

Дискретное преобразование

Фурье (ДПФ)

Цель: научиться находить спектр дискретного периодического сигнала, спектр дискретного непериодического сигнала; по известному спектру находить сигнал

Для дискретного периодического сигнала, имеющего периодический дискретный спектр существует пара преобразований Фурье (ДПФ и ОДПФ):

$$\left\{ \begin{array}{l} X(jk) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi nk}{N}} \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk) e^{j \frac{2\pi nk}{N}} \end{array} \right.$$

Число отсчетов ДС на одном периоде и число коэффициентов гармоник на одном периоде спектра одинаково и определяется:

$$N = \frac{\omega_d}{\omega_1} = \frac{f_d}{f_1} = \frac{T_c}{T}$$

$$f_d = \frac{1}{T} \text{ [Гц]}, \quad \omega_d = 2\pi f_d \text{ [рад/с]}$$

$$T = \frac{T_c}{N} \text{ [с]}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_c} \text{ [рад/с]}, \quad f_1 = \frac{1}{T_c} \text{ [Гц]}$$

Свойства ДПФ

1. Сумме сигналов одинаковой длины и с одинаковым периодом дискретизации соответствует сумма их коэффициентов ДПФ

2. Коэффициент $X(j0)$ равен сумме отсчетов $x(n)$ за период t_n

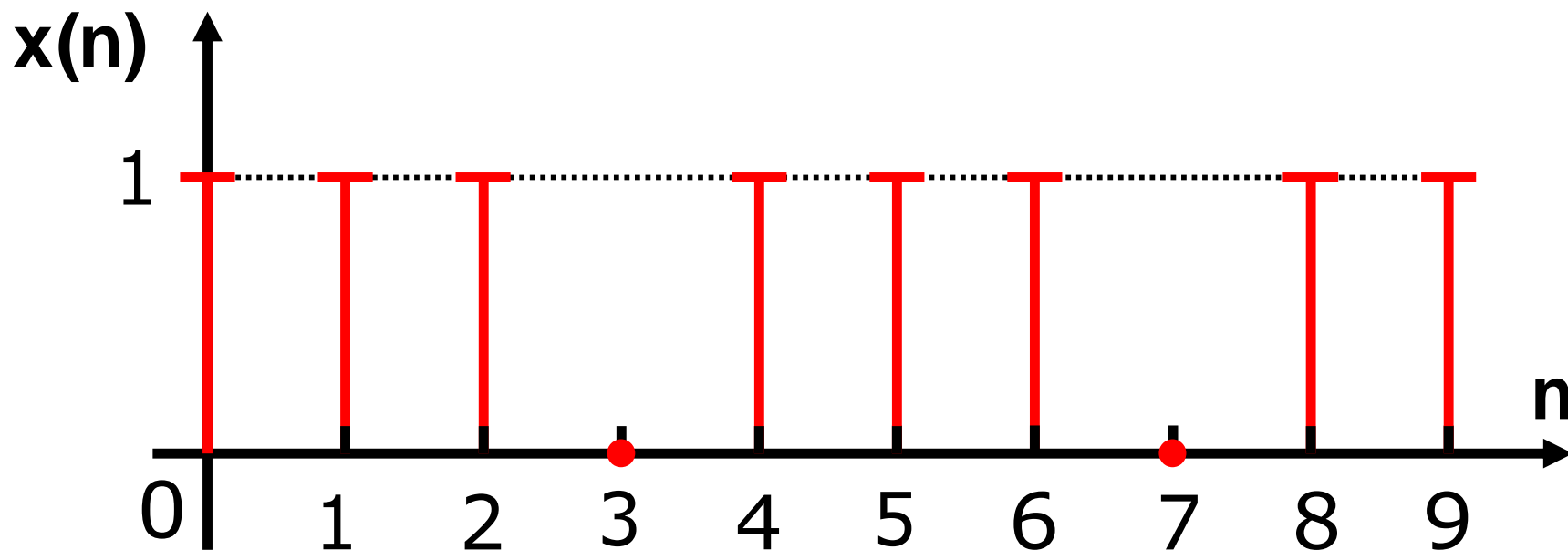
3. Если N -четное число, то коэффициент определяется как сумма знакопеременных отсчетов $x(n)$

$$X\left(j\frac{N}{2}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)(-1)^n$$

