



В. Г. Артюх Д. А. Китаева

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

В. Г. Артюх Д. А. Китаева

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Физико-механический институт

Высшая школа механики и процессов управления

В. Г. Артюх Д. А. Китаева

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие



ПОЛИТЕХ-ПРЕСС

Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Санкт-Петербург

2022

ББК 30.121я73
А86

Рецензент – доктор технических наук,
профессор кафедры механики Санкт-Петербургского горного университета
М. Ю. Насонов

Артюх В. Г. Сопротивление материалов : учеб. пособие / В. Г. Артюх, Д. А. Китаева. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022. – 187 с.

Учебное пособие содержит 14 заданий в 30 вариантах по основным темам курса дисциплины «Сопротивление материалов». Приведены условия расчетно-графических работ, методические указания по их выполнению, примеры решения задач, таблицы и рисунки вариантов задач.

Расчетно-графические работы по сопротивлению материалов преследуют цель выработать у студентов навыки самостоятельного решения задач по прочности, жесткости и устойчивости деталей машин и элементов инженерных конструкций и сооружений.

Пособие предназначено для студентов очной, вечерней и заочной форм обучения.

Печатается по решению
Совета по издательской деятельности Ученого совета
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

ISBN 978-5-7422-7895-5

© Артюх В. Г., Китаева Д. А., 2022
© Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого, 2022

Содержание

Общие методические указания	4
Содержание разделов дисциплины	5
Задание № 1. Растяжение-сжатие	8
Задача 1.1. Расчет ступенчатого бруса	8
Задача 1.2. Расчет статически неопределимой системы	18
Задача 1.3. Расчет сварного соединения	31
Задание № 2. Геометрические характеристики плоских сечений.	
Кручение	43
Задача 2.1. Определение геометрических характеристик несимметричного составного сечения	43
Задача 2.2. Кручение круглого вала	55
Задание № 3. Прямой поперечный изгиб	69
Задача 3.1. Расчет консольной балки на прочность и жесткость	69
Задача 3.2. Расчет двухопорной балки на прочность и жесткость	84
Задача 3.3. Построение эпюр N , Q и M для рам	100
Задание № 4. Статически неопределимые системы при изгибе	110
Задача 4.1. Расчет статически неопределимой балки	110
Задача 4.2. Расчет статически неопределимой рамы	133
Задание № 5. Сложное сопротивление	142
Задача 5.1. Внецентренное сжатие	142
Задача 5.2. Совместное действие кручения и изгиба	152
Задание № 6. Устойчивость. Удар	162
Задача 6.1. Расчет центрально сжатых стержней на устойчивость	162
Задача 6.2. Расчет балки при ударной нагрузке	174
Литература	186

Общие методические указания

Цели освоения дисциплины «Сопротивление материалов»:

- формирование у студентов знаний теоретических основ современных методов расчетов на прочность, жесткость и устойчивость;
- овладение практическими навыками в области расчета элементов конструкций, работающих при различных видах нагружения.

Для достижения поставленных целей в рамках дисциплины решаются следующие **задачи**:

- формирование у студентов знаний теоретических основ сопротивления материалов, основных понятий, правил и последовательности расчетов элементов конструкций;
- формирование умений проводить расчеты на прочность и жесткость элементов конструкций при статических и динамических нагрузках;
- формирование навыков применения простых инженерных методов расчета типовых элементов конструкций;
- приобретение знаний, необходимых для изучения последующих дисциплин.

Для освоения учебного материала дисциплины «Сопротивление материалов» студент должен обладать базовыми знаниями, умениями и навыками, сформированными в ходе изучения предшествующих дисциплин: «Математика», «Физика», «Теоретическая механика».

Содержание разделов дисциплины

Тема 1. Основные понятия, определения, допущения и принципы

Общие понятия и основные определения. Гипотезы и допущения, принятые в сопротивлении материалов. Реальный объект и расчетная схема. Внешние усилия. Внутренние силовые факторы. Метод сечений. Нормальные и касательные напряжения. Виды деформаций и деформирования.

Тема 2. Растяжение-сжатие

Определение внутренних силовых факторов, напряжений, продольных и поперечных деформаций.

Связь напряжений и деформаций. Механические характеристики конструкционных материалов.

Расчеты на прочность и жесткость при растяжении и сжатии. Коэффициент запаса прочности. Расчет по допускаемым напряжениям. Понятие о статически неопределимых системах. Температурные и монтажные напряжения. Расчет статически неопределимых систем.

Тема 3. Напряженно-деформированное состояние

Понятие о напряженном состоянии. Тензор напряжений и его компоненты. Закон парности касательных напряжений. Главные площадки и главные напряжения. Линейное, плоское и объемное напряженное состояние. Определение напряжений при линейном, плоском и объемном напряженных состояниях. Понятие о тензоре деформаций, главные деформации. Обобщенный закон Гука для изотропного тела. Объемная деформация при трехосном напряженном состоянии. Потенциальная энергия деформации. Понятие о теориях прочности. Гипотеза наибольших нормальных напряжений. Гипотеза наибольших линейных деформаций. Гипотеза наибольших касательных напряжений. Энергетическая теория прочности. Теория прочности Мора. Расчеты по классическим теориям прочности.

Тема 4. Сдвиг, смятие

Элементы конструкций, работающие на сдвиг. Определение внутренних силовых факторов, напряжений и деформаций при сдвиге. Понятие о чистом сдвиге. Закон Гука для сдвига. Смятие. Условие отсутствия смятия контактирующих поверхностей. Расчеты на прочность.

Тема 5. Геометрические характеристики плоских сечений

Статические моменты площади. Использование статических моментов для определения центра тяжести сечения. Осевые, центробежный, полярный моменты инерции. Моменты сопротивления, радиусы инерции. Моменты инерции простых сечений. Зависимости между моментами инерции относительно осей, повернутых друг к другу на некоторый угол. Определение положения главных осей и вычисление главных моментов инерции сечения.

Тема 6. Кручение

Внутренние силовые факторы при кручении стержня с круглым поперечным сечением. Деформации, напряжения, углы закручивания. Условия прочности и жесткости при кручении. Расчет на прочность и жесткость вала круглого поперечного сечения.

Тема 7. Прямой поперечный изгиб

Нагрузки, вызывающие плоский изгиб. Внутренние силовые факторы при изгибе. Дифференциальные зависимости внутренних сил. Правила проверки эпюр внутренних сил при изгибе. Расчеты на прочность по нормальным и касательным напряжениям. Дифференциальное уравнение упругой линии и его интегрирование. Определение линейных и угловых перемещений для простых случаев напряжения статически определимых балок. Потенциальная энергия деформации при изгибе. Теорема о взаимности работ. Интеграл Мора и правило Верещагина. Расчет балок на жесткость. Простейшие статически неопределимые балки.

Тема 8. Сложное сопротивление

Косой изгиб. Определение внутренних силовых факторов, напряжений, положение нейтральной линии при косом изгибе. Деформация при косом изгибе. Изгиб с растяжением. Внецентренное растяжение или сжатие. Определение внутренних сил, напряжений при внецентренном растяжении. Уравнение нейтральной линии при внецентренном растяжении. Ядро сечения. Определение внутренних силовых факторов и напряжений при кручении с изгибом. Главные напряжения, напряженное состояние и расчеты на прочность при кручении с изгибом.

Тема 9. Устойчивость сжатых стержней

Основные понятия. Задача Эйлера. Условия закрепления концов стержня. Критические напряжения. Формула Ясинского. Расчет на устойчивость стержня при упругих и пластических деформациях. Продольно-поперечный изгиб.

Тема 10. Динамическое действие сил. Упругие колебания

Общие сведения. Силы инерции. Расчет элементов конструкций, движущихся с ускорением. Удар. Динамический коэффициент при ударе. Упругие колебания с одной степенью свободы. Свободные и вынужденные колебания. Резонанс. Коэффициент нарастания колебаний. Влияние сил сопротивления. Колебания систем со многими степенями свободы.

Тема 11. Усталость материалов

Явление усталости. Основные характеристики цикла напряжений. Предел выносливости. Влияние различных факторов на предел выносливости материала. Определение запаса усталостной прочности. Расчеты на прочность при повторно-переменных напряжениях.

Задание № 1. Растяжение-сжатие

Задача 1.1. Расчет ступенчатого бруса

Исходные данные

Для заданного ступенчатого бруса построить эпюры нормальных сил и напряжений и определить его удлинение. Определить запас прочности бруса при $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$ (принять $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$).

Схемы к задаче 1.1

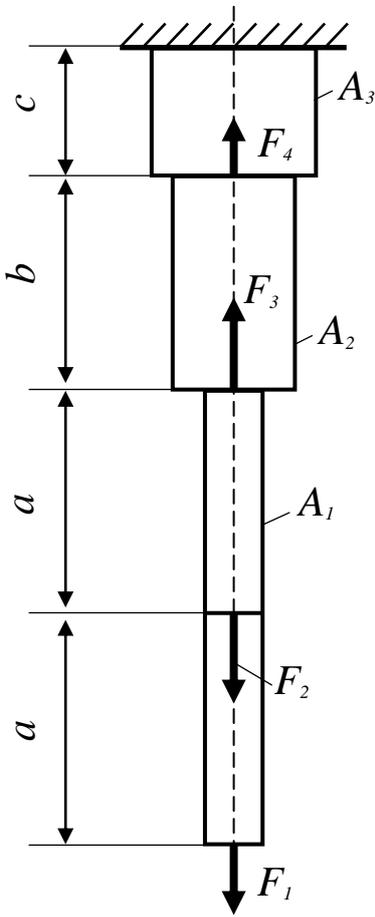


Рис. 1.1.1

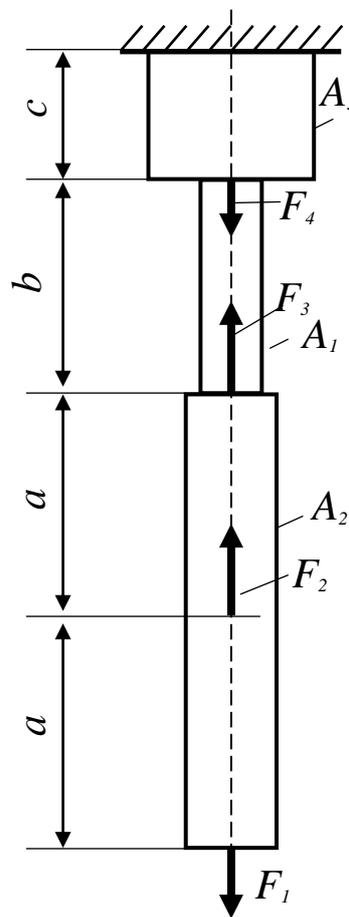


Рис. 1.1.2

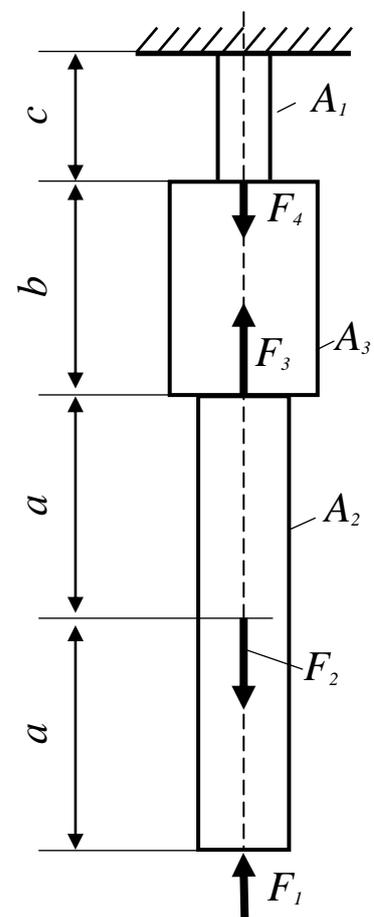


Рис. 1.1.3

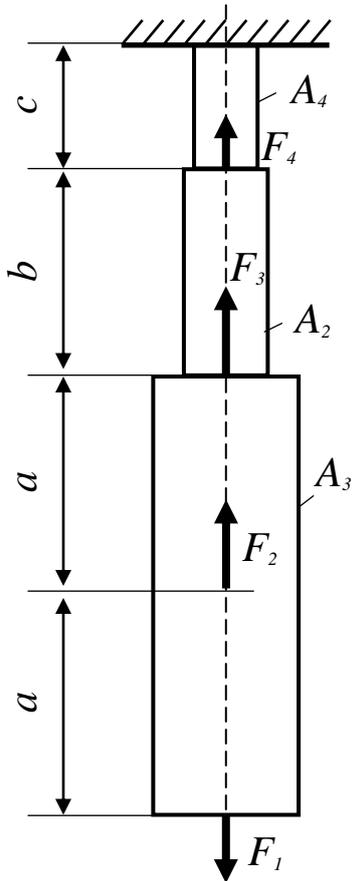


Рис. 1.1.4

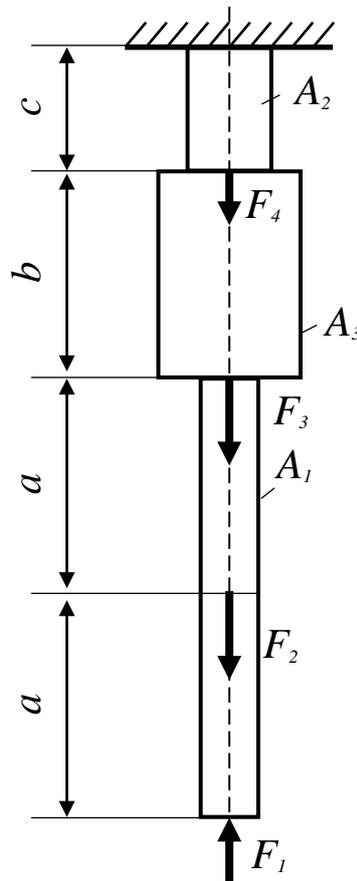


Рис. 1.1.5

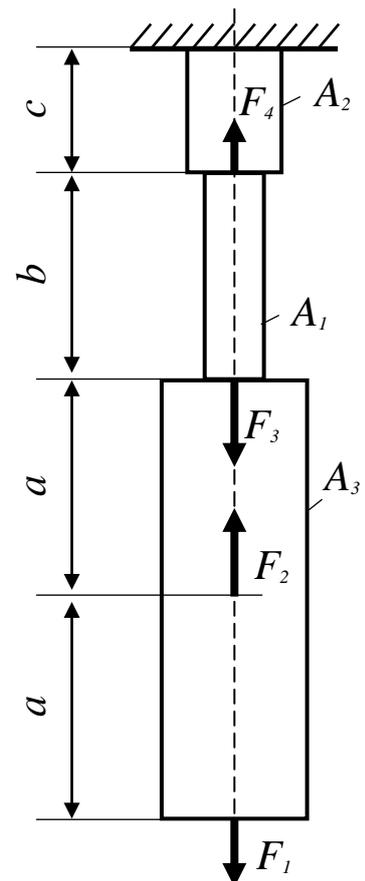


Рис. 1.1.6

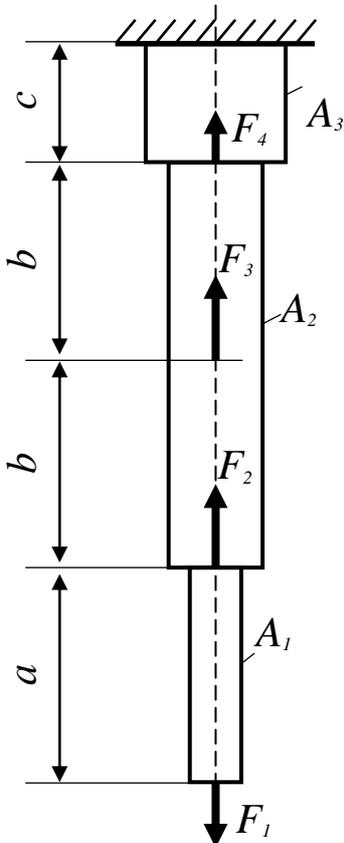


Рис. 1.1.7

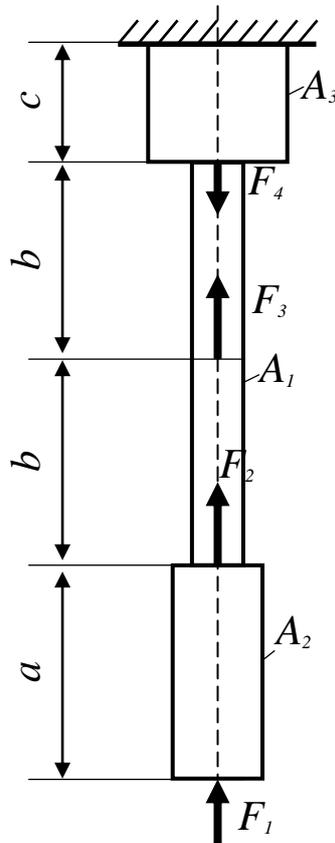


Рис. 1.1.8

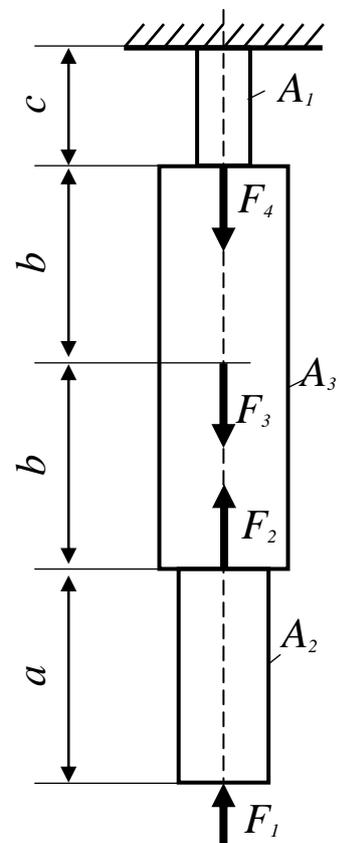


Рис. 1.1.9

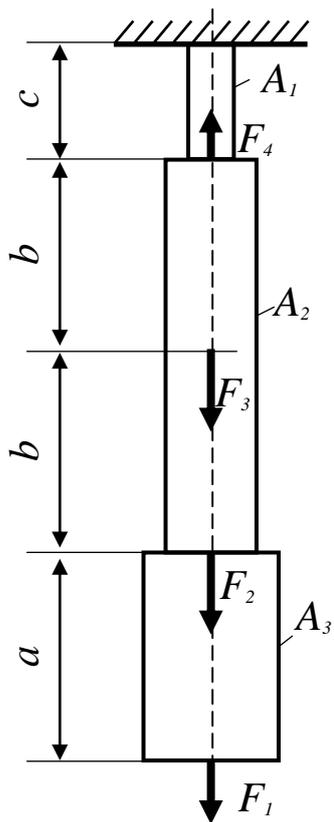


Рис. 1.1.10

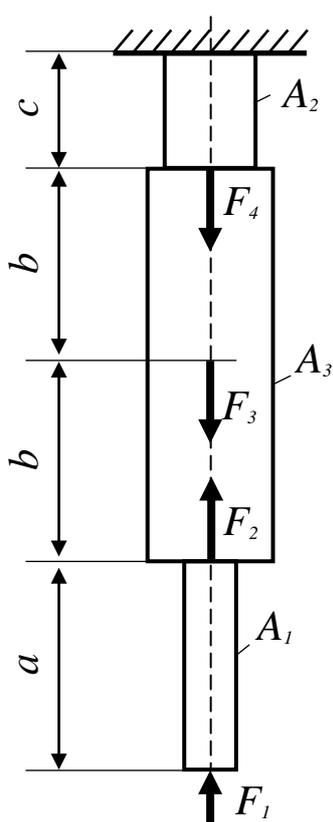


Рис. 1.1.11

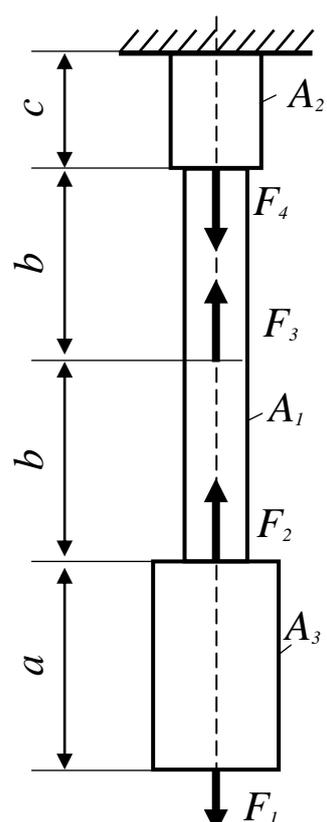


Рис. 1.1.12

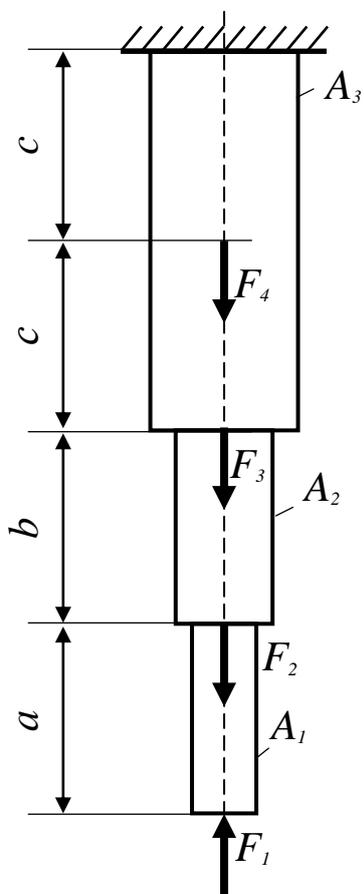


Рис. 1.1.13

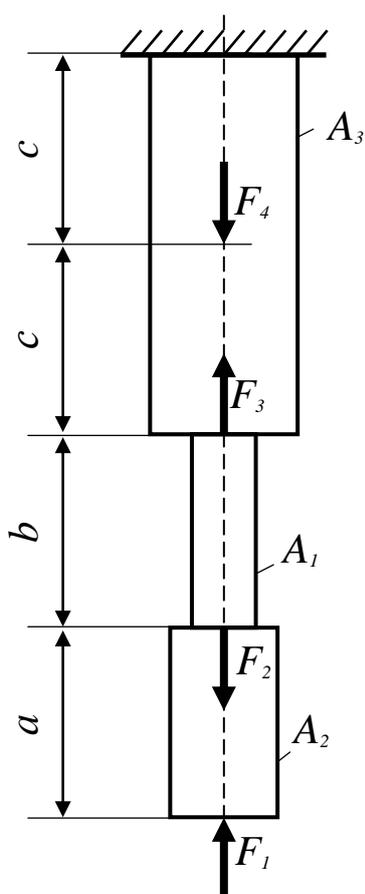


Рис. 1.1.14

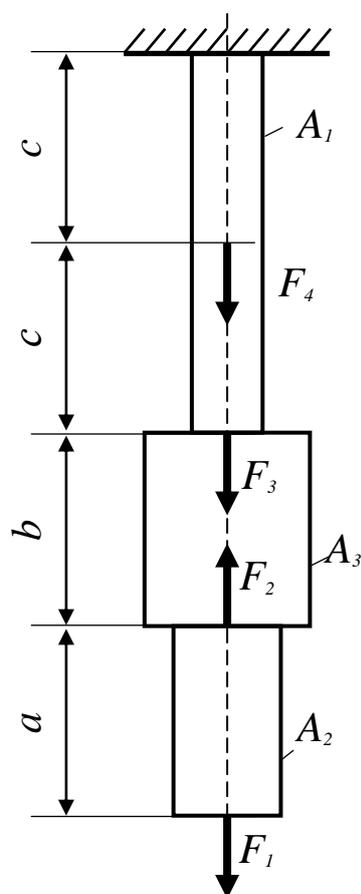


Рис. 1.1.15

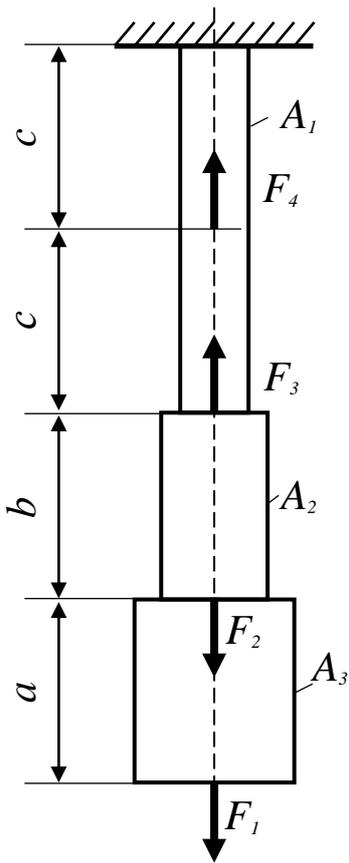


Рис. 1.1.16

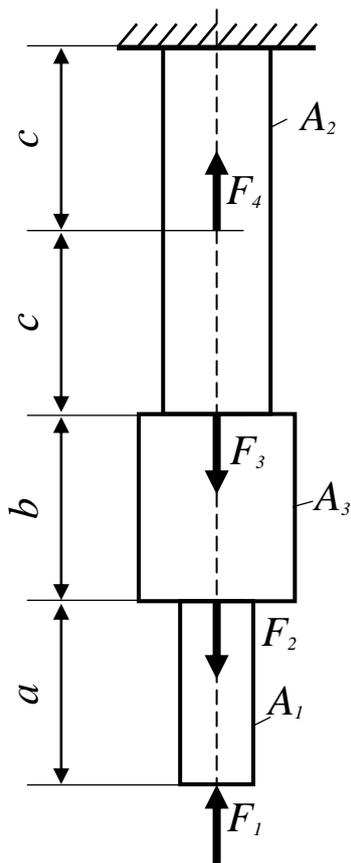


Рис. 1.1.17

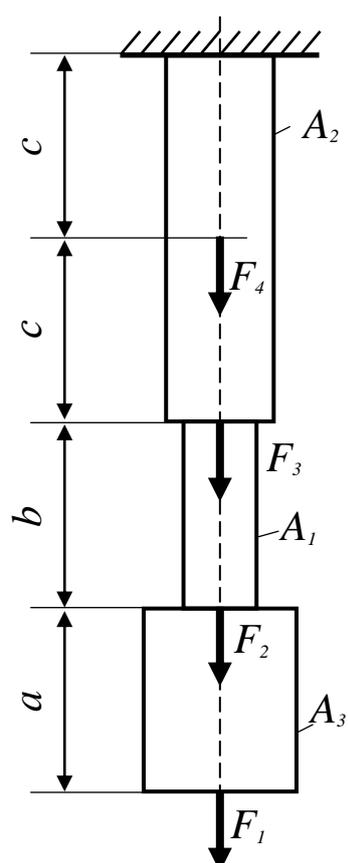


Рис. 1.1.18

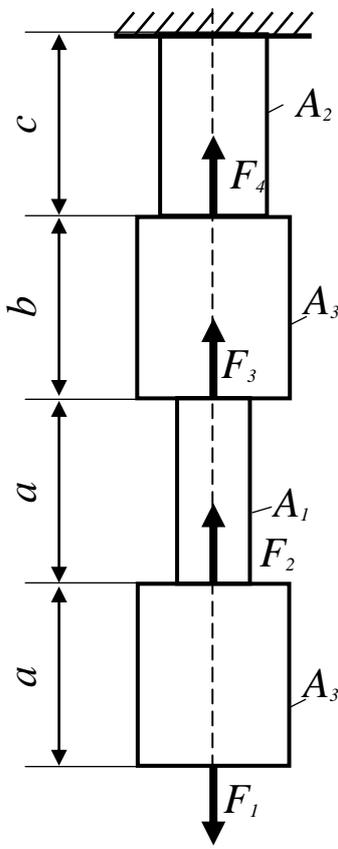


Рис. 1.1.19

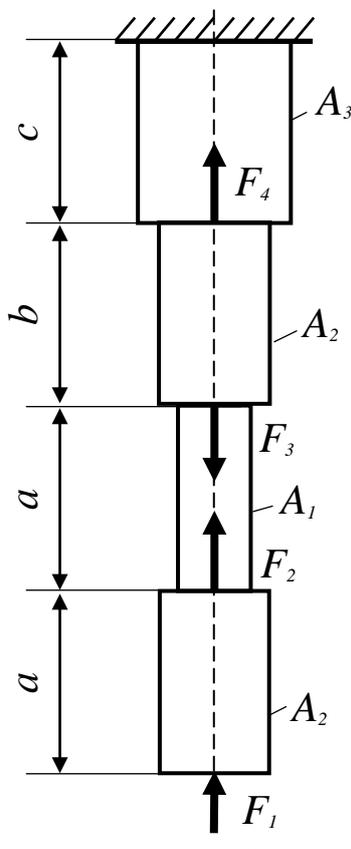


Рис. 1.1.20

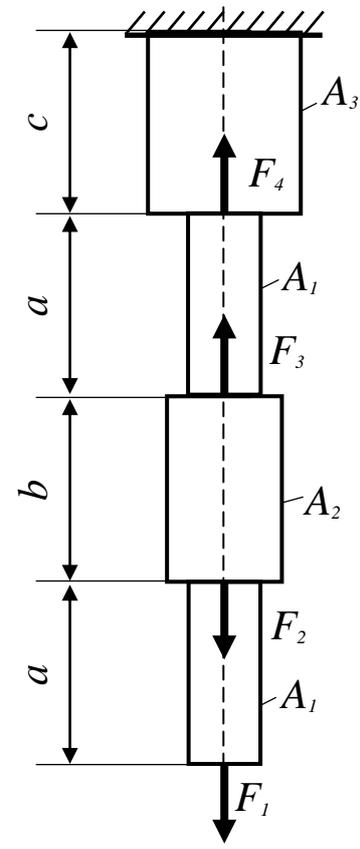


Рис. 1.1.21

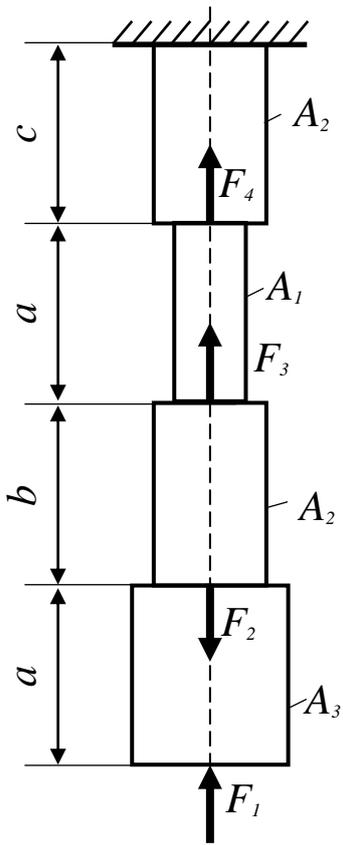


Рис. 1.1.22

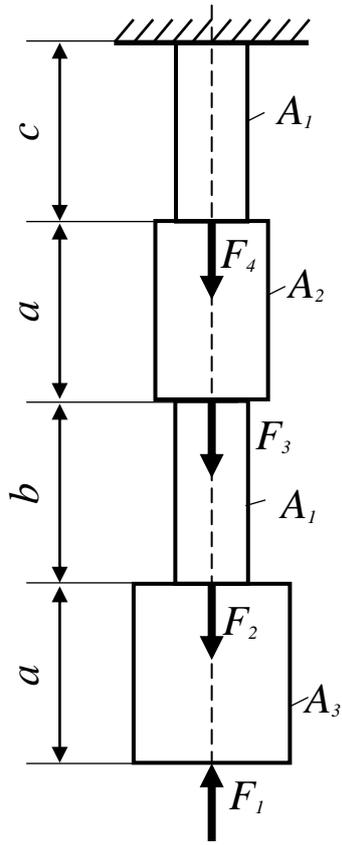


Рис. 1.1.23

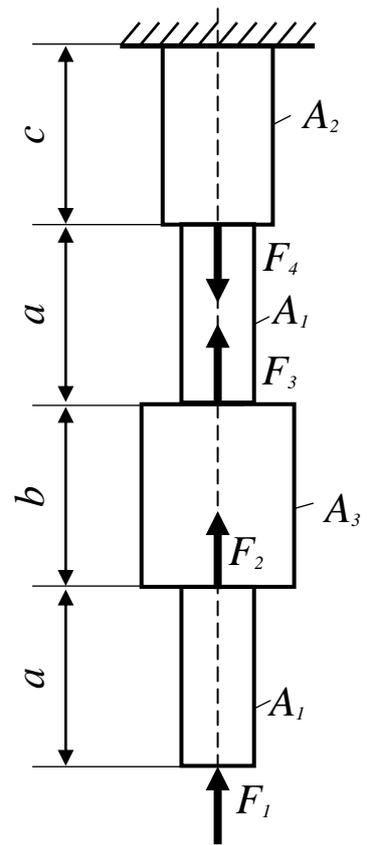


Рис. 1.1.24

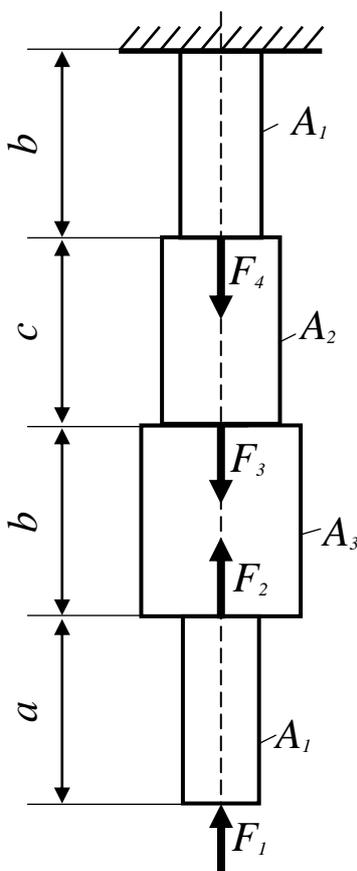


Рис. 1.1.25

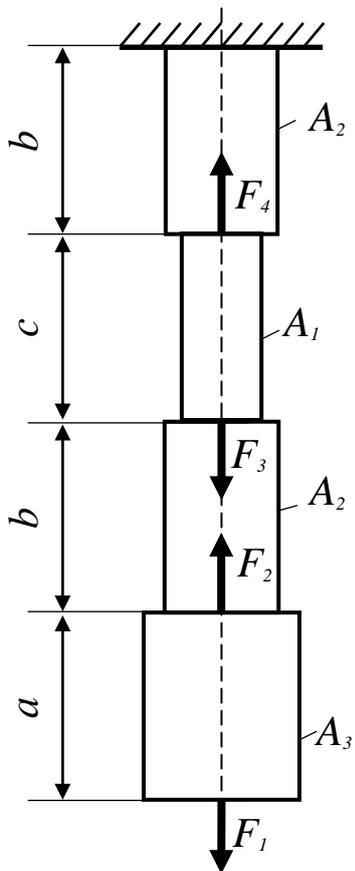


Рис. 1.1.26

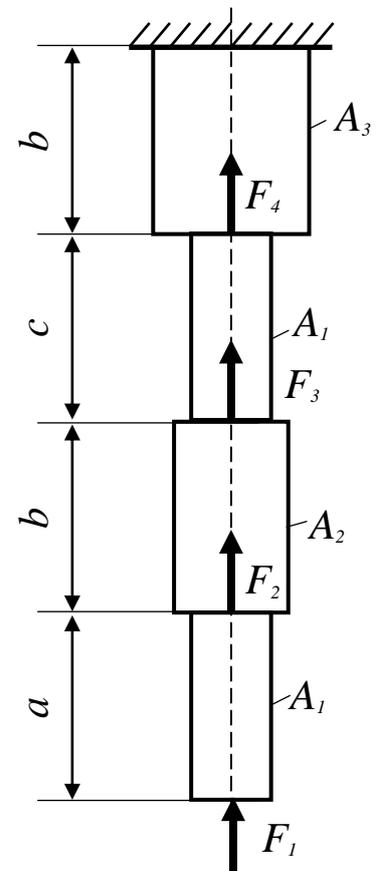


Рис. 1.1.27

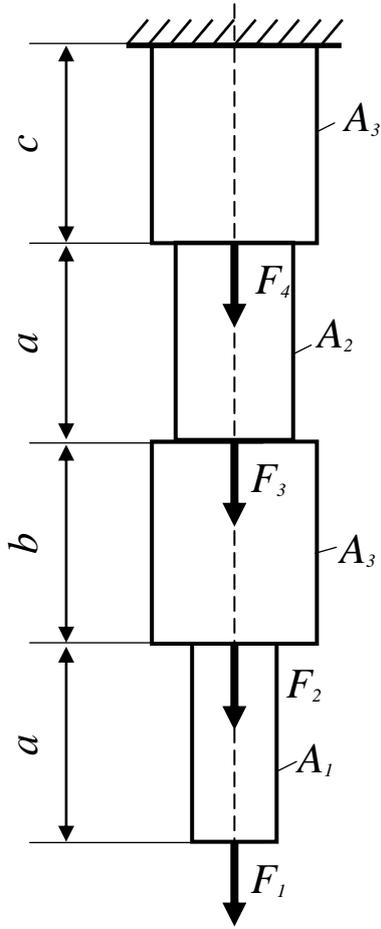


Рис. 1.1.28

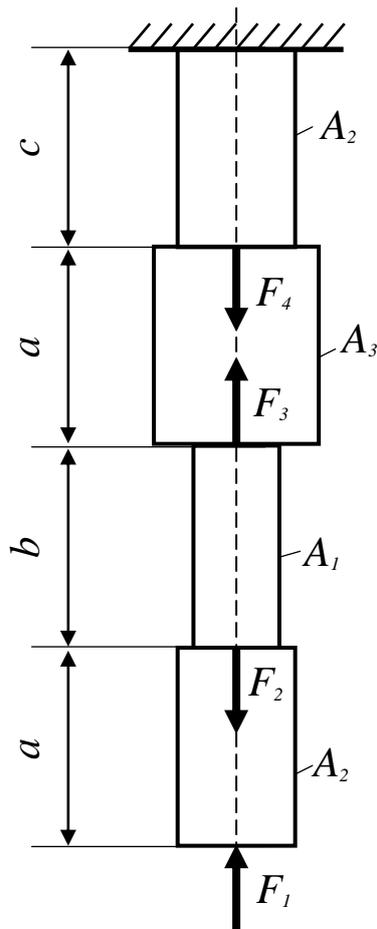


Рис. 1.1.29

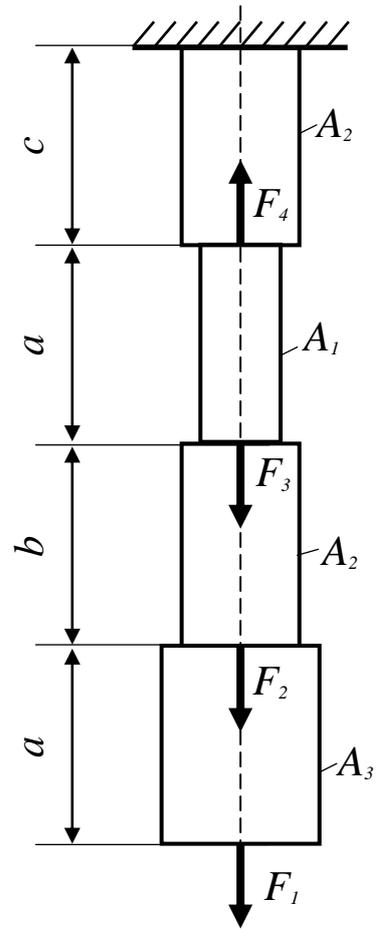


Рис. 1.1.30

Таблица 1.1

Данные для вариантов

Номер варианта (рисунка)	Нагрузка, кН				Размер, м			Площадь, 10^{-4} м ²		
	F_1	F_2	F_3	F_4	a	b	c	A_1	A_2	A_3
1 (1.1.1)	15	20	25	30	1,5	1,3	1,0	4,2	5,4	6,5
2 (1.1.2)	11	24	14	17	1,2	1,3	1,0	5,5	6,7	8,7
3 (1.1.3)	12	16	20	24	1,5	1,6	1,8	4,4	5,0	6,6
4 (1.1.4)	20	16	12	8	1,2	1,1	1,6	4,0	4,8	6,4
5 (1.1.5)	14	16	18	20	1,8	1,2	2,9	5,4	6,4	8,0
6 (1.1.6)	17	22	27	12	1,7	1,8	3,3	5,5	6,1	7,0
7 (1.1.7)	20	17	15	19	2,2	2,1	3,2	4,5	6,0	6,9
8 (1.1.8)	12	11	15	19	1,4	1,3	3,0	4,7	6,0	6,8
9 (1.1.9)	10	12	16	20	1,2	1,1	2,0	4,5	5,9	6,6
10 (1.1.10)	14	9	7	22	2,4	1,3	2,4	4,8	5,4	6,5
11 (1.1.11)	20	13	9	5	1,2	1,8	2,0	5,0	5,9	7,0
12 (1.1.12)	21	4	14	9	1,5	1,0	2,4	4,4	6,3	7,2
13 (1.1.13)	15	5	18	10	1,8	1,6	2,8	4,5	6,6	7,5
14 (1.1.14)	22	18	30	10	1,4	1,2	3,5	5,0	5,6	8,0
15 (1.1.15)	20	16	10	15	1,8	1,5	1,3	4,5	5,2	6,5
16 (1.1.16)	16	15	14	12	2,5	2,2	2,0	5,0	6,0	7,2
17 (1.1.17)	17	14	15	10	2,1	1,8	1,6	4,2	5,2	6,4
18 (1.1.18)	18	20	12	10	2,0	1,7	2,5	4,5	6,5	8,0
19 (1.1.19)	12	4	13	6	1,6	1,7	2,5	4,3	6,5	7,2
20 (1.1.20)	14	3	16	7	1,8	1,6	2,8	4,5	6,6	7,3
21 (1.1.21)	16	17	15	11	1,9	1,2	2,7	4,8	6,8	7,6
22 (1.1.22)	18	22	10	8	2,0	1,8	2,6	4,7	6,7	7,9
23 (1.1.23)	20	24	18	16	1,2	1,7	3,3	4,6	5,9	7,7
24 (1.1.24)	22	16	30	9	1,4	1,3	3,5	5,0	5,6	8,1
25 (1.1.25)	21	9	4	15	1,6	2,0	3,4	5,2	5,8	8,3
26 (1.1.26)	17	14	15	10	2,1	1,9	1,6	4,2	5,2	6,4
27 (1.1.27)	14	13	9	20	2,0	1,6	1,4	4,0	5,4	6,0
28 (1.1.28)	20	16	10	15	1,8	1,5	1,3	4,4	5,1	6,5
29 (1.1.29)	21	12	20	10	2,4	2,0	1,8	4,6	5,6	6,2
30 (1.1.30)	16	15	14	12	2,5	2,2	2,0	5,0	6,0	7,2

Примечание. Номер варианта соответствует номеру рисунка (например, в задаче 1.1 варианту 7 соответствует рис. 1.1.7).

