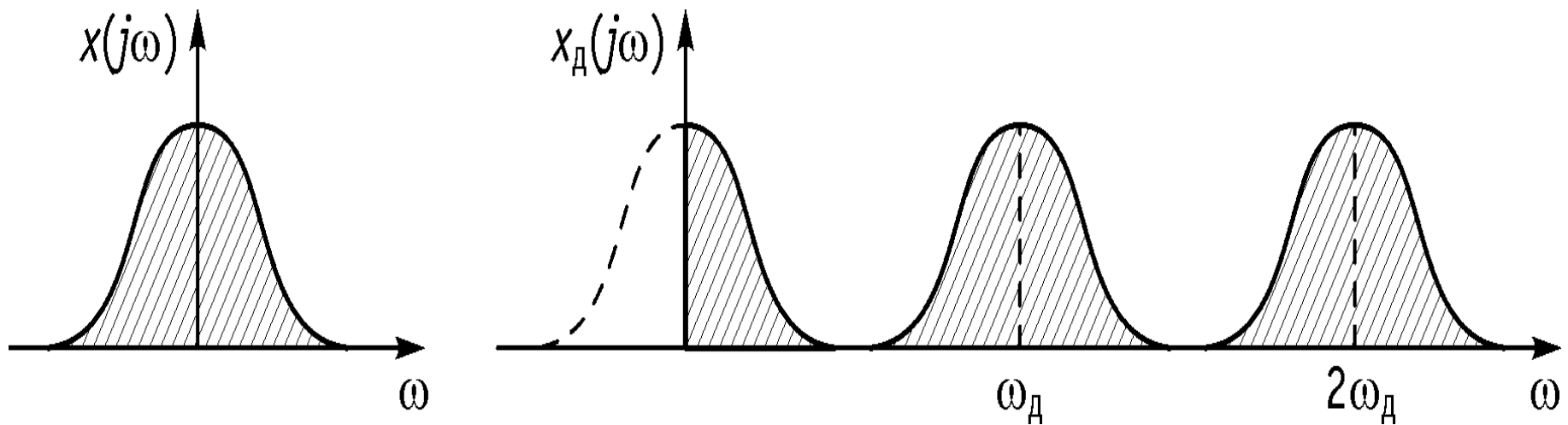
Если сигнал аналоговый, то его спектр и сам сигнал связаны парой преобразований Фурье:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(t) \mathbf{e}^{-j\omega t} dt \\ \mathbf{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_a(j\omega) \mathbf{e}^{j\omega t} d\omega \end{array} \right.$$

В случае дискретизированного сигнала  $x(nT)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} X(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT} \\ x(nT) = \frac{1}{j\omega_d} \int_{-j0.5\omega_d}^{j0.5\omega_d} X(j\omega) e^{j\omega nT} d(j\omega) \end{array} \right.$$

Спектр дискретизированного сигнала представляют собой **периодическое повторение спектра аналогового сигнала с периодом повторения равным частоте дискретизации:**



$$\mathbf{X}_d(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(j(\omega - k\omega_d))$$

Для определения спектра дискретизированного сигнала  $x(nT)$  применяют нормирование по частоте:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_d} \Rightarrow \omega T = 2\pi\Omega$$

тогда:

$$X(j\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-jn2\pi\Omega}$$



## Пример 1:

Дан сигнал  $u(t) = U_m \cos(\omega_1 t)$  .

Дискретизировать его с  $f_d = 100$  кГц .

Построить диаграмму ДС, записать числовой массив значений ДС, найти и построить спектр ДС.