4. Если отсчеты $x(n)$ – вещественные числа, то коэффициенты ДПФ, номера которых расположены симметрично относительно номера $x\left(j\frac{N}{2}\right)$ образуют комплексно-сопряженные пары, то есть достаточно вычислить только половину коэффициентов, а вторую половину записать как комплексно-сопряженные числа.

5. Для получения модуля спектральной плотности ДС на частоте, соответствующей какой-то из дискретных частот, нужно соответствующие коэффициенты ДПФ умножить на период дискретизации.

Пример №1 Найти коэффициенты
ДПФ дискретного сигнала



Воспользуемся прямым
дискретным преобразованием
Фурье:

$$X(jk) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

Так как число отсчетов ДС на одном
периоде и число коэффициентов
гармоник на одном периоде спектра
одинаково, то $N=4$

$$\mathbf{k} = 0 \quad \mathbf{X}(\mathbf{j}0) = \sum_{\mathbf{n}=0}^3 \mathbf{x}(\mathbf{n})\mathbf{e}^{-\mathbf{j}\frac{2\pi\cdot\mathbf{n}\cdot 0}{4}} =$$

$$= 1 + 1 + 1 + 0 = 3$$

$$\mathbf{k} = 1 \quad \mathbf{X}(\mathbf{j}1) = \sum_{\mathbf{n}=0}^3 \mathbf{x}(\mathbf{n})\mathbf{e}^{-\mathbf{j}\frac{2\pi\cdot\mathbf{n}\cdot 1}{4}} =$$

$$1\mathbf{e}^{-\mathbf{j}\frac{2\pi\cdot 0\cdot 1}{4}} + 1\mathbf{e}^{-\mathbf{j}\frac{2\pi\cdot 1\cdot 1}{4}} + 1\mathbf{e}^{-\mathbf{j}\frac{2\pi\cdot 2\cdot 1}{4}} + 0\mathbf{e}^{-\mathbf{j}\frac{2\pi\cdot 3\cdot 1}{4}} =$$

$$1 - \mathbf{j}1 - 1 + \mathbf{j}0 = -\mathbf{j}1 = 1\mathbf{e}^{-\mathbf{j}90^{\circ}}$$

$$\mathbf{k} = 2 \quad \mathbf{X(j2)} = \sum_{n=0}^3 \mathbf{x(n)e}^{-j\frac{2\pi \cdot n \cdot 2}{4}} =$$

$$\mathbf{1e}^{-j\frac{2\pi \cdot 0 \cdot 2}{4}} + \mathbf{1e}^{-j\frac{2\pi \cdot 1 \cdot 2}{4}} + \mathbf{1e}^{-j\frac{2\pi \cdot 2 \cdot 2}{4}} + \mathbf{0e}^{-j\frac{2\pi \cdot 3 \cdot 2}{4}} =$$