Методические указания к решению задачи

1. Разбить заданный брус на участки; границами участков служат сечения, в которых приложены силы.
2. На каждом участке методом сечений найти нормальную силу.
3. Построить эпюру нормальных сил.
4. Определить нормальное напряжение на каждом из участков как отношение нормальной силы к площади поперечного сечения и построить эпюру нормальных напряжений.
5. Найти запас прочности как отношение заданного предела текучести к максимальному по абсолютной величине напряжению.
6. Найти полное удлинение бруса как сумму удлинений отдельных его участков.

Пример решения задачи

Исходные данные

$$a = 1 \text{ м}; \quad b = 0,8 \text{ м}; \quad c = 1,2 \text{ м}; \quad F_1 = 12 \text{ кН}; \quad F_2 = 20 \text{ кН}; \quad F_3 = 30 \text{ кН}; \\ F_4 = 15 \text{ кН}; \quad A_1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad A_2 = 10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad A_3 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Решение

1. Разбиваем брус на участки. Границами участков являются сечения, в которых приложены силы. Брус имеет четыре участка (см. рис. 1.1.31).
2. Проводим на первом участке произвольное сечение I–I, отбрасываем верхнюю часть бруса, а неизвестную силу в сечении N_1 определяем как сумму внешних сил, действующих на нижнюю часть бруса,

$$N_1 = F_1 = 12 \text{ кН}.$$

Сила F_1 записана со знаком «+», потому что направлена от сечения I–I и является растягивающей.

3. Для последующих участков получим (отбрасывая верхнюю часть):

$$N_2 = F_1 - F_2 = 12 - 20 = -8 \text{ кН};$$

$$N_3 = F_1 - F_2 - F_3 = 12 - 20 - 30 = -38 \text{ кН};$$

$$N_4 = F_1 - F_2 - F_3 - F_4 = 12 - 20 - 30 - 15 = -53 \text{ кН}.$$

Откладывая полученные ординаты, строим эпюру нормальных сил N , кН.

4. Строим эпюру нормальных напряжений σ , МПа:

$$\sigma_{I-I} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{12 \cdot 10^3 \text{ Н}}{5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 24 \cdot 10^6 \text{ Па} = 24 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{II-II} = \frac{N_2}{A_1} = -\frac{8 \cdot 10^3 \text{ Н}}{5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -16 \cdot 10^6 \text{ Па} = -16 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{III-III} = \frac{N_3}{A_2} = \frac{-38 \cdot 10^3 \text{ Н}}{10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -38 \cdot 10^6 \text{ Па} = -38 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{IV-IV} = \frac{N_4}{A_3} = -\frac{53 \cdot 10^3 \text{ Н}}{6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \approx -88 \cdot 10^6 \text{ Па} = -88 \text{ МПа}.$$

Графическая часть задачи

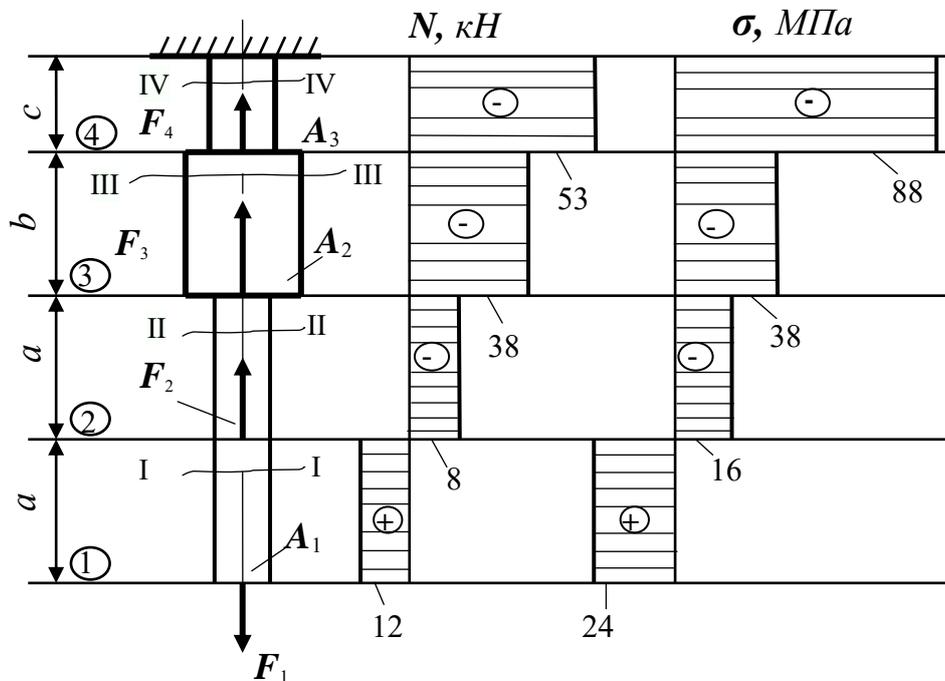


Рис. 1.1.31

5. Определяем запас прочности бруса

$$n_T = \frac{\sigma_T}{|\sigma_{max}|} = \frac{240}{88} \approx 2,73.$$

6. Находим полное удлинение бруса

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4;$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A_1} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \frac{H \cdot m}{Па \cdot m^2} = 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,12 \text{ мм},$$

где $N_1 = 12 \text{ кН} = 12 \cdot 10^3 \text{ Н}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н / м}^2$.

Аналогично получим, мм:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot a}{E \cdot A_1} = -\frac{8 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = -0,08 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,08 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot b}{E \cdot A_2} = -\frac{38 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -0,152 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,152 \text{ мм};$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot c}{E \cdot A_3} = -\frac{53 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = -0,53 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,53 \text{ мм};$$

окончательно

$$\Delta l = 0,12 - 0,08 - 0,152 - 0,53 = -0,642 \text{ мм}.$$

Брус укоротился на 0,642 мм.

Задача 1.2. Расчет статически неопределимой системы

Исходные данные

Абсолютно жесткий брус опирается на неподвижно-шарнирную опору и поддерживается двумя шарнирно закрепленными стержнями, представляющими собой круглые стальные прутки. Исходя из заданных размеров и действующих нагрузок найти диаметры стержней, если $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Схемы к задаче 1.2