$$U_m = 2 \text{ В}$$

$$f_1 = 10 \text{ кГц}$$

## Решение:

1. Определим число отсчетов ДС

$$N = \frac{T_1}{T_d} = \frac{f_d}{f_1}$$

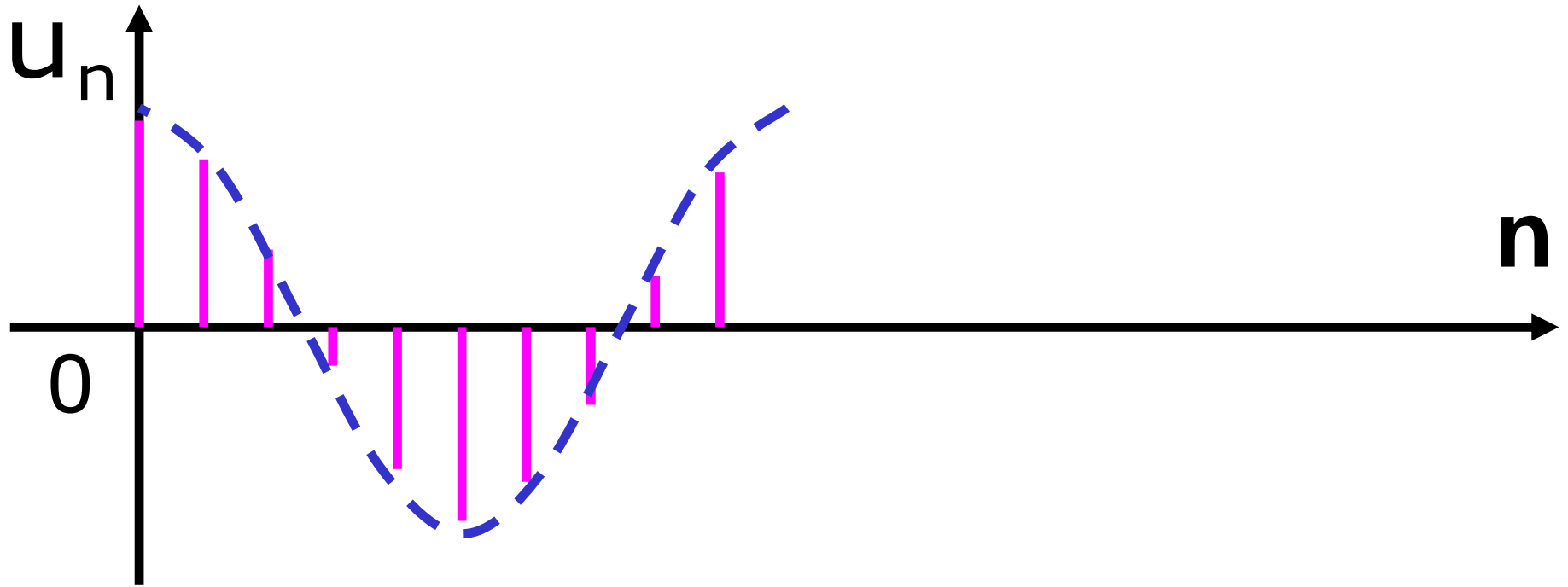
$$N = \frac{f_d}{f_1} = \frac{100}{10} = 10 \text{ отсчетов ДС}$$

тогда числовой массив значений ДС:

$$u_n = \{ 2 \cos 0; 2 \cos 36^\circ; 2 \cos 72^\circ; \dots; 2 \cos 324^\circ \}$$

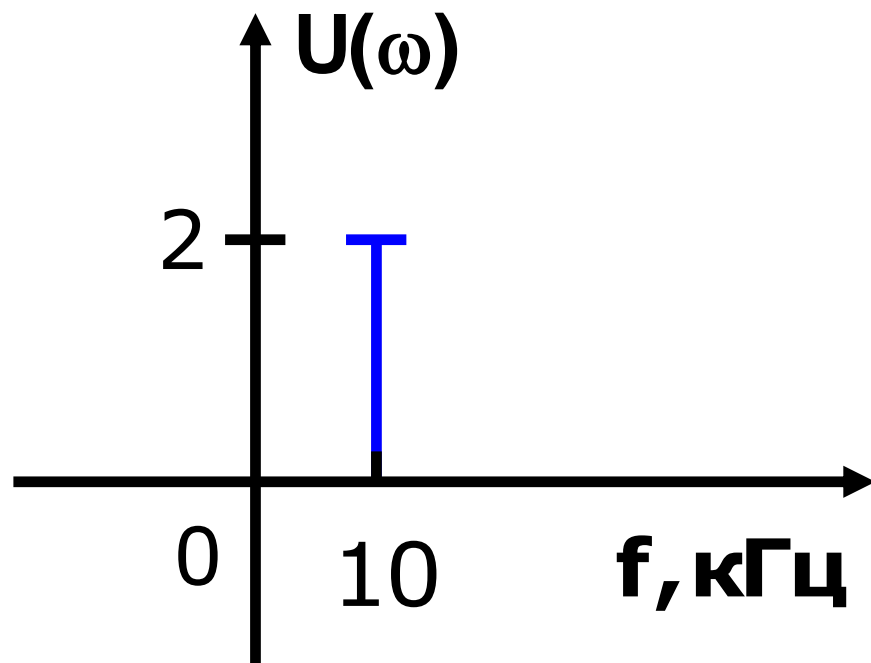
$$u_n = \{ 2; 1.62; 0.62; -0.62; -1.62; \\ -2; -1.62; -0.62; 0.62; 1.62 \}$$

График ДС:

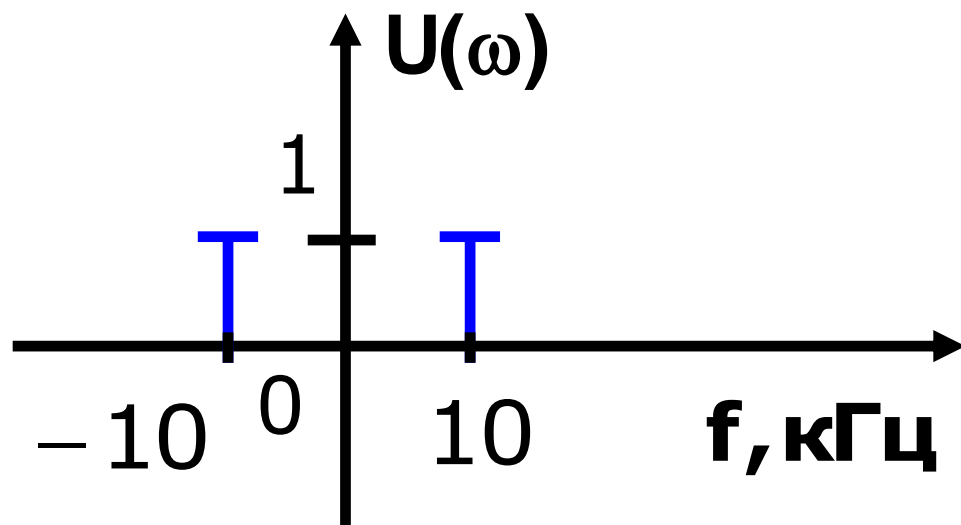


$$u_n = \{ 2; 1.62; 0.62; -0.62; -1.62; -2; -1.62; -0.62; 0.62; 1.62 \}$$

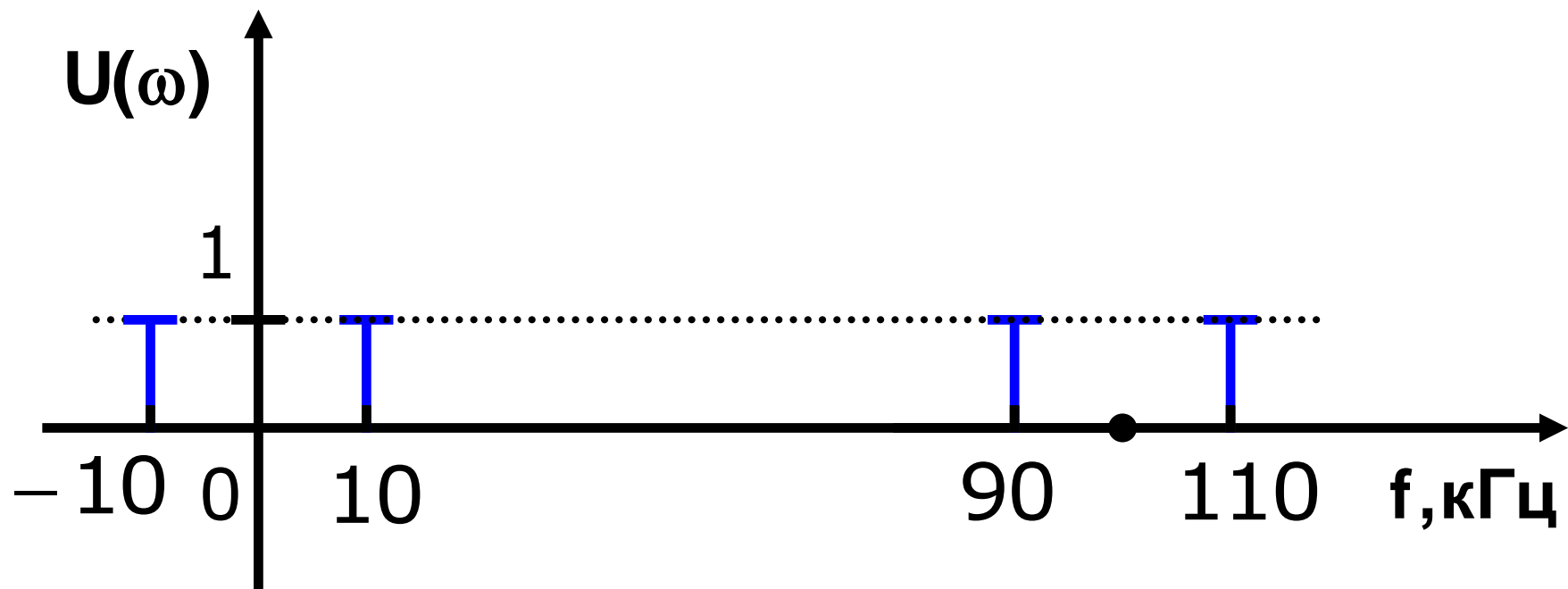
Спектр аналогового  
сигнала в  
тригонометрической  
форме



Спектр  
аналогового  
сигнала в  
комплексной  
форме



Спектр такого ДС – периодическое повторение спектра аналогового сигнала в **комплексной** форме