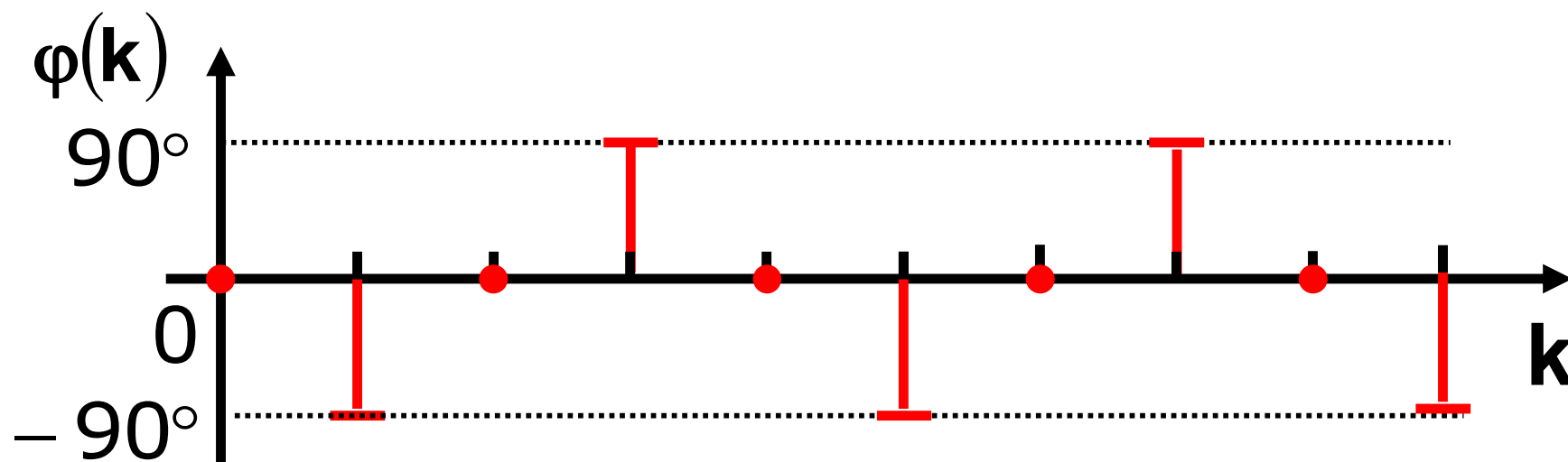
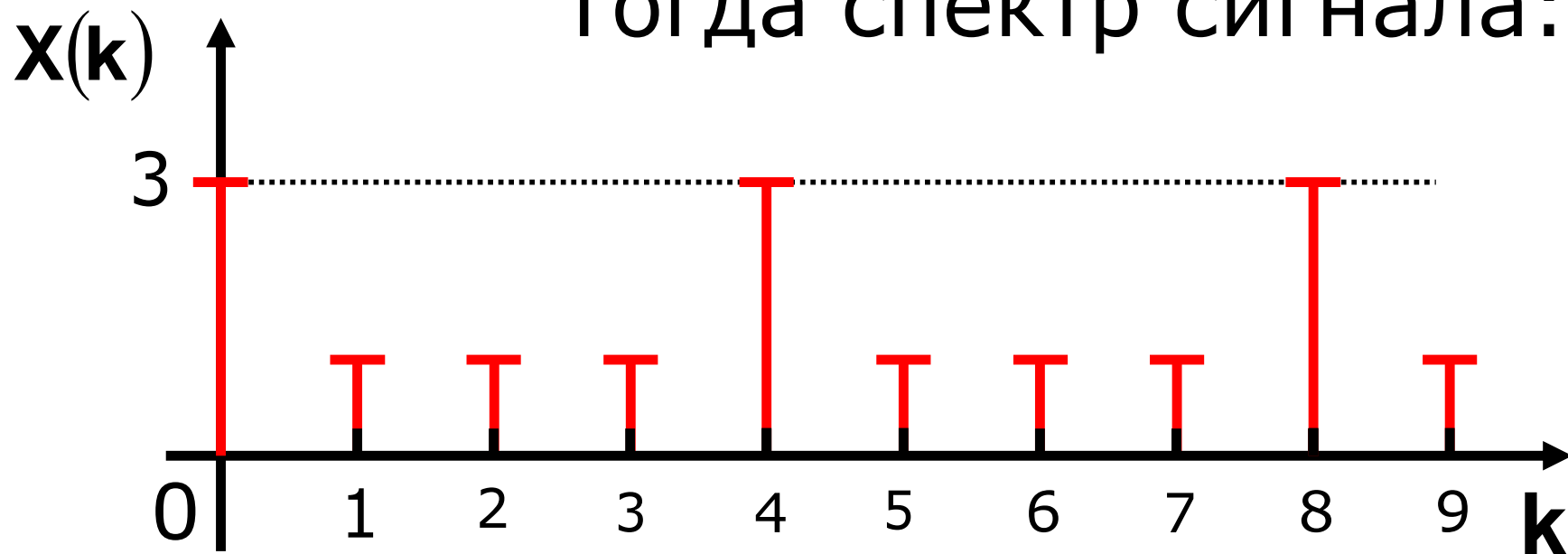
$$\mathbf{1 - 1 + 1 - 0 = 1}$$