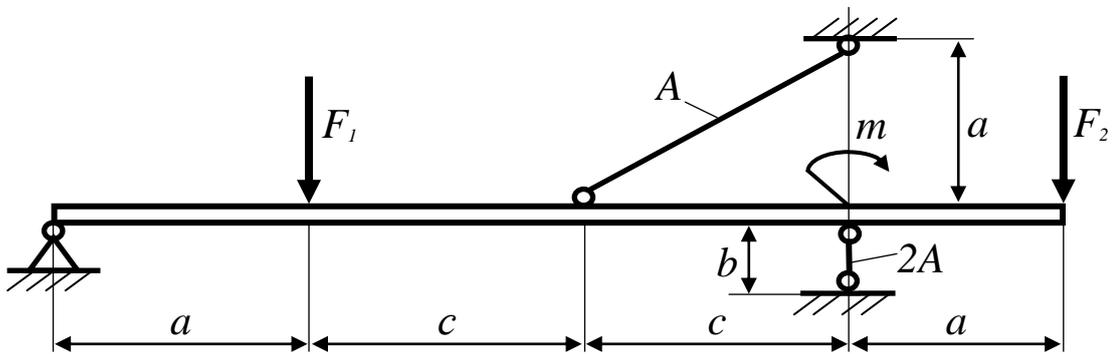


Рис. 1.2.1

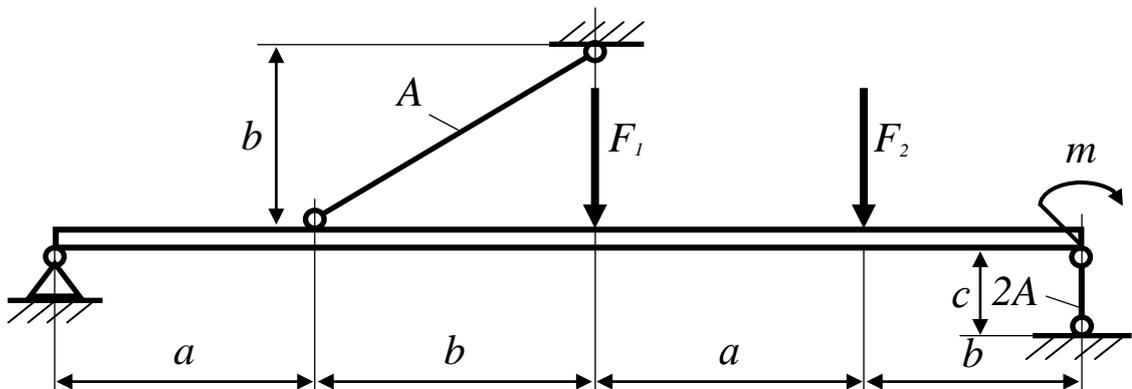


Рис. 1.2.2

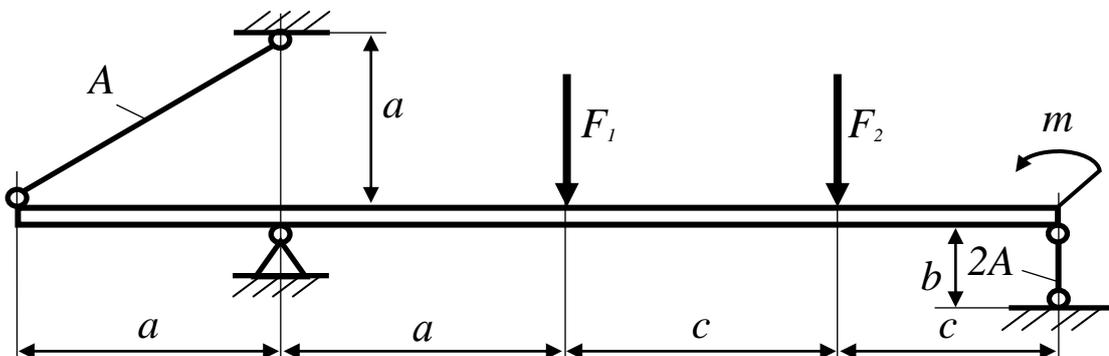


Рис. 1.2.3

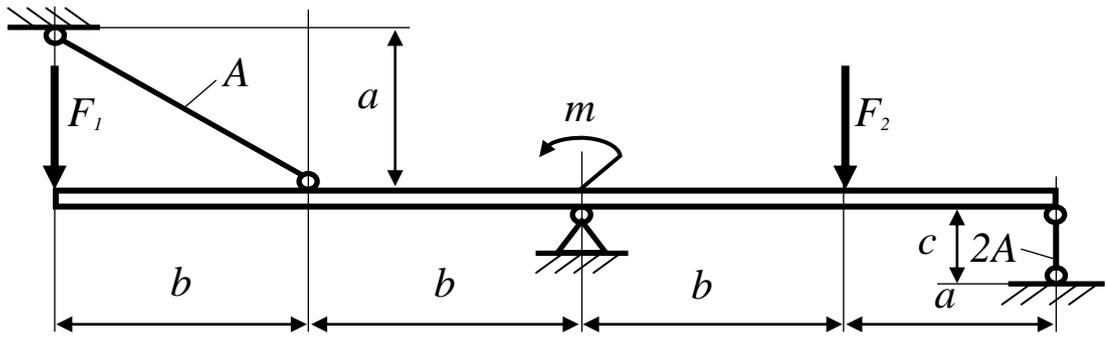


Рис. 1.2.4

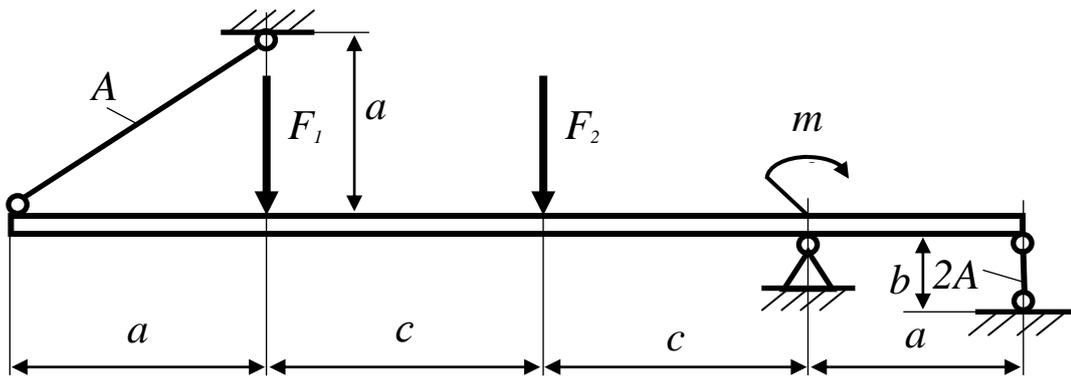


Рис. 1.2.5

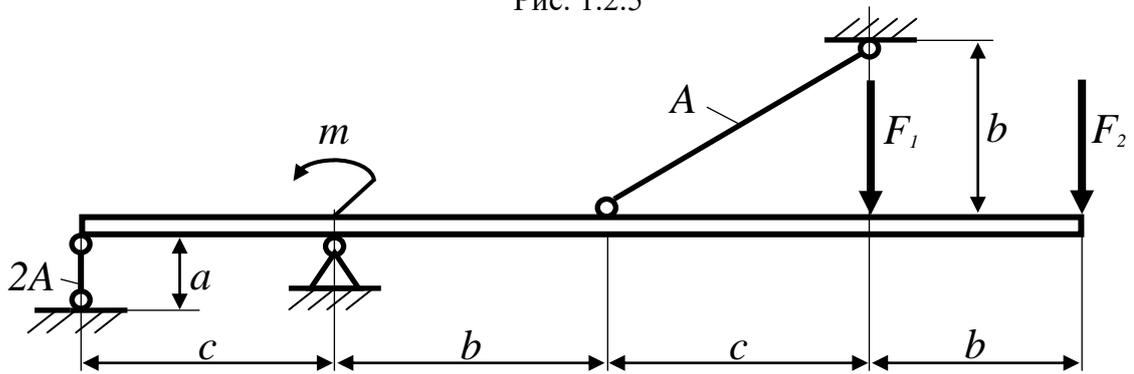


Рис. 1.2.6

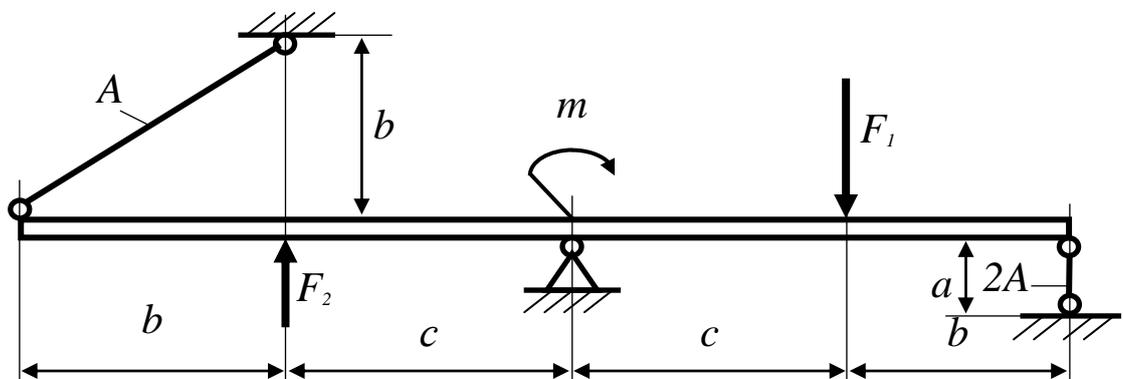


Рис. 1.2.7

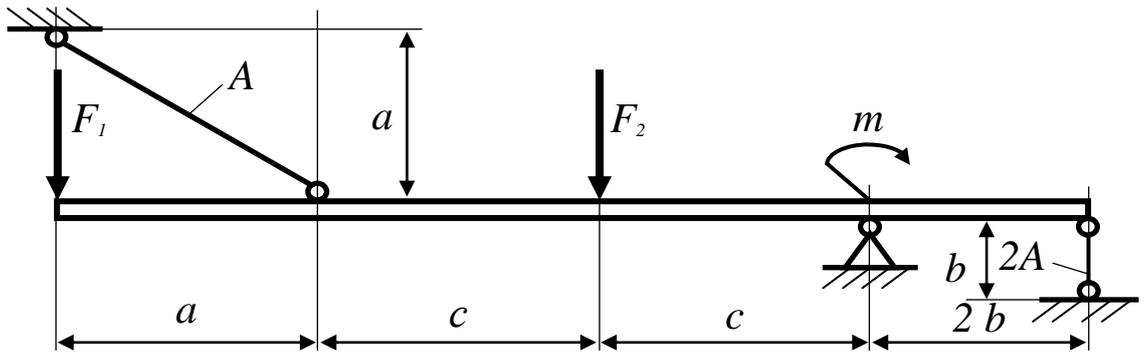


Рис. 1.2.8

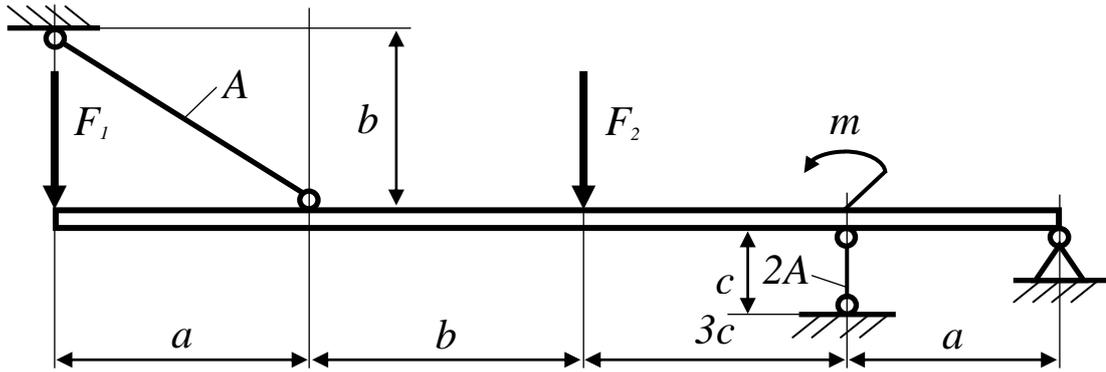


Рис. 1.2.9

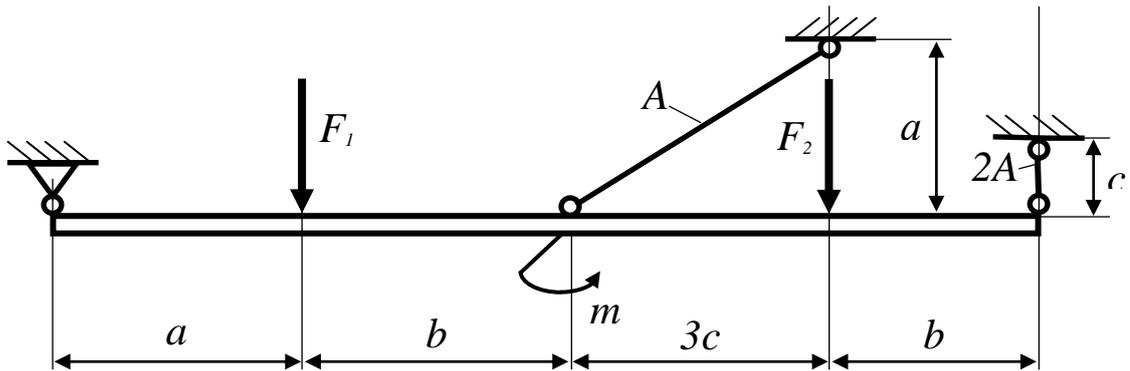


Рис. 1.2.10

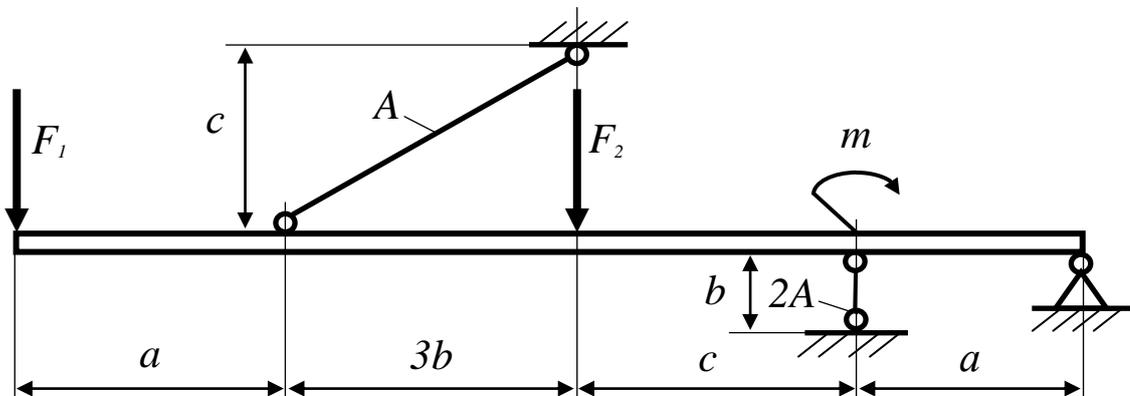


Рис. 1.2.11

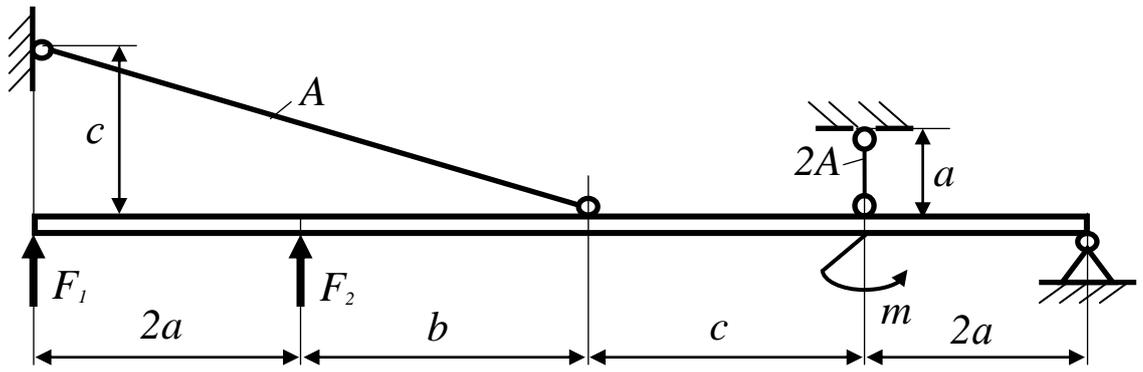


Рис. 1.2.12

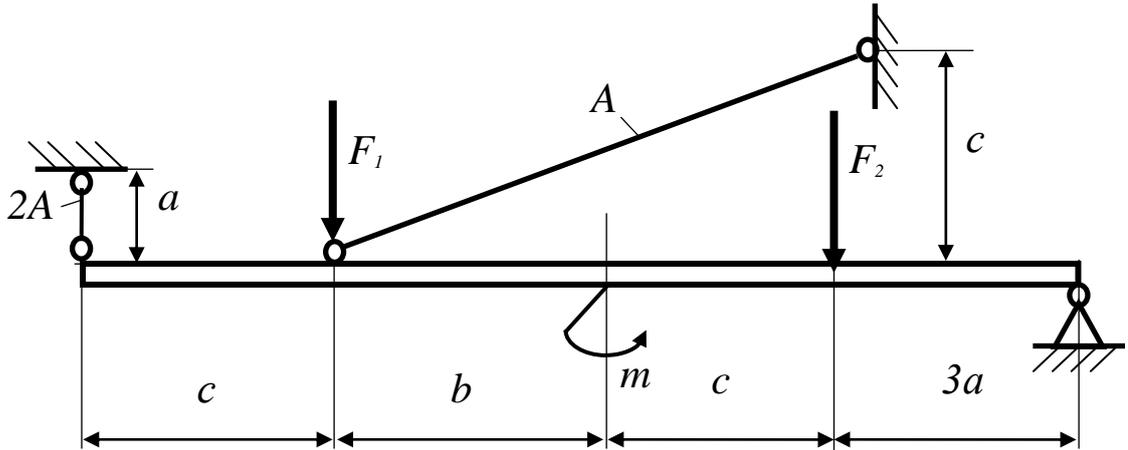


Рис. 1.2.13

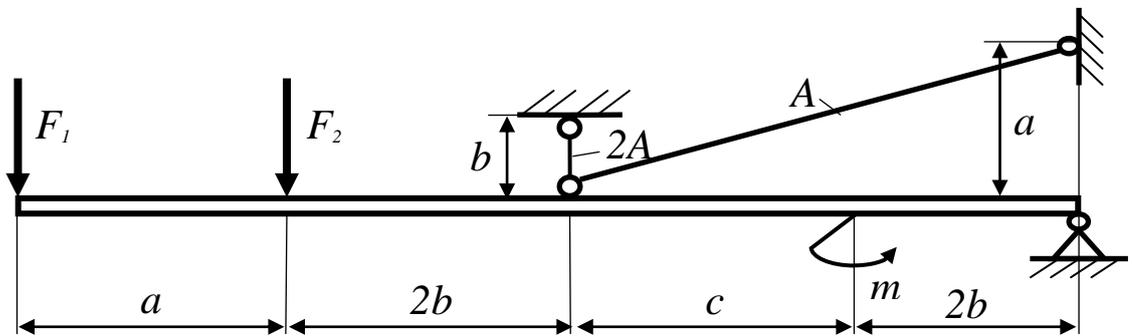


Рис. 1.2.14

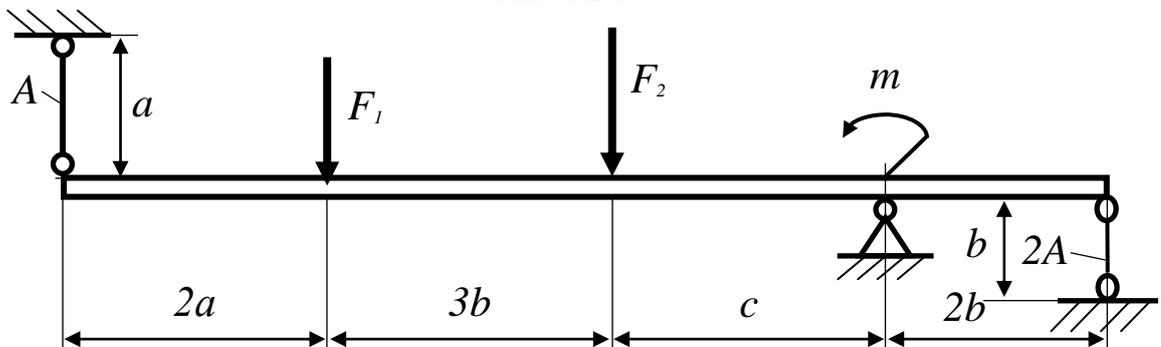


Рис. 1.2.15

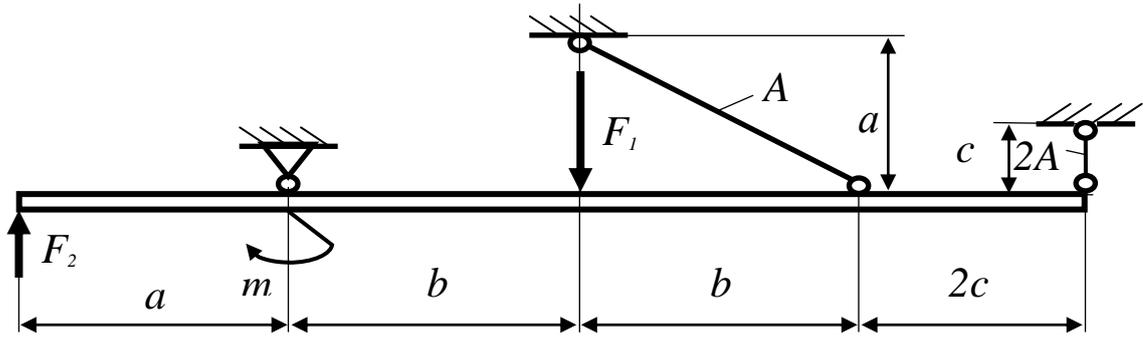


Рис. 1.2.16

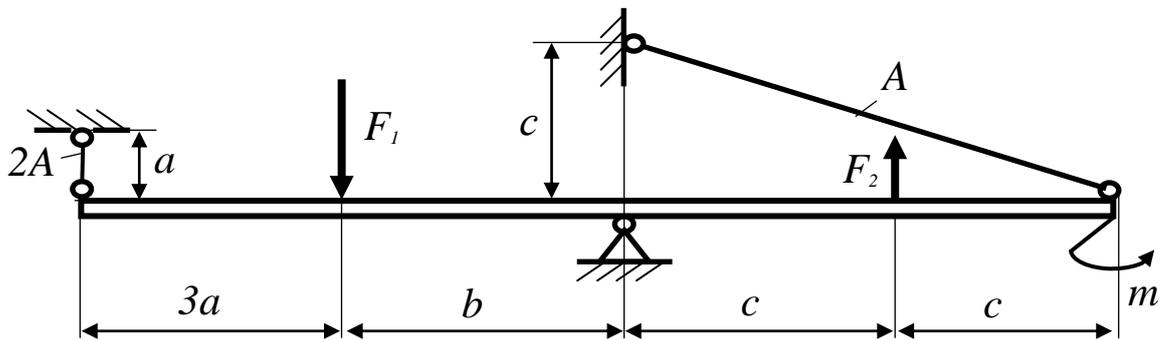


Рис. 1.2.17

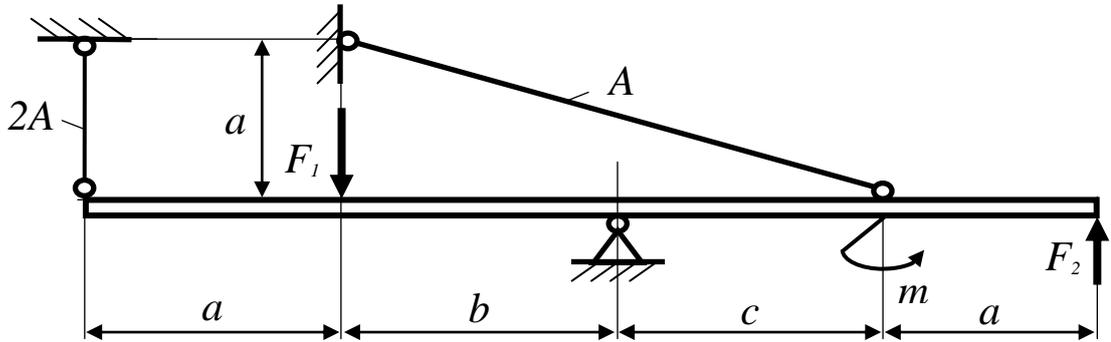


Рис. 1.2.18

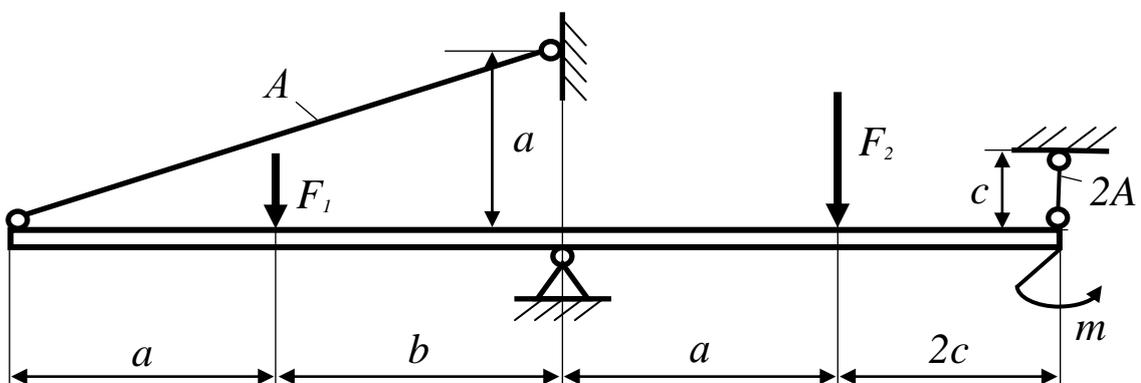


Рис. 1.2.19

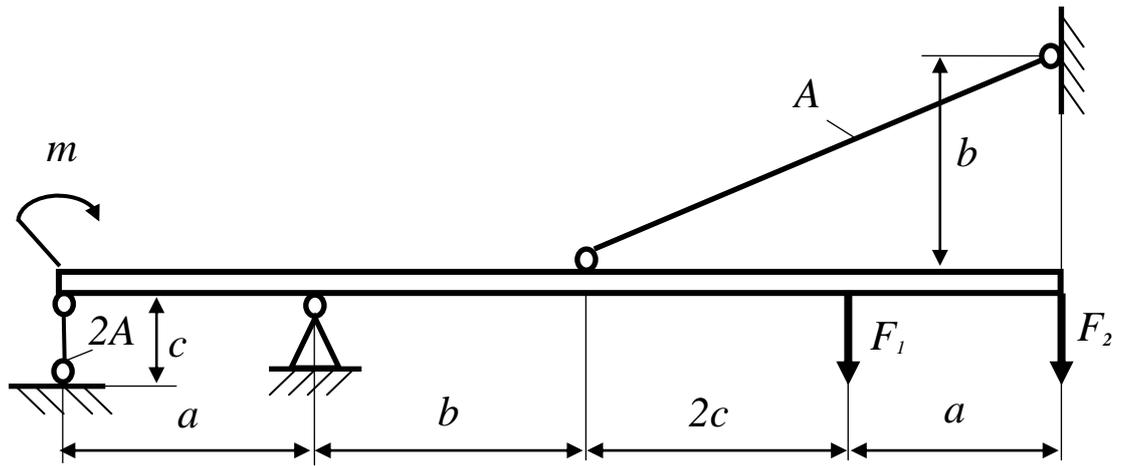


Рис. 1.2.20

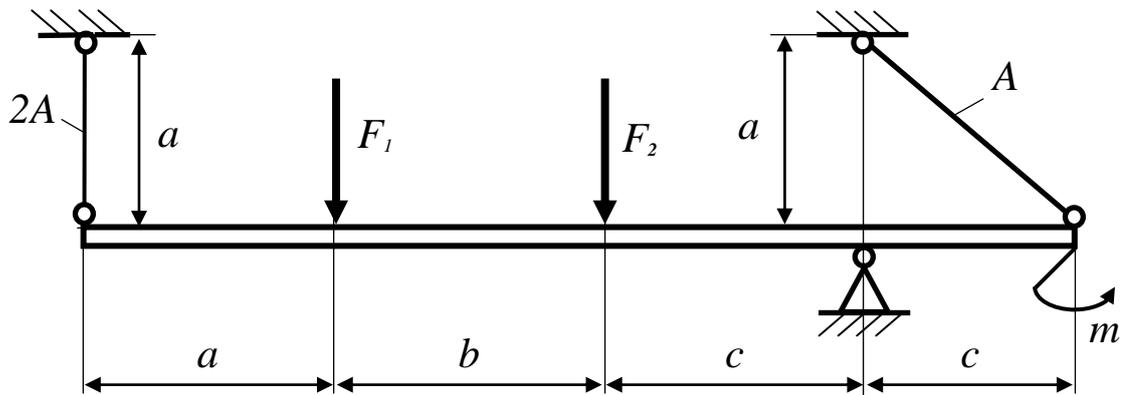


Рис. 1.2.21

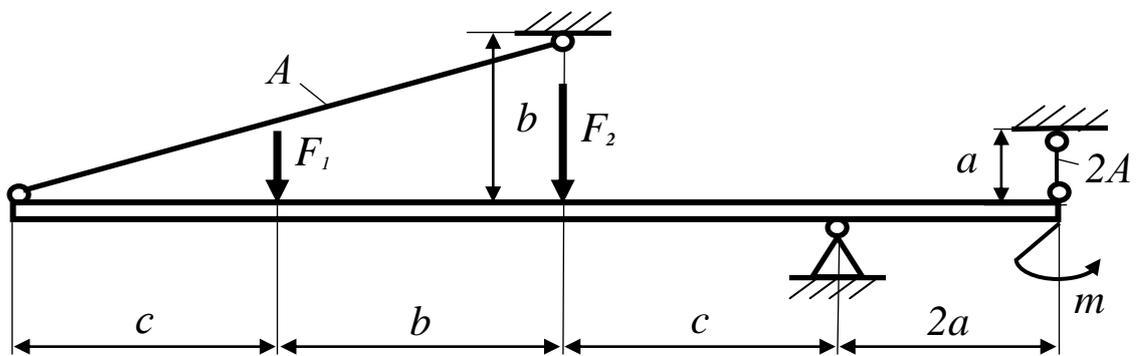


Рис. 1.2.22

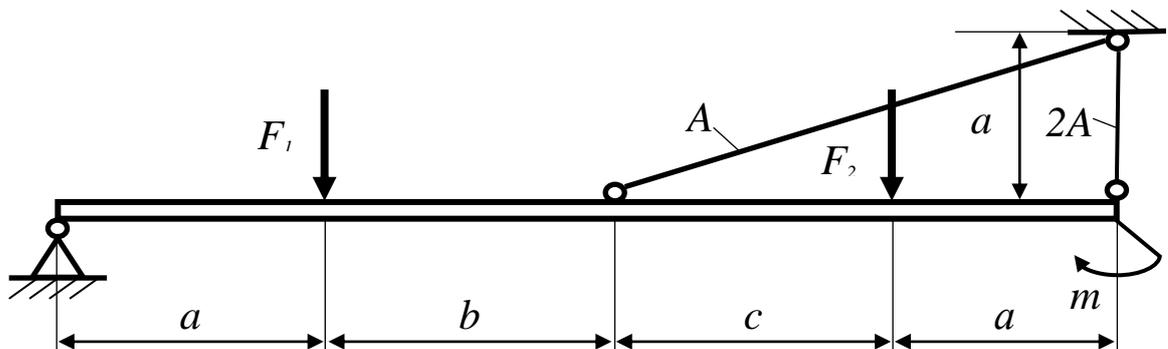


Рис. 1.2.23

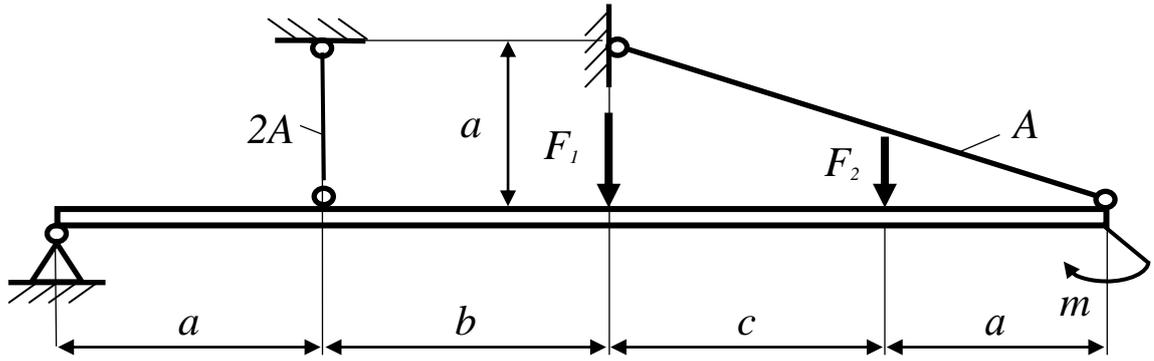


Рис. 1.2.24

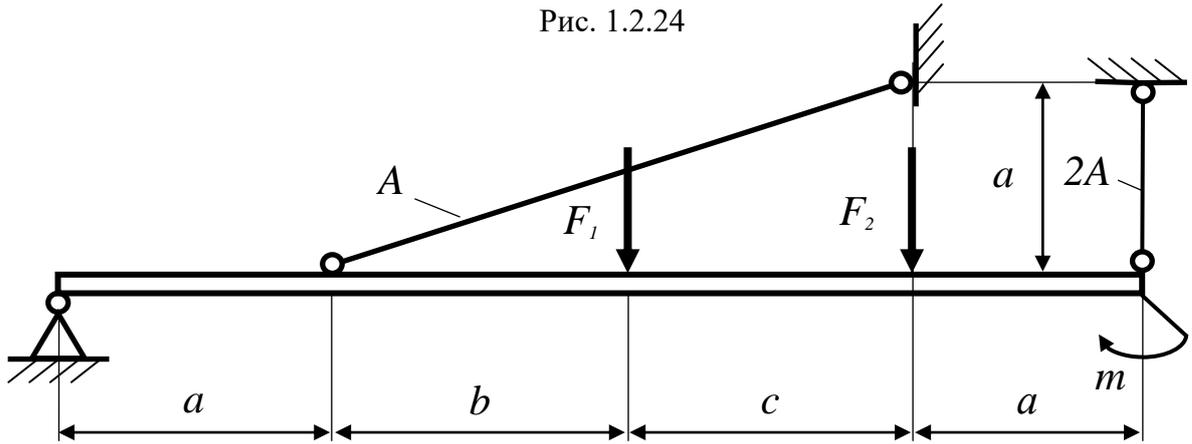


Рис. 1.2.25

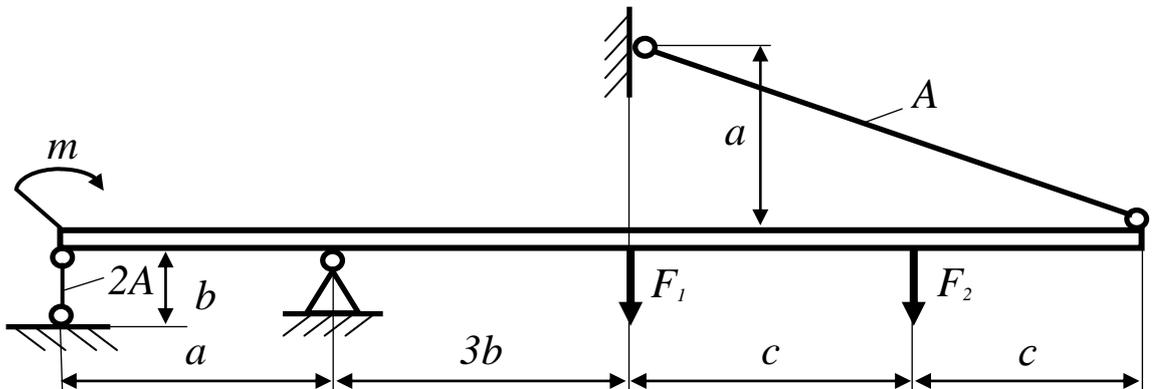


Рис. 1.2.26

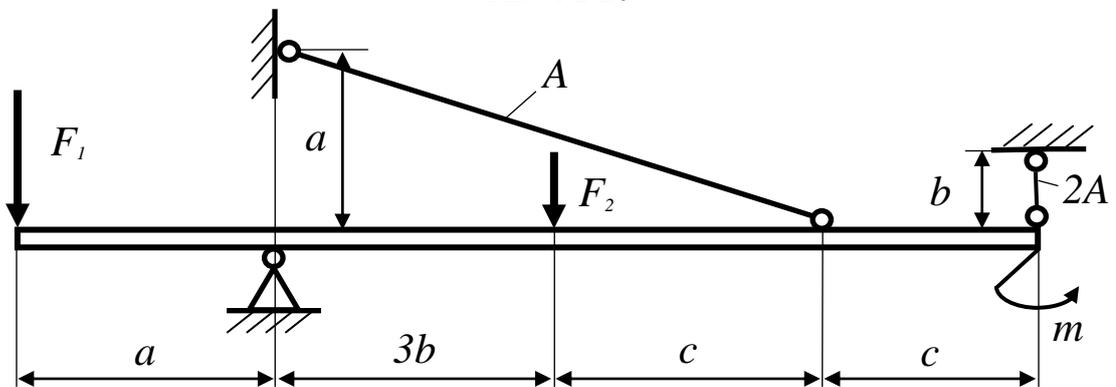


Рис. 1.2.27

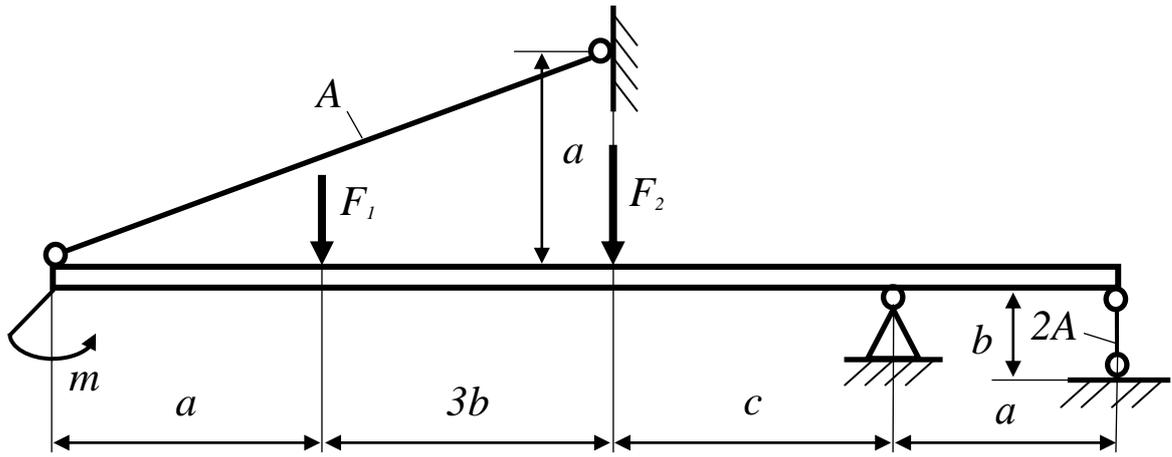


Рис. 1.2.28

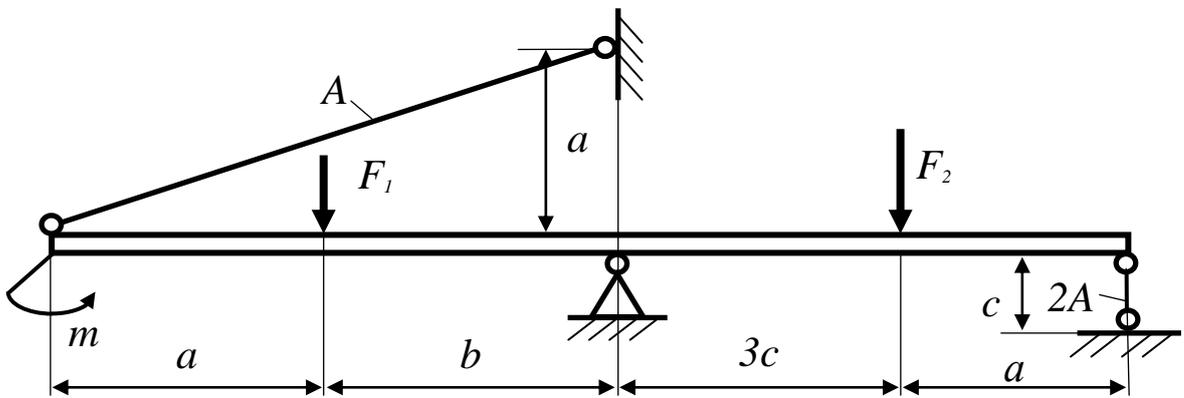


Рис. 1.2.29

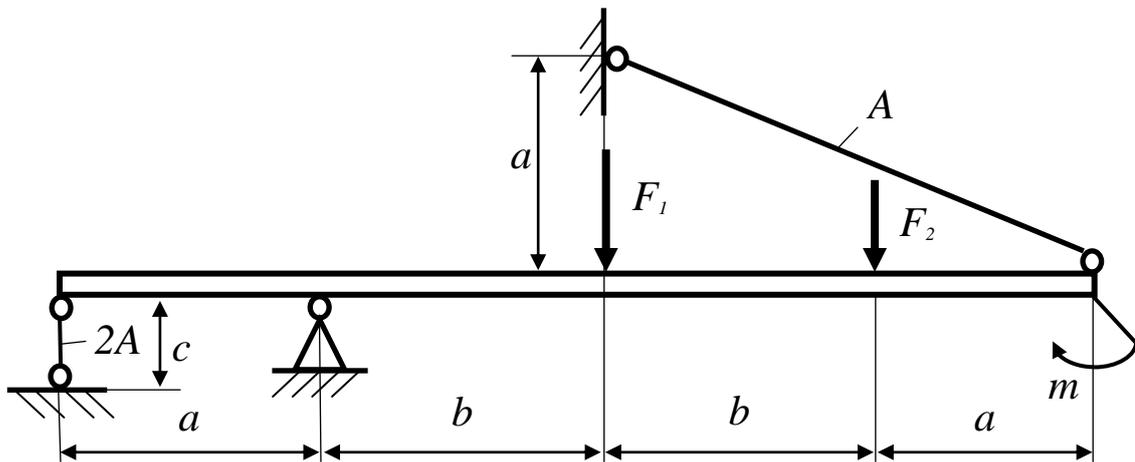


Рис. 1.2.30

Таблица 1.2

Данные для вариантов

Номер варианта (рисунка)	Нагрузка, кН		Момент, кН·м	Размер, м		
	F_1	F_2	m	a	b	c
1 (1.2.1)	24	15	50	1,5	0,5	2
2 (1.2.2)	16	11	60	1,3	1,2	0,4
3 (1.2.3)	16	12	70	1,6	0,3	1,7
4 (1.2.4)	16	20	45	1,1	1,3	0,3
5 (1.2.5)	22	14	20	1,2	0,4	1,4
6 (1.2.6)	17	17	35	0,6	1,5	1,2
7 (1.2.7)	11	20	55	0,5	1,8	2,0
8 (1.2.8)	12	12	46	1,3	0,8	1,8
9 (1.2.9)	9	10	80	1,1	1,2	0,5
10 (1.2.10)	13	14	30	1,3	2,4	0,4
11 (1.2.11)	4	20	25	1,8	0,4	1,6
12 (1.2.12)	5	21	40	0,5	1,5	2,3
13 (1.2.13)	18	15	50	0,4	1,6	1,4
14 (1.2.14)	16	22	20	1,2	0,4	1,1
15 (1.2.15)	15	20	75	0,6	0,4	1,5
16 (1.2.16)	14	16	85	2,2	2,5	0,7
17 (1.2.17)	20	17	95	0,5	2,1	1,2
18 (1.2.18)	15	18	90	1,7	2,0	1,9
19 (1.2.19)	22	13	52	1,7	2,5	0,6
20 (1.2.20)	18	10	64	1,9	1,4	0,7
21 (1.2.21)	16	14	75	1,8	1,6	1,7
22 (1.2.22)	17	22	40	0,7	1,7	1,9
23 (1.2.23)	20	19	25	1,2	2,4	1,5
24 (1.2.24)	15	10	30	1,6	2,1	1,2
25 (1.2.25)	12	21	54	2,2	2,5	2,5
26 (1.2.26)	19	13	48	1,7	0,5	1,5
27 (1.2.27)	10	17	85	1,5	0,6	2,2
28 (1.2.28)	16	15	35	1,3	0,4	1,5
29 (1.2.29)	14	25	27	2,0	1,2	0,5
30 (1.2.30)	24	13	24	1,8	1,6	0,6

Примечание. Номер варианта соответствует номеру рисунка (например, в задаче 1.2 варианту 10 соответствует рис. 1.2.10).

Методические указания к решению задачи

1. Устанавливаем степень статической неопределимости заданной системы.
2. Освободив заданный брус от связей, заменяем их реакциями и записываем необходимые уравнения равновесия.
3. Рассматривая систему в деформированном состоянии, устанавливаем связь между удлинениями отдельных стержней и записываем ее в виде уравнения совместности перемещений.
4. В составленном уравнении перемещений выражаем удлинения по закону Гука через неизвестные силы N_1 и N_2 .
5. Решаем полученное уравнение совместно с ранее составленными уравнениями равновесия и находим силы N_1 , N_2 и напряжения σ_1 , σ_2 в стержнях.
6. Из условия прочности (приравнивая большее из напряжений к допускаемому) находим требуемую величину d , а затем d .

Пример решения задачи

Исходные данные

$$a = 3,0 \text{ м}; b = 2,4 \text{ м}; c = 1,6 \text{ м}; F_1 = 20 \text{ кН};$$

$$F_2 = 16 \text{ кН}; m = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}; [\sigma] = 160 \text{ МПа}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Решение

1. Устанавливаем степень статической неопределимости. Среди сил, действующих на брус, четыре неизвестных: две силы в шарнирно закрепленных стержнях N_1 и N_2 и две реакции в неподвижном шарнире (см. рис. 1.2.31, а).

Для определения этих сил можно составить три независимых уравнения равновесия, так как на брус действует произвольная плоская система сил. Итак, степень статической неопределимости данной системы $4 - 3 = 1$.

Графическая часть задачи

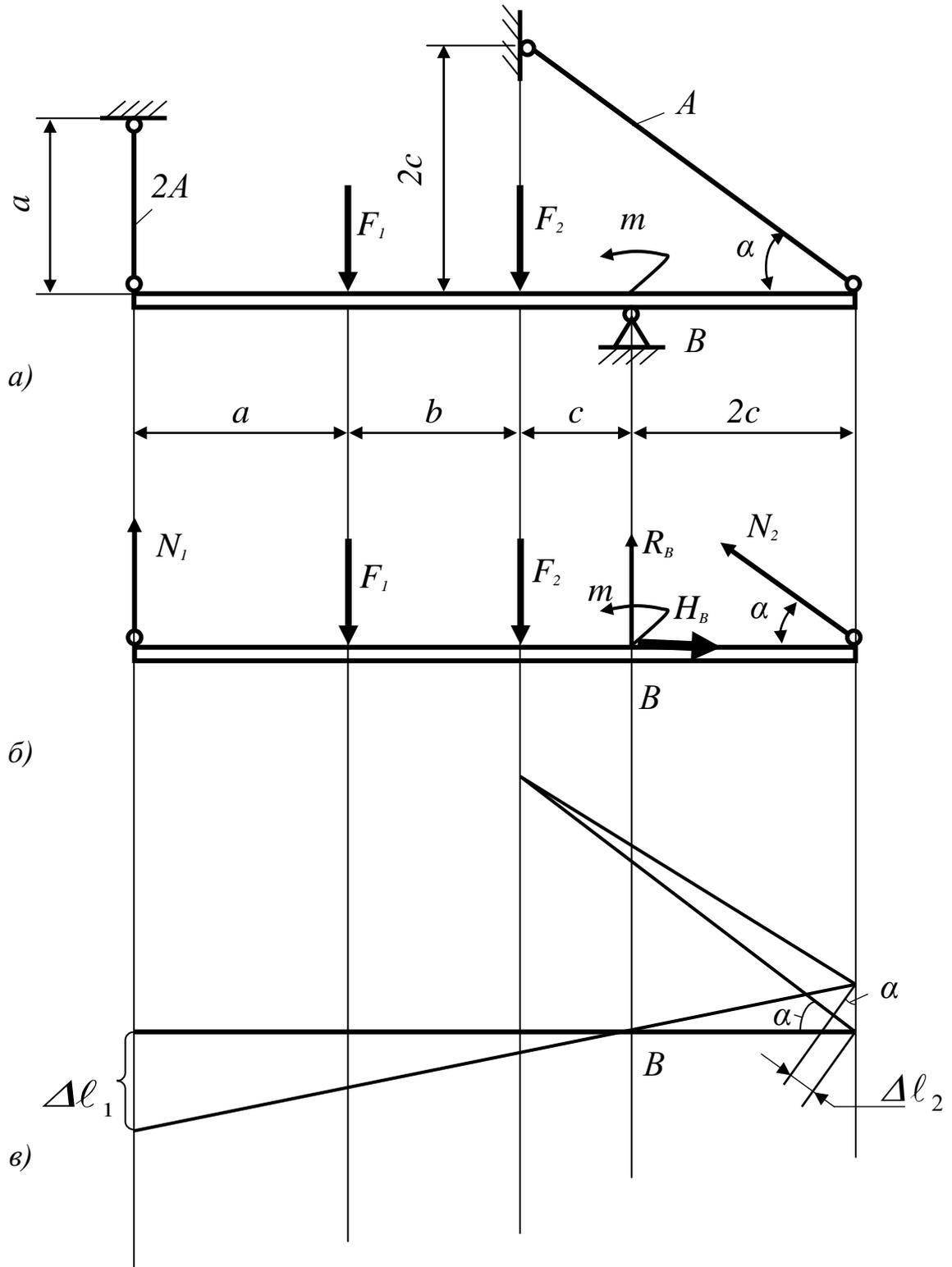


Рис. 1.2.31

2. Освобождая брус от связей, заменяем их реакциями и составляем уравнение равновесия (рис. 1.2.31, б):

$$\sum m_B(\vec{F}_i) = 0;$$

$$-N_1(a+b+c) + F_1(b+c) + F_2 \cdot c + m + N_2 \sin \alpha \cdot 2c = 0, \quad (1.2.1)$$

где $\alpha = \arctg \frac{2c}{3c} = \arctg(0,667) = 33^\circ 40'$; $\sin \alpha = 0,555$.

3. Рассматриваем систему в деформированном состоянии (см. рис. 1.2.31, в). Брус поворачивается относительно шарнира B , при этом первый стержень растягивается на Δl_1 , а второй сжимается на Δl_2 (связь между этими уравнениями иллюстрирует рис. 1.2.31, в):

$$\frac{\Delta l_2}{2c \cdot \sin \alpha} = \frac{\Delta l_1}{a+b+c} \quad (1.2.2)$$

или

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \frac{a+b+c}{2c \cdot \sin \alpha} = \Delta l_2 \frac{3,0+2,4+1,6}{2 \cdot 1,6 \cdot 0,555} \approx 3,94 \Delta l_2 .$$

Итак,

$$\Delta l_1 = 3,94 \Delta l_2 . \quad (1.2.3)$$

4. Выразим удлинения Δl_1 и Δl_2 через неизвестные усилия N_1 и N_2

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot a}{2EA} ; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot 2c}{\sin \alpha \cdot EA} \quad (1.2.4)$$

и подставим (1.2.4) в (1.2.3):

$$\frac{N_1 \cdot 3,0}{2EA} = 3,94 \frac{N_2 \cdot 2 \cdot 1,6}{0,555 \cdot EA}$$

или

$$N_1 = 3,94 \cdot \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 2}{0,555 \cdot 3,0} N_2 \approx 15,1 N_2 .$$

Итак,

$$N_1 = 15,1 N_2 \quad . \quad (1.2.5)$$

5. Решаем совместно (1.2.1) и (1.2.5):

$$-15,1 N_2 (3,0 + 2,4 + 1,6) + 20(2,4 + 1,6) + 16 \cdot 1,6 + 30 + N_2 \cdot 0,555 \cdot 2 \cdot 1,6 = 0,$$

откуда получаем

$$N_2 (7 \cdot 15,1 - 3,2 \cdot 0,555) = 4 \cdot 20 + 25,6 + 30;$$

$$N_2 = \frac{80 + 25,6 + 30}{7 \cdot 15,1 - 3,2 \cdot 0,555} \approx 1,3 \text{ кН};$$

$$N_2 \approx 1,3 \text{ кН};$$

$$N_1 = 15,1 \cdot 1,3 = 19,63 \text{ кН};$$

$$N_1 \approx 19,6 \text{ кН}.$$

Напряжения в стержнях

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2A} = \frac{19,6}{2A} = \frac{9,8}{A}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{1,3}{A};$$

максимальным является напряжение в первом стержне

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{9,8}{A}.$$

6. Записываем условие прочности:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma];$$

$$\frac{9,8 \cdot 10^3}{A} \leq 160 \cdot 10^6;$$

где $9,8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 9,8 \text{ кН}$; $160 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 160 \text{ МПа}$, откуда

$$A = \frac{9,8 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} \approx 0,613 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Из выражений $A = \frac{\pi d_2^2}{4}$ и $2A = \frac{\pi d_1^2}{4}$ находим

$$d_2 = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,613 \cdot 10^{-4}}{3,14}} \approx 0,883 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 8,83 \text{ мм};$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{8A}{\pi}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0,613 \cdot 10^{-4}}{3,14}} \approx 1,23 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 12,3 \text{ мм}.$$

Задача 1.3. Расчет сварного соединения

Исходные данные

Для заданного узла фермы, состоящего из четырех стержней, подобрать для каждого стержня по два равнополочных уголка и определить длины сварных фланговых швов. Принять допускаемое нормальное напряжение для материала уголков $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; допускаемое напряжение для электросварных швов на срез $[\tau_s] = 80 \text{ МПа}$.

Схемы к задаче 1.3

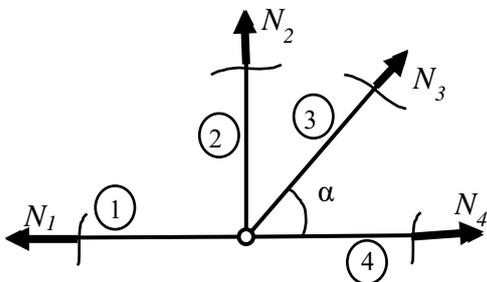


Рис. 1.3.1

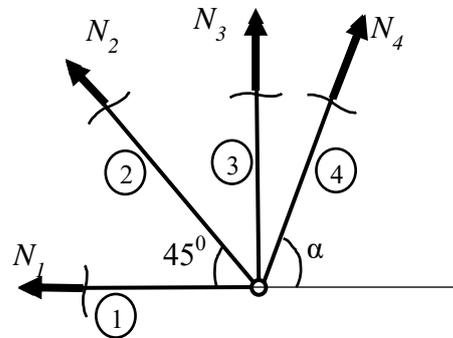


Рис. 1.3.2

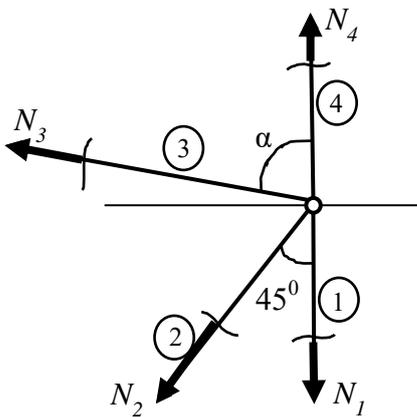


Рис. 1.3.3

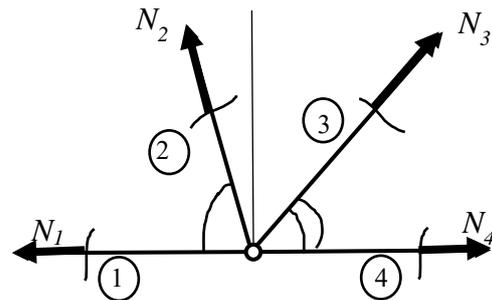


Рис. 1.3.4

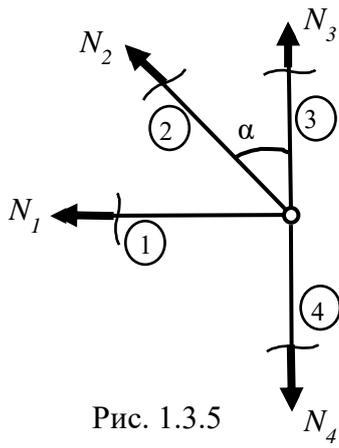


Рис. 1.3.5

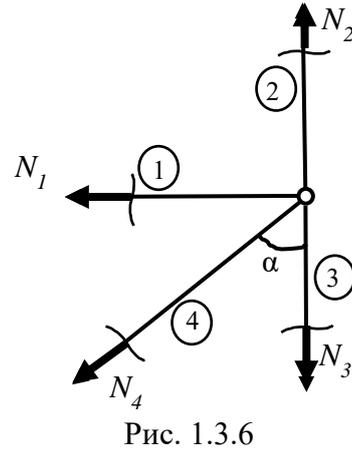


Рис. 1.3.6

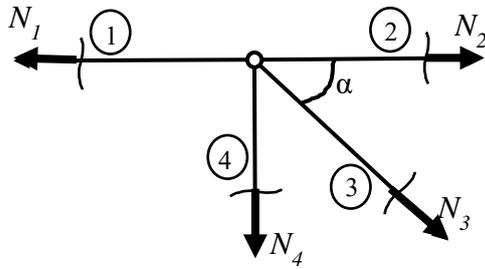


Рис. 1.3.7

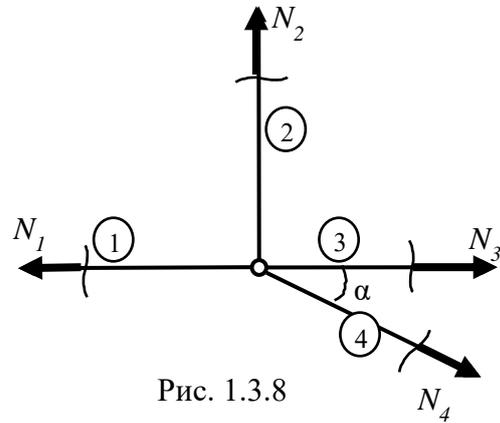


Рис. 1.3.8

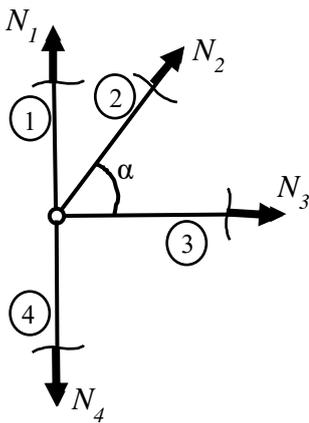


Рис. 1.3.9

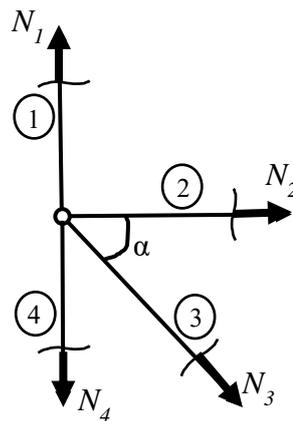


Рис. 1.3.10

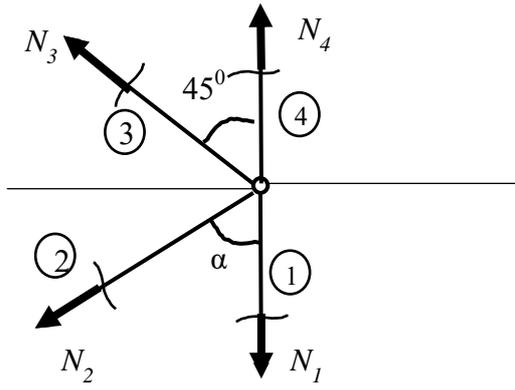


Рис. 1.3.11

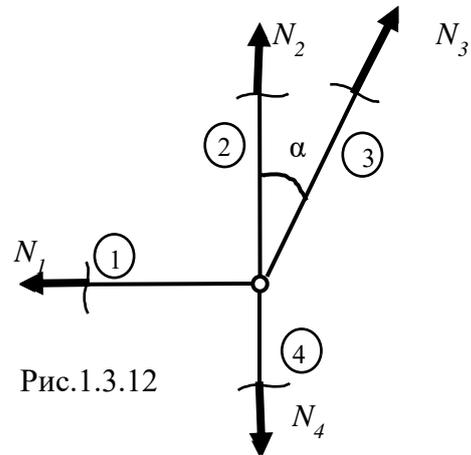


Рис.1.3.12

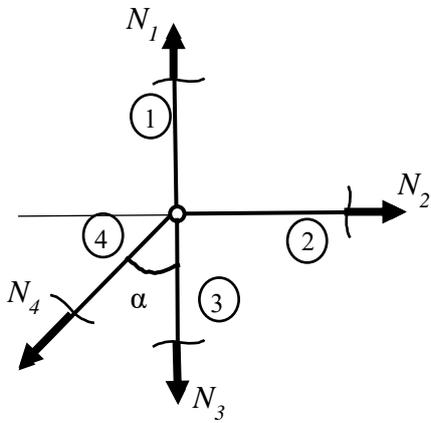


Рис. 1.3.13

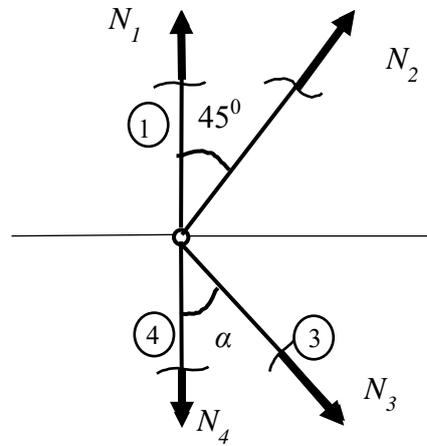


Рис. 1.3.14

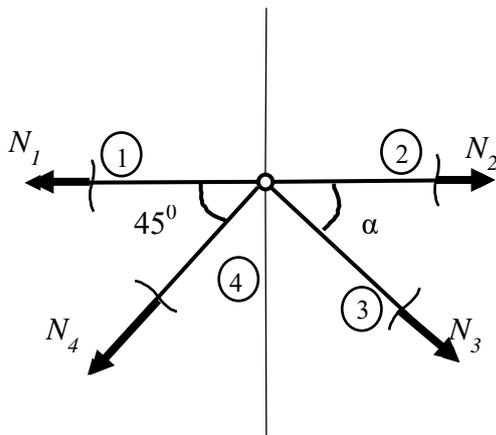


Рис. 1.3.15

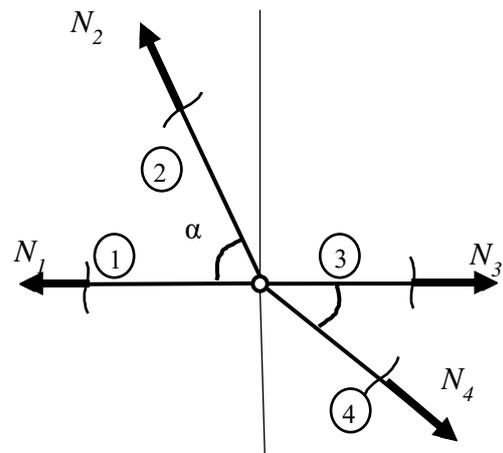


Рис.1.3.16

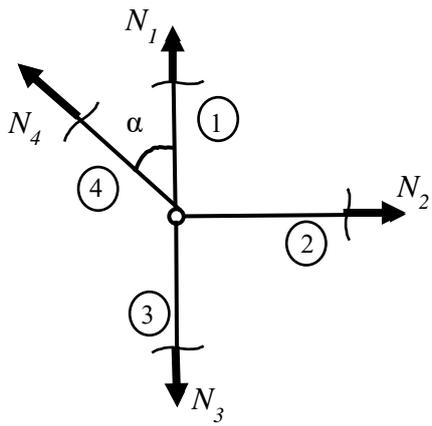


Рис. 1.3.17

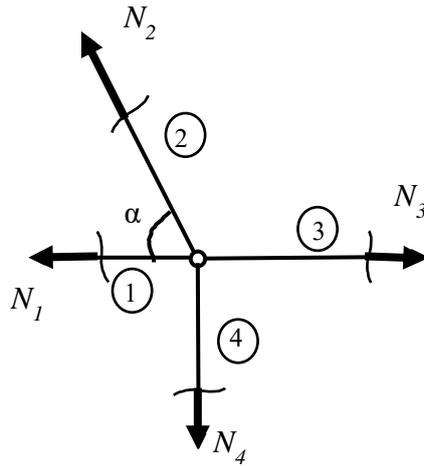


Рис. 1.3.18

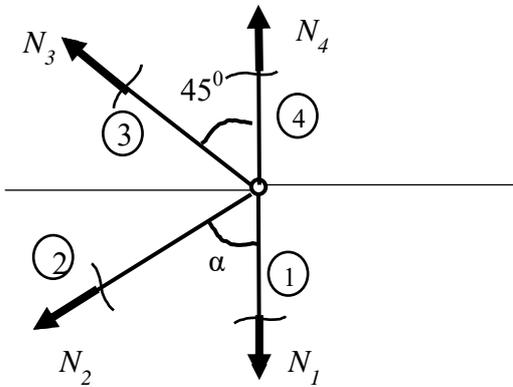


Рис. 1.3.19

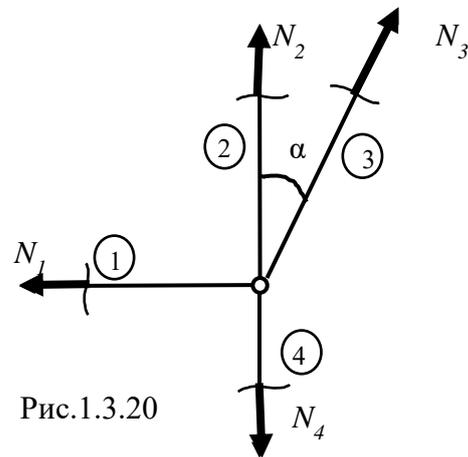


Рис.1.3.20

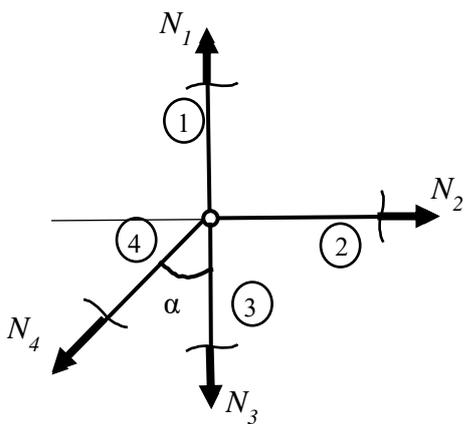


Рис. 1.3.21

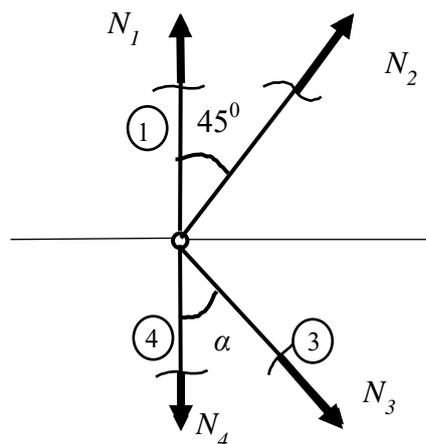


Рис. 1.3.22

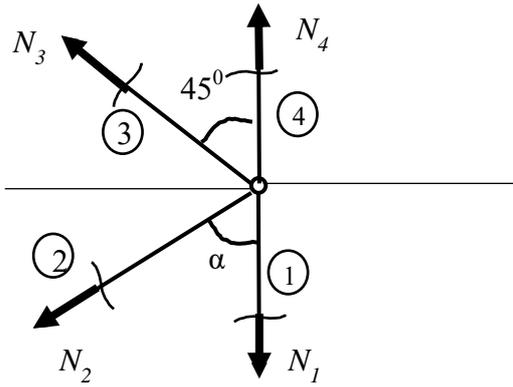


Рис. 1.3.23

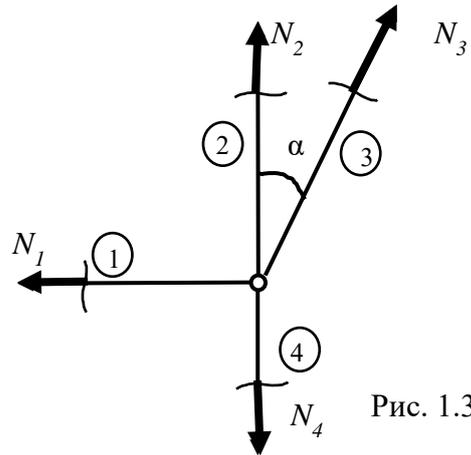


Рис. 1.3.24

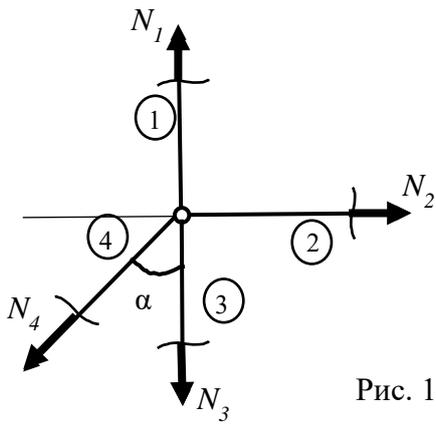


Рис. 1.3.25

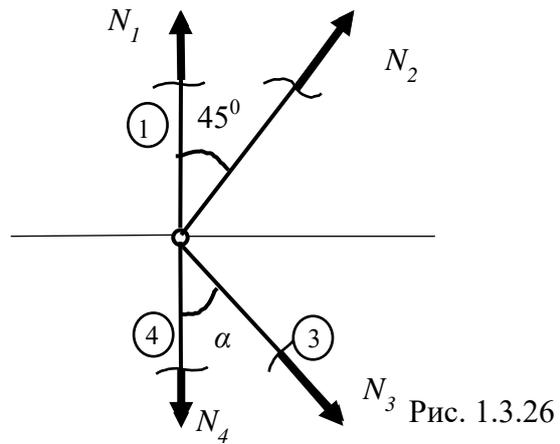


Рис. 1.3.26

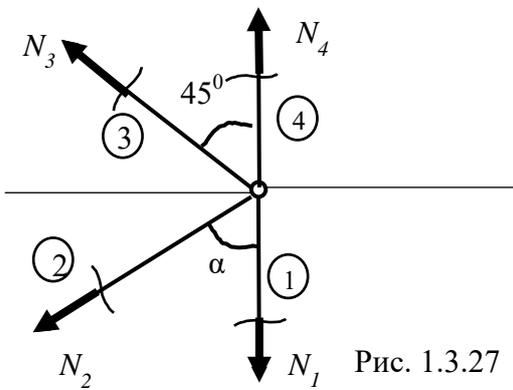


Рис. 1.3.27

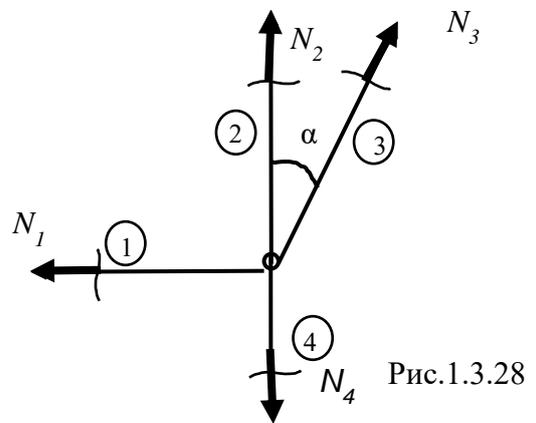


Рис. 1.3.28

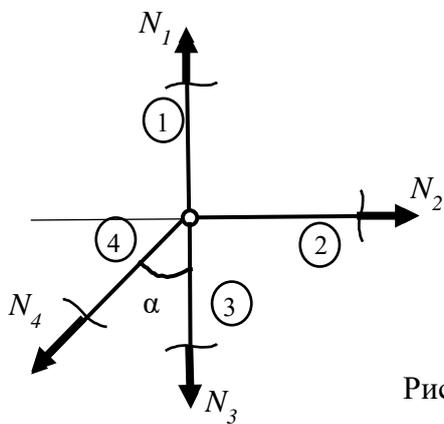


Рис. 1.3.29

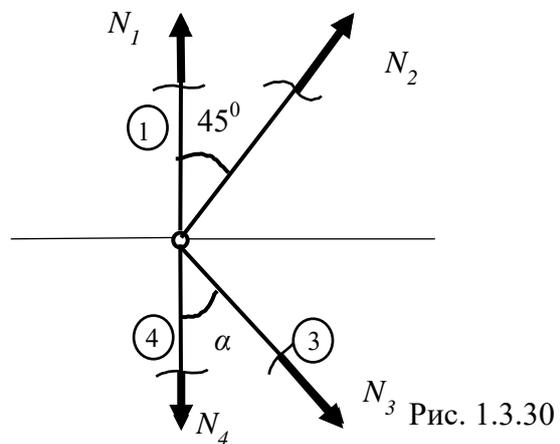


Рис. 1.3.30

Таблица 1.3

Данные для вариантов

Номер варианта (рисунка)	Усилие, кН				Угол
	N_1	N_2	N_3	N_4	$\alpha, ^\circ$
1 (1.3.1)	170	-	200	-	30
2 (1.3.2)	160	-	-	270	20
3 (1.3.3)	220	190	-	-	70
4 (1.3.4)	240	-	-	180	40
5 (1.3.5)	160	-	-	280	50
6 (1.3.6)	-	200	-	250	60
7 (1.3.7)	190	300	-	-	65
8 (1.3.8)	150	170	-	-	30
9 (1.3.9)	140	-	-	260	25
10 (1.3.10)	270	-	240	-	20
11 (1.3.11)	210	-	-	250	60
12 (1.3.12)	-	220	-	300	80
13 (1.3.13)	230	130	-	-	15
14 (1.3.14)	200	-	230	-	60
15 (1.3.15)	-	250	-	220	30
16 (1.3.16)	290	-	-	170	60
17 (1.3.17)	240	-	150	-	20
18 (1.3.18)	-	160	-	200	60
19 (1.3.19)	130	150	-	-	30
20 (1.3.20)	220	-	170	-	40
21 (1.3.21)	175	-	-	210	50
22 (1.3.22)	-	160	-	200	60
23 (1.3.23)	-	185	-	200	70
24 (1.3.24)	-	220	-	300	80
25 (1.3.25)	230	130	-	-	10
26 (1.3.26)	240	-	150	-	20
27 (1.3.27)	250	-	-	310	30
28 (1.3.28)	270	-	150	-	40
29 (1.3.29)	-	250	-	230	50
30 (1.3.30)	290	-	-	170	60

Примечание. Номер варианта соответствует номеру рисунка (например, в задаче 1.3 варианту 9 соответствует рис. 1.3.9).

Методические указания к решению задачи

1. Рассматривая равновесие заданного узла фермы, найти усилия во всех стержнях.

2. Из условия прочности при растяжении либо сжатии определить требуемые площади поперечного сечения стержней.

3. По таблице сортамента подобрать для каждого стержня по два равнополочных уголка и проверить процент перегрузки либо недогрузки принятых профилей (нормами допускается перегрузка 5 % либо недогрузка 10%).

4. Из уравнений равновесия каждого стержня найти усилия, приложенные к сварным швам.

5. Из условия прочности при срезе найти требуемые длины сварных фланговых швов, задавшись предварительно катетами швов.

6. Выполнить эскиз узла в масштабе 1:5 или 1:10.

Пример решения задачи

Исходные данные

Узел фермы изображен на рис. 1.3.31. Известны усилия $N_1 = 180 \text{ кН}$ и $N_3 = 120 \text{ кН}$; угол $\alpha = 60^\circ$, заданы допускаемое нормальное напряжения на $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ и допускаемое напряжение при срезе $[\tau_s] = 80 \text{ МПа}$. Для каждого из стержней подобрать по два равнополочных уголка и определить длины сварных фланговых швов.

Решение

1. Рассмотрим равновесие заданного узла. Составим уравнения равновесия для системы сходящихся сил:

$$\sum F_{ix} = 0 \Rightarrow N_4 - N_1 + N_3 \cos \alpha = 0 ;$$

$$\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow N_2 + N_3 \sin \alpha = 0 .$$

Из второго уравнения находим

$$N_2 = -N_3 \cdot \sin \alpha = -120 \cdot 0,866 = -104 \text{ кН},$$

то есть стержень сжат.

