

Методы цифровой фильтрации

Линейная свертка

Круговая свертка

Секционирование

Линейная свертка

Цель: научиться выполнять линейную свертку

Пример: даны входной сигнал $x(n)$ и импульсная характеристика $h(n)$

$$x(n) = \{1; 1; 0; 0\}$$

$$h(n) = \{1; 0,5; 1; 0\}$$

Выполнить: линейную свертку

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k) \cdot h(n-k)$$

$$\begin{aligned}x(n) &= \{1; 1; 0; 0\} \\h(n) &= \{1; 0,5; 1; 0\}\end{aligned}$$

$$n = 0$$

$$y(0) = \sum_{k=0}^0 x(k) \cdot h(0-k) = x(0) \cdot h(0) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$n = 1$$

$$y(1) = \sum_{k=0}^1 x(k) \cdot h(1-k) =$$

$$= x(0) \cdot h(1) + x(1) \cdot h(0) = 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1 = 1,5$$

$$x(n) = \{1; 1; 0; 0\}$$

$$h(n) = \{1; 0,5; 1; 0\}$$

$$n = 2$$

$$y(2) = \sum_{k=0}^2 x(k) \cdot h(2-k) = x(0) \cdot h(2) + x(1) \cdot h(1) +$$

$$+ x(2) \cdot h(0) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0,5 + 0 \cdot 1 = 1,5$$

и т.д.

Вычисление по формуле свертки можно представить как последовательное вычисление сумм локальных произведений двух последовательностей, при этом одна последовательность фиксирована, а другая отображается зеркально и скользит слева направо.

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 0,5 \ 1 \\ \hline y(0) = 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 0,5 \ 1 \\ \hline y(1) = 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1 = 1,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & 1 \end{array}$$

$$y(2) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0,5 + 0 \cdot 1 = 1,5$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & 1 \end{array}$$

$$y(3) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0,5 + 0 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & 1 \end{array}$$

$$y(4) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0,5 = 0$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 0,5 & 1 \\
 \hline
 y(5) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 1 & 0,5 & 1 \\
 \hline
 y(6) = 0 \cdot 0 = 0
 \end{array}$$

$$y(n) = \{1; \ 1.5; \ 1.5; \ 1; \ 0; \ 0; \ 0\}$$

Круговая свертка.

Цель: научиться находить сигнал на выходе дискретной цепи $y(n)$

Мы знаем, что линейная свертка используется для нахождения сигнала на выходе ДЦ при непериодическом сигнале $x(n)$

$$y(m) = \sum_{n=0}^m x(n) \cdot h(m-n)$$

Длина выходной последовательности $y(n)$ определяется:

$$N_y = N_x + N_h - 1$$

где N_x – число отсчетов $x(n)$

N_h – число отсчетов $h(n)$

Круговая свертка: применяется для вычисления реакции ДЦ при периодическом воздействии $x(n)$

$$y(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot h(m - n)$$

$$y(m) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot x(m - n)$$

где $N = N_y = N_x = N_h$

Если $N_h < N$, то импульсную характеристику $h(n)$ необходимо дополнить до длины N **справа** нулями

Затем последовательность $h(n)$ надо сделать периодической

Полагаем, что наш периодический сигнал длится бесконечно долго и отсчеты с «отрицательными индексами» не равны нулю

Пример: Найти сигнал на выходе цепи.