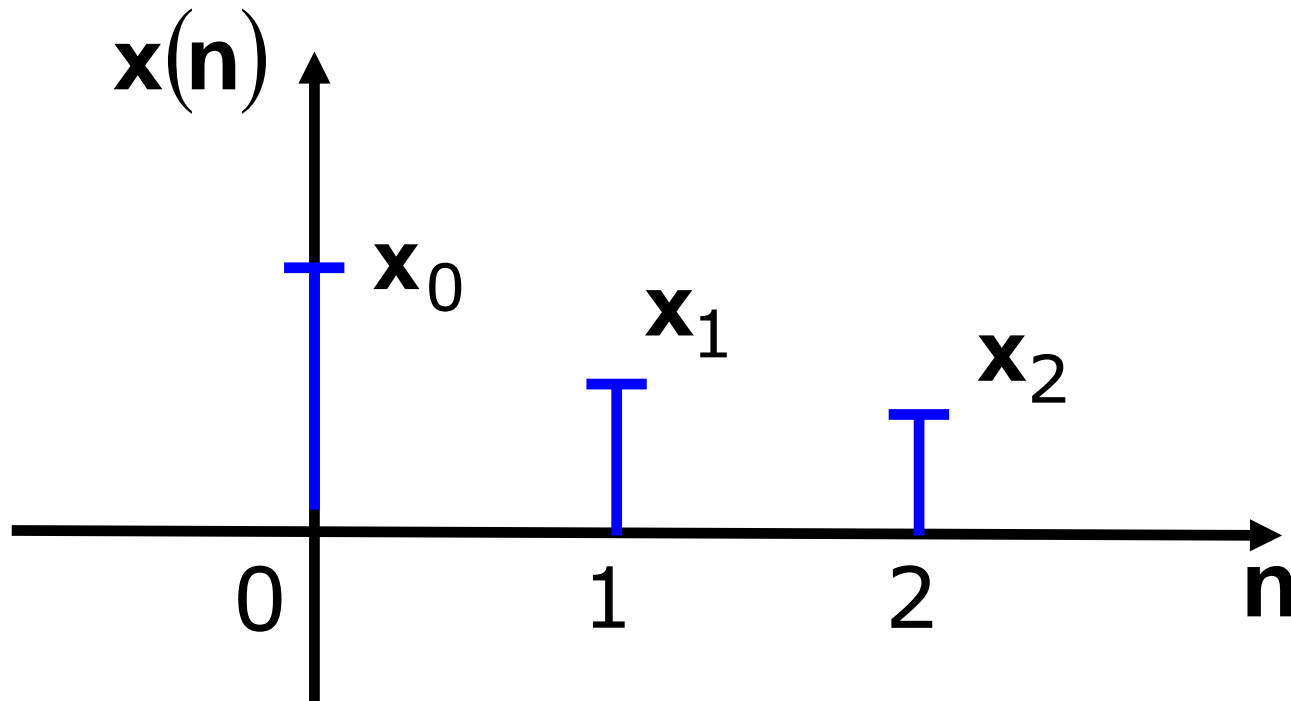
## Пример 2:

Определить спектр дискретного сигнала. Построить график ДС, спектр ДС

$$\mathbf{x(n)} = \{ 0,8; 0,5; 0,4 \}$$

# Решение:

1. Построим график ДС





2. Для нахождения спектра ДС  
используем:

$$X(j\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{x}_n \mathbf{e}^{-j n \cdot 2\pi \Omega}$$

$$N = 3$$

$$X(j\Omega) = \mathbf{x}_0 \mathbf{e}^{-j 0 \cdot 2\pi \Omega} + \mathbf{x}_1 \mathbf{e}^{-j 1 \cdot 2\pi \Omega} + \mathbf{x}_2 \mathbf{e}^{-j 2 \cdot 2\pi \Omega}$$

$$X(j\Omega) = 0,8 \mathbf{e}^{-j 0} + 0,5 \mathbf{e}^{-j 2\pi \Omega} + 0,4 \mathbf{e}^{-j 4\pi \Omega}$$

Выделим модуль и фазу:

$$X(\Omega) = \sqrt{\left[0,8 + 0,5\cos(2\pi\Omega) + 0,4\cos(4\pi\Omega)\right]^2 + \left[0,5\sin(2\pi\Omega) + 0,4\sin(4\pi\Omega)\right]^2}$$

$$\varphi_X(\Omega) = -\arctg \frac{0,5\sin(2\pi\Omega) + 0,4\sin(4\pi\Omega)}{0,8 + 0,5\cos(2\pi\Omega) + 0,4\cos(4\pi\Omega)}$$