Из первого уравнения $N_4 = N_1 - N_3 \cdot \cos \alpha = 180 - 120 \cdot 0,5 = 120 \text{ кН}$,
то есть стержень растянут.

2. Из условия прочности при растяжении-сжатии находим требуемые площади поперечных сечений стержней $A_i, \text{м}^2$:

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{180 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 11,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{104 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_3 \geq \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{120 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_4 \geq \frac{N_4}{[\sigma]} = \frac{120 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Силы в этих вычислениях взяты по абсолютной величине.

3. По таблице сортамента (ГОСТ 8509-93) подбираем уголки, учитывая, что каждый стержень состоит из двух уголков:

- для первого стержня принимаем уголок № 6,3; $d = 5 \text{ мм}$; $A_L^I = 6,13 \text{ см}^2$;

- для второго — уголок № 4,5; $d = 4 \text{ мм}$; $A_L^{II} = 3,48 \text{ см}^2$;

- для третьего и четвертого берем одинаковые уголки № 5; $d = 4 \text{ мм}$;

$$A_L^{III} = A_L^{IV} = 3,89 \text{ см}^2.$$

Схема узла фермы

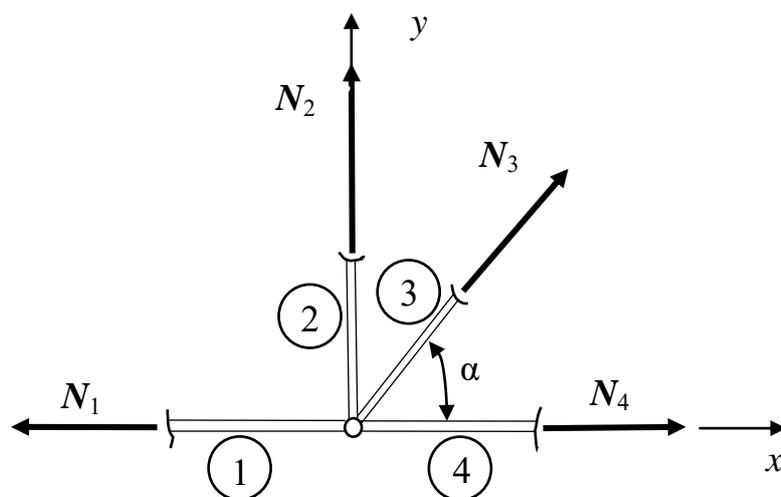


Рис. 1.3.31

При этом напряжения в стержнях составят σ_i , МПа:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2A_L^I} = \frac{180 \cdot 10^3}{2 \cdot 6,13 \cdot 10^{-4}} \frac{H}{M^2} \approx 147 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2A_L^{II}} = \frac{104 \cdot 10^3}{2 \cdot 3,48 \cdot 10^{-4}} \frac{H}{M^2} \approx 149 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{2A_L^{III}} = \frac{120 \cdot 10^3}{2 \cdot 3,89 \cdot 10^{-4}} \frac{H}{M^2} \approx 154 \text{ МПа};$$

$$N_1 \sigma_4 = \frac{N_4}{2A_L^{IV}} = \frac{120 \cdot 10^3}{2 \cdot 3,89 \cdot 10^{-4}} \frac{H}{M^2} \approx 154 \text{ МПа}.$$

Определяем процент перегрузки стержней по формуле, %:

$$\frac{\sigma_i - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% ;$$

$$\frac{\sigma_1 - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{147 - 160}{160} \cdot 100 \approx -8,1\%;$$

$$\frac{\sigma_2 - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{149 - 160}{160} \cdot 100 \approx -6,9\%;$$

$$\frac{\sigma_3 - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{154 - 160}{160} \cdot 100 \approx -3,8\%;$$

$$\frac{\sigma_4 - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{154 - 160}{160} \cdot 100 \approx -3,8\%.$$

Все стержни оказались недогруженными (нормами допускается недогрузка до 10 % либо перегрузка до 5 %). В нашем случае нормы не нарушены.

4. На рис. 1.3.32 изображены сварные швы на стержне № 1 и усилия в этих швах. Размеры z_0 и b берутся из сортамента для принятого уголка № 6,3:

$$b = 6,3 \text{ см}; \quad z_0 = 1,74 \text{ см}.$$

Рассматривая равновесие изображенного стержня, получаем

$$\sum F_{ix} = 0 \Rightarrow N_1 - 2F_{об} - 2F_n = 0;$$

$$\sum m_k = 0 \Rightarrow F_{об} \cdot z_0 - F_n(b - z_0) = 0,$$

отсюда усилия в швах на полке и на обушке

$$F_{об} = \frac{N_1(b - z_0)}{2b} = \frac{180 \cdot (6,3 - 1,74)}{2 \cdot 6,3} \approx 65,5 \text{ кН};$$

$$F_n = \frac{N_1 \cdot z_0}{2b} = \frac{180 \cdot 1,74}{2 \cdot 6,3} \approx 24,5 \text{ кН}.$$

5. Для фланговых швов, работающих на срез, условие прочности запишем в виде

$$\tau_{ср} = \frac{F_{ср}}{A_{ср}} \leq [\tau_9],$$

где $F_{ср}$ — усилие среза в сварном шве;

$A_{ср}$ — площадь среза, $A_{ср} = 0,7 k l_{ш}$, — катет шва;

$l_{ш}$ — расчетная длина шва.

Схема сварных швов

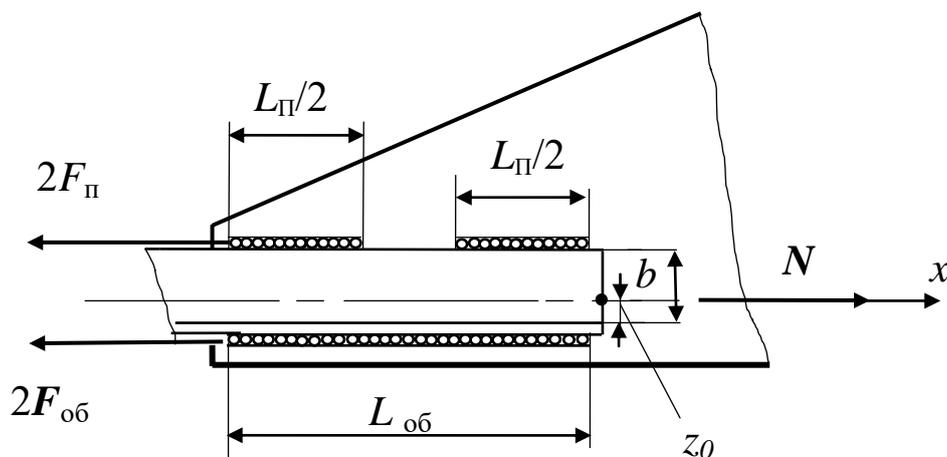


Рис. 1.3.32

Из условия прочности получаем расчетную формулу для требуемой длины шва:

$$l_{ш} \geq \frac{F_{cp}}{0,7k[\tau_s]}.$$

Задавшись катетами швов на полке и на обушке:

$$k_n = 0,5 \text{ см}; \quad k_{об} = 1,5 \quad d = 0,5 \cdot 1,5 = 0,75 \text{ см},$$

найдем $l_{об}$ и l_{II} :

$$l_{об} = \frac{F_{об}}{0,7 k_{об} [\tau_s]} = \frac{66,5 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 0,75 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot 10^6} \approx 0,158 \text{ м} = 158 \text{ мм};$$

$$l_{II} = \frac{F_n}{0,75 k_{II} [\tau_s]} = \frac{24,5 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot 10^6} = 0,088 \text{ м} = 88 \text{ мм}.$$

Расчетные длины швов увеличивают на 1–2 см из-за непровара в начале и в конце шва, одновременно округляя их до целого числа сантиметров. Меньший шов нужно выполнить прерывистым для исключения изгибающих моментов, разделив его на 2 части так, чтобы края швов находились одном уровне.

Тогда

$$L_{об} = l_{об} + (1 \dots 2) \text{ см} = 15,8 + 1,7 = 17,5 \text{ см};$$

$$L_{II} = 2 \cdot \left[\frac{l_n}{2} + (1 \dots 2) \text{ см} \right] = 2 \cdot [4,4 + 1,15] = 11,1 \text{ см}.$$

Изобразим узел в масштабе 1:5 или 1:2 с нанесением всех размеров (см. рис. 1.3.33).

Схема узла фермы

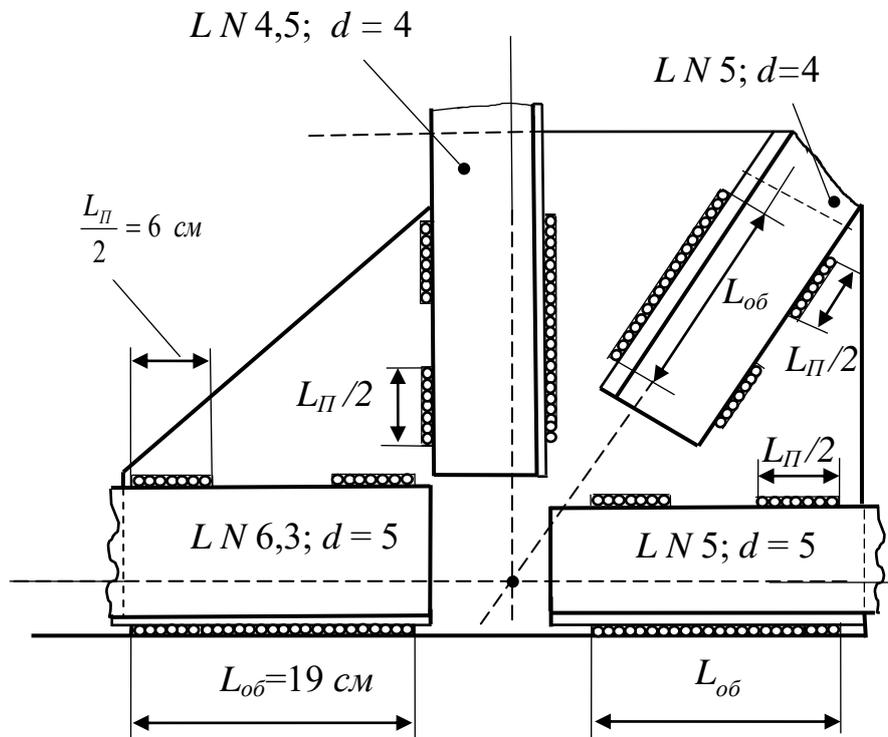


Рис. 1.3.33

Задание №2. Геометрические характеристики плоских сечений.

Кручение

Задача 2.1. Определение геометрических характеристик несимметричного составного сечения

Исходные данные

Для заданного составного сечения, состоящего из двух стандартных прокатных профилей, *требуется:*

- 1) определить положение центра тяжести;
- 2) найти значения осевых и центробежных моментов инерции относительно вертикальной и горизонтальной осей, проходящих через центр тяжести (z_c и y_c);
- 3) определить направление главных центральных осей u и v ;
- 4) вычислить главные центральные моменты инерции;
- 5) вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все размеры в числах и все оси.

Схемы к задаче 2.1

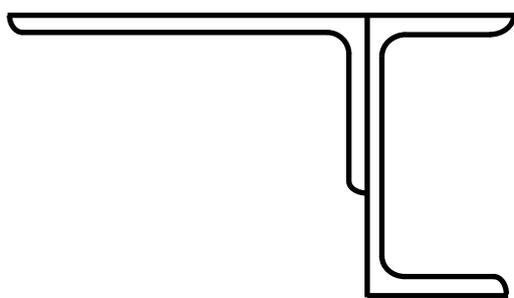


Рис. 2.1.1

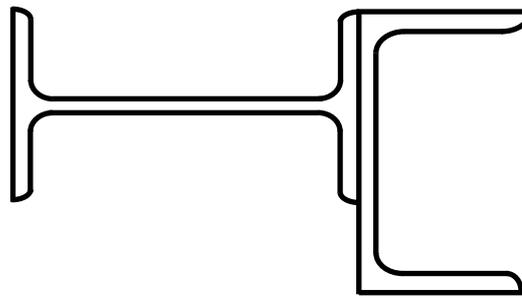


Рис. 2.1.2

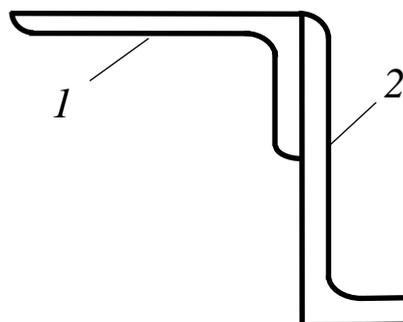


Рис. 2.1.3

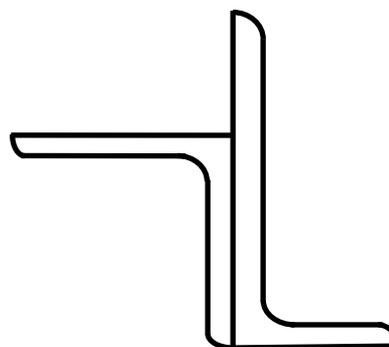


Рис. 2.1.4

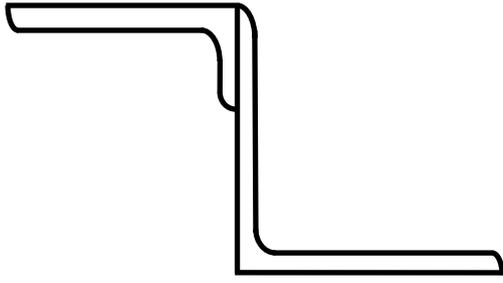


Рис. 2.1.5

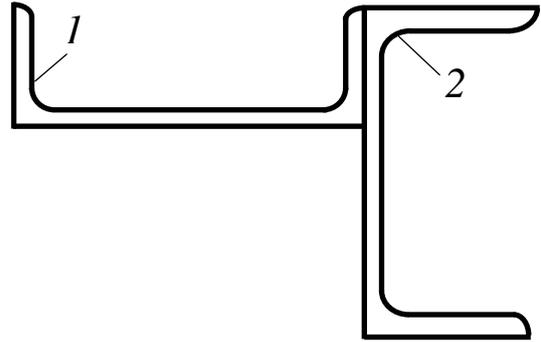


Рис. 2.1.6

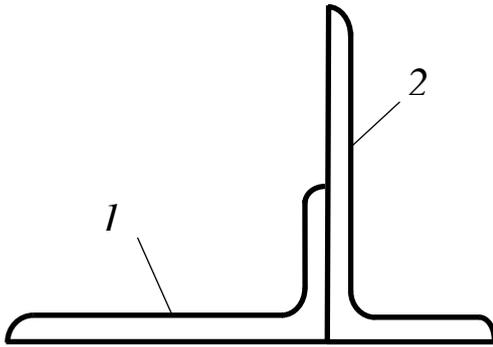


Рис. 2.1.7

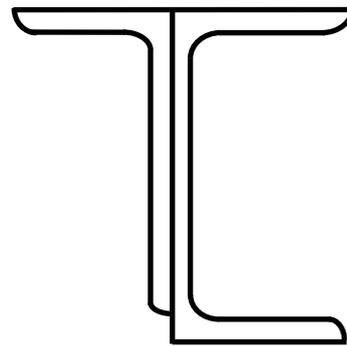


Рис. 2.1.8

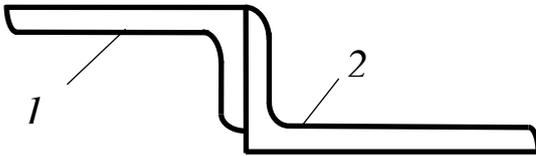


Рис. 2.1.9

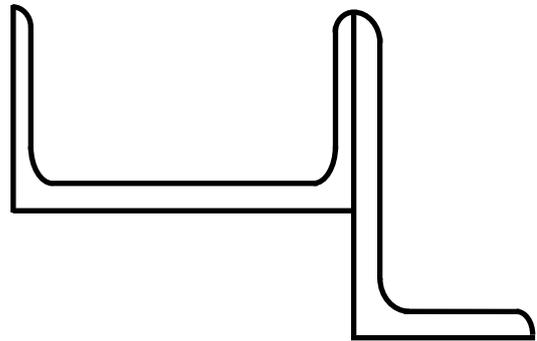


Рис. 2.1.10

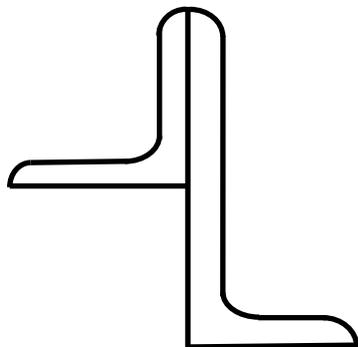


Рис. 2.1.11

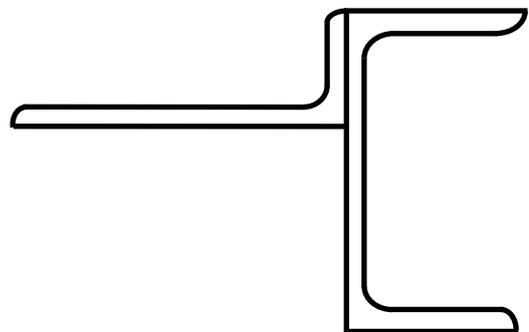


Рис. 2.1.12

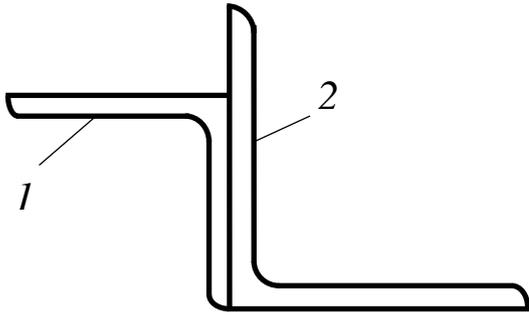


Рис. 2.1.13

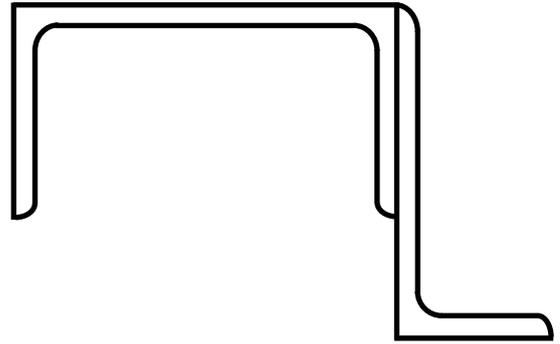


Рис. 2.1.14

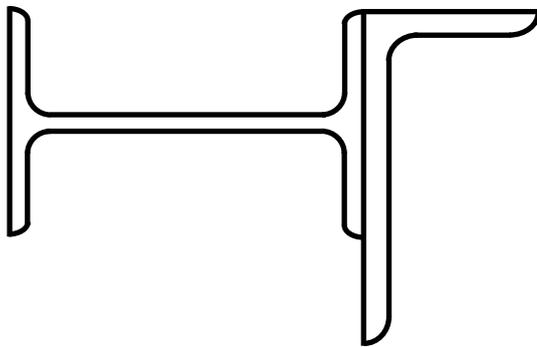


Рис. 2.1.15

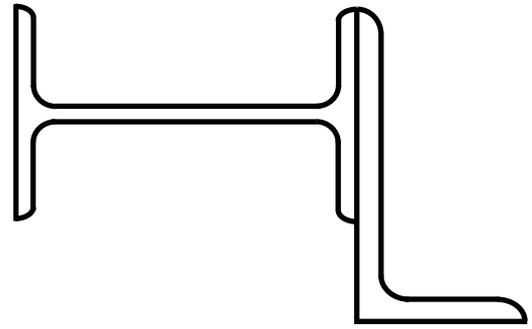


Рис. 2.1.16

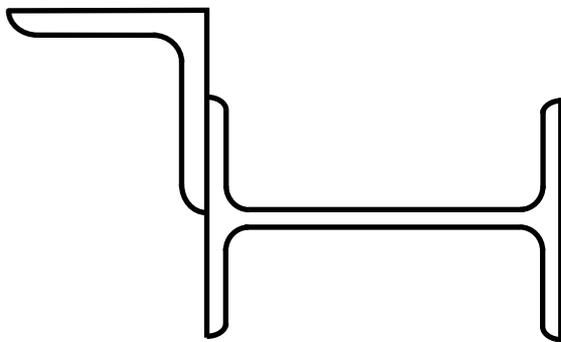


Рис. 2.1.17

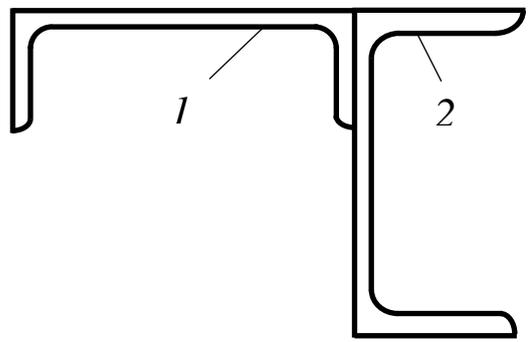


Рис. 2.1.18

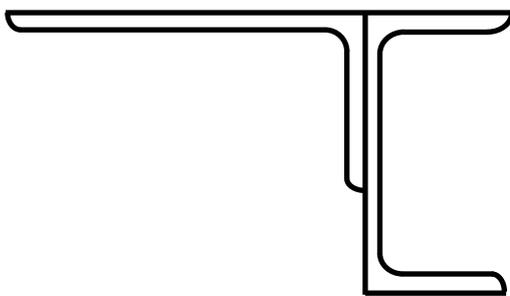


Рис. 2.1.19

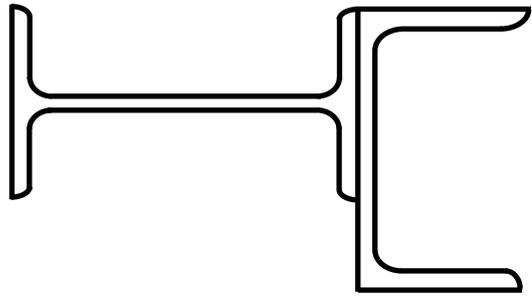


Рис. 2.1.20

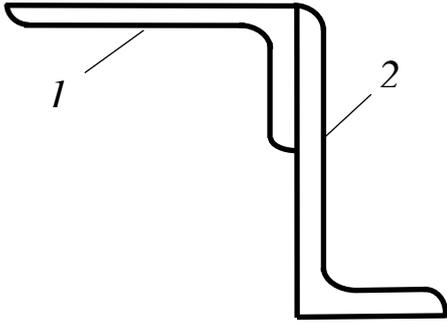


Рис. 2.1.21

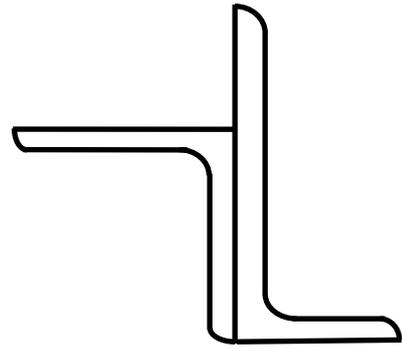


Рис. 2.1.22

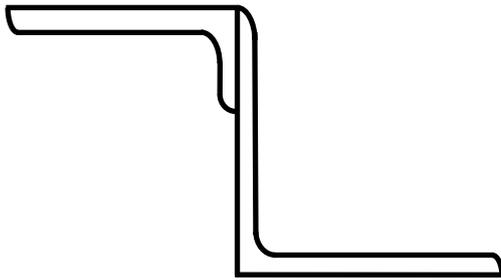


Рис. 2.1.23

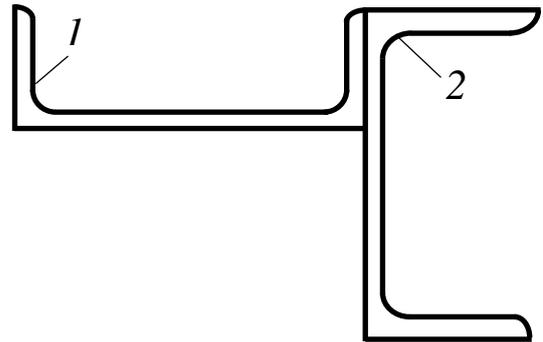


Рис. 2.1.24

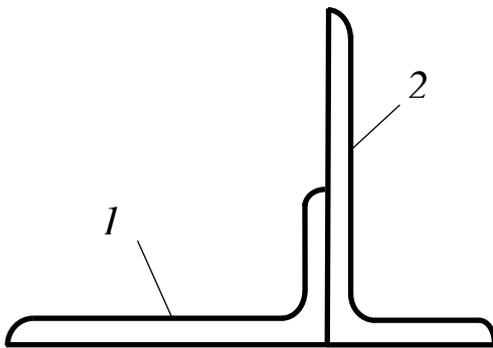


Рис. 2.1.25

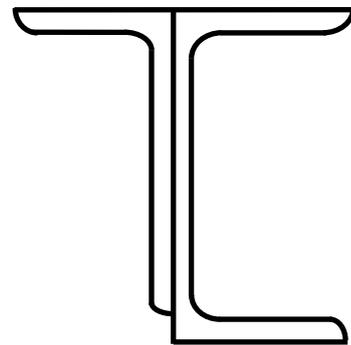


Рис. 2.1.26

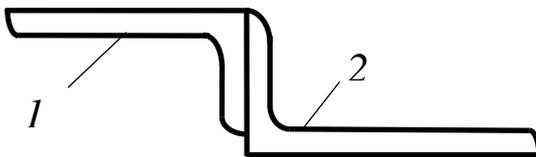


Рис. 2.1.27

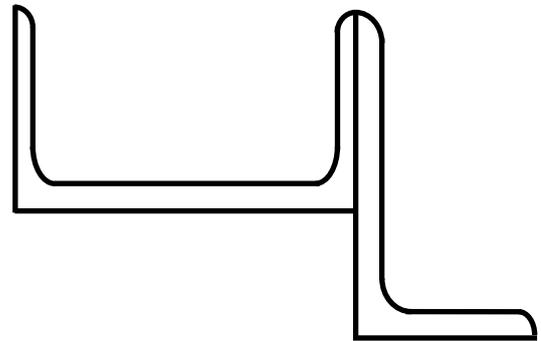


Рис. 2.1.28

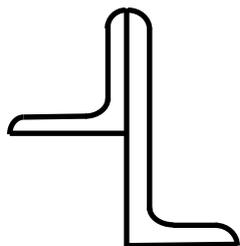


Рис. 2.1.29

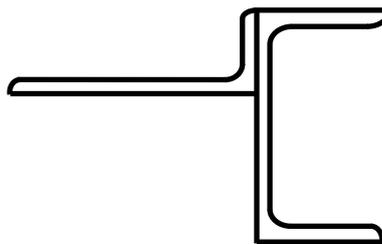


Рис. 2.1.30

Таблица 2.1

Данные для вариантов

Номер варианта (рисунка)	Двутавр	Швеллер 1	Швеллер 2	Неравнополочный уголок 1	Неравнополочный уголок 2	Равнополочный уголок 1	Равнополочный уголок 2
1 (2.1.1)	16	20	10	8/5	6,3/4,0	8	5
2 (2.1.2)	18	20	12	8/5	6,3/4,0	9	5
3 (2.1.3)	18а	22	14	9/5,6	7/4,5	10	5,6
4 (2.1.4)	20	22	14	10/6,3	7,5/5	11	6,3
5 (2.1.5)	20а	24	16	11/7	8/5	12,5	7
6 (2.1.6)	22	24	16а	12,5/8	9/5,6	14	7,5
7 (2.1.7)	22а	27	18	14/9	10/6,3	16	8
8 (2.1.8)	24	30	18а	16/10	11/7	18	9
9 (2.1.9)	24а	33	20	18/11	12,5/8	20	10
10 (2.1.10)	27	36	20	20/12,5	14/9	22	11
11 (2.1.11)	27а	40	22	25/16	16/10	25	12,5
12 (2.1.12)	12	20	8	8/5	6,3/4,0	8	5,6
13 (2.1.13)	14	20	10	9/5,6	7/4,5	9	6,3
14 (2.1.14)	16	22	12	10/6,3	6,3/4,0	10	7
15 (2.1.15)	30	22	14	11/7	7/4,5	11	7,5
16 (2.1.16)	30а	24	14	12,5/8	8/5	12,5	8
17 (2.1.17)	33	24	16	14/9	9/5,6	14	9
18 (2.1.18)	36	27	16а	16/10	10/6,3	16	10
19 (2.1.19)	40	30	18	18/11	11/7	18	11
20 (2.1.20)	45	33	18а	20/12,5	12,5/8	20	12,5
21 (2.1.21)	50	36	20	25/16	14/9	22	14
22 (2.1.22)	55	40	20	25/16	16/10	25	16
23 (2.1.23)	24	20	14	10/6,3	6,3/4	10	7
24 (2.1.24)	24а	20	18	11/7	7/4,5	11	7,5
25 (2.1.25)	27	22	16	12,5/8	7,5/5	12,5	8
26 (2.1.26)	27а	22	18	14/9	8/5	14	9
27 (2.1.27)	30	24	20	16/10	9,5/6	16	10
28 (2.1.28)	30а	24	20	18/11	10/6,3	18	11
29 (2.1.29)	33	27	22	20/12,5	11/7	20	12,5
30 (2.1.30)	36	30	18а	25/16	12,5/8	22	14

Примечание. Номер варианта соответствует номеру рисунка (например, в задаче 2.1 варианту 6 соответствует рис. 2.1.6).

Методические указания к решению задачи

1. Если заданная схема состоит из *разнотипных* прокатных профилей, по таблице вариантов выбрать соответствующие профили под № 1.

Если заданная схема состоит из *однотипных* прокатных профилей, по таблице вариантов выбрать соответствующие профили под № 1 и 2.

2. Выполнение задания необходимо начинать с разбивки составного сечения на части (I и II), для каждой из которых по таблице сортамента выбрать все необходимые геометрические характеристики.

3. Для определения положения центра тяжести сечения в качестве базовых осей удобно принять центральные оси одной из составных частей сечения.

4. При нахождении осевых и центробежного моментов инерции относительно вертикальной и горизонтальной осей, проходящих через центр тяжести (z_c и y_c), необходимо использовать формулы изменения геометрических характеристик при параллельном переносе координатных осей.

5. При определении направления главных центральных осей откладываем найденные углы от положительного направления оси z_c (положительный угол — против хода часовой стрелки, отрицательный — по ходу часовой стрелки).

Проведенную под этим углом ось обозначим через u . Другая главная центральная ось перпендикулярна к ней. Если $J_{z_c} > J_{y_c}$, то $J_u = J_{max}$, а $J_v = J_{min}$. Если $J_{z_c} < J_{y_c}$, то $J_u = J_{min}$, а $J_v = J_{max}$.

6. Значения главных центральных моментов инерции J_u и J_v удобно определять независимо от установленного ранее положения главных центральных осей по формуле

$$J_{\begin{matrix} max \\ min \end{matrix}} = \frac{J_{z_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{z_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{z_c y_c}^2}.$$

Далее, зная J_{max} и J_{min} , можно проверить положение главных центральных осей по формулам

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{z_c y_c}}{J_{y_c} - J_{max}}; \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{J_{z_c y_c}}{J_{y_c} - J_{min}}.$$

7. После выполнения всех вычислений необходимо вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все размеры в миллиметрах и все оси.

Пример решения задачи

Исходные данные

Заданное сечение (рис. 2.1.31) разбиваем на составные части: неравнополочный уголок I и швеллер II.

Для неравнополочного уголка № 12,5/80: $A_{y_2} = 19,7 \text{ см}^2$; координаты центра тяжести $z_0 = 4,14 \text{ см}$; $y_0 = 1,92 \text{ см}$; $J_{z_1}^I = 100 \text{ см}^4$; $J_{y_1}^I = 312 \text{ см}^4$; $J_{y_1}^I = 59,3 \text{ см}^4$; $\operatorname{tg} \alpha = 0,404$.

Для швеллера № 20а $A_{y_2} = 25,2 \text{ см}^2$; $x_0 = 2,28 \text{ см}$; $J_{z_2}^{II} = 1670 \text{ см}^4$; $J_{y_2}^{II} = 139 \text{ см}^4$.

Решение

Для того чтобы найти положение центра тяжести фигуры, в качестве базовых выбираем центральные оси z_2 и y_2 швеллера. Относительно этих осей статические моменты площади сечения швеллера равны нулю, поэтому вычисление координат центра тяжести фигуры упрощается.

Статические моменты всего сечения относительно осей z_2 и y_2 равны:

$$S_{z_2} = A_{y_2} \cdot y_1 = 19,7 (10 - 1,92) = 19,7 \cdot 8,08 \approx 159,2 \text{ см}^3;$$

$$S_{y_2} = A_{y_2} \cdot z_1 = -19,7 (4,14 + 2,28) \approx -126,5 \text{ см}^3.$$

Составное сечение

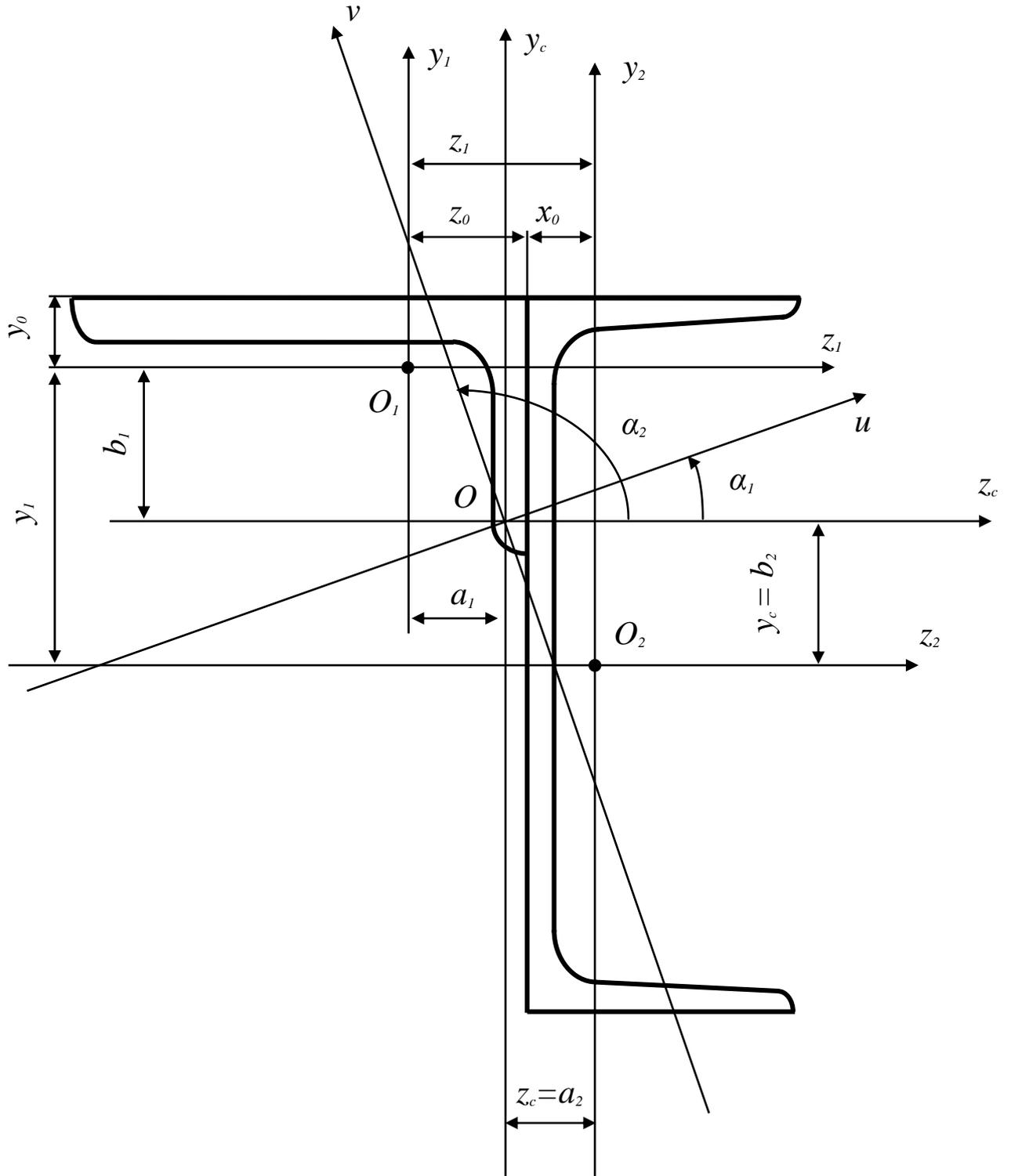


Рис. 2.1.31

Площадь составного сечения

$$A = A_{y_2} + A_{u_1} = 19,7 + 25,2 = 44,9 \text{ см}^2.$$

Координаты центра тяжести составного сечения относительно осей z_2 и y_2 :

$$y_c = \frac{S_{z_2}}{A} = \frac{159,2}{44,9} = 3,55 \text{ см};$$

$$z_c = \frac{S_{y_2}}{A} = \frac{126,5}{44,9} = -2,82 \text{ см}.$$

Определив координаты центра тяжести сечения, указываем его положение (точка O на рис. 2.1.31), пользуясь принятым масштабом. Через точку O проводим центральные оси для всего сечения z_c и y_c , параллельные осям z_2 и y_2 .

Для установления правильности определения центра тяжести составного сечения можно вычислить статические моменты всего сечения относительно центральных осей z_c и y_c .

При этом координаты центров тяжести отдельных частей сечения (точки O_1 и O_2) относительно осей z_c и y_c имеют следующие значения:

$$a_1 = z_1 - z_c = -6,42 + 2,82 = -3,6 \text{ см};$$

$$b_1 = y_1 - y_c = 8,08 - 3,55 = 4,53 \text{ см};$$

$$a_2 = z_2 - z_c = -6,42 + 2,82 = -3,6; \quad b_2 = -y_c = -3,55 \text{ см}.$$

Статические моменты:

$$S_{z_c} = A_{y_2} \cdot b_1 + A_{u_1} \cdot b_2 = 19,7 \cdot 4,53 - 25,2 \cdot 3,55 \approx 89,24 - 89,33 \approx 0;$$

$$S_{y_c} = A_{y_2} \cdot a_1 + A_{u_1} \cdot a_2 = 19,7 \cdot (-3,6) + 25,2 \cdot 2,82 \approx -70,92 + 71,04 \approx 0.$$

Полученные значения статических моментов S_{z_c} и S_{y_c} примерно равны нулю. Это свидетельствует о том, что координаты центра тяжести всего сечения определены достаточно точно.

Определим осевые моменты инерции составного сечения относительно центральных осей z_c и y_c :

$$J_{z_c} = J_{z_c}^I + J_{z_c}^{II}; \quad J_{y_c} = J_{y_c}^I + J_{y_c}^{II},$$

где

$$J_{z_c}^I = J_{z_1}^I + A_{y_2} \cdot b_1^2 = 100 + 19,7 \cdot 4,53^2 \approx 504 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_c}^{II} = J_{z_2}^{II} + A_{u_1} \cdot b_2^2 = 1670 + 25,2 \cdot (-3,55)^2 \approx 1988 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c}^I = J_{y_1}^I + A_{y_2} \cdot a_1^2 = 312 + 19,7 \cdot (-3,6)^2 \approx 567 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c}^{II} = J_{y_2}^{II} + A_{u_1} \cdot a_2^2 = 139 + 25,2 \cdot 2,82^2 \approx 339 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_c} = 504 + 1988 = 2492 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c} = 567 + 339 = 906 \text{ см}^4.$$

Вычислим центробежный момент инерции составного сечения относительно центральных осей z_c и y_c :

$$J_{z_c y_c} = J_{z_c y_c}^I + J_{z_c y_c}^{II},$$

где $J_{z_c y_c}^I = J_{z_1 y_1}^I + A_{y_2} \cdot a_1 \cdot b_1$; $J_{z_c y_c}^{II} = J_{z_2 y_2}^{II} + A_{u_1} \cdot a_2 \cdot b_2$.

Для уголка центробежный момент инерции относительно собственных центральных осей z_1 и y_1 определим по формуле

$$J_{z_1 y_1}^I = \pm \sqrt{(J_{z_1}^I - J_{min}^I)(J_{y_1}^I - J_{min}^I)} = -\sqrt{(100 - 59,3) \cdot (312 - 59,3)} \approx -101,5 \text{ см}^4,$$

где $J_{min}^I = J_{y_1}^I$, а перед корнем удерживается знак «-», так как ось с максимальным моментом инерции проходит через первый и третий квадранты.

Центробежный момент инерции уголка относительно собственных центральных осей z_1 и y_1 можно вычислить по формуле

$$J_{z_1 y_1}^I = (J_{z_1}^I - J_{max}^I) \operatorname{tg} \alpha = (100 - 352,7) \cdot 0,404 \approx -102 \text{ см}^4,$$

где $J_{max}^I = J_{z_1}^I = J_{z_1}^I + J_{y_1}^I - J_{y_1}^I = 312 + 100 - 59,3 = 352,7 \text{ см}^4$.

Для швеллера $J_{z_2 y_2}^{II} = 0$. Тогда

$$J_{z_c y_c} = J'_{z_1 y_1} + A_{y_2} \cdot a_1 \cdot b_1 + A_u \cdot a_2 \cdot b_2 = -102 + \\ + 19,7 \cdot (-3,6) \cdot 4,53 + 25,2 \cdot 2,82 \cdot (-3,55) \approx -102 - 321 - 252 = -675 \text{ см}^4;$$

Определим положение главных центральных осей составного сечения (угол их наклона к исходной оси z_c):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \frac{2J_{z_c y_c}}{J_{y_c} - J_{z_c}} = -\frac{2 \cdot 675}{906 - 2492} \approx 0,8512,$$

откуда $\alpha_1 = 20^\circ 12'$; $\alpha_2 = 110^\circ 12'$.

Таким образом, положение главной центральной оси u определяется поворотом оси z_c против хода часовой стрелки на угол $\alpha_1 = 20^\circ 12'$. Соответственно другая главная центральная ось v образует с осью z_c угол $\alpha_2 = 110^\circ 12'$ (см. рис. 2.1.31).