$$\mathbf{k} = 3 \quad \mathbf{X(j3)} = \sum_{n=0}^3 \mathbf{x(n)e}^{-j\frac{2\pi \cdot n \cdot 3}{4}} =$$

$$\mathbf{1e}^{-j\frac{2\pi \cdot 0 \cdot 3}{4}} + \mathbf{1e}^{-j\frac{2\pi \cdot 1 \cdot 3}{4}} + \mathbf{1e}^{-j\frac{2\pi \cdot 2 \cdot 3}{4}} + \mathbf{0e}^{-j\frac{2\pi \cdot 3 \cdot 3}{4}} =$$

$$\mathbf{1 + j1 - 1 - j0 = j1 = 1e^{j90^\circ}}$$

Тогда спектр сигнала:



Пример №2

Найти коэффициенты ДПФ

$$x(n) = \{0,1; 0,5; 1; 0,5\}$$

Построить диаграмму ДС и спектральную характеристику ДС.

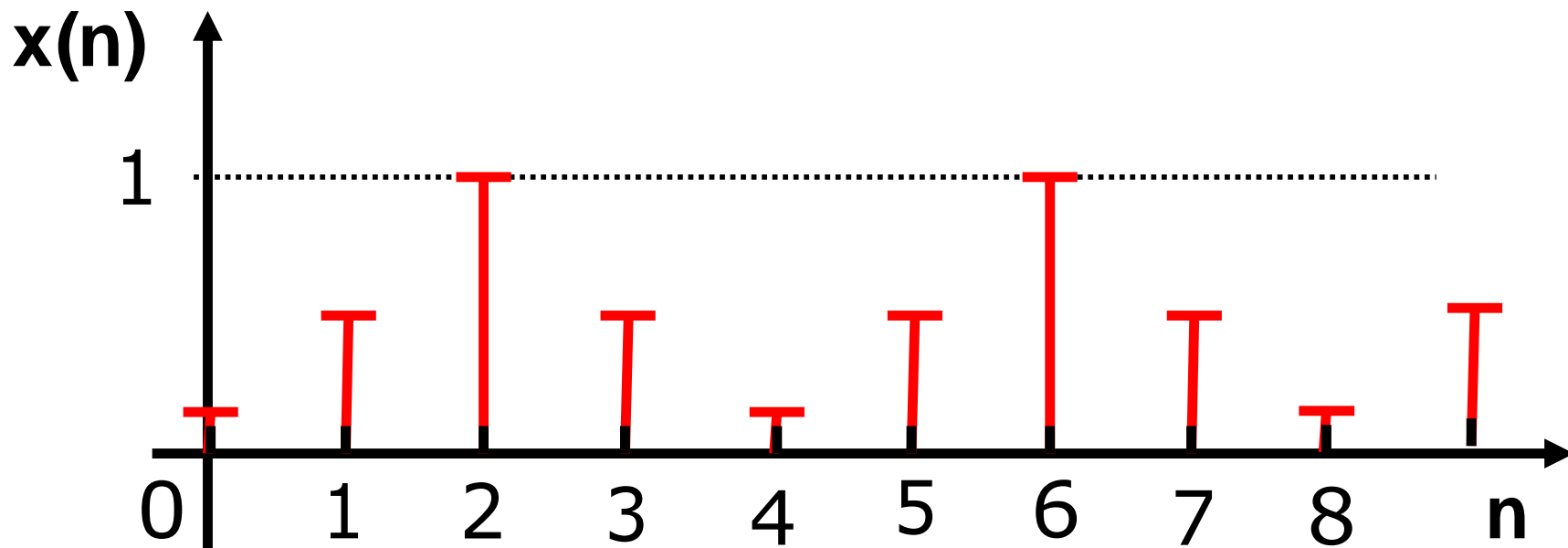
Данный сигнал непериодический.