Рассчитаем спектр ДС:

$$\Omega = 0$$

$$\begin{aligned} X(j0) &= 0,8 + 0,5e^{-j2\pi \cdot 0} + 0,4e^{-j4\pi \cdot 0} = \\ &0,8 + 0,5 + 0,4 = 1,7 \end{aligned}$$

$$\Omega = 0,25$$

$$\begin{aligned} X(j0,25) &= 0,8 + 0,5e^{-j2\pi \frac{1}{4}} + 0,4e^{-j4\pi \frac{1}{4}} = \\ &0,8 - j0,5 - 0,4 = 0,64e^{-51,34^\circ} \end{aligned}$$

$$\Omega = 0,5$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{j}0,5) &= 0,8 + 0,5\mathbf{e}^{-\mathbf{j}2\pi\frac{1}{2}} + 0,4\mathbf{e}^{-\mathbf{j}4\pi\frac{1}{2}} = \\ &0,8 - 0,5 + 0,4 = 0,7 \end{aligned}$$

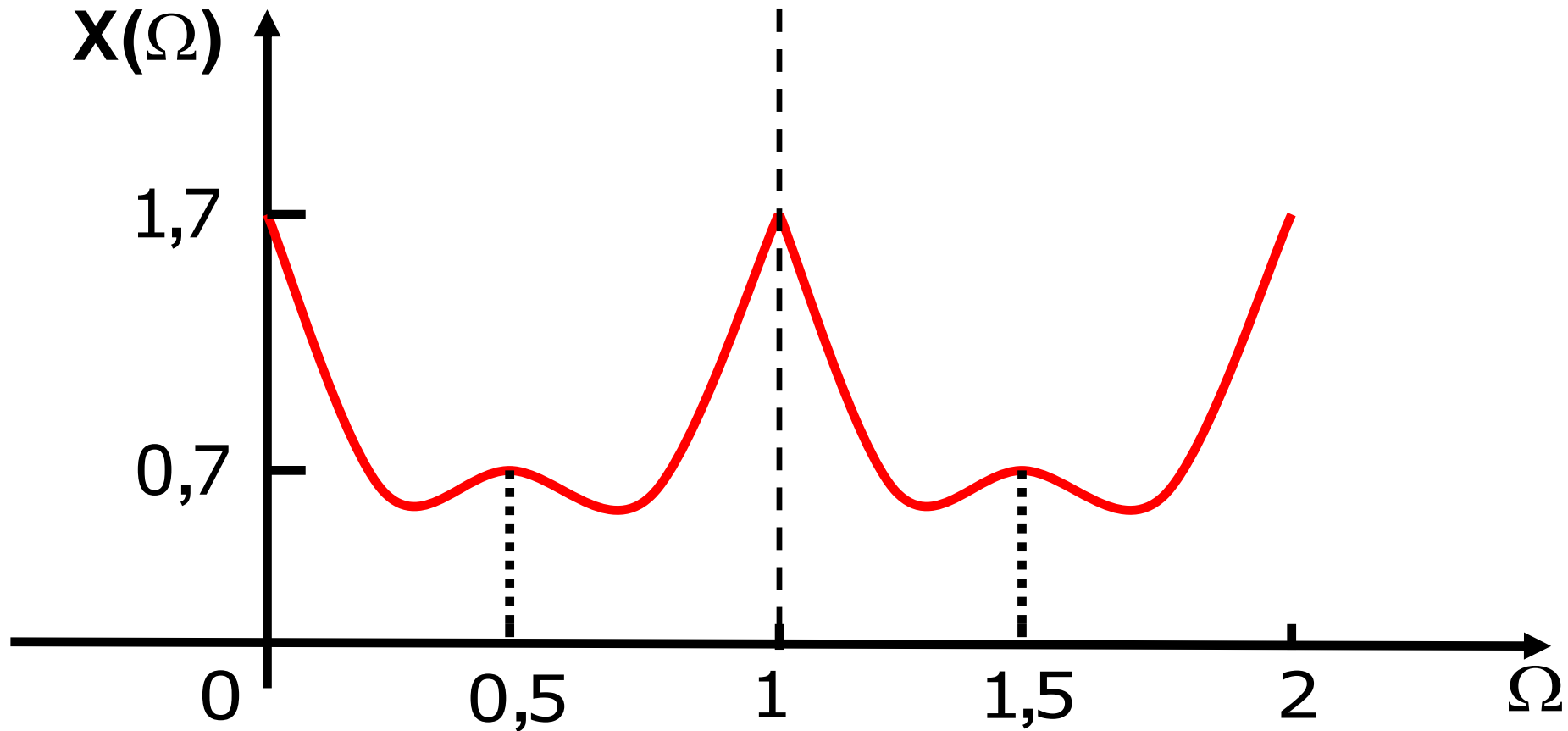
$$\Omega = 0,75$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{j}0,75) &= 0,8 + 0,5\mathbf{e}^{-\mathbf{j}2\pi\frac{3}{4}} + 0,4\mathbf{e}^{-\mathbf{j}4\pi\frac{3}{4}} = \\ &0,8 + \mathbf{j}0,5 - 0,4 = 0,64\mathbf{e}^{51,34^{\circ}} \end{aligned}$$