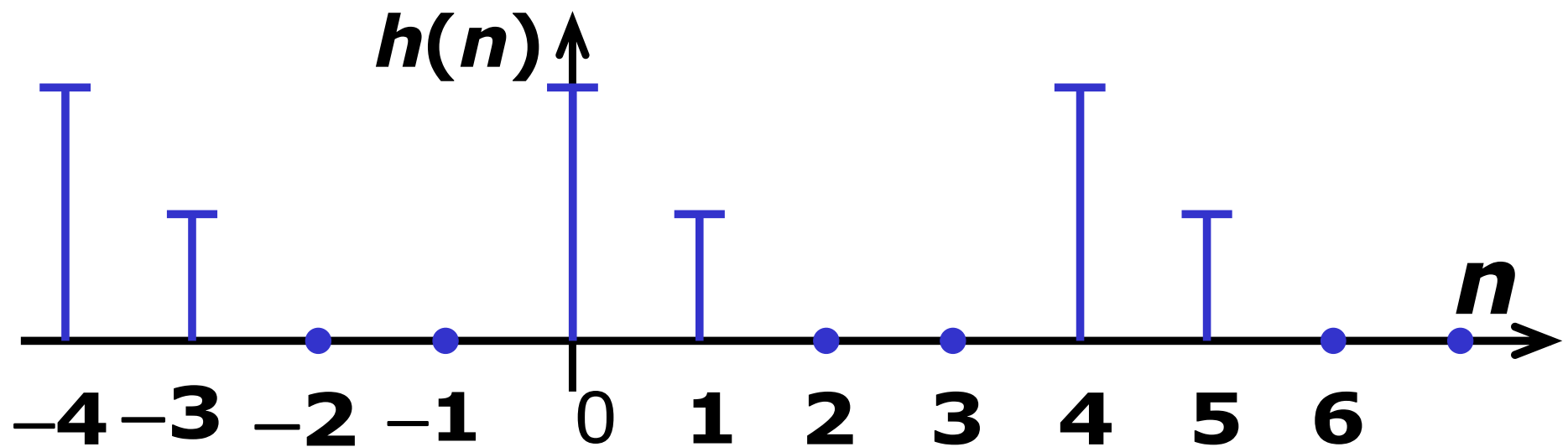
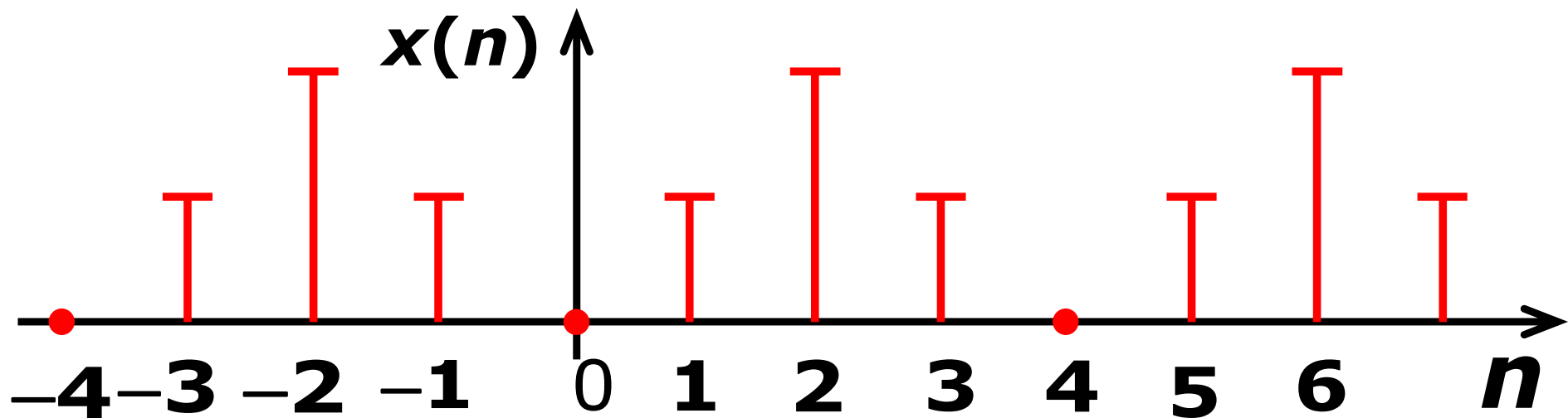
$$x(n) = \{0; 1; 2; 1; 0; 1; 2; 1; 0 \dots\}$$

$$h(n) = \{0,2; 0,1\}$$

Входной сигнал $x(n)$ является периодической функцией, число отсчетов на периоде $N=4$