Главные центральные моменты инерции составного сечения определяем по формуле

$$J_{max} = J_u = \frac{J_{z_c} + J_{y_c}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{z_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{z_c y_c}^2} = \frac{2492 + 906}{2} + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{(2492 - 906)^2 + 4 \cdot 675^2} \approx 1699 + 1041 = 2740 \text{ см}^4; \\ J_{min} = J_v = \frac{J_{z_c} + J_{y_c}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_{z_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{z_c y_c}^2} \approx 1699 - 1041 = 658 \text{ см}^4.$$

Проверим равенство:

$$J_{max} + J_{min} = J_{z_c} + J_{y_c}; \\ 2740 + 658 = 2492 + 906; \\ 3398 = 3398.$$

Для более полной проверки правильности вычисления главных моментов инерции J_{max} и J_{min} определим с их помощью уже известный центробежный момент инерции составного сечения относительно осей z_c , y_c по формуле четырех осей:

$$J_{z_c y_c} = -\sqrt{J_{z_c} \cdot J_{y_c} - J_{max} \cdot J_{min}} = -\sqrt{2492 \cdot 906 - 2750 \cdot 658} \approx -670 \text{ см}^4.$$

Ранее подсчитанный центробежный момент инерции $J_{z_c y_c} = -675 \text{ см}^4$.

Таким образом, расхождение составляет

$$\frac{675 - 670}{675} \cdot 100\% \approx 0,74\%,$$

то есть ошибка лежит в пределах точности расчета.

Значения главных центральных моментов инерции J_u и J_v мы определяли, не используя установленного ранее положения главных центральных осей, которое можно теперь легко определить, зная значения J_u и J_v :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{z_c y_c}}{J_{y_c} - J_{max}} = -\frac{675}{906 - 2750} \approx 0,366,$$

откуда $\alpha_1 = 20^\circ 6'$;

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{J_{z_c y_c}}{J_{y_c} - J_{min}} = -\frac{675}{906 - 658} \approx -2,722.$$

Отсюда $\alpha_2 = 110^\circ 8'$.

Вновь подсчитанные значения углов α_1 и α_2 достаточно точно совпадают с определенными ранее.

Задача 2.2. Кручение круглого вала

Исходные данные

Стальной вал скручивается моментами M_1 , M_2 , M_3 , M_4 и M_5 , которые уравновешиваются моментом M_0 .

Требуется:

- 1) определить значение и направление уравновешивающего момента M_0 ;
- 2) построить эпюру крутящих моментов;
- 3) при заданном значении $[\tau]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его до ближайшего большего значения, кратного 5,0 мм;
- 4) построить эпюру углов закручивания, отсчитывая углы от того сечения вала, в котором приложен момент M_0 ;
- 5) найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 м длины).

Данные взять из схемы и таблицы вариантов.

Схемы к задаче 2.2

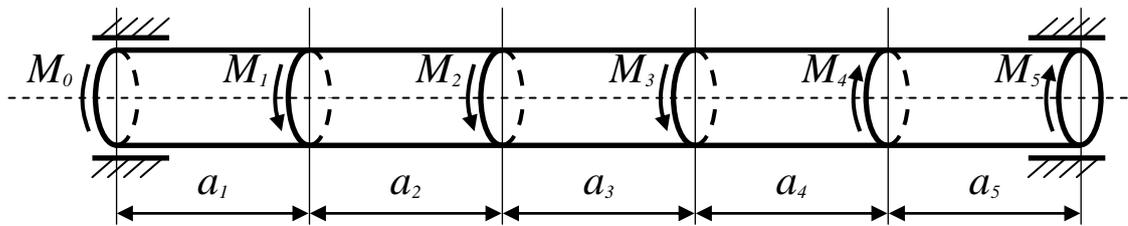


Рис. 2.2.1

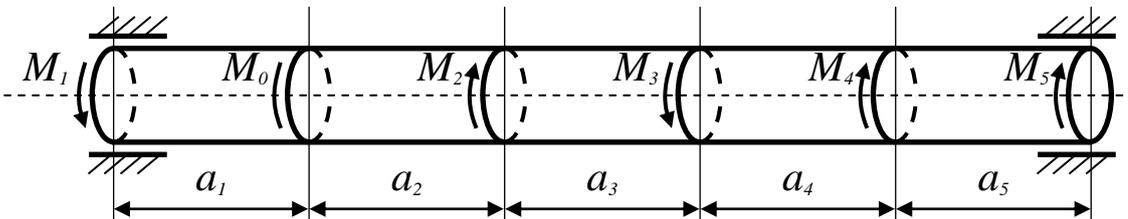


Рис. 2.2.2

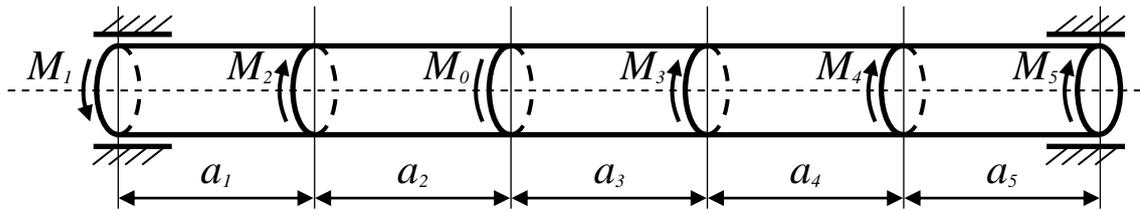


Рис. 2.2.3

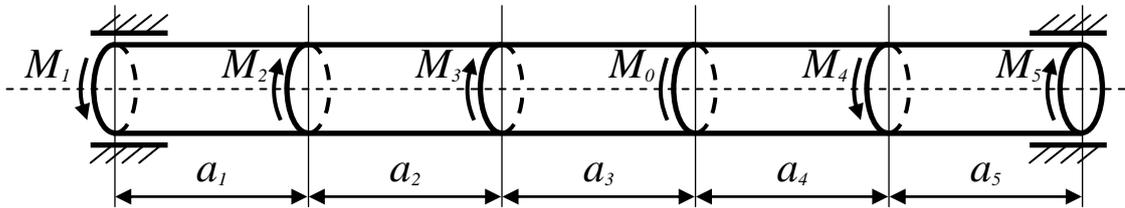


Рис. 2.2.4

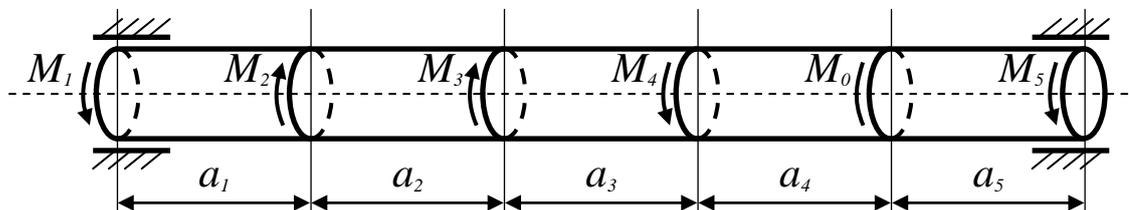


Рис. 2.2.5

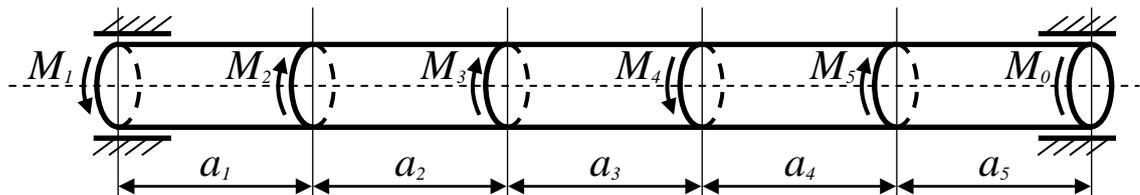


Рис. 2.2.6

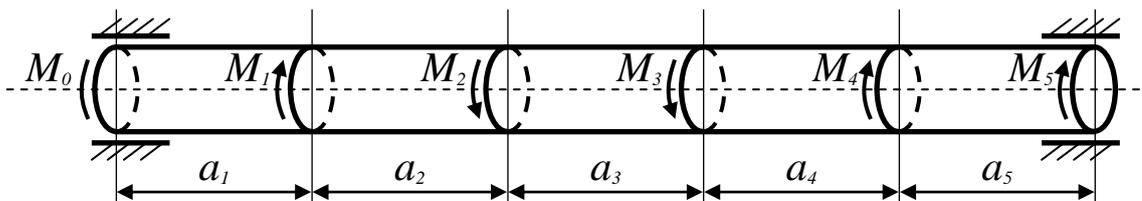


Рис. 2.2.7

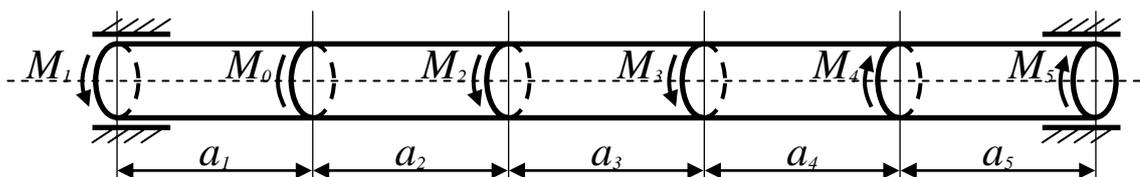


Рис. 2.2.8

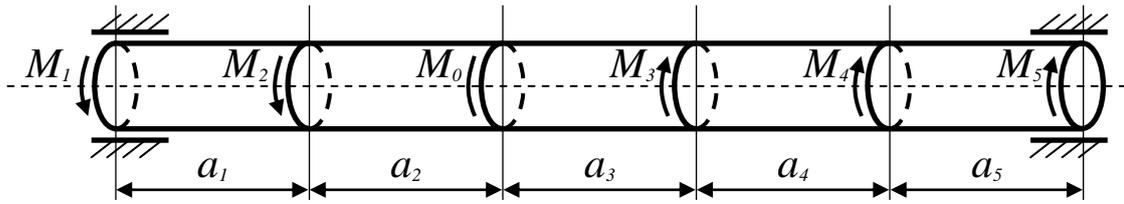


Рис. 2.2.9

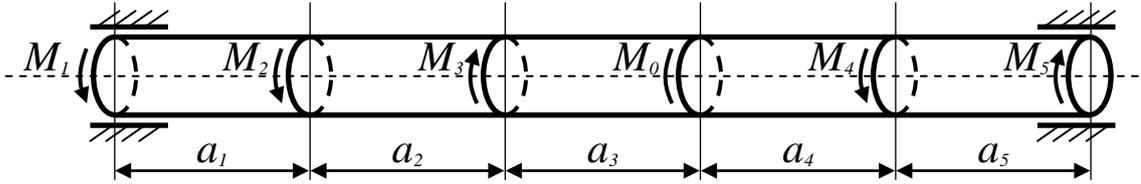


Рис. 2.2.10

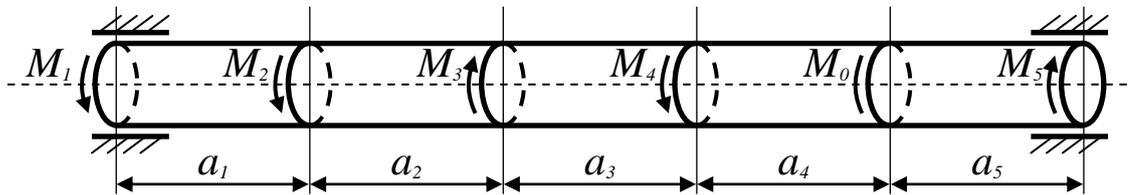


Рис. 2.2.11

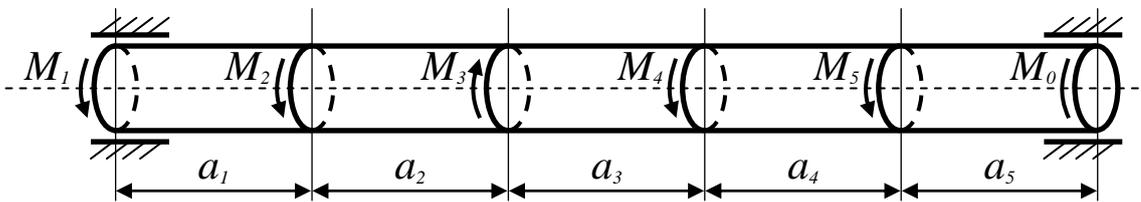


Рис. 2.2.12

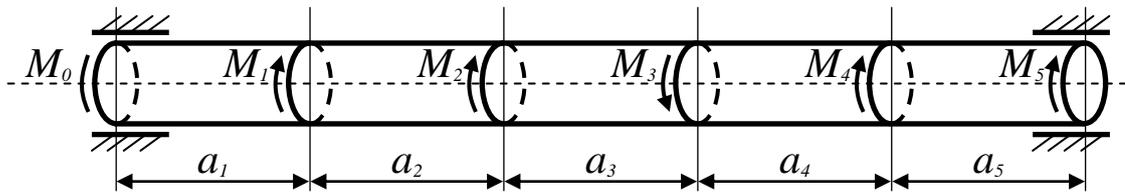


Рис. 2.2.13

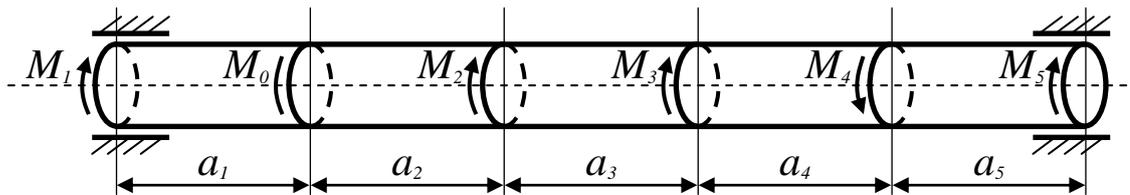


Рис. 2.2.14

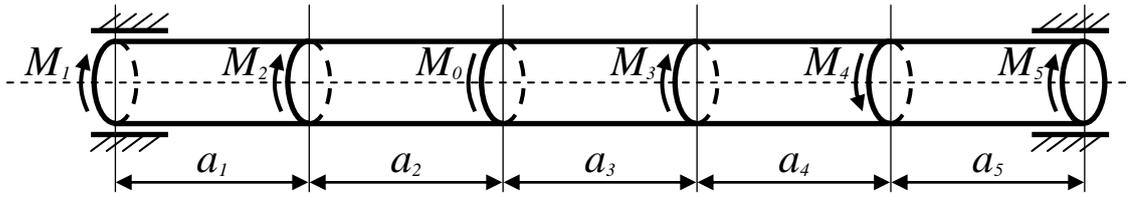


Рис. 2.2.15

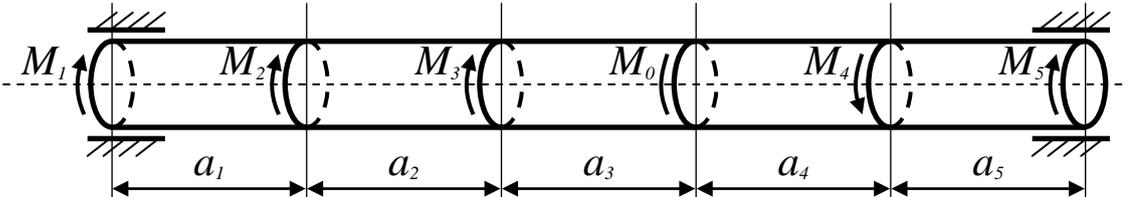


Рис. 2.2.16

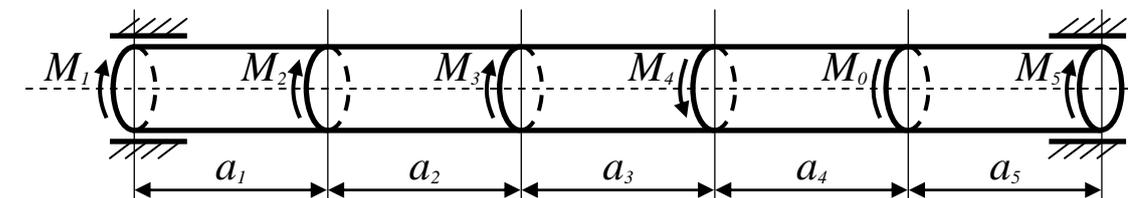


Рис. 2.2.17

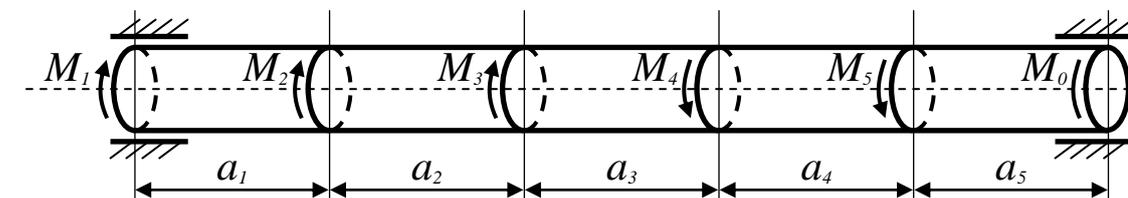


Рис. 2.2.18

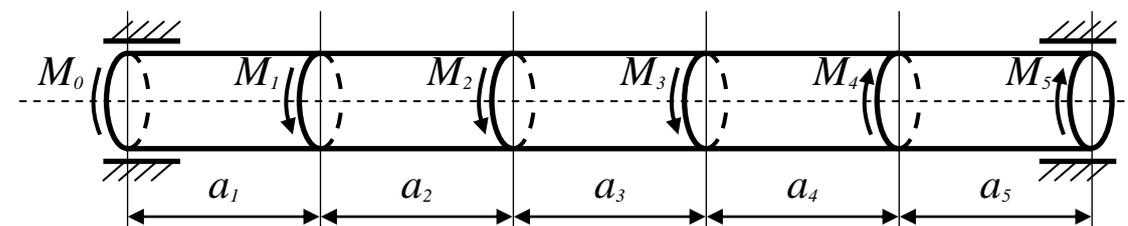


Рис. 2.2.19

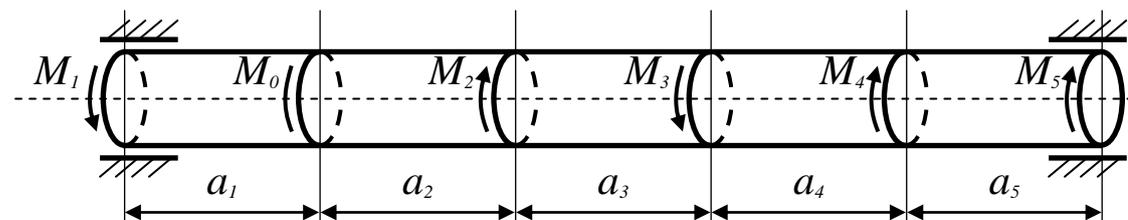


Рис. 2.2.20

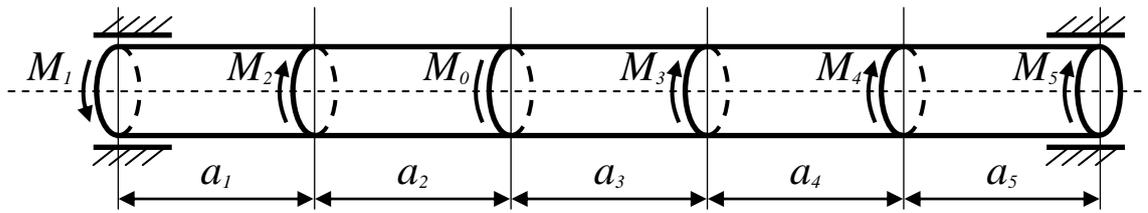


Рис. 2.2.21

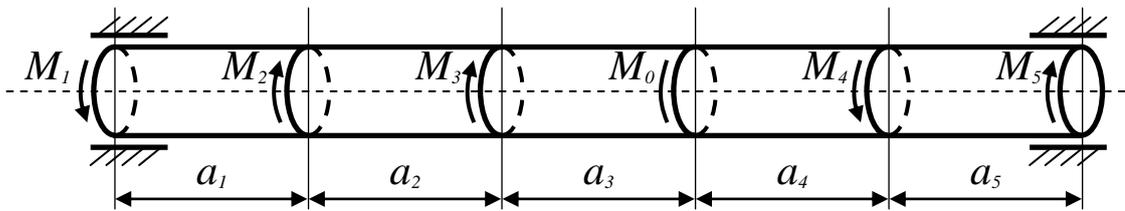


Рис. 2.2.22

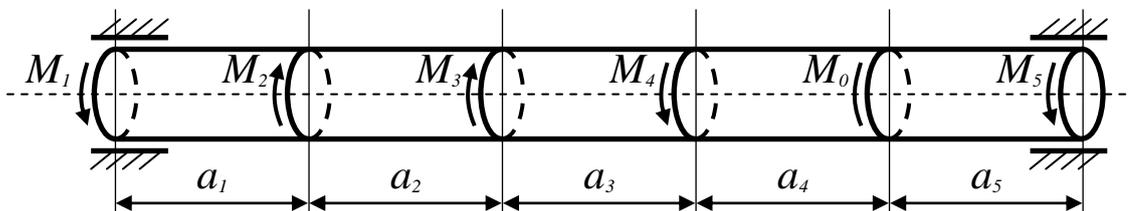


Рис. 2.2.23

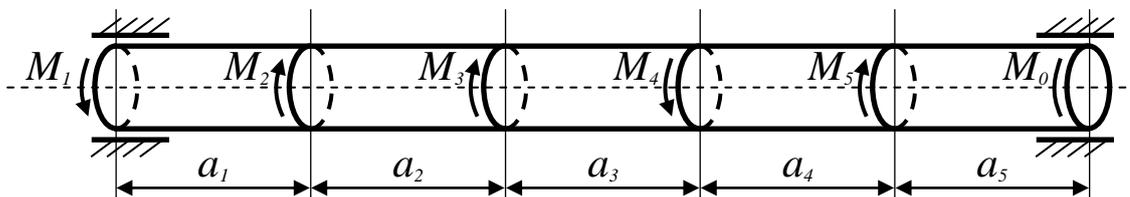


Рис. 2.2.24

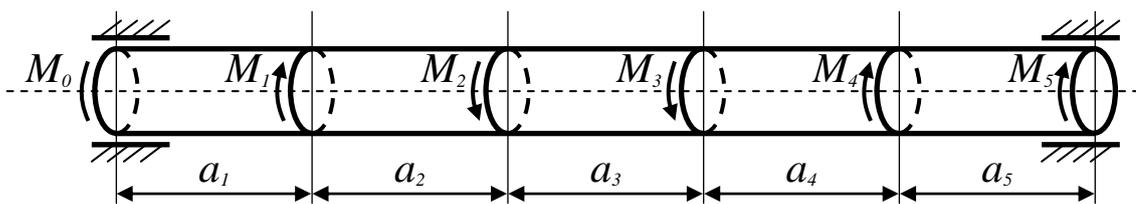


Рис. 2.2.25

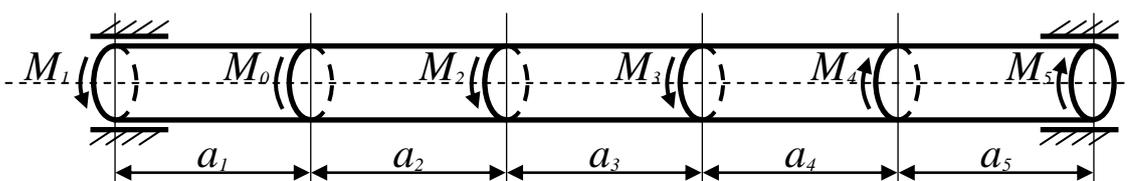


Рис. 2.2.26

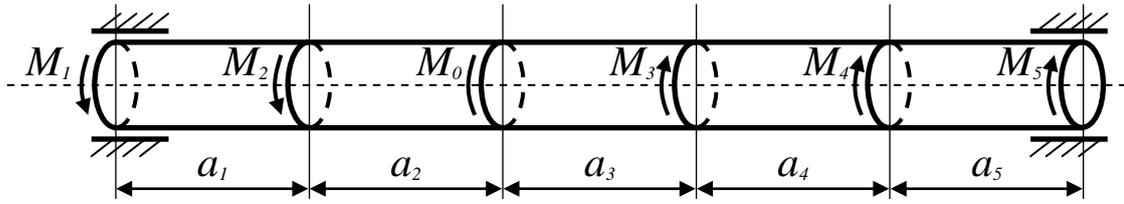


Рис. 2.2.27

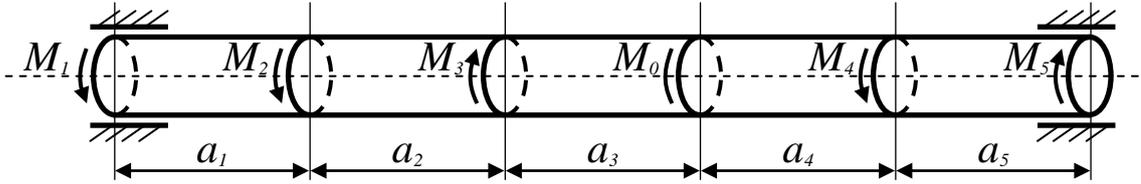


Рис. 2.2.28

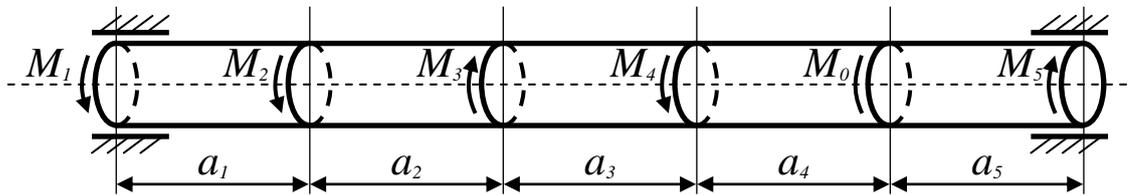


Рис. 2.2.29

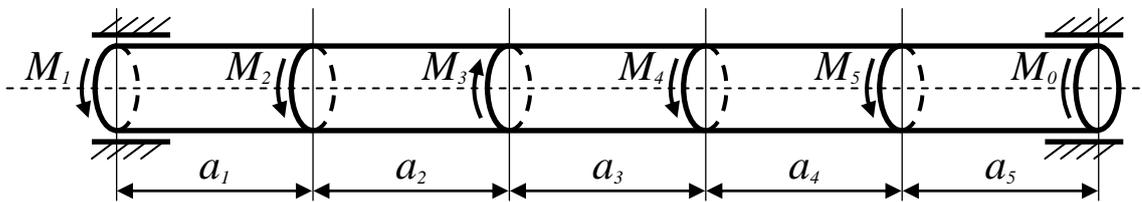


Рис. 2.2.30

Таблица 2.2

Данные для вариантов

Номер варианта (рисунка)	Моменты, $\text{кН}\cdot\text{м}$					Расстояние, м					$[\tau]$, МПа
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
1 (2.2.1)	2	1,2	1,3	1,4	1,5	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	30
2 (2.2.2)	1,2	2	1,3	1,4	1,5	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	35
3 (2.2.3)	1,2	1,3	2	1,4	1,5	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	40
4 (2.2.4)	1,2	1,3	1,4	2	1,5	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	45
5 (2.2.5)	1,2	1,3	1,4	1,5	2	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	50
6 (2.2.6)	2	1,3	1,4	1,5	1,6	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	55
7 (2.2.7)	1,3	2	1,4	1,5	1,6	0,20	0,19	0,18	0,17	0,16	60
8 (2.2.8)	1,3	1,4	2	1,5	1,6	0,19	0,18	0,17	0,16	0,15	65
9 (2.2.9)	1,3	1,4	1,5	2	1,6	0,18	0,17	0,16	0,15	0,14	70
10 (2.2.10)	1,3	1,4	1,5	1,6	2	0,17	0,16	0,15	0,14	0,13	75
11 (2.2.11)	2	1,4	1,5	1,6	1,7	0,16	0,15	0,14	0,13	0,12	80
12 (2.2.12)	1,4	2	1,5	1,6	1,7	0,15	0,14	0,13	0,12	0,11	85
13 (2.2.13)	1,4	1,5	2	1,6	1,7	0,12	0,11	0,13	0,14	0,15	90
14 (2.2.14)	1,4	1,5	1,6	2	1,7	0,13	0,12	0,14	0,15	0,16	95
15 (2.2.15)	1,4	1,5	1,6	1,7	2	0,14	0,13	0,15	0,16	0,17	100
16 (2.2.16)	2	1,5	1,4	1,3	1,2	0,15	0,14	0,16	0,17	0,18	30
17 (2.2.17)	1,5	2	1,4	1,3	1,2	0,16	0,15	0,17	0,18	0,19	35
18 (2.2.18)	1,5	1,4	2	1,3	1,2	0,17	0,16	0,18	0,19	0,20	40
19 (2.2.19)	2	1,3	1,4	1,5	1,6	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	55
20 (2.2.20)	1,3	2	1,4	1,5	1,6	0,20	0,19	0,18	0,17	0,16	60
21 (2.2.21)	1,3	1,4	2	1,5	1,6	0,19	0,18	0,17	0,16	0,15	65
22 (2.2.22)	1,3	1,4	1,5	2	1,6	0,18	0,17	0,16	0,15	0,14	70
23 (2.2.23)	1,3	1,4	1,5	1,6	2	0,17	0,16	0,15	0,14	0,13	75
24 (2.2.24)	2	1,4	1,5	1,6	1,7	0,16	0,15	0,14	0,13	0,12	80
25 (2.2.25)	1,4	2	1,5	1,6	1,7	0,15	0,14	0,13	0,12	0,11	85
26 (2.2.26)	1,4	1,5	2	1,6	1,7	0,12	0,11	0,13	0,14	0,15	90
27 (2.2.27)	1,4	1,5	1,6	2	1,7	0,13	0,12	0,14	0,15	0,16	95
28 (2.2.28)	1,4	1,5	1,6	1,7	2	0,14	0,13	0,15	0,16	0,17	100
29 (2.2.29)	2	1,5	1,4	1,3	1,2	0,15	0,14	0,16	0,17	0,18	30
30 (2.2.30)	1,5	2	1,4	1,3	1,2	0,16	0,15	0,17	0,18	0,19	35

Примечание. Номер варианта соответствует номеру рисунка (например, в задаче 2.2 варианту 3 соответствует рис. 2.2.3).

Методические указания к решению задачи

1. Вычертить схему условия задачи, выбрав для M_0 определенное направление (например, против хода часовой стрелки, если смотреть справа налево).

2. Составить уравнение равновесия скручивающих моментов:

$$\sum M_i = 0. \quad (2.2.1)$$

Моменты, вращающие в одну сторону, берутся с одинаковыми знаками (например, моменты, вращающие по ходу часовой стрелки, если смотреть справа налево, берутся со знаком «+»).

3. Решая уравнение равновесия, найти M_0 . Если $M_0 > 0$, то принятое направление вращения момента M_0 правильное. Если $M_0 < 0$, то направление вращения момента M_0 противоположно тому, которое было принято.

4. Вычертить схему вала, изобразив на ней скручивающие моменты, включая M_0 , и указать на ней значение моментов.

5. Используя метод сечений, на каждом из участков вычислить крутящий момент. Скручивающие моменты, вращающие по ходу часовой стрелки, если смотреть на торец оставленной части вала, берутся со знаком «+». Построить эпюру крутящих моментов.

6. Из условия прочности найти диаметр вала

$$\max \tau = \frac{M_{\kappa}}{W_p} \leq [\tau], \quad (2.2.2)$$

где M_{κ} — абсолютная величина наибольшего значения крутящего момента, а полярный момент сопротивления

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}. \quad (2.2.3)$$

После вычисления d округляем его значение в большую сторону до величины, кратной 0,005 м. Например, при $d \geq 0,0612$ м принимаем $d = 0,065$ м; при $d \geq 0,0481$ м принимаем $d = 0,050$ м.

7. На каждом участке вычисляем угол закручивания как угол взаимного поворота сечений — границ участков по формуле

$$\varphi^{(i)} = \frac{M_{\kappa}^{(i)} a_i}{G J_p}, \quad (2.2.4)$$

где G — модуль сдвига, для стали принимаем $G = 8 \cdot 10^4$ МПа;
полярный момент инерции

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad (2.2.5)$$

(при этом знак $\varphi^{(i)}$ определяется знаком $M_{\kappa}^{(i)}$).

Принимаем сечение вала, в котором приложен уравнивающий момент M_0 , неподвижным. Тогда в этом сечении $\varphi = 0$.

Строим эпюру углов закручивания. На каждом из участков эпюры будет линейной, поэтому для ее построения достаточно вычислить значения взаимных поворотов сечений на границах участков по формуле (2.2.4).

Границы участков удобно обозначать последовательно слева направо буквами A, B, C, D, E, N . Пронумеруем участки $AB - (1)$; $BC - (2)$; $CD - (3)$; $DE - (4)$; $EN - (5)$.

Для одной любой части вала (например, правой) знак φ меняется на противоположный, так как крутящий момент меняет знак в зависимости от того, с какой стороны на него смотреть. Так как за начало отсчета принято сечение, где приложен M_0 , то мы движемся по валу от этого сечения в две разные стороны, суммируя углы закручивания. Поэтому для одной из частей вала знак φ нужно поменять на противоположный.

Пусть уравнивающий момент M_0 приложен в сечении D . Тогда углы взаимного поворота сечений границ участков вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_{ED} &= -\varphi^{(4)}; \\ \varphi_{ND} &= -(\varphi_{ED} + \varphi_{NE}) = -(\varphi^{(4)} + \varphi^{(5)}); \\ \varphi_{CD} &= \varphi^{(3)}; \\ \varphi_{BD} &= \varphi_{CD} + \varphi_{BC} = \varphi^{(3)} + \varphi^{(2)}; \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

$$\varphi_{AD} = \varphi_{CD} + \varphi_{BC} + \varphi_{AB} = \varphi^{(3)} + \varphi^{(2)} + \varphi^{(1)}.$$

В формулах (2.2.6) суммы алгебраические, то есть туда нужно подставлять значения всех углов со своими знаками.

Вычисленные значения в масштабе откладываем на эпюре углов закручивания: положительные — над базовой линией, отрицательные — под ней. Соединим прямыми линиями значения углов закручивания на рядом расположенных границах участков.

8. Относительный угол закручивания вычисляется по формуле

$$\theta^{(i)} = \frac{|M_{\kappa}^{(i)}|}{GJ_p}. \quad (2.2.7)$$

Наибольший относительный угол закручивания будет на том участке, где $M_{\kappa}^{(i)}$ наибольшее.

Пример решения задачи

Приведем решение задачи: стальной вал скручивается моментами M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 , которые уравниваются моментом M_0 .

Исходные данные: $M_1 = 1,7 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_2 = 1,6 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_3 = 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$
 $M_4 = 1,4 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_5 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}; a_1 = 1,9 \text{ м}; a_2 = 1,7 \text{ м}; a_3 = 1,8 \text{ м}; a_4 = 1,6 \text{ м};$
 $a_5 = 2 \text{ м}; [\tau] = 100 \text{ МПа}.$

Решение

Вычерчиваем схему нагружения вала — условия задачи (см. рис. 2.2.31).

1. Определение значения и направления уравнивающего момента M_0 . Выбираем направление момента M_0 по ходу часовой стрелки, если смотреть справа налево вдоль оси вала. Изобразим его на рис. 2.2.31.

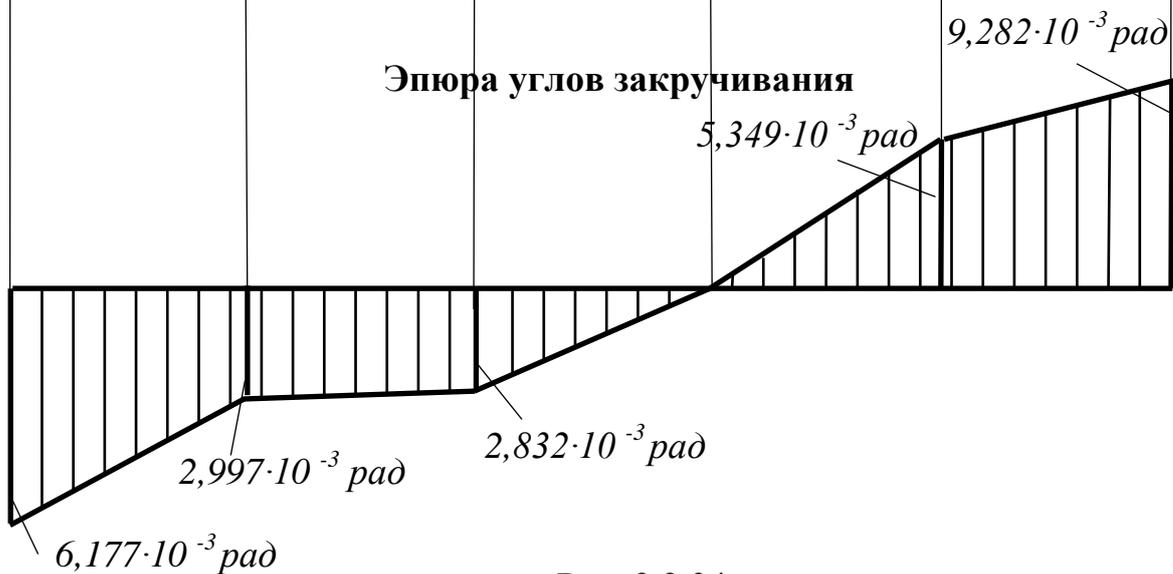
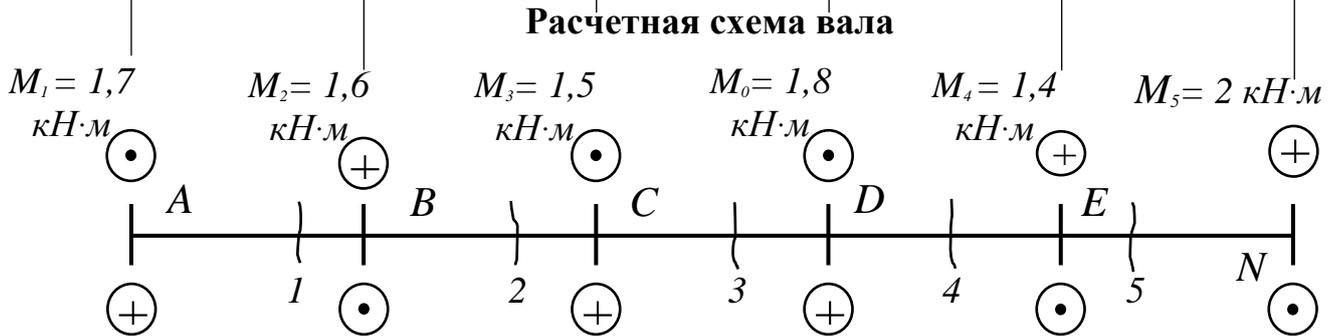


Рис. 2.2.34

Запишем условие равновесия моментов, приложенных к валу:

$$\sum_{i=1}^5 M_i = 0. \quad (2.2.8)$$

Составим уравнение (2.2.1):

$$-M_1 + M_2 - M_3 + M_0 + M_4 + M_5 = 0. \quad (2.2.9)$$

Отсюда

$$M_0 = M_1 - M_2 + M_3 - M_4 - M_5 = 1,7 - 1,6 + 1,5 - 1,4 - 2 = -1,8 \text{ кН}\cdot\text{м}. \quad (2.2.10)$$

Знак «−» показывает, что направление вращения уравнивающего момента M_0 противоположно принятому на рис. 2.2.31.

Изобразим схему вала и приложенные к нему моменты, изменив направление вращения момента M_0 (см. рис. 2.2.32).

2. Построение эпюры крутящих моментов. Крутящие моменты вычисляем по методу сечений. Проводим сечения на каждом из участков и подсчитываем сумму моментов, действующих на вал слева от сечения.

Сечение 1. $M_{\kappa}^{(1)} = -M_1 = -1,7 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Сечение 2. $M_{\kappa}^{(2)} = -M_1 + M_2 = -1,7 + 1,6 = -0,1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Сечение 3. $M_{\kappa}^{(3)} = -M_1 + M_2 - M_3 = -1,7 + 1,6 - 1,5 = -1,6 \text{ кН}\cdot\text{м}. \quad (2.2.11)$

Сечение 4. $M_{\kappa}^{(4)} = -M_1 + M_2 - M_3 - M_0 = -1,7 + 1,6 - 1,5 - 1,8 = -3,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Сечение 5. $M_{\kappa}^{(5)} = -M_1 + M_2 - M_3 - M_0 + M_4 = -1,7 + 1,6 - 1,5 - 1,8 + 1,4 = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

В масштабе строим эпюру крутящих моментов (см. рис. 2.2.33).

3. Определение диаметра вала. Диаметр вала определяем из условия прочности

$$\max \tau = \frac{M_{\kappa}}{W_p} \leq [\tau]. \quad (2.2.12)$$

Подставим (2.2.3) в (2.2.12) и получим

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{\kappa}}{\pi [\tau]}}. \quad (2.2.13)$$

В формуле (2.2.13) принимаем

$$M_{\kappa} = M_{\kappa}^{(max)} = M_{\kappa}^{(4)} = 3,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$[\tau] = 100 \text{ МПа} = 100 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2;$$

$$\pi = 3,14.$$

Тогда из (2.2.13)

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3,4}{3,14 \cdot 100 \cdot 10^3}} \approx 0,0557 \text{ м}. \quad (2.2.14)$$

Округляя, принимаем

$$d = 0,060 \text{ м} = 60 \text{ мм}.$$

4. Построение эпюры углов закручивания. Обозначим на рис. 2.2.32 границы участков A, B, C, D, E, N . В качестве неподвижного принимаем сечение D .