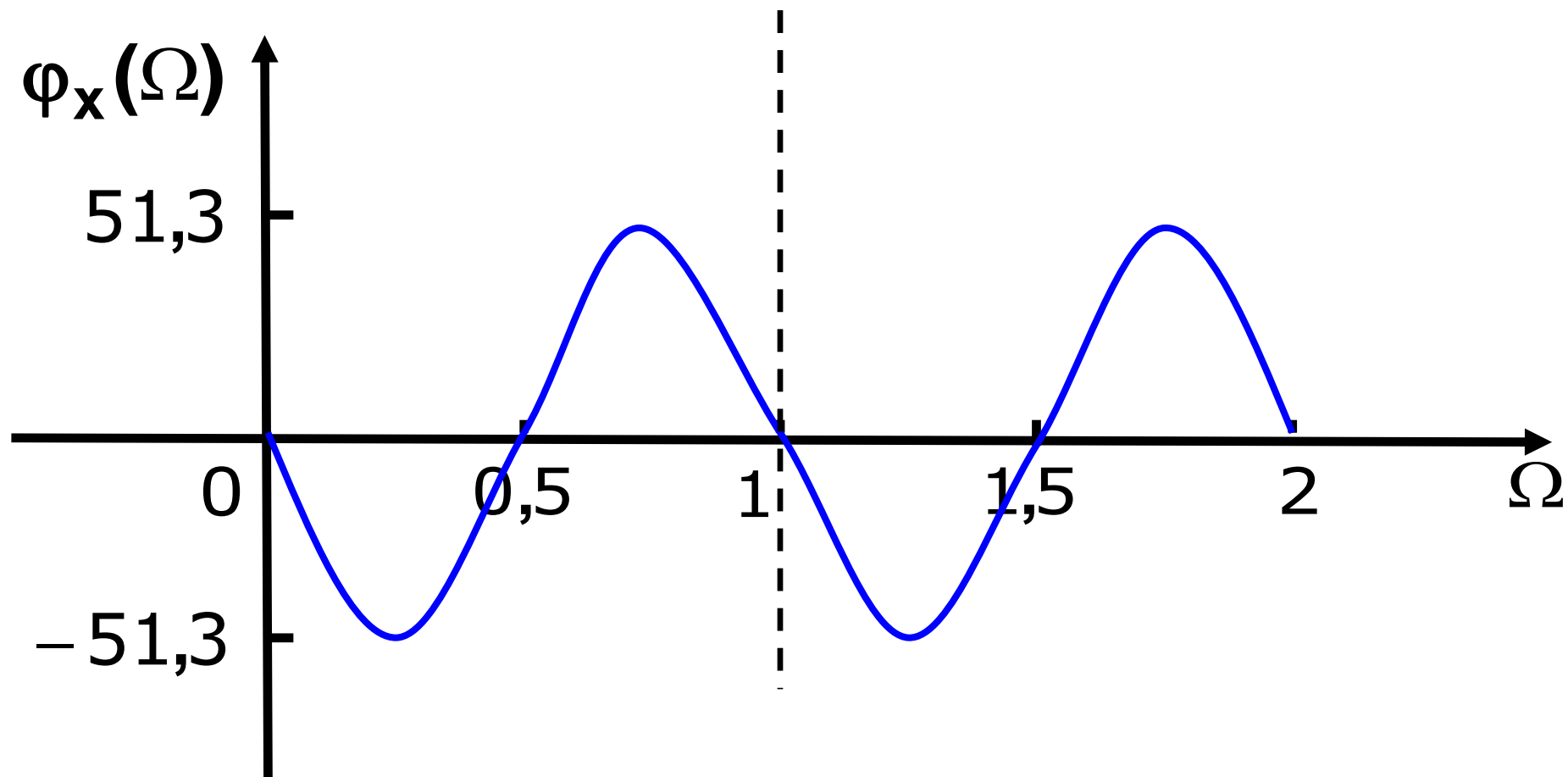
$$\Omega = 1$$

$$\begin{aligned} X(j1) &= 0,8 + 0,5e^{-j2\pi \cdot 1} + 0,4e^{-j4\pi \cdot 1} = \\ &0,8 + 0,5 + 0,4 = 1,7 \end{aligned}$$

$\Omega$	0	0,25	0,5	0,75	1
$X(\Omega)$	1,7	0,64	0,7	0,64	1,7
$\varphi_x(\Omega)$	0	-51,3	0	51,3	0