Удлиним импульсную характеристику $h(n)$ и сделаем ее периодической

$$h(n) = \{0,2; 0,1; 0; 0; 0,2; 0,1; 0; 0 \dots\}$$



$$m=0$$

$$y(0) = x(0)h(0) + x(1)h(-1) + x(2)h(-2) + \\ + x(3)h(-3) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0,1 = 0,1$$

$$m=1$$

$$y(1) = x(0)h(1) + x(1)h(0) + x(2)h(-1) + \\ + x(3)h(-2) = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0,2$$

$$m = 2$$

$$y(2) = x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) + \\ + x(3)h(-1) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0 = 0,5$$

$$m = 3$$

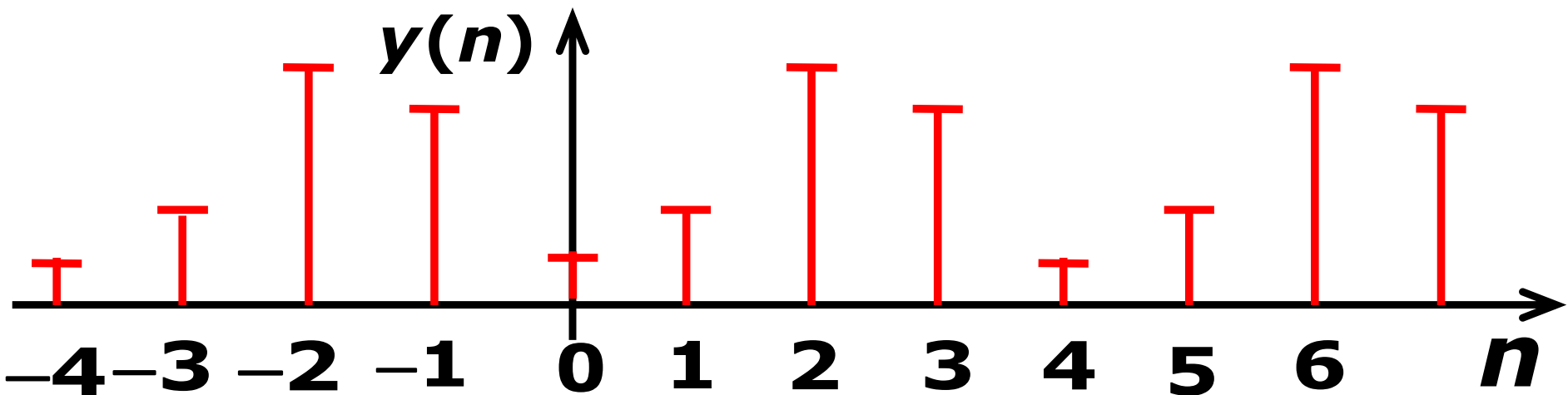
$$y(3) = x(0)h(3) + x(1)h(2) + x(2)h(1) + \\ + x(3)h(0) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 = 0,4$$

Выходной сигнал также является периодическим, в этом можно убедиться, продолжив вычисления

$$y(4) = x(0)h(4) + x(1)h(3) + x(2)h(2) +$$

$$+ x(3)h(1) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0,1 = 0,1$$

$$y(n) = \{ 0,1; 0,2; 0,5; 0,4; 0,1; 0,2; 0,5; 0,4... \}$$



Процедуру круговой свертки можно применить и для определения реакции цепи на непериодический сигнал.

Алгоритм расчета:

1. Определить длину выходной последовательности

$$N_y = N_x + N_h - 1 = N$$

2. Дополнить последовательности $x(nT)$ и $h(nT)$ до длины N **справа** нулями

3. Сделать вновь сформированные последовательности $x(n)$ и $h(n)$ периодически повторяющимися
4. Найти сигнал на выходе ДЦ по формуле круговой свертки, причем расчет нужно проводить только для одного периода, т.к. последующие отсчеты будут ложными

Пример:

Найти сигнал на выходе цепи, если известен входной сигнал и импульсная характеристика цепи

$$\mathbf{x}(n) = \{ \mathbf{1}; \mathbf{2} \}$$

$$\mathbf{h}(n) = \{ \mathbf{2}; \mathbf{0,5} \}$$

Определим длину выходной последовательности

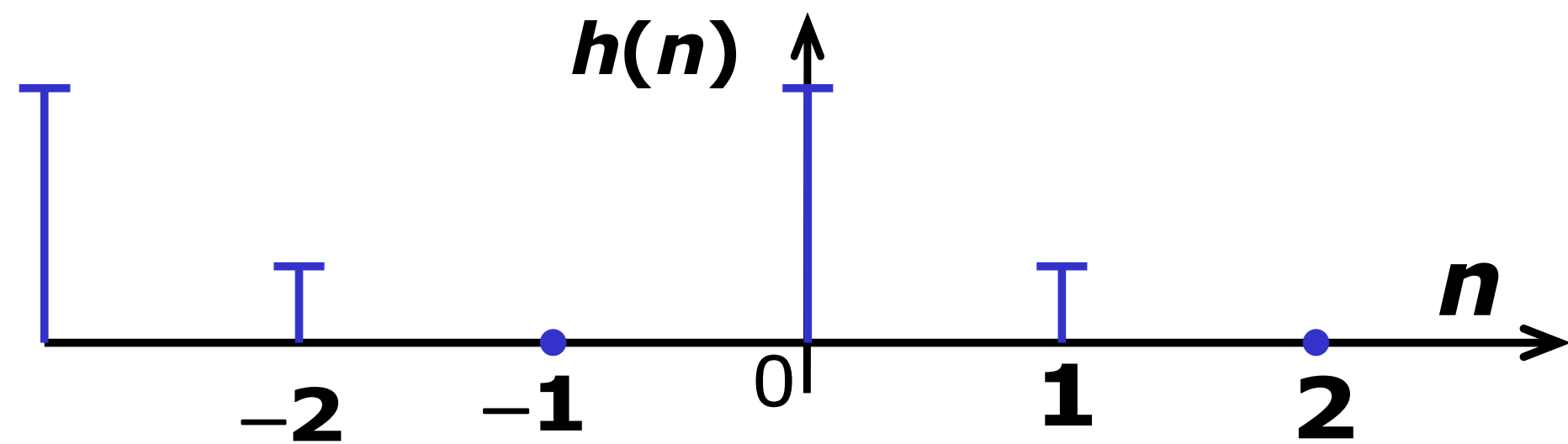
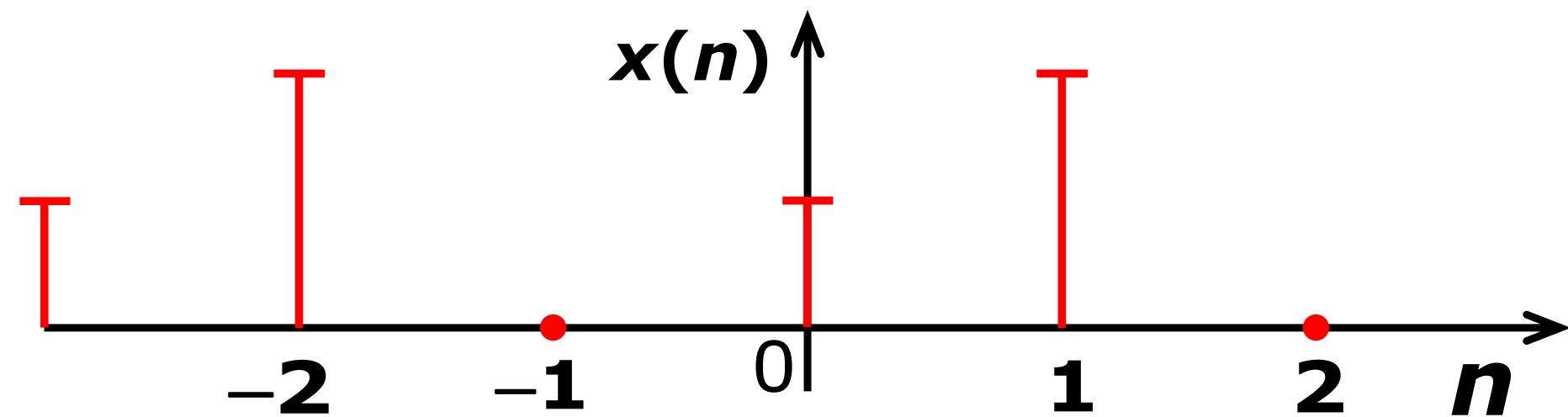
$$\mathbf{N}_y = \mathbf{N}_x + \mathbf{N}_h - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$$