Известно, что спектр
непериодического сигнала
совпадает с огибающей спектра
такого же периодического
сигнала.

Сделаем данный сигнал
периодическим:

$$x(n) = \{0,1; 0,5; 1; 0,5; 0,1; 0,5; 1; 0,5...\}$$

Построим диаграмму ДС:



число отсчетов ДС за один период

$$N = 4$$

тогда
$$\frac{2\pi \cdot n \cdot k}{4} = \frac{\pi \cdot n \cdot k}{2}$$

Найдем коэффициенты ДПФ:

$k = 0$ (сумма отсчетов ДС)

$$X(j0) = 0,1 + 0,5 + 1 + 0,5 = 2,1$$

$k = 1$

$$\begin{aligned} X(j1) = & 0,1e^{-j\frac{\pi \cdot 0 \cdot 1}{2}} + 0,5e^{-j\frac{\pi \cdot 1 \cdot 1}{2}} + 1e^{-j\frac{\pi \cdot 2 \cdot 1}{2}} + \\ & + 0,5e^{-j\frac{\pi \cdot 3 \cdot 1}{2}} = 0,1 - j0,5 - 1 + j0,5 = -0,9 \end{aligned}$$

$k = 2$ (знакопеременная сумма отсчетов)

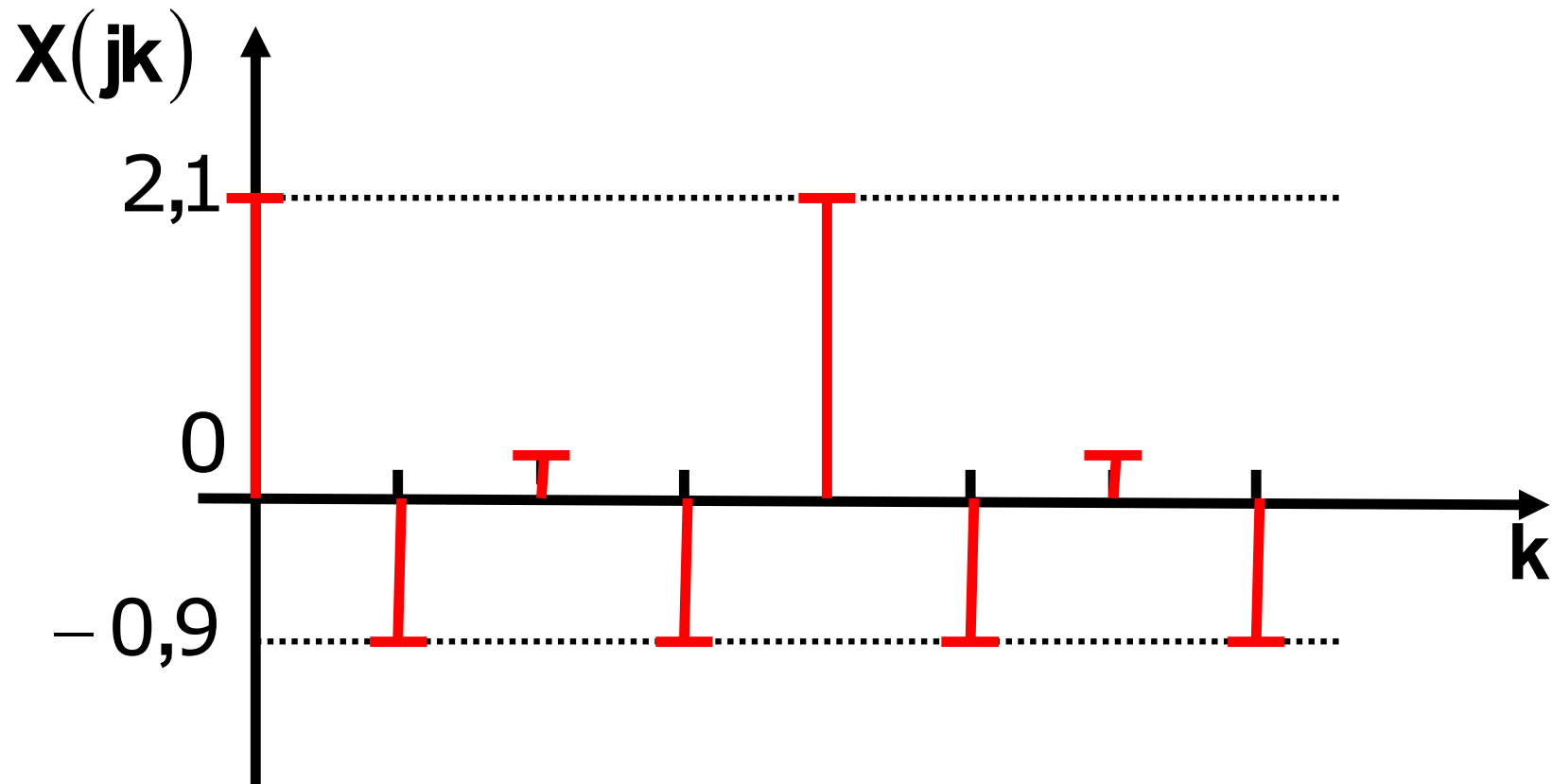
$$\mathbf{X(j2)} = 0,1 - 0,5 + 1 - 0,5 = 0,1$$