Вычисляем углы закручивания каждого участка по формуле

$$\varphi^{(i)} = \frac{M_{\kappa}^{(i)} \cdot a_i}{GJ_p}, \quad (2.2.15)$$

предварительно вычислив выражение

$$GJ_p = G \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 8 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot \frac{3,14 \cdot (0,06)^4}{32} \approx 101,7 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

Тогда угол φ , рад:

$$\varphi^{(1)} = \frac{M_{\kappa}^{(1)} a_1}{GJ_p} = \frac{-1,7 \cdot 0,19}{101,7} \approx -3,18 \cdot 10^{-3};$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{M_{\kappa}^{(2)} a_2}{GJ_p} = \frac{-0,1 \cdot 0,17}{101,7} \approx -1,67 \cdot 10^{-4};$$

$$\varphi^{(3)} = \frac{M_{\kappa}^{(3)} a_3}{GJ_p} = \frac{-1,6 \cdot 0,18}{101,7} \approx -2,83 \cdot 10^{-3}; \quad (2.2.16)$$

$$\varphi^{(4)} = \frac{M_{\kappa}^{(4)} a_4}{GJ_p} = \frac{-3,4 \cdot 0,16}{101,7} \approx -5,35 \cdot 10^{-3};$$

$$\varphi^{(5)} = \frac{M_{\kappa}^{(5)} a_5}{G J_p} = \frac{-2 \cdot 0,20}{101,7} \approx -3,93 \cdot 10^{-3}.$$

Значение углов закручивания границ участков по отношению к сечению D , рад:

$$\varphi_{ED} = -\varphi^{(4)} = 5,35 \cdot 10^{-3};$$

$$\varphi_{ND} = -(\varphi_{ED} + \varphi_{NE}) = -(\varphi^{(4)} + \varphi^{(5)}) = 9,28 \cdot 10^{-3};$$

$$\varphi_{CD} = \varphi^{(3)} = -2,83 \cdot 10^{-3};$$

$$\varphi_{BD} = \varphi_{CD} + \varphi_{BC} = \varphi^{(3)} + \varphi^{(2)} = -2,997 \cdot 10^{-3};$$

$$\varphi_{AD} = \varphi_{CD} + \varphi_{BC} + \varphi_{AB} = \varphi^{(3)} + \varphi^{(2)} + \varphi^{(1)} = -6,177 \cdot 10^{-3}.$$

В масштабе откладываем вычисленные значения углов закручивания и соединяем их прямыми линиями (см. рис. 2.2.34).

5. Вычисление наибольшего относительного угла закручивания.

Наибольший относительный угол закручивания находим по формуле

$$\theta_{max} = \frac{|M_{\kappa}^{(max)}|}{G J_p},$$

где $M_{\kappa}^{(max)} = M_{\kappa}^{(4)}$ на четвертом участке, тогда

$$\theta_{max} = \frac{3,4}{101,7} \approx 0,0334 \text{ рад/м.}$$

Задание №3. Прямой поперечный изгиб

Задача 3.1. Расчет консольной балки на прочность и жесткость

Исходные данные: для заданной балки построить эпюры Q и M , подобрать из расчета на прочность номер двутавра, а также найти угол поворота на конце консоли. Принять $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Схемы к задаче 3.1

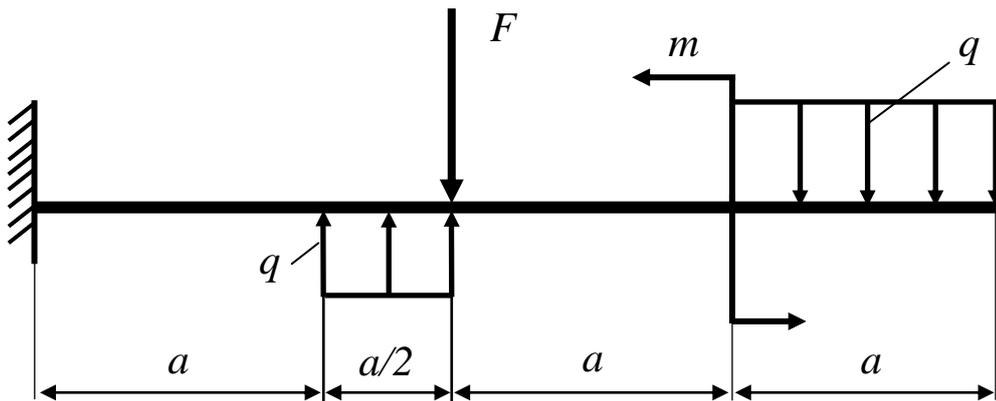


Рис. 3.1.1

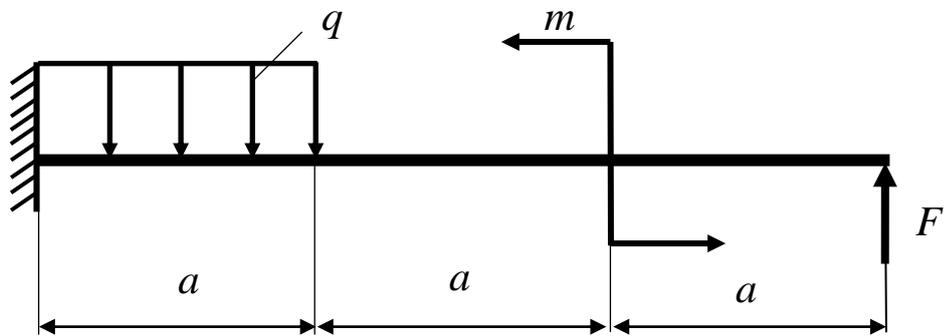


Рис. 3.1.2

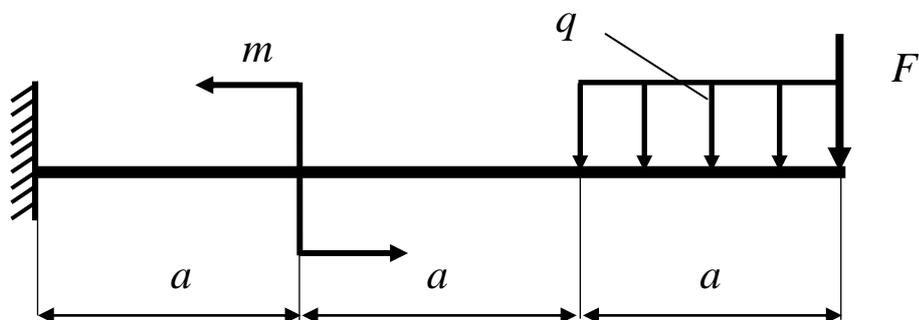


Рис. 3.1.3

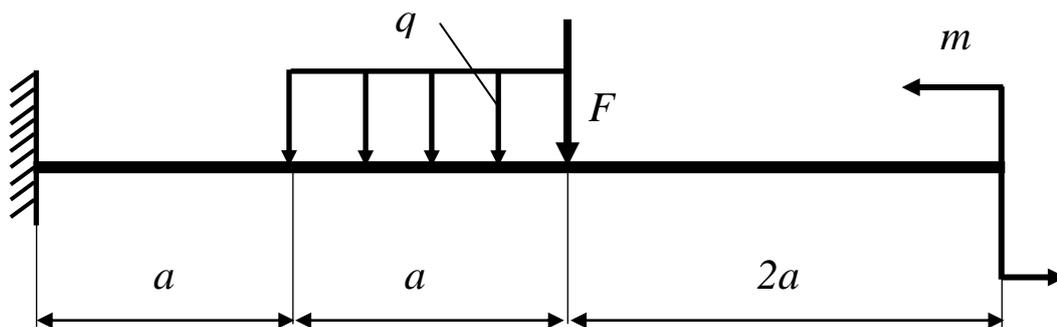


Рис. 3.1.4

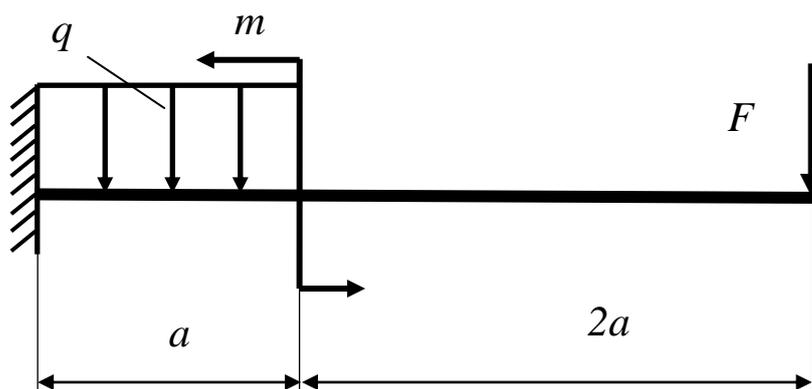


Рис. 3.1.5

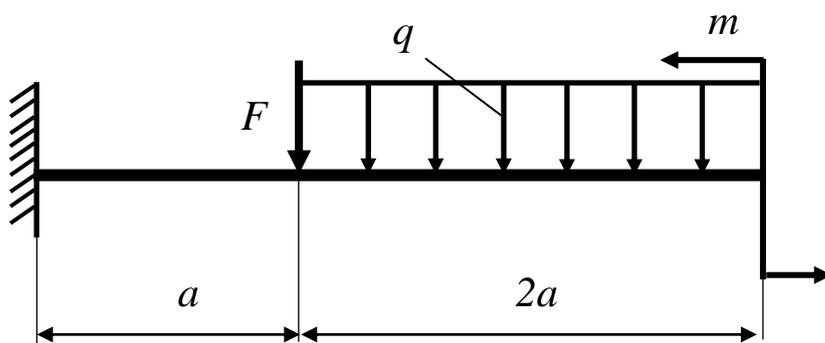


Рис. 3.1.6

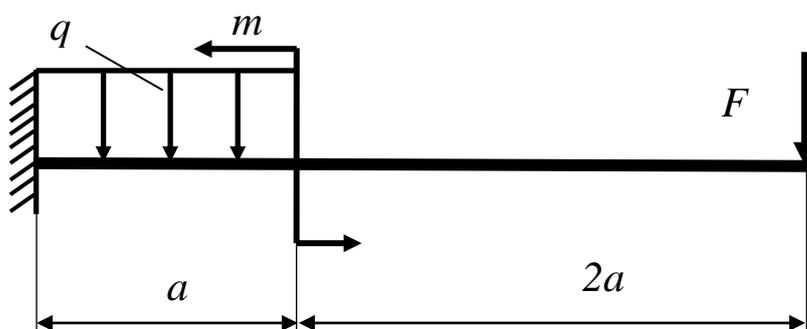


Рис. 3.1.7

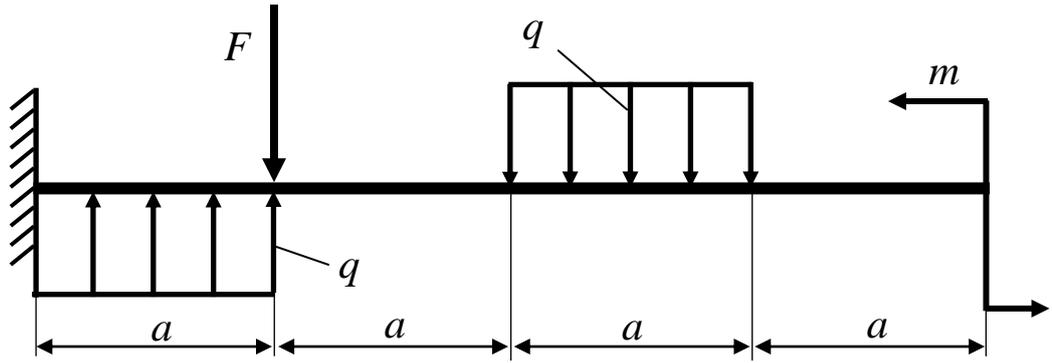


Рис. 3.1.8

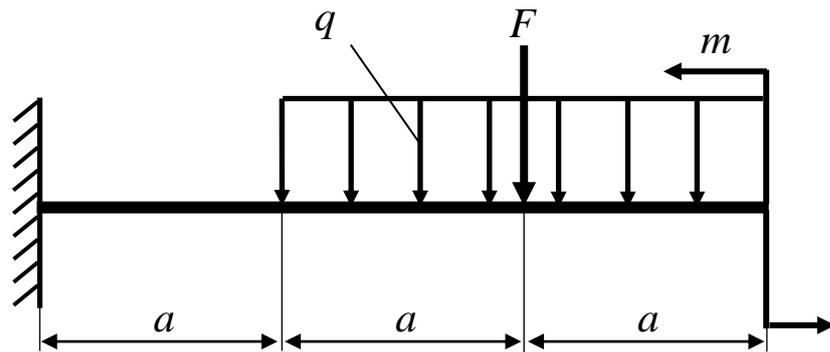


Рис. 3.1.9

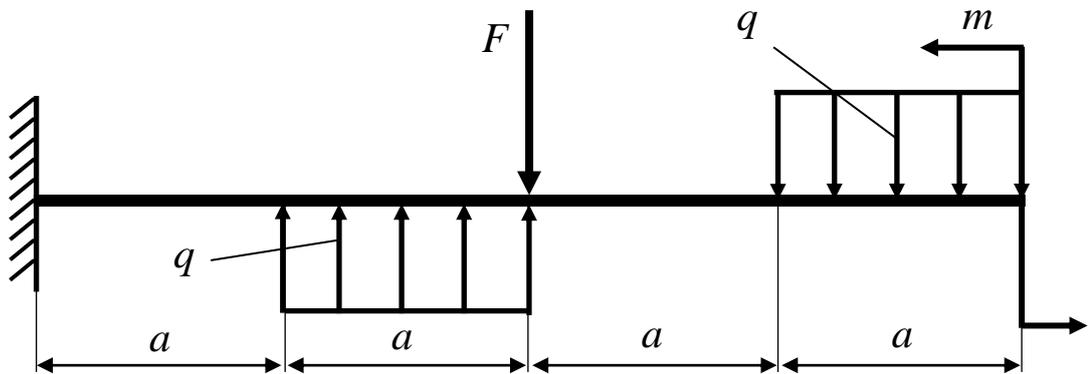


Рис. 3.1.10

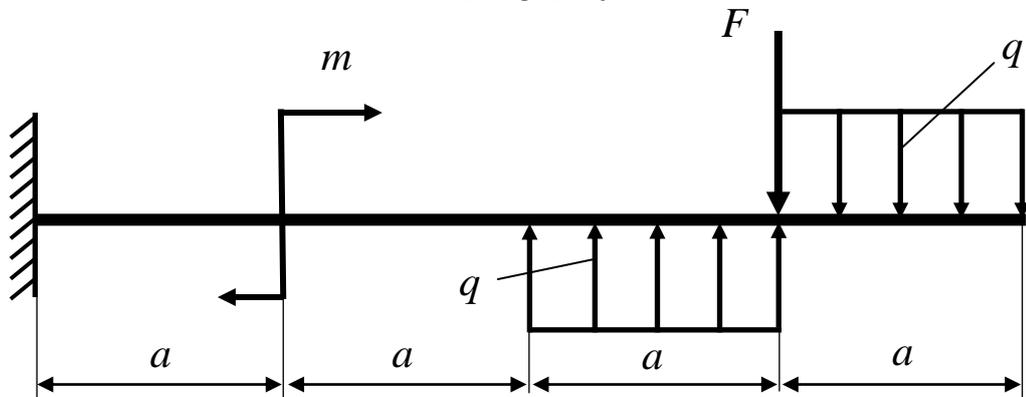


Рис. 3.1.11

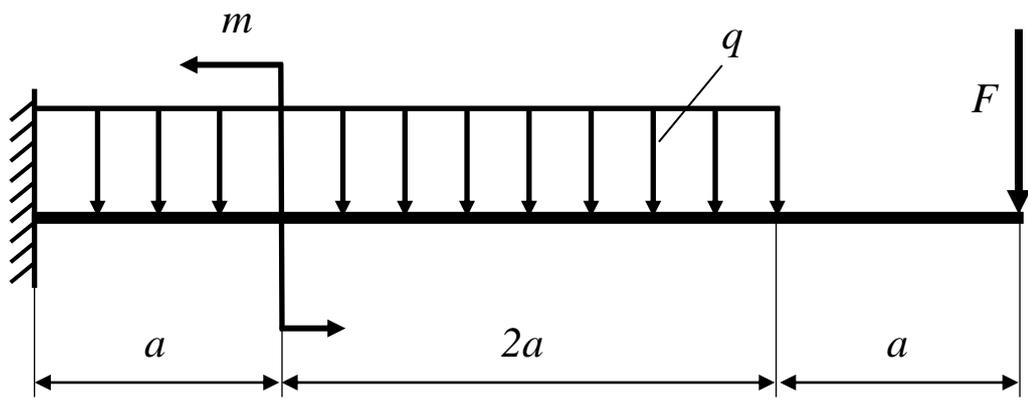


Рис. 3.1.12

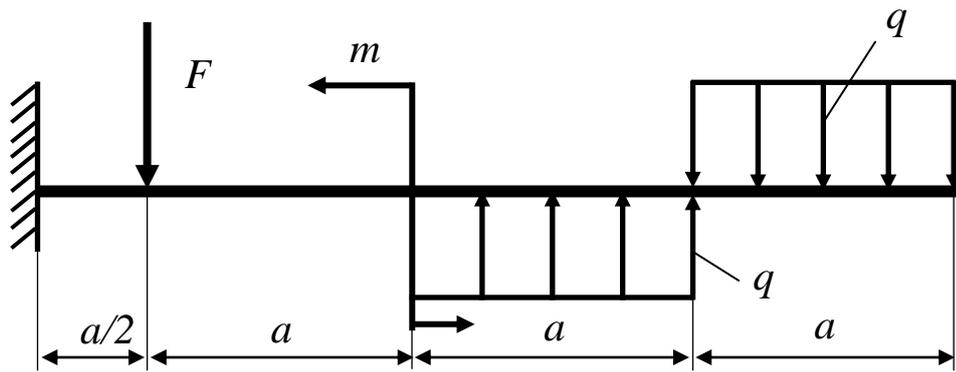


Рис. 3.1.13

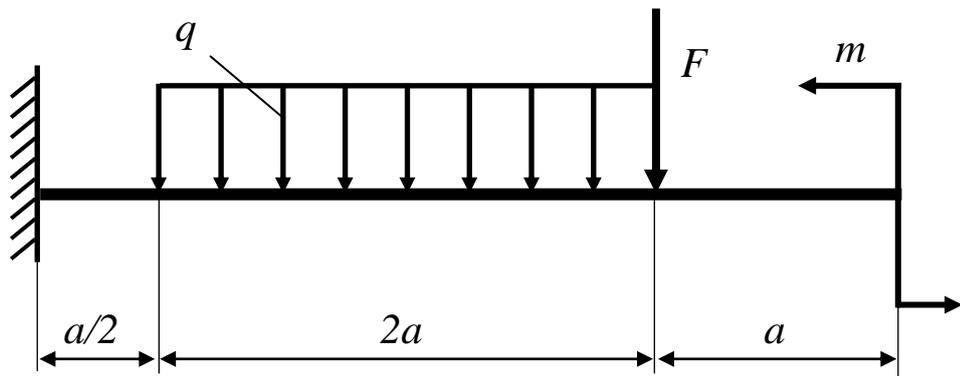


Рис. 3.1.14

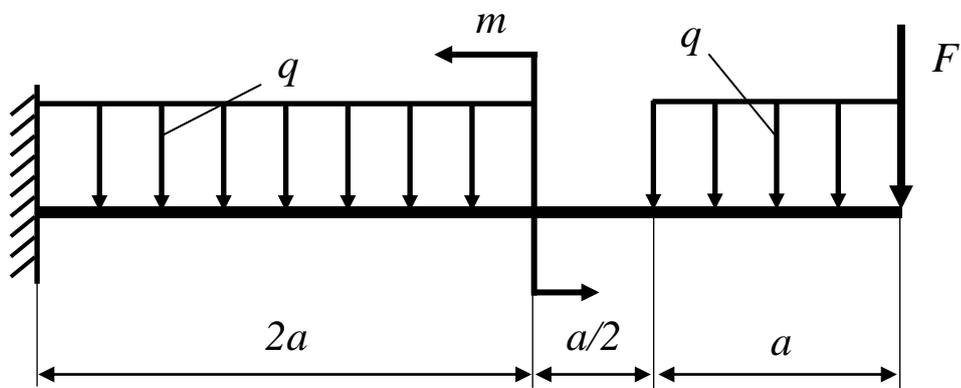


Рис. 3.1.15

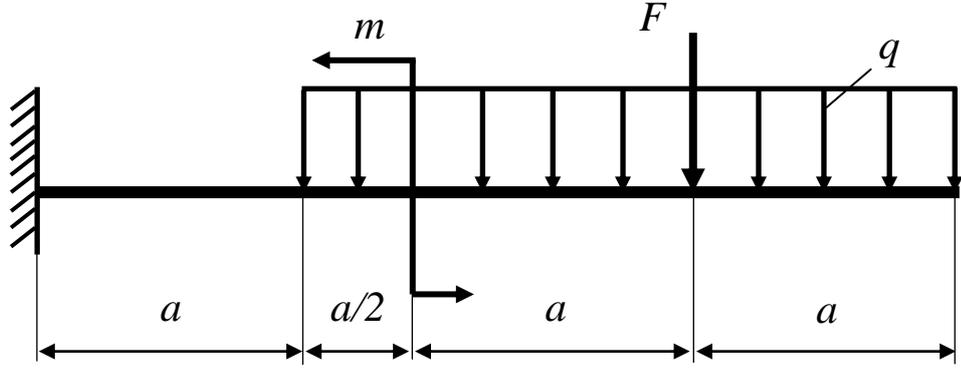


Рис. 3.1.16

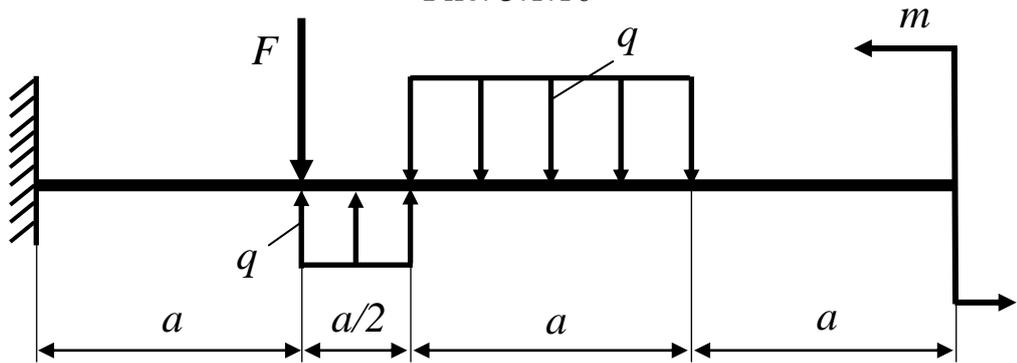


Рис. 3.1.17

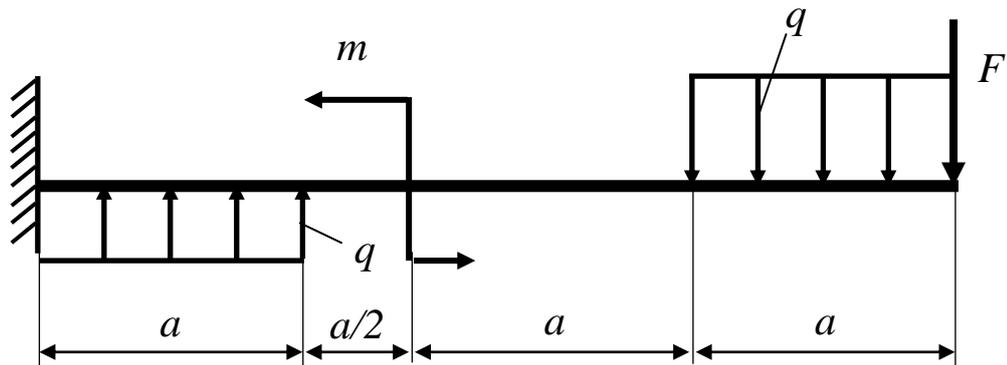


Рис. 3.1.18

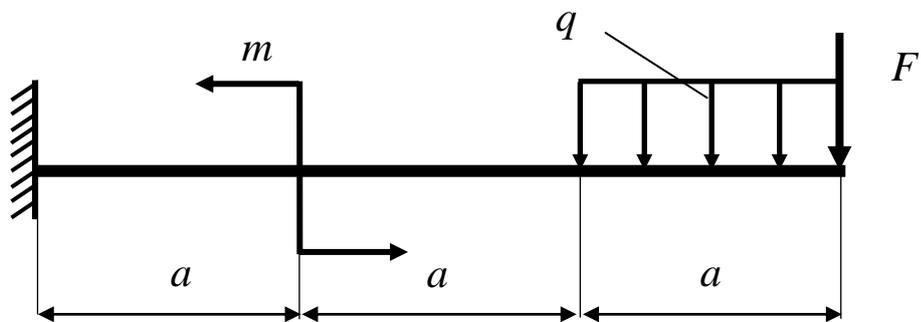


Рис. 3.1.19

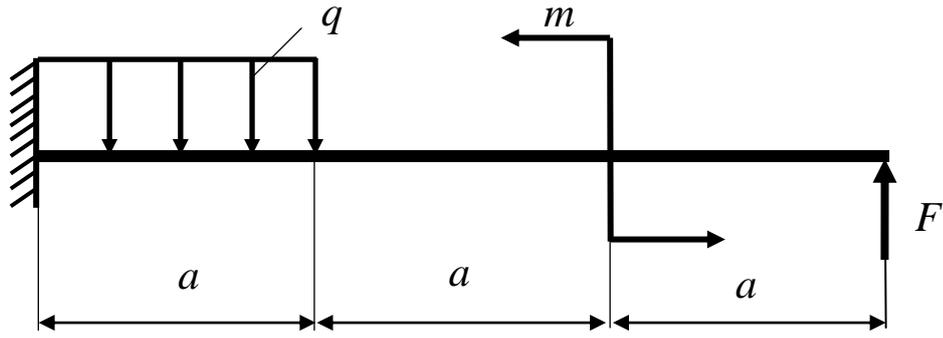


Рис. 3.1.20

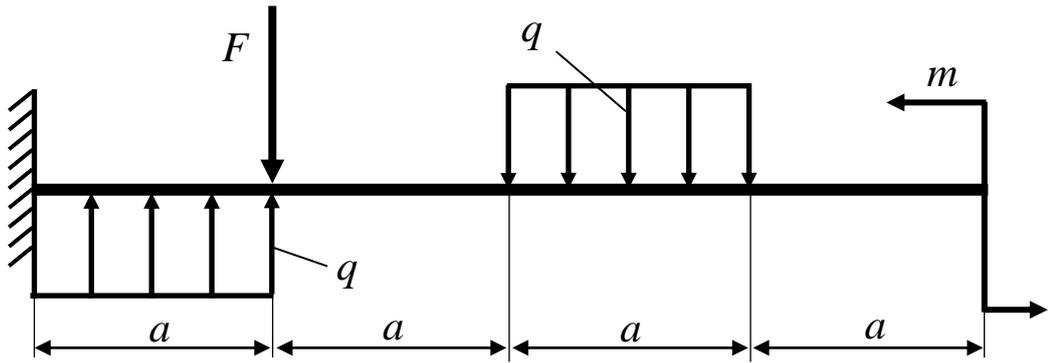


Рис. 3.1.21

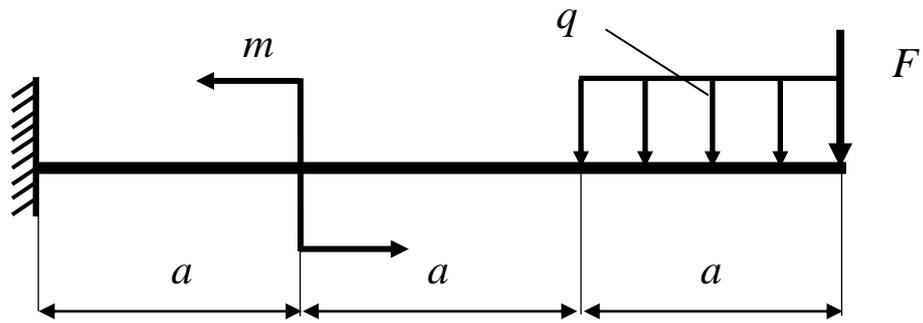


Рис. 3.1.22

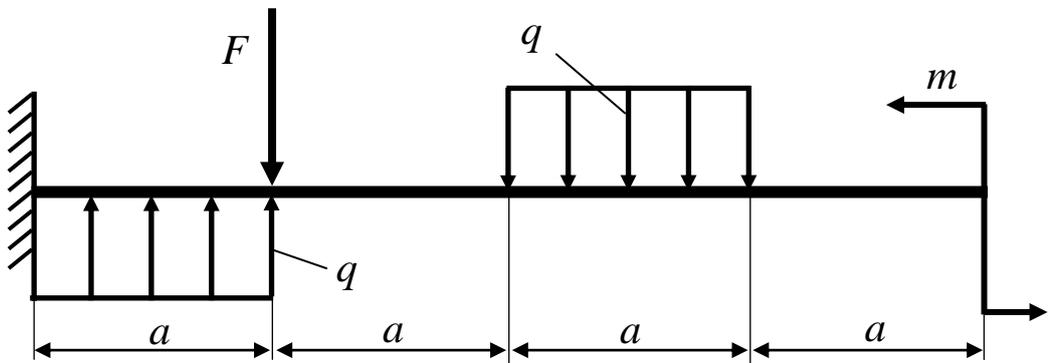


Рис. 3.1.23

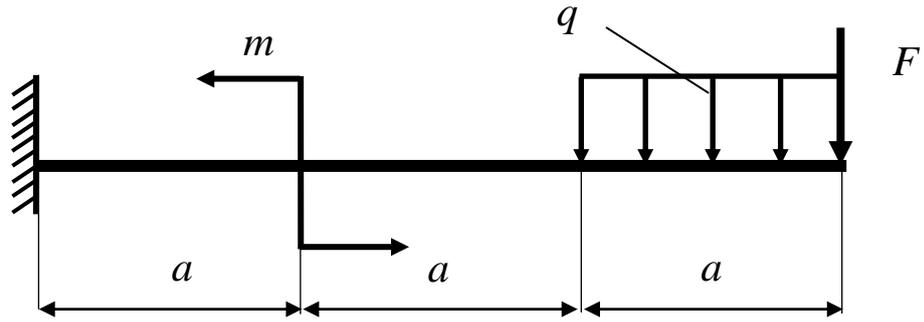


Рис. 3.1.24

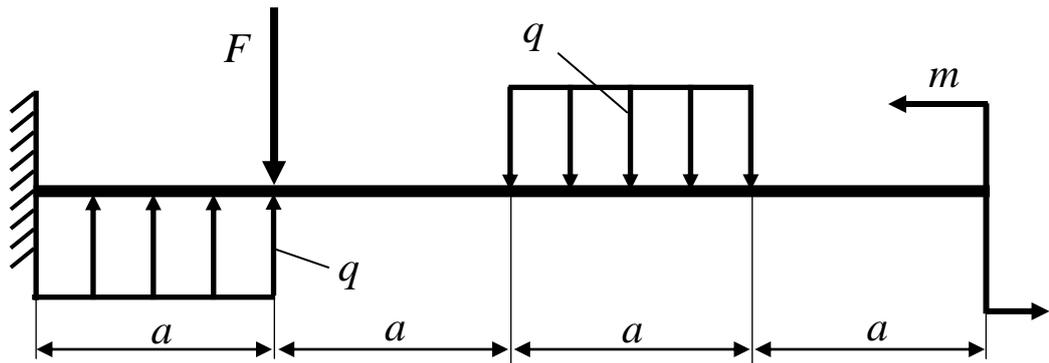


Рис. 3.1.25

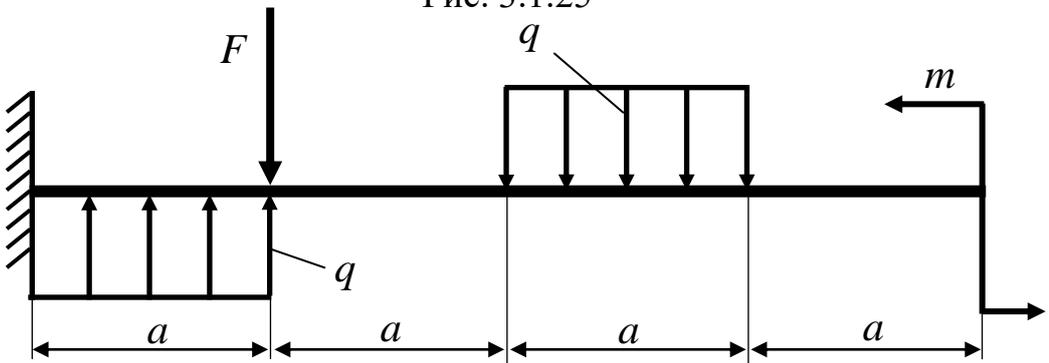


Рис. 3.1.26

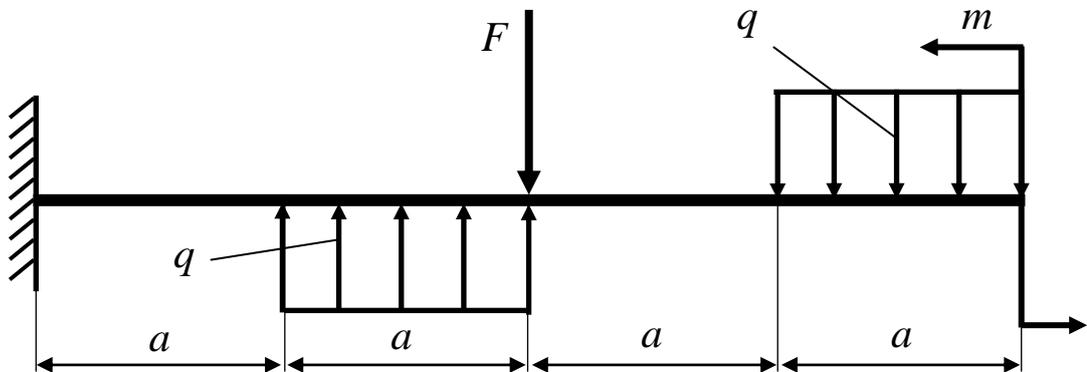


Рис. 3.1.27

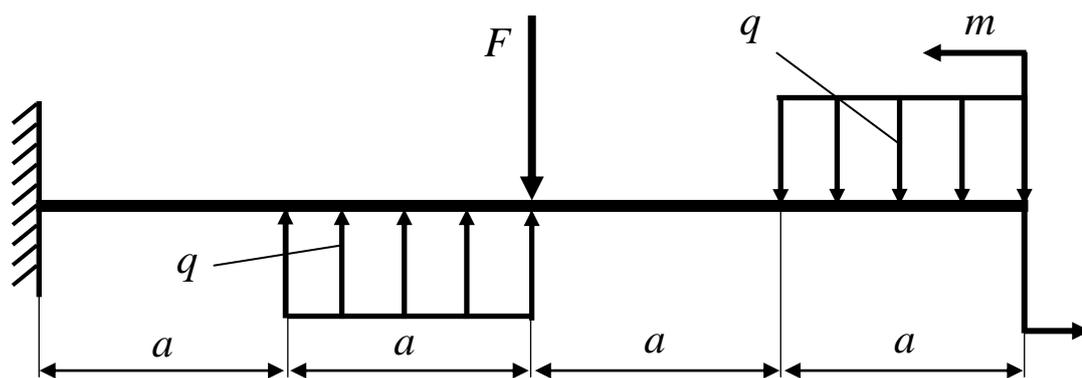


Рис. 3.1.28

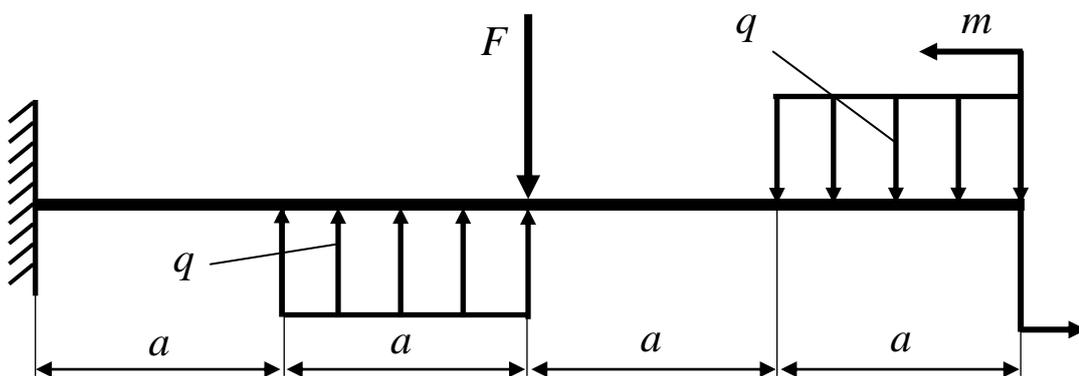


Рис. 3.1.29

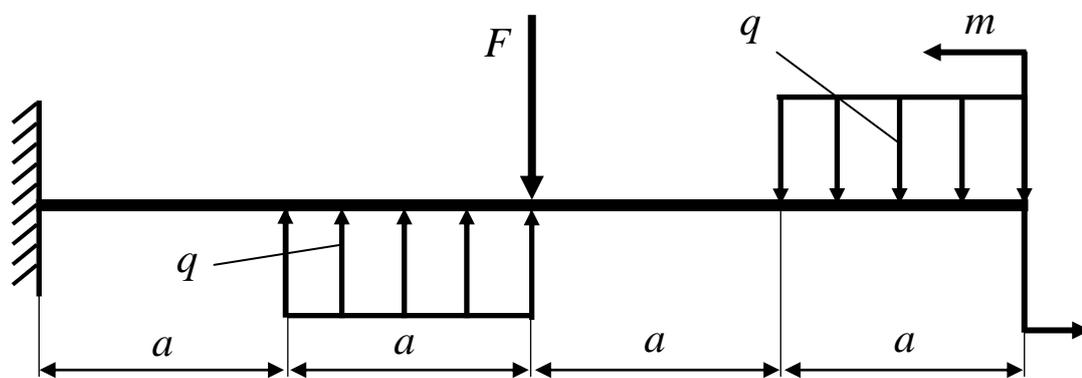


Рис. 3.1.30

Таблица 3.1

Данные для вариантов

Номер варианта (рисунка)	F , кН	q , кН/м	m , кН·м	a , м	№ варианта (рисунка)	F , кН	q , кН/м	m , кН·м	a , м
1 (3.1.1)	20	20	25	1,5	16 (3.1.16)	14	16	24	1,3
2 (3.1.2)	15	24	11	1,0	17 (3.1.17)	27	15	16	2,2
3 (3.1.3)	25	16	12	1,8	18 (3.1.18)	21	14	17	1,6
4 (3.1.4)	14	16	20	1,6	19 (3.1.19)	19	20	18	2,5
5 (3.1.5)	22	16	14	2,9	20 (3.1.20)	22	18	20	2,4
6 (3.1.6)	30	22	17	3,3	21 (3.1.21)	25	12	13	3,2
7 (3.1.7)	12	17	22	3,2	22 (3.1.22)	19	14	10	2,0
8 (3.1.8)	23	11	12	3,0	23 (3.1.23)	20	12	15	2,3
9 (3.1.9)	18	12	10	2,0	24 (3.1.24)	28	13	22	2,5
10 (3.1.10)	17	9	14	2,4	25 (3.1.25)	26	14	20	2,4
11 (3.1.11)	29	13	20	2,6	26 (3.1.26)	28	15	13	2,7
12 (3.1.12)	24	4	21	2,4	27 (3.1.27)	30	19	21	3,6
13 (3.1.13)	28	5	15	2,8	28 (3.1.28)	16	14	25	1,4
14 (3.1.14)	35	18	22	3,5	29 (3.1.29)	25	16	17	2,5
15 (3.1.15)	14	16	24	1,3	30 (3.1.30)	20	15	18	2,6

Примечание. Номер варианта соответствует номеру рисунка (например, в задаче 3.1 варианту 18 соответствует рис. 3.1.18).

Методические указания к решению задачи

1. Составить уравнения поперечных сил и изгибающих моментов для различных участков балки.
2. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
3. Подобрать для балки номер двутавра при допуске напряжении $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

4. Методом начальных параметров определить угол поворота на конце консоли. Модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Считаем целесообразным до рассмотрения примеров выполнения задания ввести правила знаков для поперечных сил Q и изгибающих моментов M , изображенных на рис. 3.1.31.

Пример решения задачи

Исходные данные

Для заданной балки построить эпюры Q и M , а также определить угол поворота на свободном конце консоли, если $a = 0,5 \text{ м}$; $q = 20 \text{ кН/м}$ (рис. 3.1.32).

Решение

1. Построение эпюры Q . Построение эпюры начинаем от правого (свободного) конца; при этом нет необходимости в определении опорных реакций. Сила $F_1 = 2qa$ направлена вниз, следовательно, поперечная сила на участках AB и BC положительна. Согласно правилам (см. рис. 3.1.31) в сечении A поперечная сила численно равна внешней силе F_1 . На участках, не несущих распределенной нагрузки, поперечная сила постоянна. Наличие пары сил не влияет на эпюру Q .