АЧХ ДС является непрерывной периодически повторяющейся **четной** функцией



ФЧХ ДС является непрерывной периодически повторяющейся **нечётной** функцией

# **Z-преобразование дискретного сигнала.**


**Цель:** научиться находить z-изображение дискретного сигнала

научиться восстанавливать оригинал по известному Z-изображению



Пара z-преобразований получаются из формул преобразования Фурье для дискретного сигнала путем замены:

$$z = e^{j\omega T}$$


$$\left\{ \begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \\ x(nT) &= \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz \end{aligned} \right.$$

## Пример 3:

Определить z-изображение дискретного сигнала.

$$x(n) = \{0,5 ; 0 ; 0,2 ; 0,4\}$$

Решение:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$X(z) = 0,5 + 0 \cdot z^{-1} + 0,2 \cdot z^{-2} + 0,4 \cdot z^{-3}$$

дано Z-изображение

$$X(z) = 0,5z^{-1} + 0,2z^{-2} - 0,8z^{-4} + 0,1z^{-5}$$

**Найти:** дискретный сигнал

т.к. Z – изображение представлено  
в виде суммы , то дискретный сигнал :

$$x(n) = \{0 ; 0,5 ; 0,2 ; 0 ; -0,8 ; 0,1 \}$$

- использование теоремы о вычетах

если 
$$X(z) = z \cdot \frac{W(z)}{V(z)} = z \cdot \sum_{k=0}^Q \frac{A_k}{z - z_k}$$

где  $z_k$  – полюс  $X(z)$

$$A_k = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) \frac{W(z)}{V(z)}$$

тогда 
$$x(n) = \sum_{k=0}^Q A_k (z_k)^n$$

**Пример 4:** дано Z-изображение

$$X(z) = \frac{z^2 - 0,6z + 0,08}{z^2 - 0,8z + 0,15}$$

**Найти:** дискретный сигнал.

**Решение:** приведем  $X(z)$  к виду

$$X(z) = z \cdot \frac{W(z)}{V(z)} = z \cdot \frac{z^2 - 0,6z + 0,08}{z \cdot (z^2 - 0,8z + 0,15)}$$

Найдем полюса  $X(z)$ :

$$z \cdot (z^2 - 0,8z + 0,15) = 0$$

$$z_1 = 0; \quad z_2 = 0,5; \quad z_3 = 0,3$$

тогда:

$$X(z) = z \cdot \frac{z^2 - 0,6z + 0,08}{z \cdot (z - 0,5)(z - 0,3)}$$

Найдем коэффициенты  $A_k$ :

$$A_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \cancel{(z - 0)} \frac{z^2 - 0,6z + 0,08}{\cancel{z} \cdot (z - 0,5)(z - 0,3)} =$$
$$= \frac{0,08}{0,15} = 0,533$$

$$A_2 = \lim_{z \rightarrow 0,5} \cancel{(z - 0,5)} \frac{z^2 - 0,6z + 0,08}{z \cdot \cancel{(z - 0,5)}(z - 0,3)} =$$
$$= \frac{0,03}{0,1} = 0,3$$

$$A_3 = \lim_{z \rightarrow 0,3} \cancel{(z - 0,3)} \frac{z^2 - 0,6z + 0,08}{z \cdot (z - 0,5) \cancel{(z - 0,3)}} =$$

$$= \frac{-0,01}{-0,06} = 0,167$$

тогда

$$X(z) = z \cdot \left( \frac{0,533}{z} + \frac{0,3}{z - 0,5} + \frac{0,16}{z - 0,3} \right) =$$

$$= 0,533 + \frac{0,3}{1 - 0,5 \cdot z^{-1}} + \frac{0,16}{1 - 0,3 \cdot z^{-1}}$$



$$X(z) = 0,533 + \frac{0,3}{1 - 0,5 \cdot z^{-1}} + \frac{0,16}{1 - 0,3 \cdot z^{-1}}$$

тогда дискретный сигнал

$$x(n) = 0,533 \cdot 0^n + 0,3 \cdot (0,5)^n + 0,16 \cdot (0,3)^n$$

найдем первые три отчета ДС:

$$x(0) = 0,533 \cdot 0^0 + 0,3 \cdot (0,5)^0 + 0,16 \cdot (0,3)^0 = 0,993$$

$$x(1) = 0,3 \cdot (0,5)^1 + 0,16 \cdot (0,3)^1 = 0,198$$

$$x(2) = 0,3 \cdot (0,5)^2 + 0,16 \cdot (0,3)^2 = 0,089$$

# Задача 1

## Задание

Дан сигнал  $u(t) = U_m \cos(2\pi f_1 t)$  .

Дискретизировать его с частотой  $f_d$  .

Построить диаграмму ДС, записать числовой массив значений ДС, построить спектр ДС.

