

Алгоритм Быстрого Преобразования Фурье (БПФ)

Цель: изучить алгоритм быстрого преобразования Фурье

БПФ: это оптимизированный по скорости способ вычисления дискретного преобразования фурье (ДПФ) и обратного ДПФ

$$\mathbf{X}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{x}_n \mathbf{e}^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{X}_k \mathbf{e}^{j \frac{2\pi kn}{N}} \quad (2)$$

Алгоритм расчета

1. Необходимо разделить сумму (1) из N слагаемых на две суммы по $N/2$ слагаемых и вычислить их по отдельности. В дальнейшем разбиение продолжить, пока не останется по два отсчета
2. Необходимо повторно использовать уже вычисленные слагаемые.

Определение:

Величина

$$W_N^k = e^{-j\frac{2\pi k}{N}}$$

называется *поворачивающим*
множителем

Применяют либо "прореживание по времени" (когда в первую сумму попадают слагаемые с четными номерами, а во вторую - с нечетными), либо "прореживание по частоте" (когда в первую сумму попадают первые $N/2$ слагаемых, а во вторую - остальные).

В данном алгоритме используются только последовательности с числом отсчетов

$$N=2^n$$

Пусть дана последовательность $x(n)$

Разобьем ее на две последовательности

четные: $x_{[\text{even}]}n = x_{2n}$ и

нечетные $x_{[\text{odd}]}n = x_{2n+1}$ где $n=0, 1, \dots, N/2-1$

Применим ДПФ к каждой из полученных последовательностей. В результате получим два ДПФ $\{x_{[\text{even}]}\}$ и $\{x_{[\text{odd}]}\}$ по $N/2$ элементов в каждой

В основе алгоритма БПФ лежат следующие формулы:

$$X_{\{N\}k} = X_{\{N/2\}[even]k} + W_N^k X_{\{N/2\}[odd]k} \quad (3)$$

$$X_{\{N\}N/2+k} = X_{\{N/2\}[even]k} - W_N^k X_{\{N/2\}[odd]k} \quad (4)$$

$$k = 0, 1, \dots, N / 2 - 1 \quad (5)$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = W_{2^T N}^{2^T} \quad (6)$$

Пример

Дана последовательность

$x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ выполнить ДПФ с использованием алгоритма БПФ

Решение

Разделим исходную последовательность на четные и нечетные элементы.

$x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7$

$x_0 \ x_2 \ x_4 \ x_6 \mid x_1 \ x_3 \ x_5 \ x_7$

$x_0 \ x_4 \mid x_2 \ x_6 \mid x_1 \ x_5 \mid x_3 \ x_7$

Последовательности из 4-х элементов снова разделяем на четные и нечетные элементы

Запишем в двоичном коде номера элементов исходной последовательности и последовательности полученной в результате перестановки

Исходная последовательность	Битовый номер элемента	Переставленная последовательность	Битовый номер элемента
x_0	000	x_0	000
x_1	001	x_4	100
x_2	010	x_2	010
x_3	011	x_6	110
x_4	100	x_1	001
x_5	101	x_5	101
x_6	110	x_3	011
x_7	111	x_7	111

Видно, что правильную последовательность можно получить записью номера исходной последовательности в обратном порядке.

Для уменьшения количества вычислений определяем поворачивающие множители для так называемой 8 элементной (8-точечной) ДПФ

$$W_8^0 = e^{-j0} = 1$$

$$W_8^1 = e^{-j\frac{2\pi 1}{8}} = 0,707 - j0,707$$

$$W_8^2 = e^{-j\frac{2\pi 2}{8}} = -j$$

$$W_8^3 = e^{-j\frac{2\pi 3}{8}} = -0,707 - j0,707$$

Поворачивающий множитель для двух и четырех точечного ДПФ согласно (6)

$$W_4^0 = W_{2.4}^{2.0} = 1$$

$$W_4^1 = W_8^{2.1} = -j$$

$$W_2^0 = W_4^{2.0} = W_{2.4}^{4.0} = 1$$

Последовательность		Формула	ДПФ ₂	Результат
$x_0 = x_0$	1	$x_0 + W_2^0 x_1$	$X_{\{2\}0} = X_{\{2\text{even}\}0}$	6
$x_1 = x_4$	5	$x_0 - W_2^0 x_1$	$X_{\{2\}1} = X_{\{2\text{even}\}1}$	-4
$x_0 = x_2$	3	$x_0 + W_2^0 x_1$	$X_{\{2\}0} = X_{\{2\text{odd}\}0}$	10
$x_1 = x_6$	7	$x_0 - W_2^0 x_1$	$X_{\{2\}1} = X_{\{2\text{odd}\}1}$	-4
$x_0 = x_1$	2	$x_0 + W_2^0 x_1$	$X_{\{2\}0} = X_{\{2\text{even}\}0}$	8
$x_1 = x_5$	6	$x_0 - W_2^0 x_1$	$X_{\{2\}1} = X_{\{2\text{even}\}1}$	-4
$x_0 = x_3$	4	$x_0 + W_2^0 x_1$	$X_{\{2\}0} = X_{\{2\text{odd}\}0}$	12
$x_1 = x_7$	8	$x_0 - W_2^0 x_1$	$X_{\{2\}1} = X_{\{2\text{odd}\}1}$	-4