Итак,

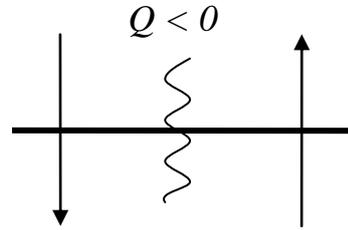
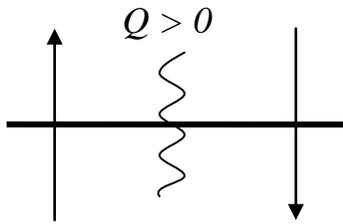
$$Q_I = Q_{II} = 2qa.$$

В точке C приложена сила $F_2 = qa$, направленная вверх; в этом сечении на эпюре будет скачок вниз от прежнего значения Q на величину $F_2 = qa$, то есть

$$Q_C^{np} = Q_C^{leg} + qa = 2qa - qa = qa.$$

Правила знаков для поперечных сил Q и изгибающих моментов M

Для Q



Для M

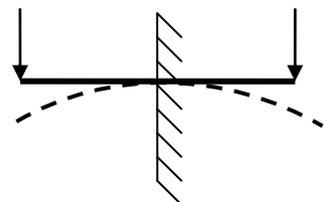
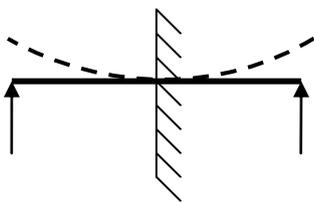
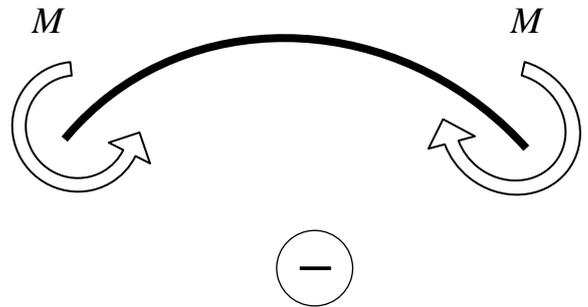
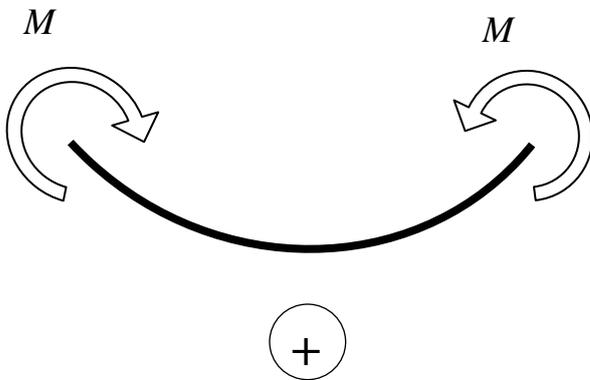
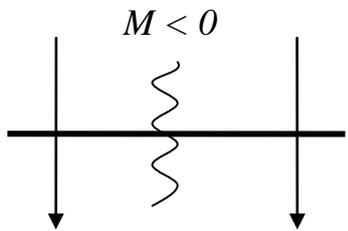
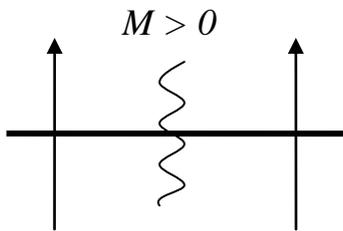


Рис. 3.1.31

Следующая характерная точка — сечение D . Определяем значение Q в этом сечении как сумму проекций на ось Oy сил, приложенных справа от точки D :

$$Q_D = F_1 - F_2 + q2a = 2qa - qa + 2qa = 3qa .$$

Откладываем это значение Q_D на эпюре под точкой D и соединяем с предыдущим значением (под точкой C) прямой линией. Ордината эпюры Q в сечении заделки дает значение опорной реакции. Эпюра Q показана на рис. 3.1.32, б.

2. Построение эпюры M . В сечении A (на свободном конце консоли) момент равен нулю. В следующей характерной точке B определяем M как сумму моментов сил слева от точки B :

$$M_B^{лев} = -F_1 a = -2qa^2 .$$

На участке AB проводим прямую линию от 0 до $-2qa^2$ (ненагруженный участок). В точке B приложена пара сил, в этом сечении на эпюре M будет скачок вверх на величину qa^2 , то есть

$$M_B^{np} = M_B^{лев} + m = -2qa^2 + qa^2 = -qa^2 .$$

В характерной точке C определяем M как сумму моментов сил слева от точки C :

$$M_C = -F_1 \cdot 2qa + m = -4qa^2 + qa^2 = -3qa^2 .$$

На ненагруженном участке BC также проводим прямую линию от qa^2 до $-3qa^2$.

В характерной точке D определяем M как сумму моментов сил слева от нее:

$$M_D = -F_1 \cdot 4a + m + F_2 \cdot 2a - q2aa = -2qa \cdot 4a + qa^2 + qa \cdot 2a - 2qa^2 = -7qa^2 .$$

Значения в точках C и D соединяем ветвью параболы, обращенной выпуклостью вверх.

Эпюра M представлена на рис. 3.1.32, в.

Расчетная схема балки и эпюры

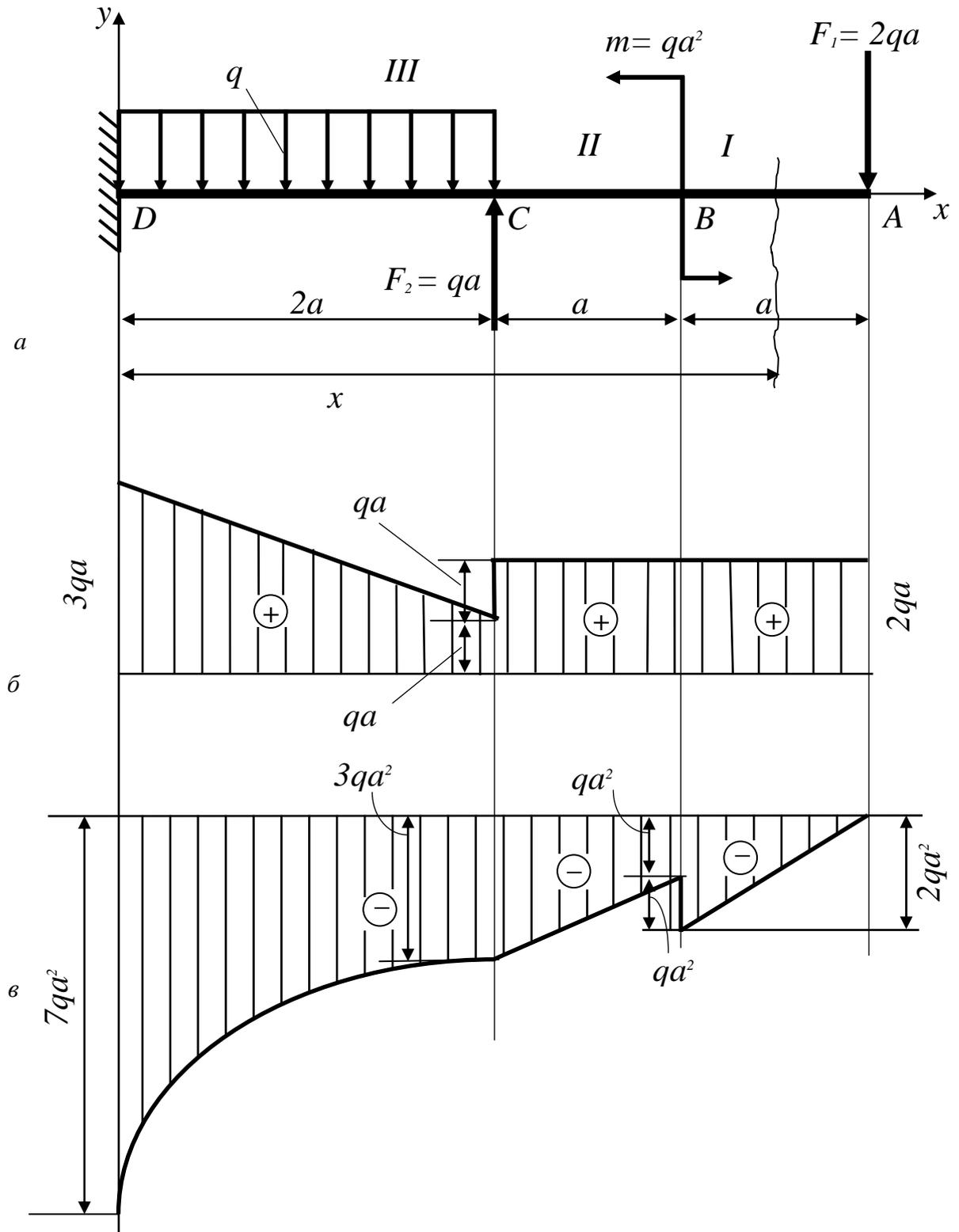


Рис. 3.1.32

3. Подбор сечения балки. Дано: $a = 0,5 \text{ м}$; $q = 20 \text{ кН/м}$.

Из эпюры M (см. рис. 3.1.32, в) имеем

$$|M_{\max}| = 7qa^2 = 7 \cdot 20 \cdot 0,25 = 35 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По формуле вычисляем осевой момент сопротивления из условия прочности при изгибе:

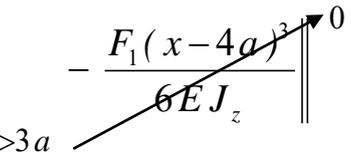
$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{35 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} \approx 2,19 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 219 \text{ см}^3.$$

Подбираем по сортаменту двутавр № 22 с $W_x = 232 \text{ см}^3$ и $J_x = 2550 \text{ см}^4$.

4. Определение методом начальных параметров угла поворота сечения на свободном конце консоли (см. рис. 3.1.32, а). Ось y направляется вверх, а x — вправо, то есть помещаем начало координат в защемление, в сечении D .

Универсальное уравнение упругой линии балки с учетом направления координатных осей запишем в виде

$$y = y_0 + \theta_0 x - \frac{M_0 x^2}{2EJ_z} + \frac{Q_0 x^3}{6EJ_z} - \frac{qx^4}{24EJ_z} + \frac{q(x-2a)^4}{24EJ_z} \Bigg\|_{x>2a} +$$

$$+ \frac{F_2(x-2a)^3}{6EJ_z} \Bigg\|_{x>2a} - \frac{m(x-3a)^2}{2EJ_z} \Bigg\|_{x>3a} - \frac{F_1(x-4a)^3}{6EJ_z} \Bigg\|_{x>4a}$$


Определим начальные параметры: $y_0 = y_D = 0$; $\theta_0 = \theta_D = 0$, так как левый конец защемлен; $M_0 = M_D = -7qa^2$, что следует из рис. 3.1.32, в, $Q_0 = Q_D = 3qa$ (из рис. 3.1.32, б). Слагаемое от силы F_1 равно нулю, так как не выполняется граничное условие.

Теперь получим

$$y = -\frac{7qa^2x^2}{2EJ_z} + \frac{3qax^3}{6EJ_z} - \frac{qx^4}{24EJ_z} + \frac{q(x-2a)^4}{24EJ_z} \Bigg|_{x>2a} + \frac{qa(x-2a)^3}{6EJ_z} \Bigg|_{x>2a} - \frac{qa^2(x-3a)^2}{2EJ_z} \Bigg|_{x>3a}.$$

Отсюда найдем уравнение углов поворота сечений

$$\theta = y' = -\frac{7qa^2x}{EJ_z} + \frac{3qax^2}{2EJ_z} - \frac{qx^3}{6EJ_z} + \frac{q(x-2a)^3}{6EJ_z} \Bigg|_{x>2a} + \frac{qa(x-2a)^2}{2EJ_z} \Bigg|_{x>2a} - \frac{qa^2(x-3a)}{EJ_z} \Bigg|_{x>3a}.$$

Искомый угол поворота сечения

$$\theta_A = y'_{x=4a} = -\frac{7qa^2 \cdot 4a}{EJ_z} + \frac{3qa \cdot 16a^2}{2EJ_z} - \frac{q64a^3}{6EJ_z} + \frac{q8a^3}{6EJ_z} + \frac{qa4a^2}{2EJ_z} - \frac{qa^2 \cdot a}{EJ_z},$$

откуда

$$\theta_A = -\frac{74}{6} \frac{qa^3}{EJ_z}.$$

При подстановке числовых значений

$$\theta_A = -\frac{74}{6} \frac{qa^3}{EJ_z} = -\frac{74}{6} \cdot \frac{20 \cdot 0,125 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} \approx -6,05 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

или

$$\theta_A = -0,347^\circ,$$

что не превышает допускаемых норм жесткости для балок.

Знак «-» угла поворота сечения θ_A означает поворот по часовой стрелке в выбранной системе координат.

Задача 3.2. Расчет двухпорной балки на прочность и жесткость

Исходные данные: для заданной балки построить эпюры Q и M , подобрать из расчета на прочность номер двутавра, а также найти прогиб посередине пролета балки. Принять $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Схемы к задаче 3.2