Вариант	$U_m$ , В	$f_1$ , кГц	$f_d$ , кГц
1	1	10	40
2	2	10	50
3	3	10	60
4	4	10	80
5	5	10	90

Вариант	$U_m, В$	$f_1, кГц$	$f_d, кГц$
6	6	15	60
7	7	15	75
8	8	15	90
9	9	15	120
10	10	15	135
11	11	20	80
12	12	20	100
13	13	20	120
14	14	20	160
15	15	20	180

## Задача 2

Записать Z-изображение, определить спектр дискретного сигнала. Построить диаграмму ДС, спектр ДС

Вариант	$x(nT)$	Вариант	$x(nT)$
1	{0,1;0,2;0,1;0,2}	9	{0,4;0,8;0,9;0,7}
2	{0,4;0,3;0,5;0,7}	10	{0,3;0,7;0,2;0,9}
3	{0,6;0,8;0,7;0,6}	11	{0,5;0,1;0,6;0,4}
4	{0,7;0,3;0,2;0,5}	12	{0,2;0,7;0,3;0,8}
5	{0,4;0,9;0,4;0,3}	13	{0,4;0;0,2;0,1}
6	{0,8;0,1;0,2;0,4}	14	{0,9;0,5;0,2;0,2}
7	{0,5;0,1;0,3;0,5}	15	{0,1;0;0,8;0,3}
8	{0,2;0,3;0,7;0,9}		

## Задача 3

Дано Z-изображение, найти дискретный сигнал

Вариант	$X(z)$
1	$3 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}$
2	$2 + 3z^{-1} + 1z^{-2} + 2z^{-3}$
3	$4 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}$
4	$3 + 1z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}$
5	$2 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 0z^{-3}$
6	$1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3}$

Вариант	$X(z)$
7	$\mathbf{2 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 4z^{-3}}$
8	$\mathbf{1 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3}}$
9	$\mathbf{0 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 5z^{-3}}$
10	$\mathbf{2 + 0z^{-1} + 1z^{-2} + 2z^{-3}}$
11	$\mathbf{3 + 1z^{-1} + 4z^{-2} + 2z^{-3}}$
12	$\mathbf{8 + 4z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3}}$
13	$\mathbf{7 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3}}$
14	$\mathbf{6 + 1z^{-1} + 8z^{-2} + 4z^{-3}}$
15	$\mathbf{9 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + 7z^{-3}}$

## Задача 4

Дано Z-изображение, найти первые пять отчетов дискретного сигнала

Вариант	$X(z)$	Вариант	$X(z)$
1	$\frac{\mathbf{1} + \mathbf{7}z^{-1} + \mathbf{1}z^{-2}}{\mathbf{1} + \mathbf{4}z^{-1} + \mathbf{3}z^{-2}}$	4	$\frac{\mathbf{4} + \mathbf{0}z^{-1} + \mathbf{1}z^{-2}}{\mathbf{1} + \mathbf{3}z^{-1} + \mathbf{2}z^{-2}}$
2	$\frac{\mathbf{1} + \mathbf{0}z^{-1} + \mathbf{2}z^{-2}}{\mathbf{1} + \mathbf{4}z^{-1} + \mathbf{3}z^{-2}}$	5	$\frac{\mathbf{1} + \mathbf{0}z^{-1} + \mathbf{4}z^{-2}}{\mathbf{1} + \mathbf{4}z^{-1} + \mathbf{3}z^{-2}}$
3	$\frac{\mathbf{1} + \mathbf{1}z^{-1} + \mathbf{1}z^{-2}}{\mathbf{1} + \mathbf{4}z^{-1} + \mathbf{3}z^{-2}}$	6	$\frac{\mathbf{1} + \mathbf{2}z^{-1} + \mathbf{0}z^{-2}}{\mathbf{1} + \mathbf{3}z^{-1} + \mathbf{2}z^{-2}}$

Вариант	$X(z)$	Вариант	$X(z)$
7	$\frac{0 + 1z^{-1} + 0z^{-2}}{1 + 6z^{-1} + 8z^{-2}}$	12	$\frac{4 + 0z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 3z^{-1} - 4z^{-2}}$
8	$\frac{0 + 2z^{-1} + 1z^{-2}}{1 + 6z^{-1} + 8z^{-2}}$	13	$\frac{7 + 2z^{-1} + 5z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$
9	$\frac{2 + 1z^{-1} + 0z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$	14	$\frac{1 + 8z^{-1} + 3z^{-2}}{1 + 3z^{-1} - 4z^{-2}}$
10	$\frac{0 + 4z^{-1} + 5z^{-2}}{1 + 7z^{-1} + 10z^{-2}}$	15	$\frac{3 + 0z^{-1} + 7z^{-2}}{1 + 4z^{-1} - 5z^{-2}}$
11	$\frac{2 + 5z^{-1} + 3z^{-2}}{1 + 4z^{-1} - 5z^{-2}}$		