Удлиняем $x(n)$ и $h(n)$ нулями справа до длины N_y

$$\mathbf{x(n) = \{ 1; 2; 0 \}}$$

$$\mathbf{h(n) = \{ 2; 0,5; 0 \}}$$

и делаем $x(n)$ и $h(n)$ периодическими последовательностями:



$$m=0$$

$$\begin{aligned} y(0) &= x(0)h(0) + x(1)h(-1) + x(2)h(-2) = \\ &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0.5 = 2 \end{aligned}$$

$$m=1$$

$$\begin{aligned} y(1) &= x(0)h(1) + x(1)h(0) + x(2)h(-1) = \\ &= 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 4.5 \end{aligned}$$

$$m=2$$

$$\begin{aligned} y(2) &= x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) = \\ &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0.5 + 0 \cdot 2 = 1 \end{aligned}$$

ответ: $y(n) = \{ 2; 4.5; 1 \}$

Секционирование

Цель: научиться обрабатывать «длинные» последовательности.

Применяется, когда одна из последовательностей значительно длиннее другой, или когда обработку сигнала нужно вести в течение его поступления. Сущность метода: длинная последовательность разбивается на секции, длина которых близка к длине второй последовательности. Секции обрабатываются поочередно и из результатов их обработки формируется выходной сигнал.

1. Перекрытие с суммированием

- одна из последовательностей разбивается на секции произвольной длины. Реакция на каждую секцию рассчитывается путем свертки ее со второй последовательностью
- т.к. длина $y(n)$ больше длины $x(n)$ на точке соединения секции перекрываются на интервале $N_2 - 1$ отсчета. Поэтому на интервале перекрытия необходимо осуществить суммирование смежных секций

Пример:

Найти сигнал на выходе цепи, если известен входной сигнал и импульсная характеристика цепи

$$x(n) = \{1; 2; 4; 3; 2; 5\}$$

$$h(n) = \{2; 0,5\}$$

Разбиваем входную последовательность на секции:

$$\mathbf{x}'(\mathbf{n}) = \{1; 2; 4\}; \quad \mathbf{x}''(\mathbf{n}) = \{3; 2; 5\}$$

С помощью круговой свертки получим выходные секции:

- для этого «нарастим» полученные секции и импульсную характеристику нулями **справа** до длины выходной секции:

$$\mathbf{N}_y = \mathbf{N}_x + \mathbf{N}_h - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$$

- сделаем последовательности периодическими

$$\mathbf{x}'(\mathbf{n}) = \{1; 2; 4; 0; 1; 2; 4; 0...\}$$

$$\mathbf{x}''(\mathbf{n}) = \{3; 2; 5; 0; 3; 2; 5; 0...\}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{n}) = \{2; 0,5; 0; 0; 2; 0,5; 0; 0...\}$$

Используя формулу круговой свертки (см. практику №7), найдем отсчеты выходных секций:

$$\mathbf{y}'(\mathbf{n}) = \{2; 4.5; 9; 2\}$$

$$\mathbf{y}''(\mathbf{n}) = \{6; 5.5; 11; 2.5\}$$

Полученные секции перекрываются на интервале $N_h - 1 = 2 - 1 = 1$ отсчет, и на интервале перекрытия отсчеты суммируются:

$$\begin{array}{r} y'(n) = \{2; 4.5; 9; 2\} \\ + \quad y''(n) = \{6; 5.5; 11; 2.5\} \\ \hline y(n) = \{2; 4.5; 9; 8; 5.5; 11; 2.5\} \end{array}$$

2. Перекрывтие с накоплением

Данный метод позволяет получать сразу готовые секции выходной последовательности $y(n)$ и потом просто «пристыковывать» их одна к другой.

- $x(n)$ удлиняется **справа** $N_h - 1$ нулями
- удлиненная $x(n)$ разбивается на секции

$$N_c \cong N_h$$

- каждая из секций удлиняется **слева** значениями $N_h - 1$ отсчетов предыдущих секций

- в результате круговой свертки этих последовательностей в выходных секциях $N_h - 1$ первые отсчеты будут **ЛОЖНЫМИ**.