$k = 3$ (согласно свойству ДПФ, данный коэффициент можно записать как комплексно – сопряженное число $x(j1)$)

$$\mathbf{X(j3)} = \mathbf{X^*(j1)} = -0,9$$

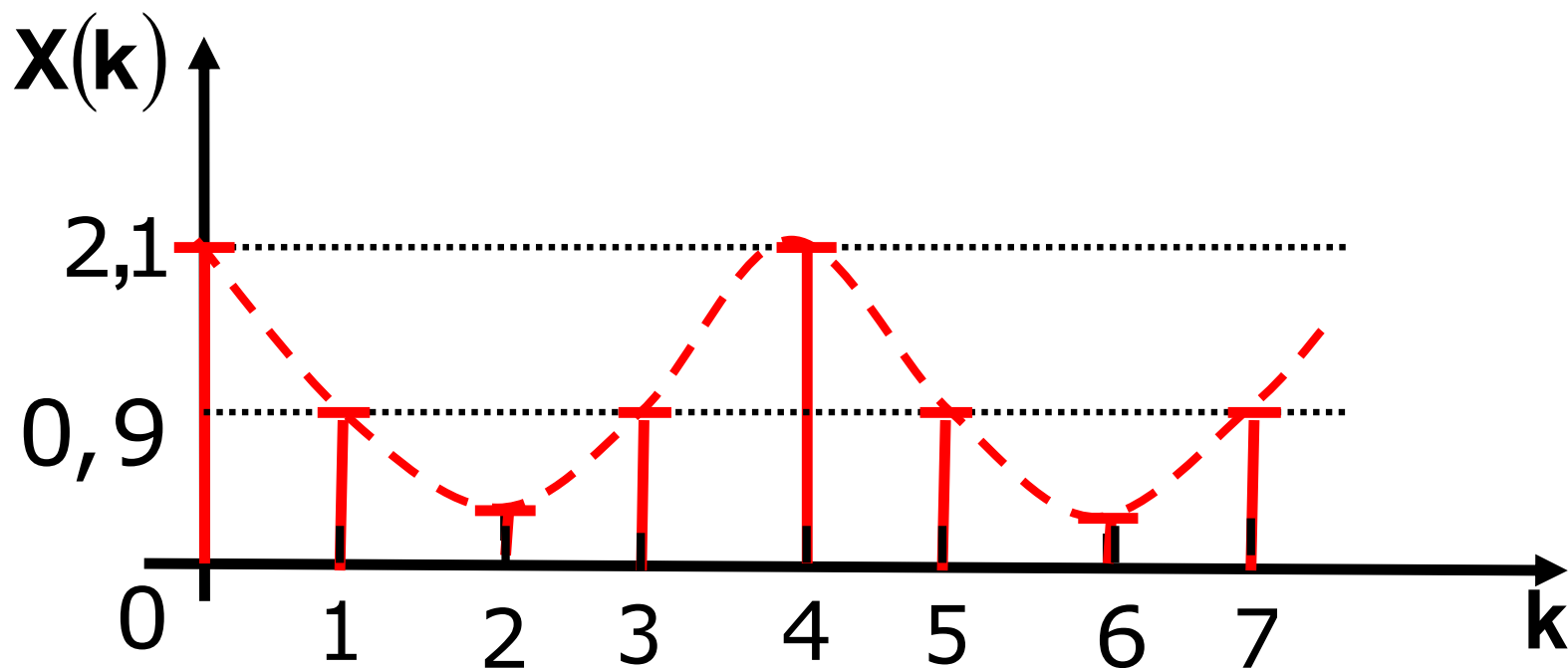
$$\mathbf{X(jk)} = \left\{ 2,1; 0,9e^{\pm j\pi}; 0,1; 0,9e^{\mp j\pi} \right\}$$