ДПФ ₂		Формула	ДПФ ₄	Результат
$X_{\{2\text{even}\}0}$	6	$X_{\{2\text{even}\}0} + W_4^0 X_{\{2\text{odd}\}0}$	$X_{\{4\}0} = X_{\{4\text{even}\}0}$	16
$X_{\{2\text{even}\}1}$	-4	$X_{\{2\text{even}\}1} + W_4^1 X_{\{2\text{odd}\}1}$	$X_{\{4\}1} = X_{\{4\text{even}\}1}$	-4+j4
$X_{\{2\text{odd}\}0}$	10	$X_{\{2\text{even}\}0} - W_4^0 X_{\{2\text{odd}\}0}$	$X_{\{4\}2} = X_{\{4\text{even}\}2}$	-4
$X_{\{2\text{odd}\}1}$	-4	$X_{\{2\text{even}\}1} - W_4^1 X_{\{2\text{odd}\}1}$	$X_{\{4\}3} = X_{\{4\text{even}\}3}$	-4-j4
$X_{\{2\text{even}\}0}$	8	$X_{\{2\text{even}\}0} + W_4^0 X_{\{2\text{odd}\}0}$	$X_{\{4\}0} = X_{\{4\text{odd}\}0}$	20
$X_{\{2\text{even}\}1}$	-4	$X_{\{2\text{even}\}1} + W_4^1 X_{\{2\text{odd}\}1}$	$X_{\{4\}1} = X_{\{4\text{odd}\}1}$	-4+j4
$X_{\{2\text{odd}\}0}$	12	$X_{\{2\text{even}\}0} - W_4^0 X_{\{2\text{odd}\}0}$	$X_{\{4\}2} = X_{\{4\text{odd}\}2}$	-4
$X_{\{2\text{odd}\}1}$	-4	$X_{\{2\text{even}\}1} - W_4^1 X_{\{2\text{odd}\}1}$	$X_{\{4\}3} = X_{\{4\text{odd}\}3}$	-4-j4

ДПФ ₄		Формула	ДПФ ₈	Результат
X _{{4even}0}	16	X _{{4even}0} +W ⁰ ₈ X _{{4odd}0}	X _{{8}0}	36
X _{{4even}1}	-4+j4	X _{{4even}1} +W ¹ ₈ X _{{4odd}1}	X _{{8}1}	-4+j9,656
X _{{4even}2}	-4	X _{{4even}2} +W ² ₈ X _{{4odd}2}	X _{{8}2}	-4+j4
X _{{4even}3}	-4-j4	X _{{4even}3} +W ³ ₈ X _{{4odd}3}	X _{{8}3}	-4+j1,656
X _{{4odd}0}	20	X _{{4even}0} -W ⁰ ₈ X _{{4odd}0}	X _{{8}4}	-4
X _{{4odd}1}	-4+j4	X _{{4even}1} - W ¹ ₈ X _{{4odd}1}	X _{{8}5}	-4-j1,656
X _{{4odd}2}	-4	X _{{4even}2} -W ² ₈ X _{{4odd}2}	X _{{8}6}	-4-j4
X _{{4odd}3}	-4-j4	X _{{4even}3} - W ¹ ₈ X _{{4odd}3}	X _{{8}7}	-4-j9,656

Из полученного результата можно выделить модуль и фазу. В результате получим

ДПФ ₈	Результат	Модуль	Фаза
$X_{\{8\}0}$	36	36	0
$X_{\{8\}1}$	$-4+j9,656$	10,45	112,5
$X_{\{8\}2}$	$-4+j4$	5,66	135
$X_{\{8\}3}$	$-4+j1,656$	4,33	157,5
$X_{\{8\}4}$	-4	4	180
$X_{\{8\}5}$	$-4-j1,656$	4,33	-157,5
$X_{\{8\}6}$	$-4-j4$	5,66	-135
$X_{\{8\}7}$	$-4-j9,656$	10,45	-112,5

Алгоритм БПФ можно использовать для обратного ДПФ. Для этого необходимо изменить знак поворачивающего множителя

Задание:

Для заданной импульсной характеристики
определить прямое ДПФ применяя алгоритм БПФ
с прореживанием по времени

Вар .	Импульсная характеристика $h(n)$	Вар	Импульсная характеристика $h(n)$
1	{1, 2, -1, 0, 4, 2, -3, 5}	9	{-1, -2, 3, 4, 1, -4, 2, 1}
2	{0, -1, -4, 3, -3, 2, -1, 5}	10	{3, 0, 1, -1, 3, -1, 4, 2}
3	{3, -2, 0, 3, 4, 1, 3, 6}	11	{0, 1, 2, 0, -3, 2, 4, -6}
4	{4, 0, -1, 0, 2, -1, -5, 5}	12	{2, 4, -3, 5, 1, 4, 0, -2}
5	{0, 2, -3, 6, -4, 1, 2, -1}	13	{4, 3, -1, 2, 5, -2, -3, 1}
6	{-2, 3, 1, -1, 5, -1, 4, 1}	14	{3, 1, -4, 8, 7, -2, 3, 5}
7	{4, 3, 2, -1, 0, 1, 2, -1}	15	{1, 5, 3, -3, -4, 1, 2, 5}
8	{2, 4, 6, 3, -1, 4, 2, -2}		