Пример:

Найти сигнал на выходе цепи, если известен входной сигнал и импульсная характеристика цепи

$$x(n) = \{1; 2; 4; 3; 2; 5\}$$

$$h(n) = \{2; 0,5\}$$

Наращиваем входную
последовательность $N_h - 1 = 2 - 1 = 1$
нулями **справа:**

$$\mathbf{x(n)} = \{1; 2; 4; 3; 2; 5; 0\}$$

Разбиваем полученную
последовательность на секции:

$$\mathbf{x'(n)} = \{1; 2\}$$

$$\mathbf{x''(n)} = \{4; 3\}$$

$$\mathbf{x'''(n)} = \{2; 5; 0\}$$

Удлиняем полученные
последовательности $\mathbf{N}_h - 1$ значениями
предыдущих секций:

$$\mathbf{x}'(n) = \{0; 1; 2\}$$

$$\mathbf{x}''(n) = \{2; 4; 3\}$$

$$\mathbf{x}'''(n) = \{3; 2; 5; 0\}$$

Сворачиваем данные секции с
импульсной характеристикой $h(n)$ с
помощью круговой свертки:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}'(\mathbf{n}) &= \{0; 1; 2\} \\ \mathbf{h}(\mathbf{n}) &= \{2; 0,5; 0\} \end{aligned} \right\} \mathbf{y}'(\mathbf{n}) = \{1; 2; 4.5\}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}''(\mathbf{n}) &= \{2; 4; 3\} \\ \mathbf{h}(\mathbf{n}) &= \{2; 0,5; 0\} \end{aligned} \right\} \mathbf{y}''(\mathbf{n}) = \{5.5; 9; 8\}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}'''(\mathbf{n}) &= \{3; 2; 5; 0\} \\ \mathbf{h}(\mathbf{n}) &= \{2; 0,5; 0; 0\} \end{aligned} \right\} \mathbf{y}'''(\mathbf{n}) = \{6; 5.5; 11; 2.5\}$$

В полученных выходных секциях первые отсчеты являются ложными:

$$y'(n) = \{ \cancel{1}; 2; 4.5 \}$$

$$y''(n) = \{ \cancel{5.5}; 9; 8 \}$$

$$y'''(n) = \{ \cancel{6}; 5.5; 11; 2.5 \}$$

полученные секции просто
«пристыковываются» друг к другу:

$$y(n) = \{ 2; 4.5; 9; 8; 5.5; 11; 2.5 \}$$

Задача 1

Задание

Заданы последовательности $x(n)$, $h(n)$.

Выполнить линейную свертку.

Вариант	$x1(n)$	$x2(n)$
1	{ 1;2;3;4 }	{ 4;3;5;2 }
2	{ 1;2;3;4 }	{ 3;2;2;1 }
3	{ 1;2;3;4 }	{ 2;2;5;1 }
4	{ 0;1;2;3 }	{ 3;7;2;1 }
5	{ 0;1;2;3 }	{ 2;1;1;6 }

Вариант	$x_1(n)$	$x_2(n)$
6	{2;3;0;1}	{4;3;9;1}
7	{0;4;2;3}	{2;2;1;8}
8	{3;4;2;2}	{4;2;3;5}
9	{0;2;3;4}	{6;4;3;2}
10	{2;1;4;2}	{6;3;2;1}
11	{5;6;7;8}	{2;4;3;1}
12	{5;6;7;8}	{5;2;0;4}
13	{5;6;7;8}	{7;9;1;1}
14	{4;0;3;2}	{9;1;1;5}
15	{4;0;3;2}	{8;0;4;2}

Задача 2

Дан сигнал $u(t) = U_m \cos(2\pi \cdot 10^4 t)$

Дискретизировать его с частотой $f_d = 60 \text{ кГц}$,
записать числовой массив значений ДС и,
применяя круговую свертку, получить сигнал
на выходе дискретной цепи с импульсной
характеристикой $h(n)$