Построим спектр $X(jk)$

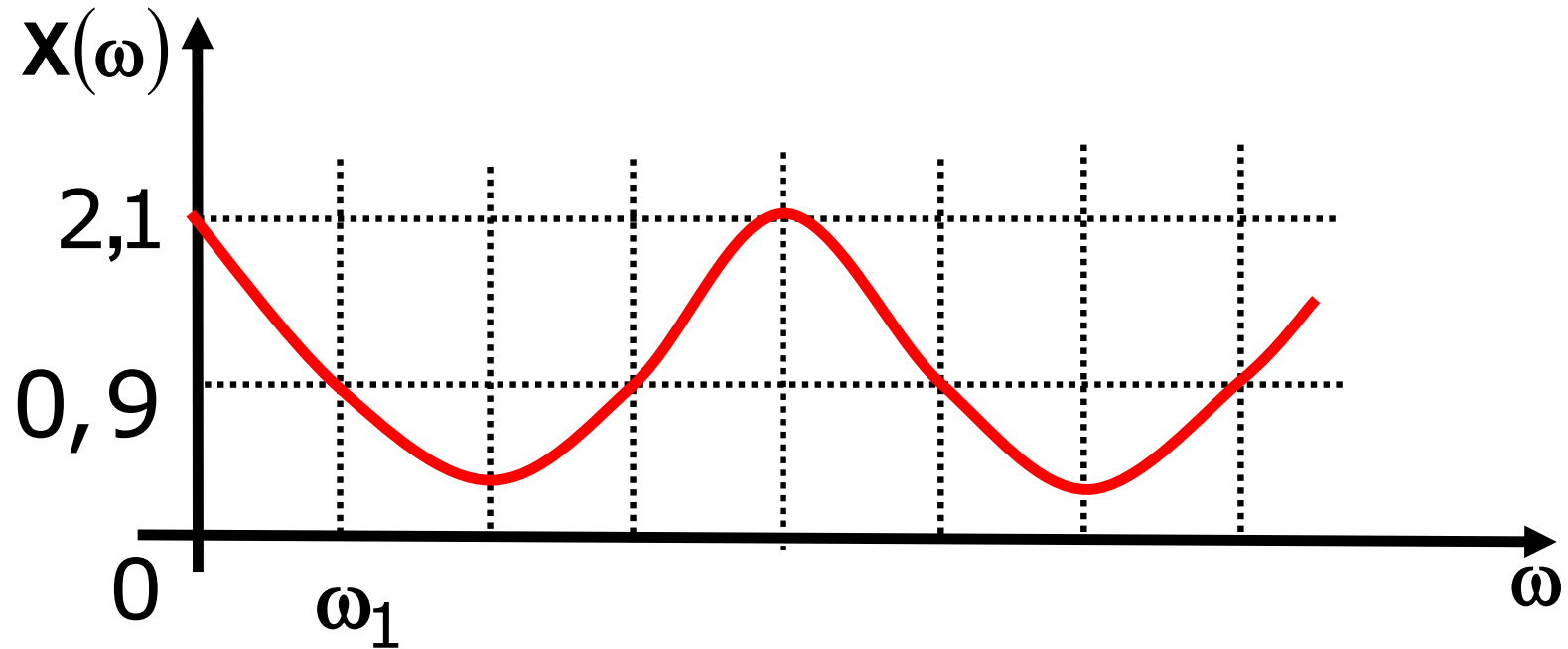


$$X(jk) = \{2,1; -0,9; 0,1; -0,9\}$$

амплитудный спектр периодического сигнала:



Огибающая спектра является спектром
исходного непериодического сигнала



Выполним обратную задачу, т.е. через коэффициенты ДПФ найдем ДС $x(n)$.

$$X(jk) = \{2,1;-0,9;0,1;-0,9\}$$

Т.к. все коэффициенты ДПФ оказались вещественными числами, то и для ОДПФ можно применить все свойства ДПФ, не забыв разделить результат на $N=4$

Найдем отсчеты ДС через ОДПФ:

$n = 0$ (сумма коэффициентов ДПФ)

$$\mathbf{x(0) = \frac{2,1 - 0,9 + 0,1 - 0,9}{4} = 0,1}$$

$n = 1$

$$\mathbf{x(1) = \frac{1}{4} \left(2,1 \mathbf{e^{j0}} - 0,9 \mathbf{e^{j\frac{\pi}{2}}} + 0,1 \mathbf{e^{j\pi}} - 0,9 \mathbf{e^{j\frac{3\pi}{2}}} \right) =}$$