Вариант	$U_m, \text{ В}$	$h(n)$
1	1,2	$\{1; 0,5; 0,2\}$
2	1,4	$\{0,9; 0,7; 0,1\}$
3	1,6	$\{0,2; 0,7; 0,1\}$
4	1,8	$\{0,8; 0,6; 0,3\}$
5	2,0	$\{1; 0,3; 0,1\}$

Вариант	U_m, B	$h(n)$
6	2,2	$\{0,5; 0,3; 0,1\}$
7	2,4	$\{0,6; 0,4; 0,2\}$
8	2,6	$\{0,8; 0,2; 0,1\}$
9	2,8	$\{1; 0,4; 0,3\}$
10	3,0	$\{0,7; 0,6; 0,2\}$
11	3,2	$\{0,9; 0,2; 0,2\}$
12	3,4	$\{0,7; 0,4; 0,1\}$
13	3,6	$\{0,1; 0,5; 0,3\}$
14	3,8	$\{0,5; 0,9; 0,2\}$
15	4,0	$\{0,8; 0,4; 0,1\}$

Задача 3

Дан дискретный непериодический сигнал $x(n)$ и импульсная характеристика цепи $h(n)$. Определить сигнал на выходе цепи с помощью круговой свертки

Вариант	$x(n)$	$h(n)$
1	{ 3; 1; 2; 4; 3 }	{ 1; 2; 3 }
2	{ 1; 2; 3; 4; 2 }	{ 1; 2; 3 }
3	{ 1; 3; 7; 1; 4; }	{ 1; 2; 3 }
4	{ 2; 1; 4; 2; 3; }	{ 1; 2; 3 }
5	{ 3; 2; 5; 3; 4; }	{ 1; 2; 3 }

Вариант	$x(n)$	$h(n)$
6	{ 9; 2; 4; 1; 5}	{ 1; 2; 3}
7	{ 2; 0; 7; 8; 3}	{ 1; 2; 3}
8	{ 8; 4; 1; 3; 6}	{ 1; 2; 3}
9	{ 1; 4; 5; 3; 9}	{ 1; 2; 3}
10	{ 7; 5; 6; 7; 1}	{ 1; 2; 3}
11	{ 1; 2; 2; 3; 4}	{ 1; 2; 3}
12	{ 3; 1; 1; 2; 4}	{ 1; 2; 3}
13	{ 3; 2; 1; 0; 1}	{ 1; 2; 3}
14	{ 2; 4; 2; 3; 1}	{ 1; 2; 3}
15	{ 1; 3; 5; 3; 2}	{ 1; 2; 3}

Задача 4

Дан дискретный сигнал $x(n)$ и импульсная характеристика цепи $h(n)$

Выполнить секционированные свертки

- перекрытие с суммированием
- перекрытие с накоплением

Вариант	$x(n)$	$h(n)$
1	{ 9; 2; 4; 1; 5; 5; 1}	{ 1; 2; 3}
2	{ 2; 0; 7; 8; 3; 5; 2}	{ 1; 2; 3}
3	{ 8; 4; 1; 3; 6; 5; 3}	{ 1; 2; 3}
4	{ 1; 4; 5; 3; 9; 5; 6}	{ 1; 2; 3}
5	{ 7; 5; 6; 7; 1; 2; 1}	{ 1; 2; 3}

Вариант	$x(n)$	$h(n)$
6	{ 1; 2; 2; 3; 4; 5; 1}	{ 1; 2; 3}
7	{ 3; 1; 1; 2; 4; 7; 3}	{ 1; 2; 3}
8	{ 3; 2; 1; 0; 1; 2; 3}	{ 1; 2; 3}
9	{ 2; 4; 2; 3; 1; 0; 2}	{ 1; 2; 3}
10	{ 1; 3; 5; 3; 2; 2; 1}	{ 1; 2; 3}
11	{ 3; 1; 2; 4; 3; 3; 2}	{ 1; 2; 3}
12	{ 1; 2; 3; 4; 2; 1; 2}	{ 1; 2; 3}
13	{ 1; 3; 7; 1; 4; 2; 3}	{ 1; 2; 3}
14	{ 2; 1; 4; 2; 3; 4; 4}	{ 1; 2; 3}
15	{ 3; 2; 5; 3; 4; 5; 7}	{ 1; 2; 3}