$$\mathbf{= \frac{1}{4} (2,1 - j0,9 - 0,1 + j0,9) = 0,5}$$

$n = 2$ (знакопеременная сумма коэффициентов)

$$x(2) = \frac{2,1 + 0,9 + 0,1 + 0,9}{4} = 1$$

$n = 3$ (согласно свойству ДПФ, данный коэффициент можно записать как комплексно – сопряженное число $x(1T)$)

$$x(3) = x^*(1) = 0,5$$

**Таким образом мы получили
исходный сигнал**

Практическое занятие

Задача 1

Дан дискретный сигнал $x(n)$.

- Построить диаграмму ДС.
- Найти коэффициенты ДПФ
- Построить спектральную характеристику ДС.
- Восстановить сигнал по его коэффициентам ДПФ.

Вариант	$x(n)$	Вариант	$x(n)$
1	$\{4;1;3;2\}$	9	$\{4;5;3;1\}$
2	$\{1;2;4;3\}$	10	$\{5;2;4;8\}$
3	$\{2;9;1;1\}$	11	$\{7;2;1;1\}$
4	$\{3;3;2;1\}$	12	$\{3;9;4;8\}$
5	$\{5;3;2;2\}$	13	$\{4;8;6;2\}$
6	$\{3;2;5;1\}$	14	$\{2;6;7;3\}$
7	$\{2;3;4;1\}$	15	$\{6;3;8;4\}$
8	$\{3;4;2;5\}$		