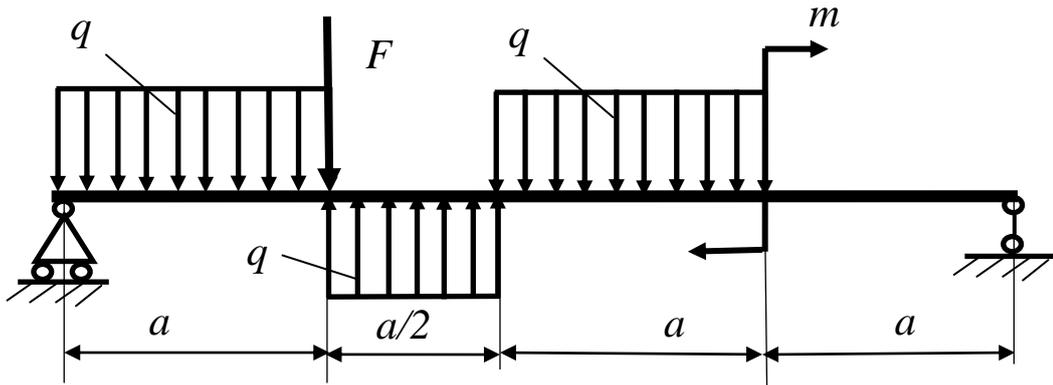


Рис. 3.2.1

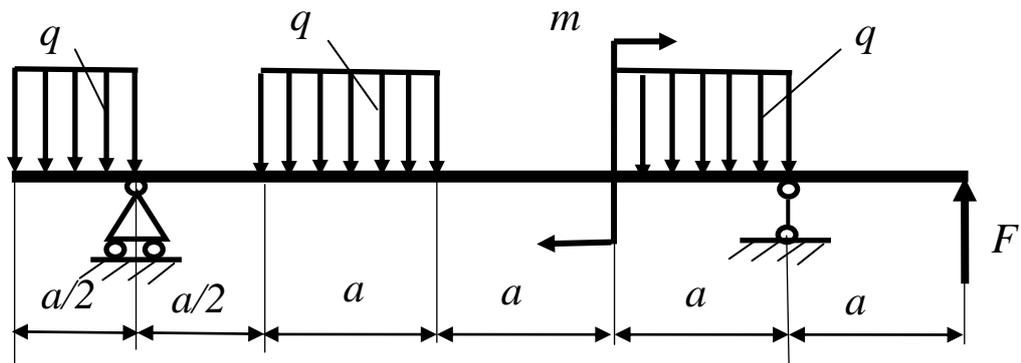


Рис. 3.2.2

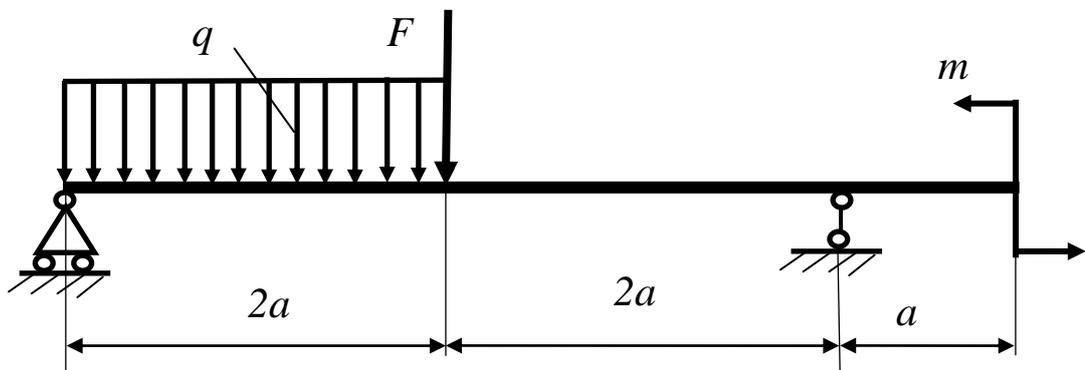


Рис. 3.2.3

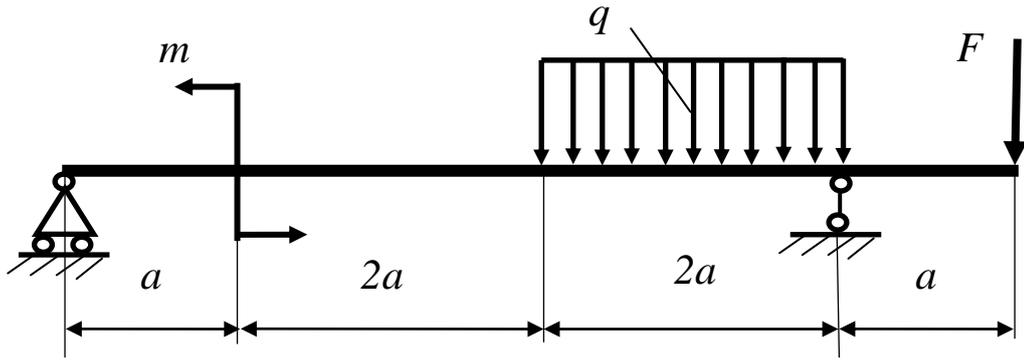


Рис. 3.2.4

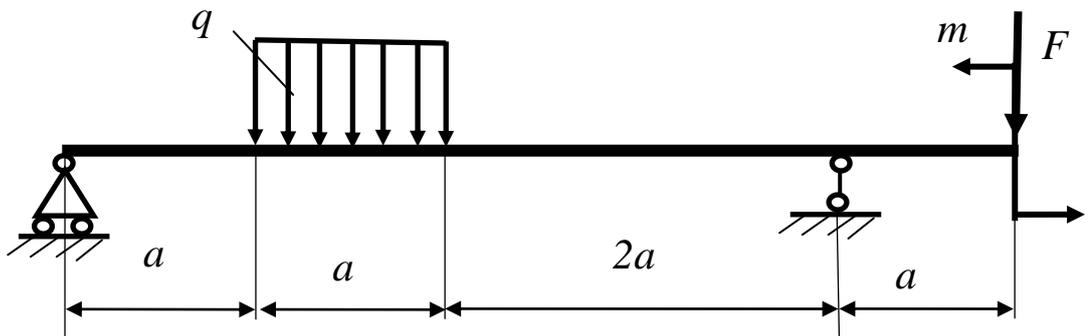


Рис. 3.2.5

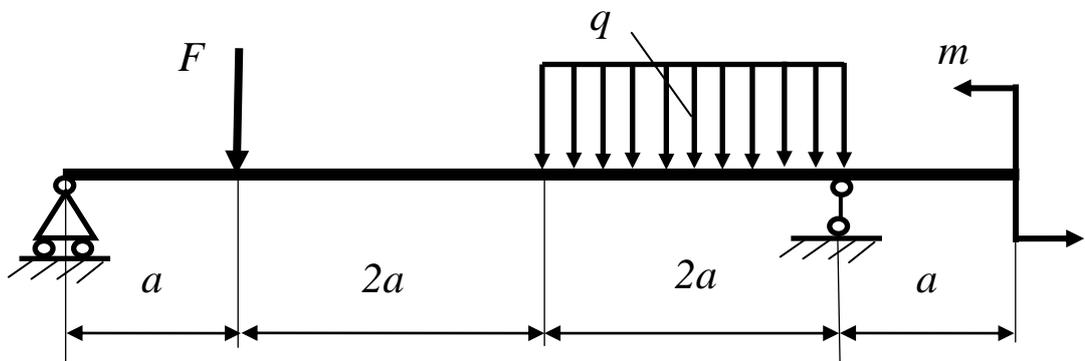


Рис. 3.2.6

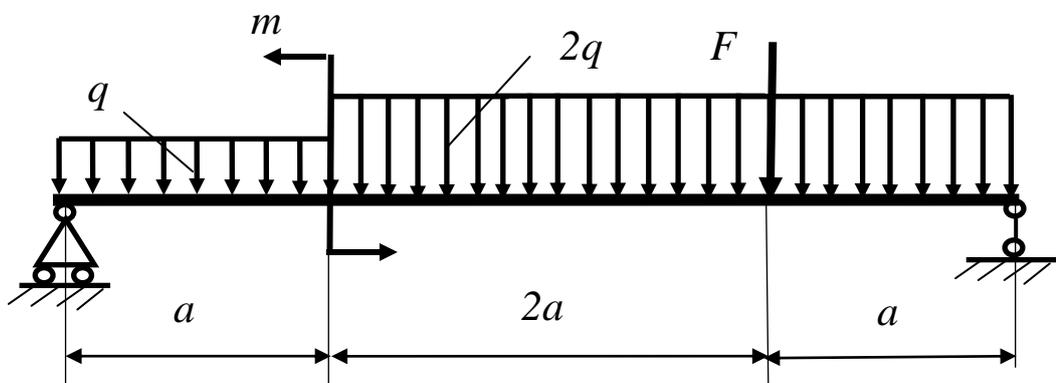


Рис. 3.2.7

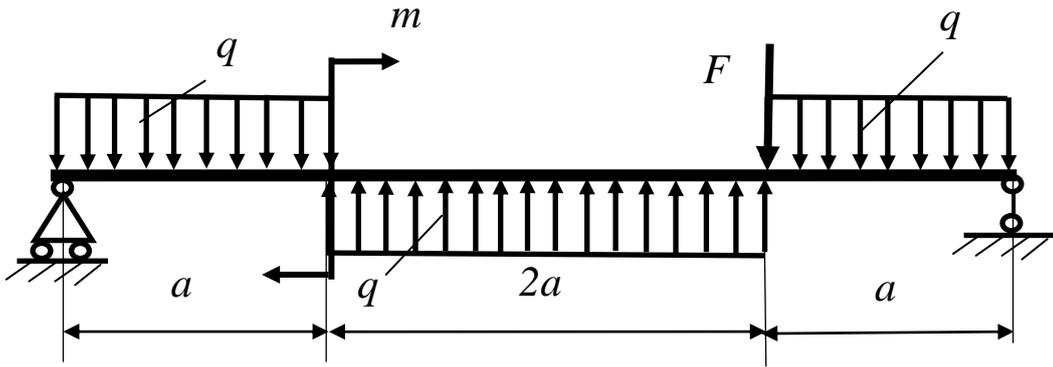


Рис. 3.2.8

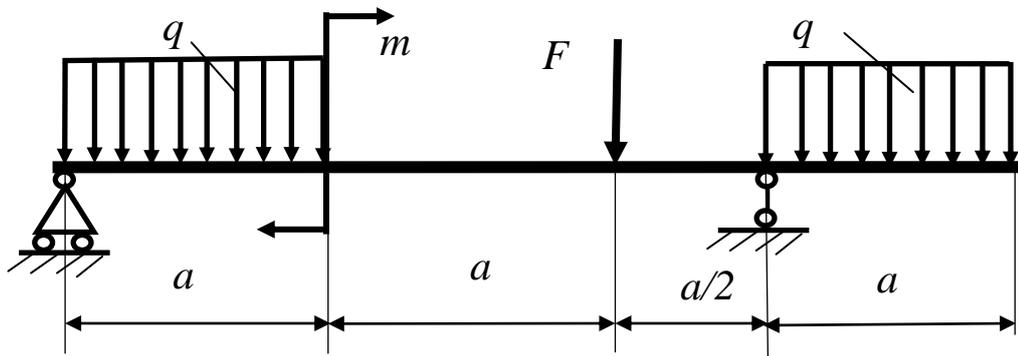


Рис. 3.2.9

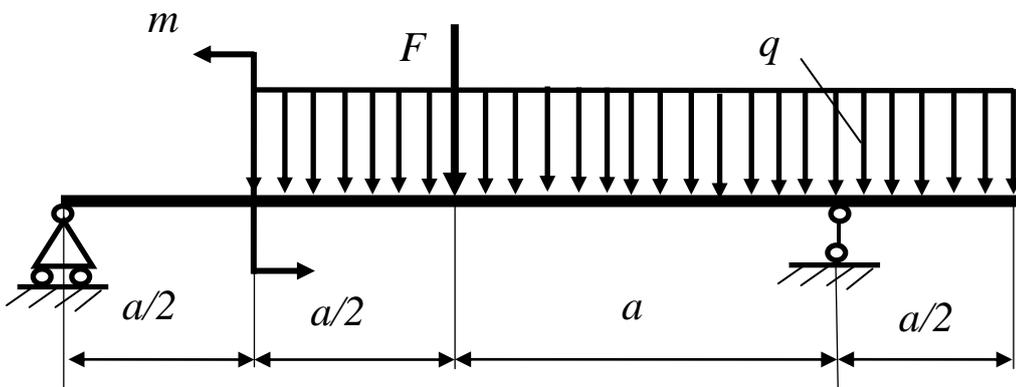


Рис. 3.2.10

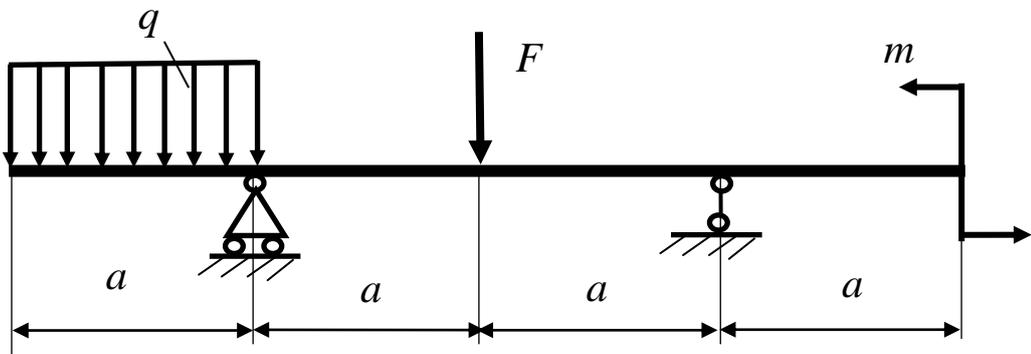


Рис. 3.2.11

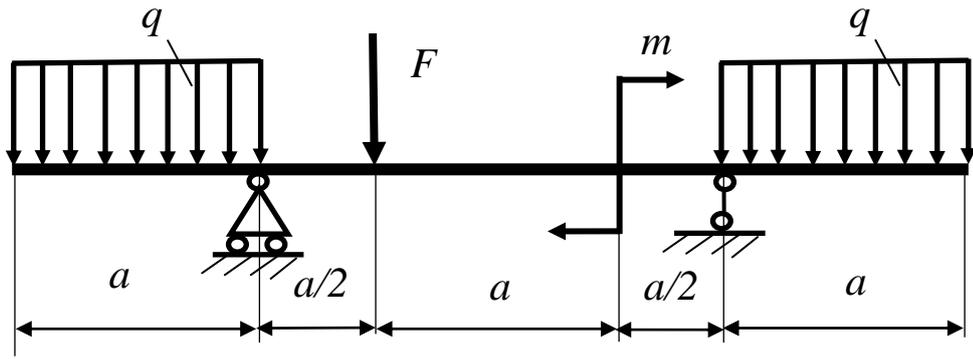


Рис. 3.2.12

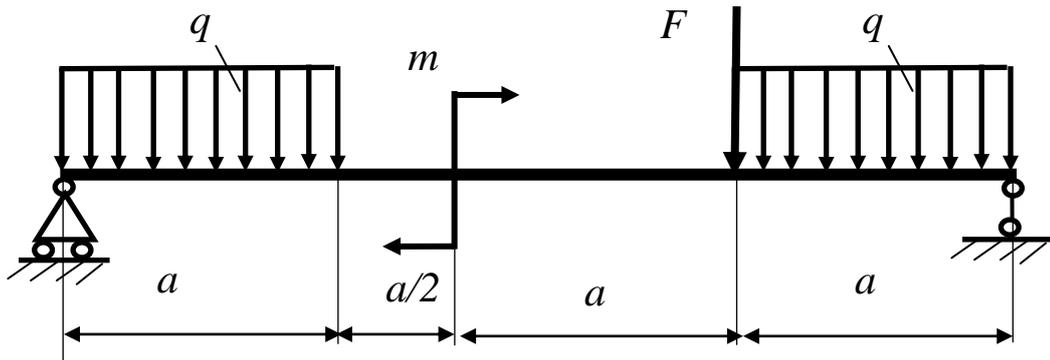


Рис. 3.2.13

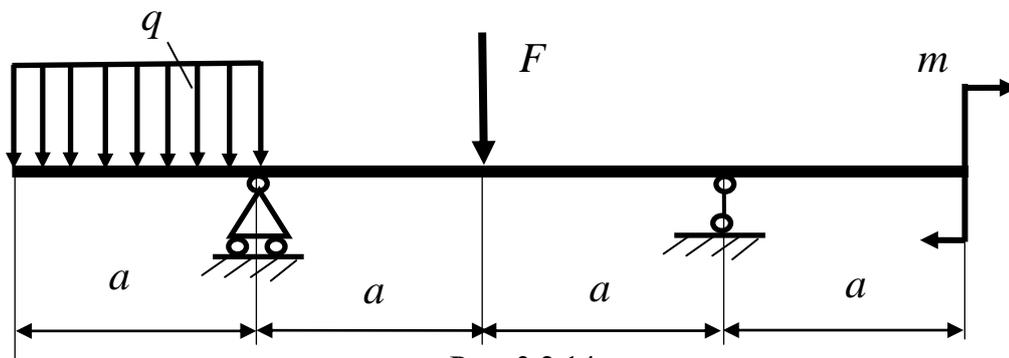


Рис. 3.2.14

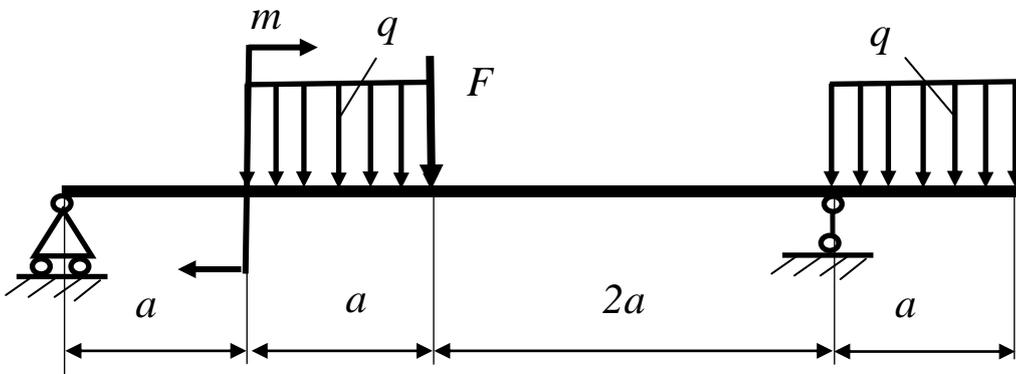


Рис. 3.2.15

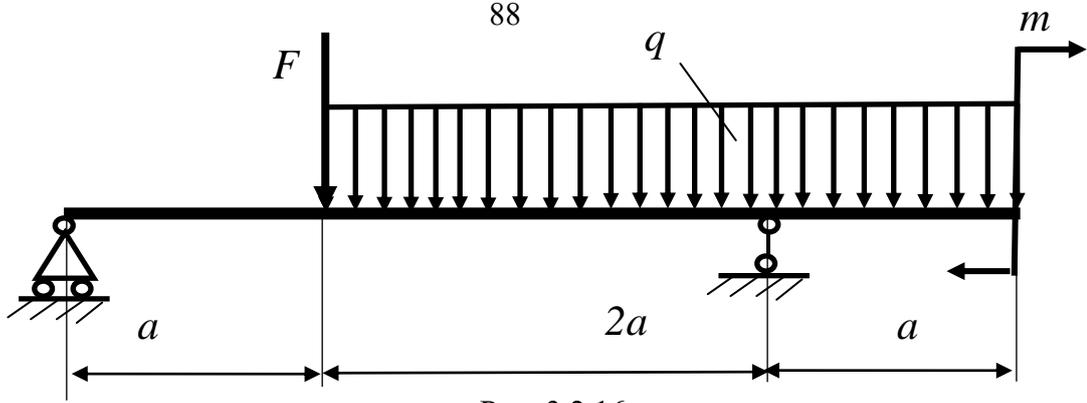


Рис. 3.2.16

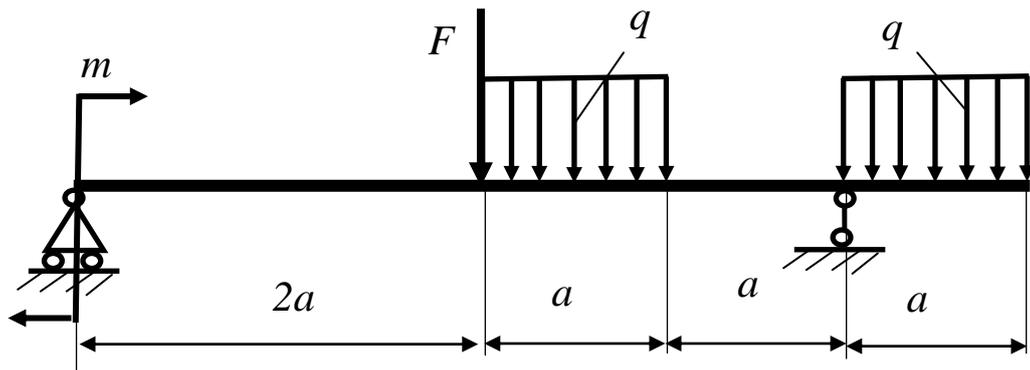


Рис. 3.2.17

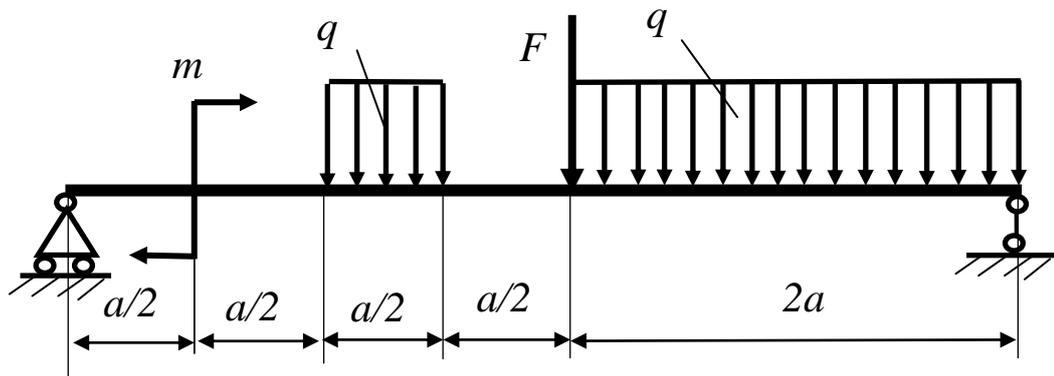


Рис. 3.2.18

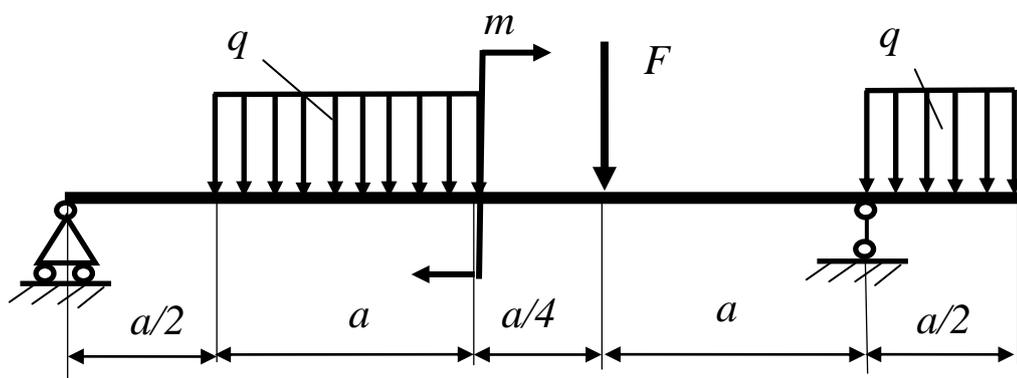


Рис. 3.2.19

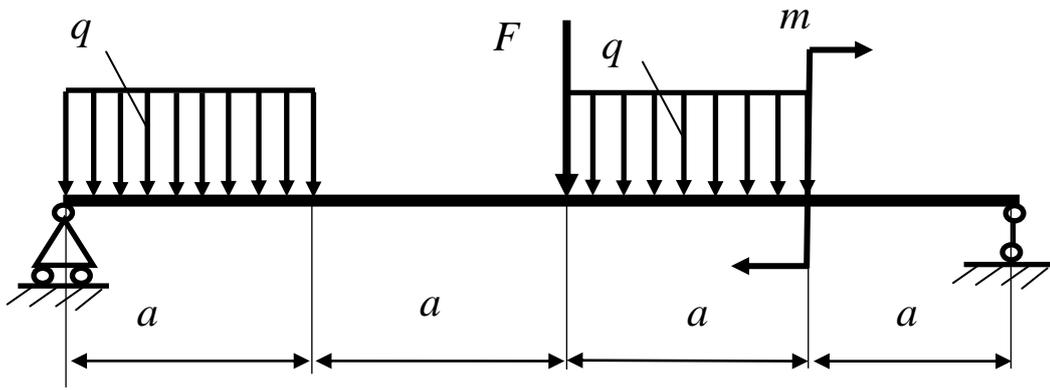


Рис. 3.2.20

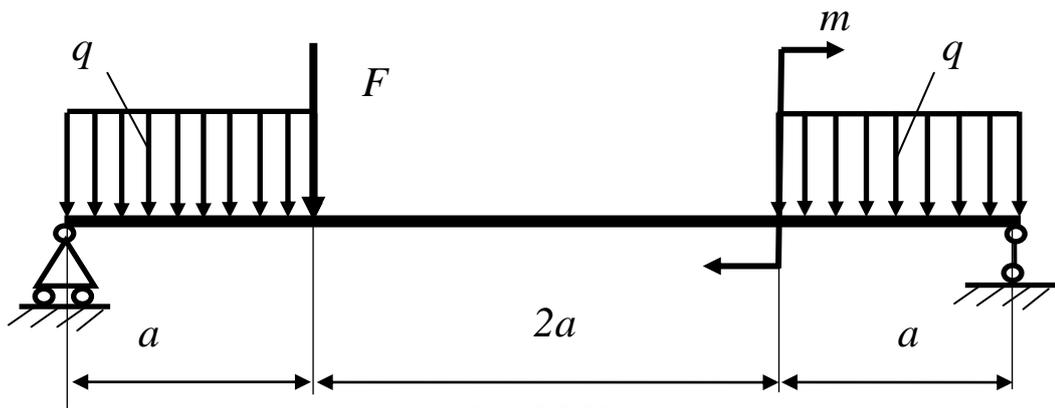


Рис. 3.2.21

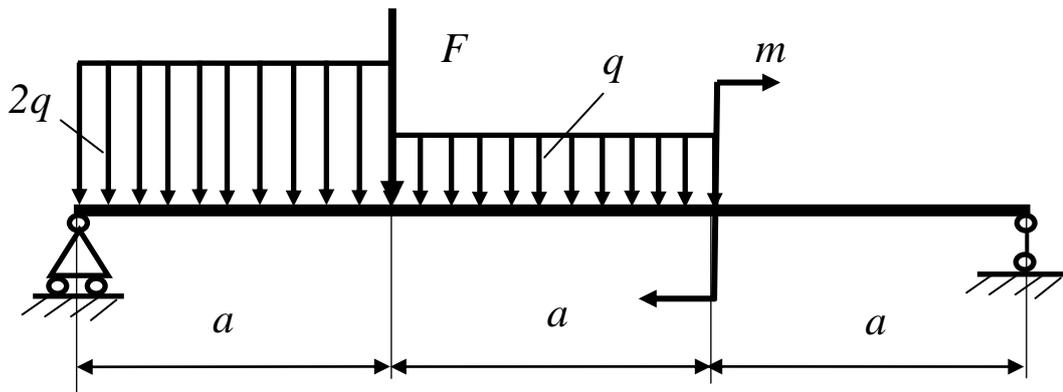


Рис. 3.2.22

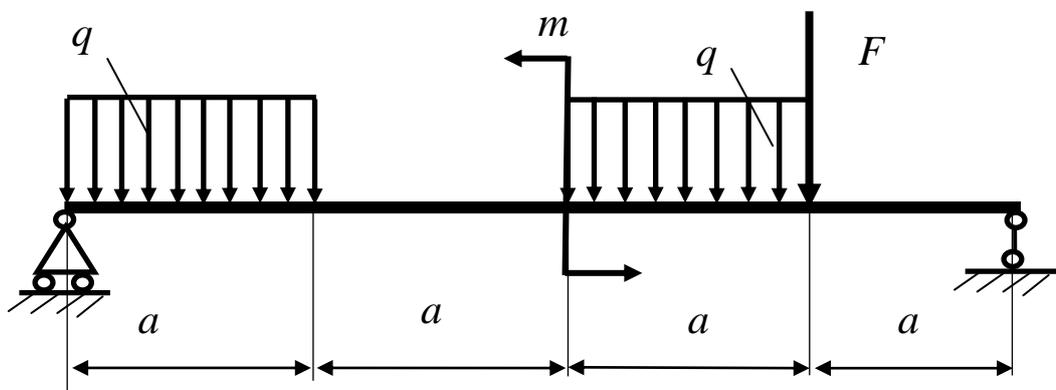


Рис. 3.2.23

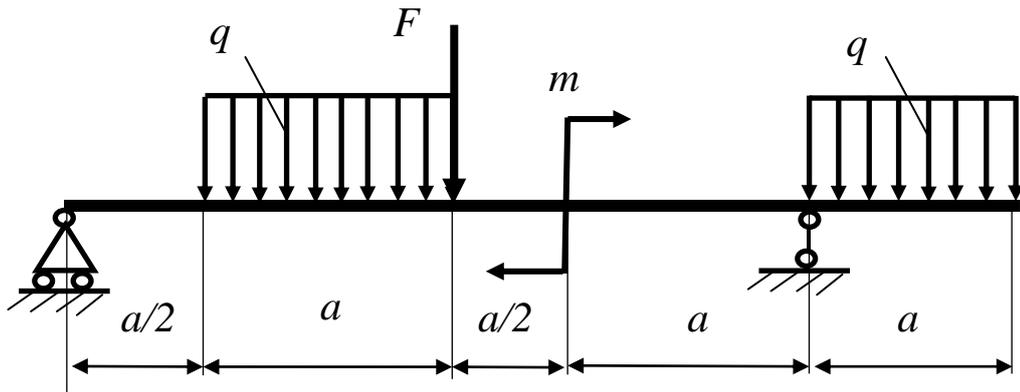


Рис. 3.2.24

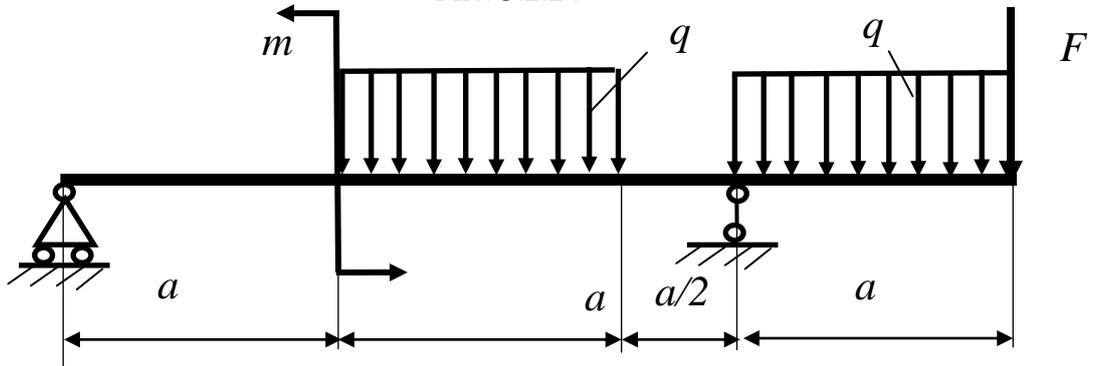


Рис. 3.2.25

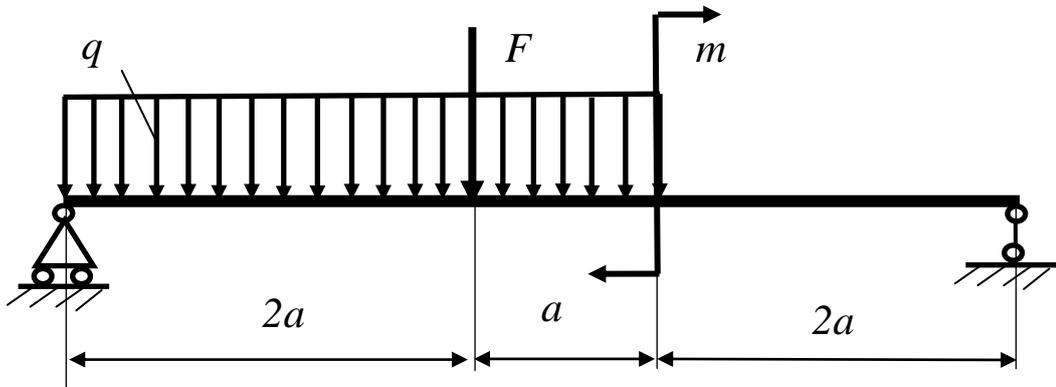


Рис. 3.2.26

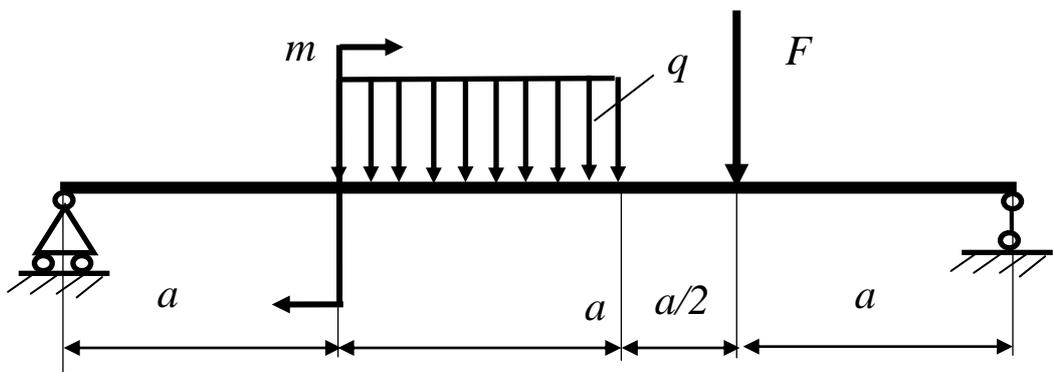


Рис. 3.2.27

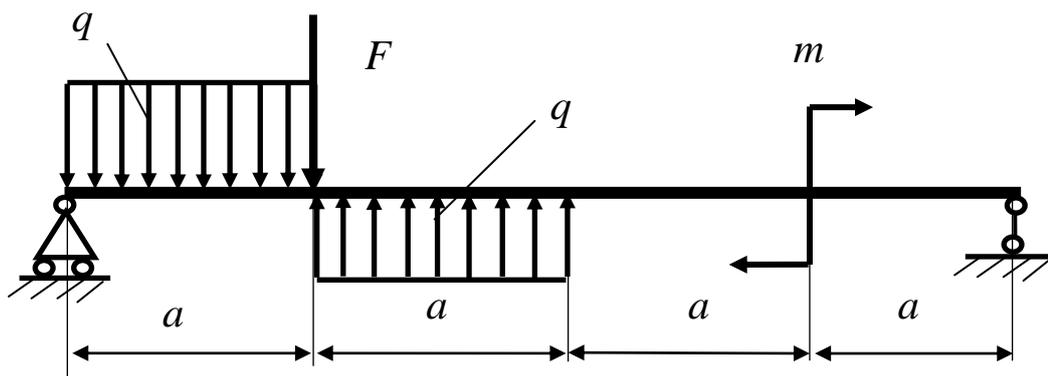


Рис. 3.2.28

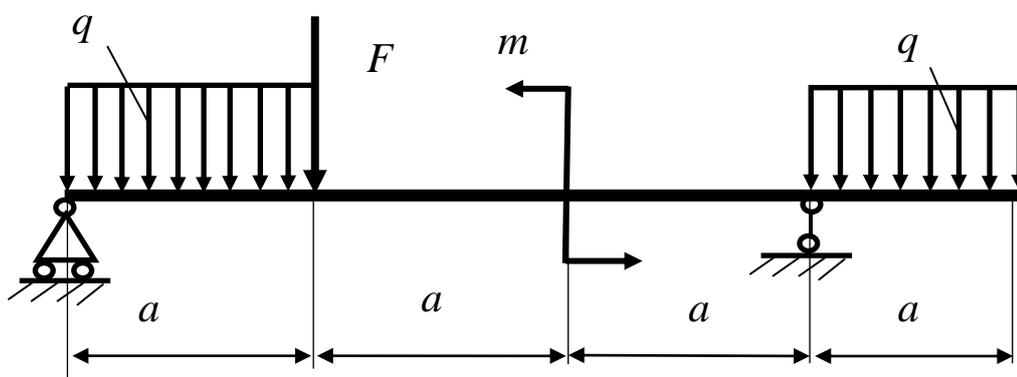


Рис. 3.2.29

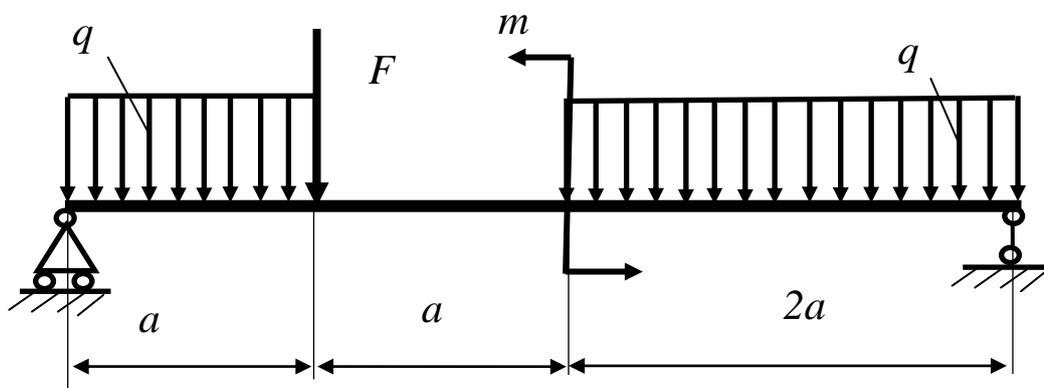


Рис. 3.2.30

Данные для вариантов

Номер варианта (рисунка)	F , кН	q , кН/м	m , кН·м	a , м	Номер варианта (рисунка)	F , кН	q , кН/м	m , кН·м	a , м
1 (3.2.1)	25	3	30	4	16 (3.2.16)	40	5	20	4
2 (3.2.2)	40	4	50	2	17 (3.2.17)	50	4	80	4
3 (3.2.3)	25	6	40	3	18 (3.2.18)	65	8	90	6
4 (3.2.4)	64	5	38	2	19 (3.2.19)	45	3	35	4
5 (3.2.5)	45	4	26	1	20 (3.2.20)	40	4	55	2
6 (3.2.6)	54	8	25	5	21 (3.2.21)	55	6	40	3
7 (3.2.7)	35	6	60	3	22 (3.2.22)	64	5	38	2
8 (3.2.8)	16	2	46	2	23 (3.2.23)	60	4	26	1
9 (3.2.9)	52	10	80	5	24 (3.2.24)	54	8	25	5
10 (3.2.10)	64	14	60	3	25 (3.2.25)	50	6	60	3
11 (3.2.11)	36	4	70	4	26 (3.2.26)	18	4	48	2
12 (3.2.12)	55	6	80	2	27 (3.2.27)	54	12	70	4
13 (3.2.13)	40	10	60	3	28 (3.2.28)	76	15	65	3
14 (3.2.14)	45	8	50	4	29 (3.2.29)	38	5	75	5
15 (3.2.15)	70	6	48	2	30 (3.2.30)	45	7	80	3

Примечание. Номер варианта соответствует номеру рисунка (например, в задаче 3.2 варианту 23 соответствует рис. 3.2.23).

Методические указания к решению задачи

1. Определить опорные реакции.
2. Составить уравнения поперечных сил и изгибающих моментов для различных участков балки.
3. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
4. Подобрать для балки номер двутавра при допуске напряжении $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.
5. Методом начальных параметров определить прогиб посередине пролета балки. Модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Пример решения задачи

Исходные данные

Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M для заданной балки (см. рис. 3.2.31), подобрать номер двутавра, определить прогиб посередине пролета балки.

Решение

1. Определение опорных реакций. Составляем уравнения равновесия:

$$\Sigma M_A(F_i) = 0 \Rightarrow -\frac{qa^2}{2} + F_1 \frac{a}{2} + qa \frac{3a}{2} - R_B \cdot 3a + m = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{-\frac{qa^2}{2} + F_1 \frac{a}{2} + qa \frac{3a}{2} + m}{3a} = \frac{-8 \cdot 2 + 30 \cdot 1 + 8 \cdot 2 \cdot 3 + 10}{3 \cdot 2} = 12 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B(F_i) = 0 \Rightarrow -qa \cdot 3,5a + R_A \cdot 3a - F_1 \cdot 2,5a - qa \cdot 1,5a + m = 0,$$

отсюда

$$R_A = \frac{3,5qa^2 + 2,5aF_1 + 1,5qa^2 - m}{3a} = \frac{3,5 \cdot 8 \cdot 2^2 + 2,5 \cdot 2 \cdot 30 + 1,5 \cdot 8 \cdot 2^2 - 10}{3 \cdot 2} = 50 \text{ кН}.$$

Проверка

$$\Sigma F_{iy} = -qa - qa - F_1 + R_A + R_B = -8 \cdot 2 - 8 \cdot 2 - 30 + 50 + 12 = 0.$$

Реакции определены верно.

2. Построение эпюры Q . Балка имеет шесть участков нагружения.

Участок I (CA): $0 \leq x_1 \leq a$. Начало координат в точке C. Находим Q_I как сумму сил слева от сечения $Q_I = -qx_1$ (это уравнение прямой).

Определяем граничные значения Q_I :

$$Q_{I/x_1=0} = 0 \quad \text{и} \quad Q_{I/x_1=a} = -qa = -8 \cdot 2 = -16 \text{ кН}.$$

Участок II (AD): $0 \leq x_2 \leq 0,5 a$. Начало координат в точке A. Определяем Q_{II} как сумму сил слева от сечения:

$$Q_{II} = -q a + R_A = -8 \cdot 2 + 50 = 34 \text{ кН}.$$

Эпюра представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс.

Участок III (DE): $0 \leq x_3 \leq 0,5 a$. Начало координат в точке D. Определяем Q_{III} как сумму сил слева от сечения:

$$Q_{III} = -q a + R_A - F_1 = -8 \cdot 2 + 50 - 30 = 4 \text{ кН}$$

(это уравнение прямой, параллельной оси абсцисс).

Участок IV (KB): $0 \leq x_4 \leq a$ (справа). Начало координат в точке K. Определяем Q_{IV} как сумму сил справа: $Q_{IV} = 0$.

Участок V (BF): $0 \leq x_5 \leq a$ (справа). Начало координат в точке B. Определяем Q_V как сумму сил справа от сечения:

$$Q_V = -R_B = -12 \text{ кН}$$

(это уравнение прямой, параллельной оси абсцисс).

Участок VI (FE): $0 \leq x_6 \leq a$ (справа). Начало координат в точке F. Определяем Q_{VI} как сумму сил справа от сечения:

$$Q_{VI} = -R_B + q x_6 = -12 + 8 x_6$$

(это уравнение прямой). Определяем граничные значения Q_{VI} :

$$Q_{VI/x_6=0} = -12 \text{ кН}; \quad Q_{VI/x_6=a} = -12 + 8 \cdot 2 = 4 \text{ кН}.$$

По полученным значениям строим эпюру Q .

Найдем дополнительно (см. рис. 3.2.31, б) значение x_6^0 — абсциссу точки, в которой эпюра GL пересекает ось абсцисс (то есть $Q_{VI} = 0$). Для этого приравниваем Q_{VI} к нулю:

$$(Q_{VI} = -12 + 8 \cdot x_6^0 = 0); \quad x_6^0 = 12/8 = 1,5 \text{ м}.$$

Графическая часть задачи

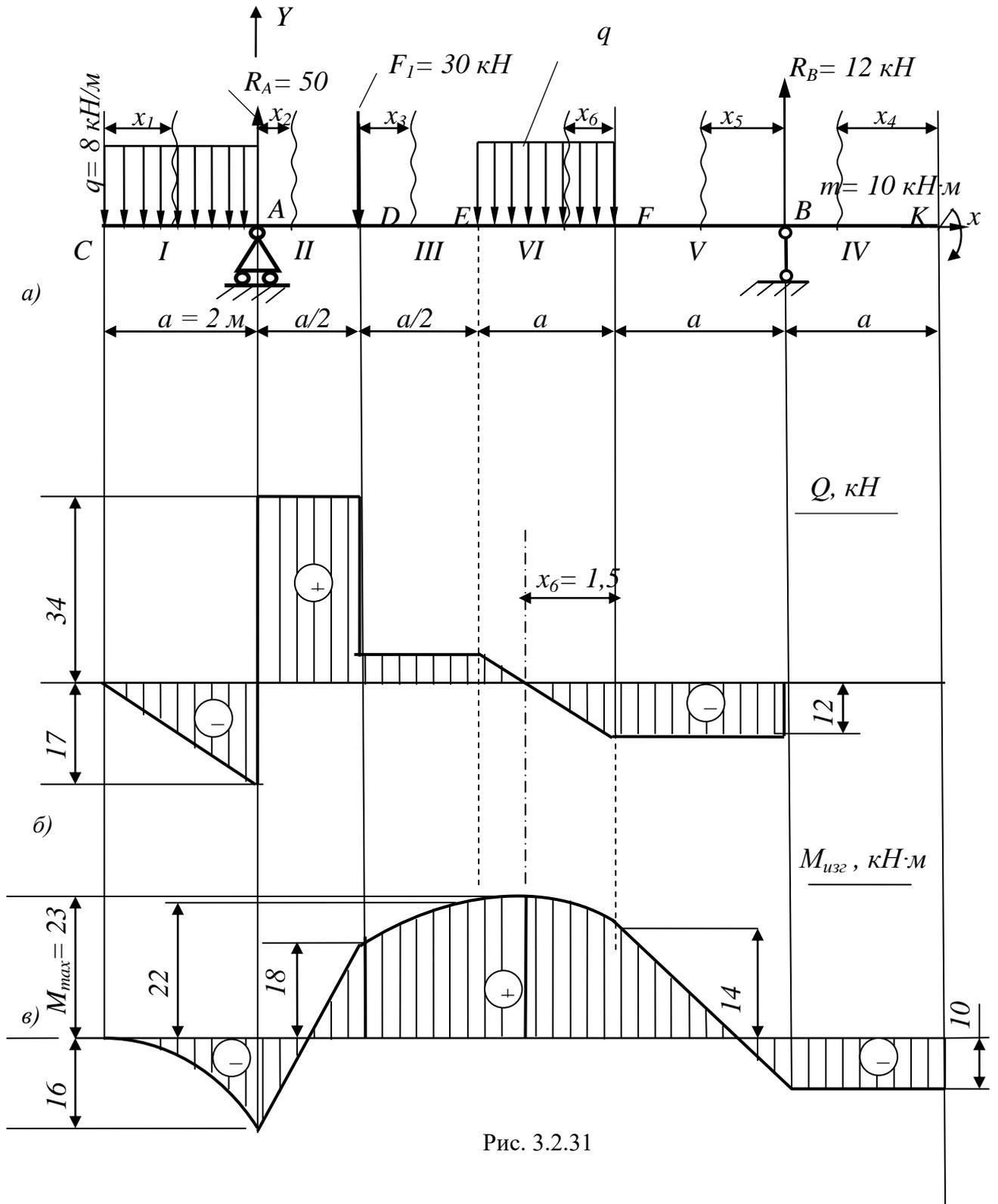


Рис. 3.2.31

3. Построение эпюры M , участок I (CA): $0 \leq x_1 \leq a$. Определяем

M_I как сумму моментов сил слева: $M_I = -\frac{q x_1^2}{2}$ (это уравнение квадратной параболы).

Находим граничные значения M_I :

$$M_C = M_{I/x_1=0} = 0;$$

$$M_A = M_{I/x_1=a} = -\frac{q a^2}{2} = -\frac{8 \cdot 2^2}{2} = -16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок II (AD): $0 \leq x_2 \leq 0,5 a$. Определяем M_I как сумму моментов сил слева от сечения:

$$M_{II} = -q a \left(\frac{a}{2} + x_2 \right) + R_A x_2 = -8 \cdot 2 (1 + x_2) + 5 \cdot x_2 = -11 x_2 - 16$$

(это уравнение прямой).

Находим граничные значения M_{II} , $\text{кН} \cdot \text{м}$:

$$M_A = M_{II/x_2=0} = -8 \cdot 2 = -16;$$

$$M_D = M_{II/x_2=\frac{a}{2}} = -8 \cdot 2 (1+1) + 50 \cdot 1 = -18.$$

Участок III (DE): $0 \leq x_3 \leq 0,5 a$. Определяем M_{III} как сумму моментов сил, расположенных слева от сечения:

$$M_{III} = -q a (x_3 + a) + R_A \left(x_3 + \frac{a}{2} \right) - F_1 \cdot x_3 = -8 \cdot 2 (x_3 + 2) + 50 (x_3 + 1) - 30 x_3 = 4 x_3 + 18$$

(это уравнение прямой).

Находим граничные значения M_{III} , $\text{кН} \cdot \text{м}$:

$$M_D = M_{III/x_3=0} = -8 \cdot 2 \cdot 2 + 50 \cdot 1 = 18;$$

$$M_E = M_{III/x_3=\frac{a}{2}} = -8 \cdot 2 (1+2) + 50 \cdot (1+1) - 30 \cdot 1 = 22.$$

Участок IV (KB): $0 \leq x_4 \leq a$ (справа). Определяем M_{IV} как сумму моментов сил, расположенных справа от сечения:

$$M_{IV} = -m = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

(это постоянная величина).

Участок V (BF): $0 \leq x_5 \leq a$; $M_V = -m + R_B x_5 = -10 + 12 x_5$

(это уравнение прямой).

Определяем граничные значения M_V , $\text{кН} \cdot \text{м}$:

$$M_B = M_{V/x_5=0} = -10; \quad M_F = M_{V/x_5=a} = -10 + 12 \cdot 2 = 14 .$$

Участок VI (FE): $0 \leq x_6 \leq a$ (справа). Определяем M_{VI} как сумму моментов сил справа от сечения:

$$M_{VI} = -m + R_B (a + x_6) - \frac{q x_6^2}{2} = -10 + 12(2 + x_6) - \frac{8 x_6^2}{2}$$

(это уравнение квадратной параболы).

Найдем значения M_{VI} на концах участка EF и в точке с координатой $x_6^0 = 1,5 \text{ м}$, где $M_{VI} = M_{\max}$, так как здесь $Q_{VI} = 0$:

$$M_F = M_{VI/x_6=0} = -10 + 12 \cdot 2 = 14 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_E = M_{VI/x_6=a} = -10 + 12(2 + 2) - \frac{8 \cdot 2^2}{2} = 22 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\max} = M_{VI/x_6=1,5\text{м}} = -10 + 12(2 + 1,5) - \frac{8 \cdot 1,5^2}{2} = 23 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюру M по полученным значениям (см. рис. 3.2.31, в).

4. Подбор сечения балки. Двутавровое сечение балки подбираем из условия прочности при изгибе по формуле

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{23 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} \approx 1,44 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 144 \text{ см}^3,$$

чему соответствует двутавр № 18а (по сортаменту $W_x = 159 \text{ см}^3$).

5. Определение методом начальных параметров прогиба по середине пролета AB балки (см. рис. 3.2.31, a). Для заданной балки с учетом выбранной системы координат и направления нагрузок обобщенное уравнение упругой линии примет вид

$$y = y_0 + \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EJ_z} + \frac{Q_0 x^3}{6EJ_z} - \frac{F_1 \left(x - \frac{a}{2}\right)^3}{6EJ_z} \Bigg|_{x > \frac{a}{2}} - \frac{q(x-a)^4}{24EJ_z} \Bigg|_{x > a} + \frac{q(x-2a)^4}{24EJ_z} \Bigg|_{x > 2a} + \frac{R_B (x-3a)^3}{6EJ_z} \Bigg|_{x > 3a} + \frac{m(x-4a)^2}{2EJ_z} \Bigg|_{x > 4a} \quad (3.2.1)$$

Последние два слагаемых равны нулю, так как для интересующих нас точек не выполняются граничные условия. Начальные параметры, как видно на рис. 3.2.31, a – b , принимают следующие значения:

$$y_0 = y_A = 0; \quad \theta_0 = \theta_A \neq 0 \text{ (подлежит определению);}$$

$$M_0 = M_A = -\frac{qa^2}{2} = -16 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad Q_0 = Q_A = 34 \text{ кН}.$$

Теперь уравнение (3.2.1) запишем в виде

$$y = \theta_0 x - \frac{16x^2}{2EJ_z} + \frac{34x^3}{6EJ_z} - \frac{30(x-1)^3}{6EJ_z} \Bigg|_{x > 1} - \frac{8(x-2)^4}{24EJ_z} \Bigg|_{x > 2} + \frac{8(x-4)^4}{24EJ_z} \Bigg|_{x > 4} \quad (3.2.2)$$

После элементарных упрощений получим

$$y = \theta_0 x - \frac{8x^2}{EJ_z} + \frac{17x^3}{3EJ_z} - \frac{5(x-1)^3}{EJ_z} \Bigg|_{x > 1} - \frac{(x-2)^4}{3EJ_z} \Bigg|_{x > 2} + \frac{(x-4)^4}{3EJ_z} \Bigg|_{x > 4} \quad (3.2.3)$$

Угол поворота опорного сечения в начале координат θ_0 найдем из условия, что прогиб на правой опоре B равен нулю, то есть $y_B = 0$.

Тогда будем иметь (при $x = 3a = 6 \text{ м}$)

$$y_B = y_{x=3a} = 0; \quad \theta_0 \cdot 6 - \frac{8 \cdot 6^2}{EJ_z} + \frac{17 \cdot 6^3}{3EJ_z} - \frac{5 \cdot 5^3}{EJ_z} - \frac{4^4}{3EJ_z} + \frac{2^4}{3EJ_z} = 0,$$

откуда

$$\theta_0 = \theta_A = -\frac{77}{2EJ_z} . \quad (3.2.4)$$

Уравнение упругой линии (3.2.3) с учетом значения θ_0 согласно (3.2.4) окончательно запишем в виде

$$y = -\frac{77x}{2EJ_z} - \frac{8x^2}{EJ_z} + \frac{17x^3}{3EJ_z} - \frac{5(x-1)^3}{EJ_z} \Bigg|_{x>1} - \frac{(x-2)^4}{3EJ_z} \Bigg|_{x>2} + \frac{(x-4)^4}{3EJ_z} \Bigg|_{x>4}^0 \quad (3.2.5)$$

Теперь найдем искомый прогиб посередине пролета AB балки (при $x = 3 \text{ м}$; $a = 2 \text{ м}$), причем для последнего слагаемого не выполнится граничное условие

$$y_{x=3\text{м}} = -\frac{77 \cdot 3}{2EJ_z} - \frac{8 \cdot 3^2}{EJ_z} + \frac{17 \cdot 3^3}{3EJ_z} - \frac{5 \cdot 2^3}{EJ_z} - \frac{1^4}{3EJ_z} ,$$

откуда

$$y_{x=3\text{м}} = -\frac{449}{6EJ_z} . \quad (3.2.6)$$

Вычислим этот прогиб при $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ и $J_z = 1430 \text{ см}^4$ (по сортаменту для двутавра № I8а $J_z = 1430 \text{ см}^4$);

тогда

$$y_{x=3\text{м}} = -\frac{449}{6EJ_z} = -\frac{449 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} \approx -0,0262 \text{ м} = -2,62 \text{ см} .$$

Задача 3.3. Построение эюр N , Q , M для рам

Исходные данные: для заданной плоской рамы, нагруженной в ее плоскости, построить эюры внутренних силовых факторов N , Q , M .

Схемы к задаче 3.3

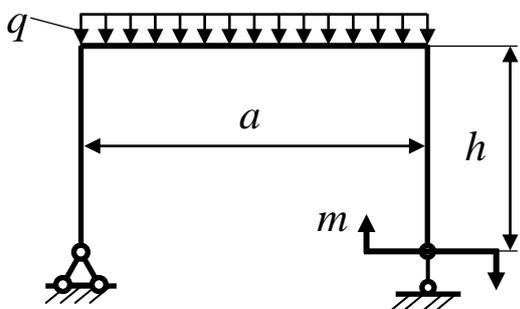


Рис. 3.3.1

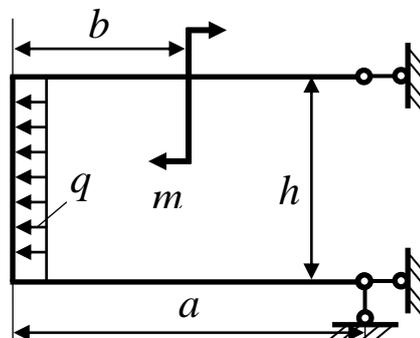


Рис. 3.3.2

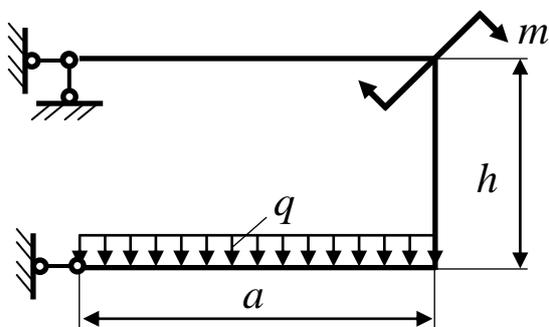


Рис. 3.3.3

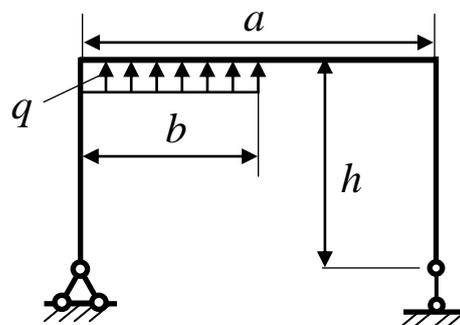


Рис. 3.3.4

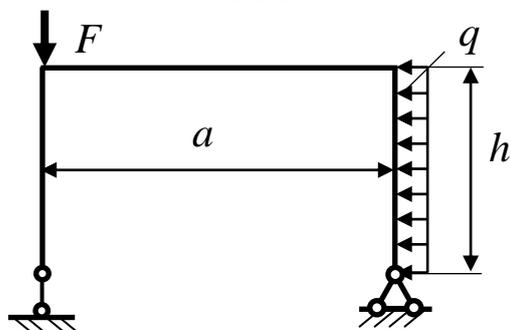


Рис. 3.3.5

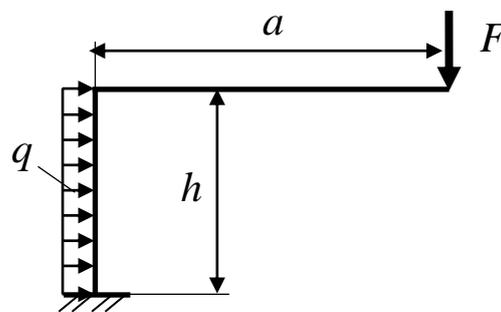


Рис. 3.3.6

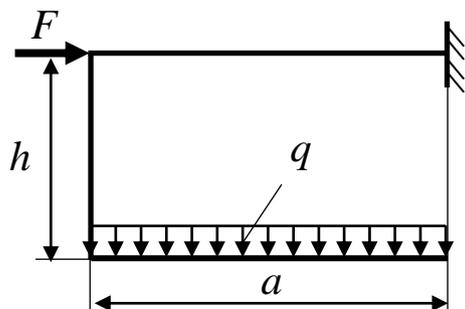


Рис. 3.3.7

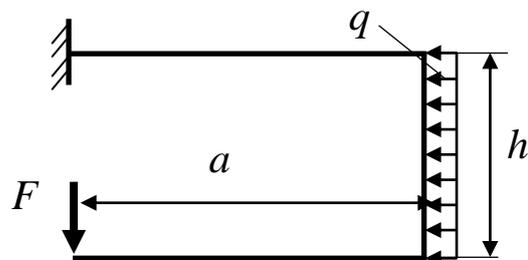


Рис. 3.3.8

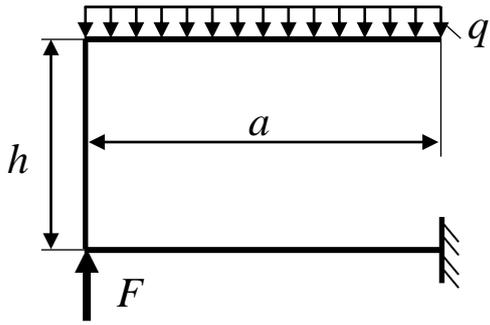


Рис. 3.3.9

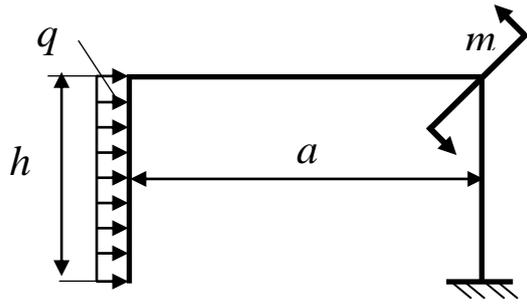


Рис. 3.3.10

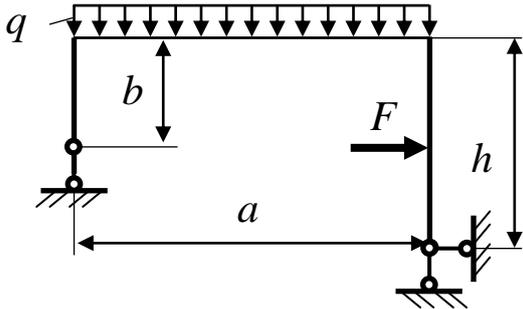


Рис. 3.3.11

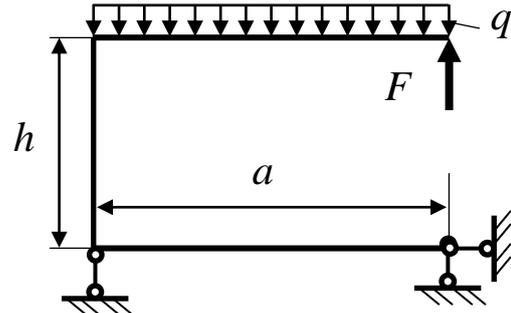


Рис. 3.3.12

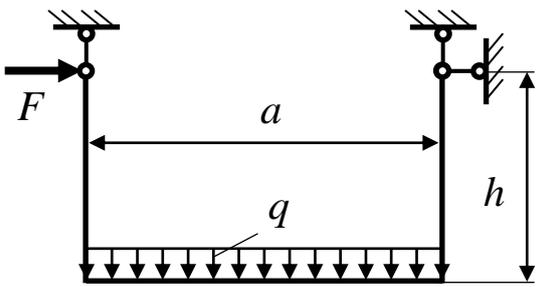


Рис. 3.3.13

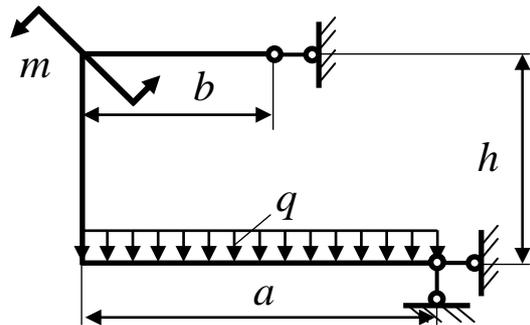


Рис. 3.3.14

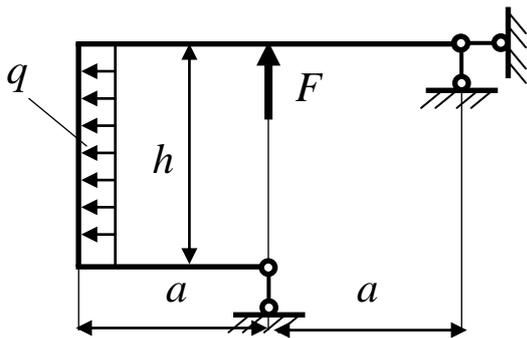


Рис. 3.3.15

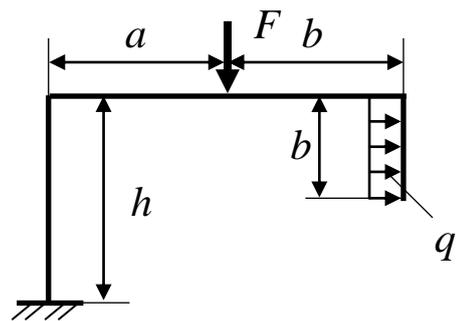


Рис. 3.3.16

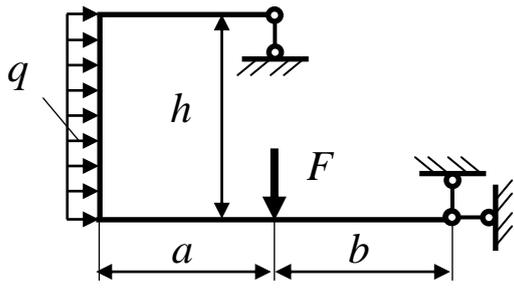


Рис. 3.3.17

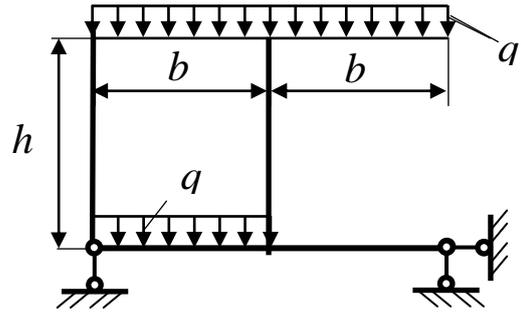


Рис. 3.3.18

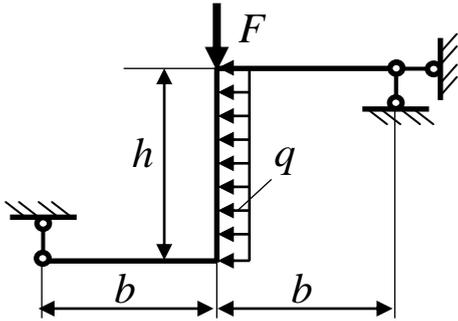


Рис. 3.3.19

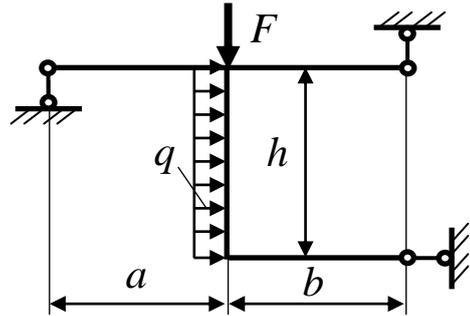


Рис. 3.3.20

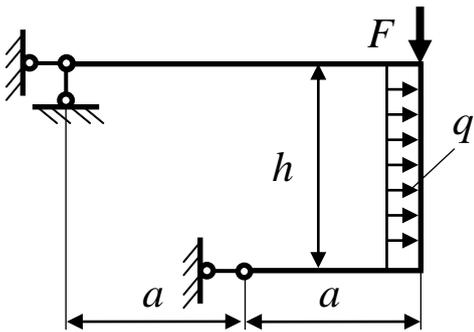


Рис. 3.3.21

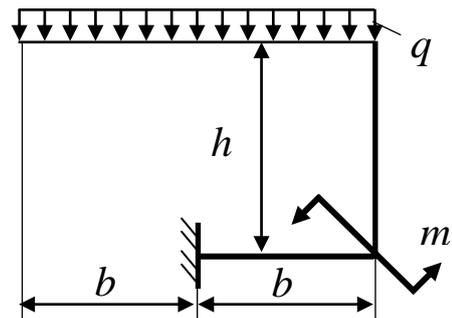


Рис. 3.3.22

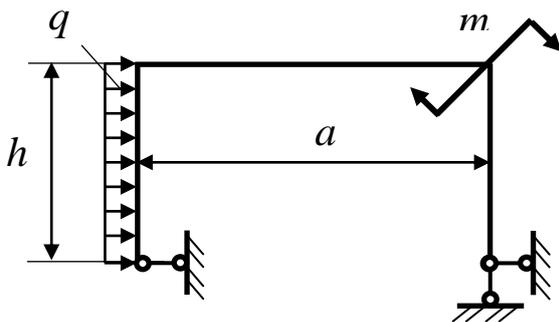


Рис. 3.3.23

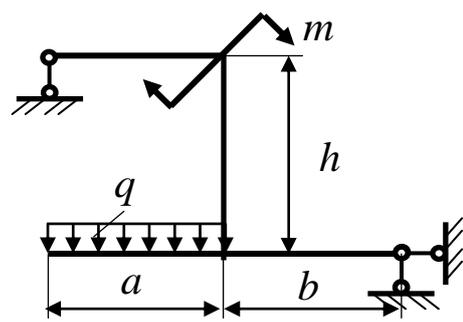


Рис. 3.3.24

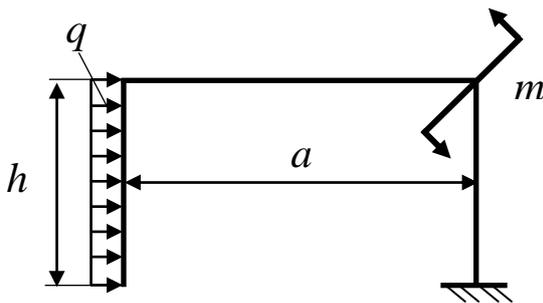


Рис. 3.3.25

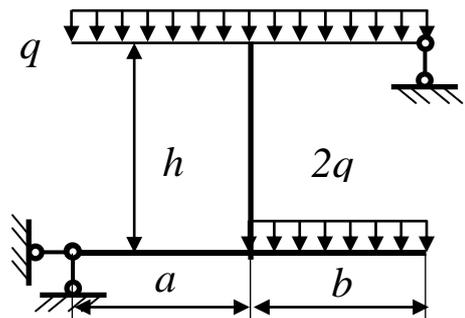


Рис. 3.3.26

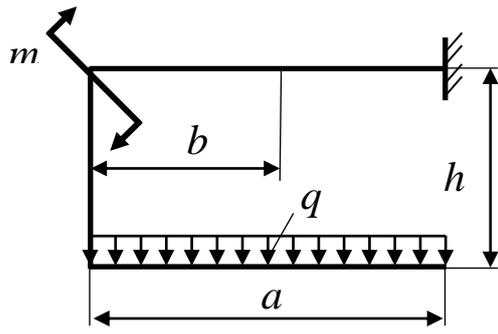


Рис. 3.3.27

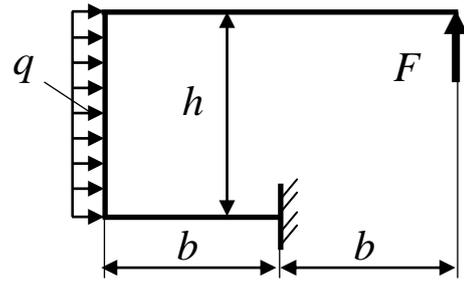


Рис. 3.3.28

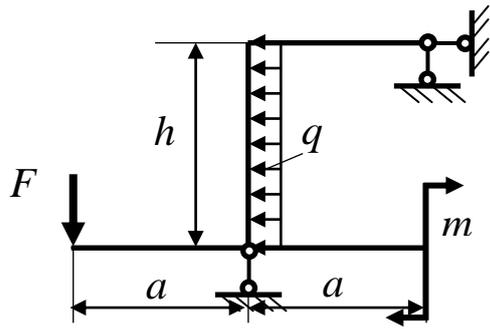


Рис. 3.3.29

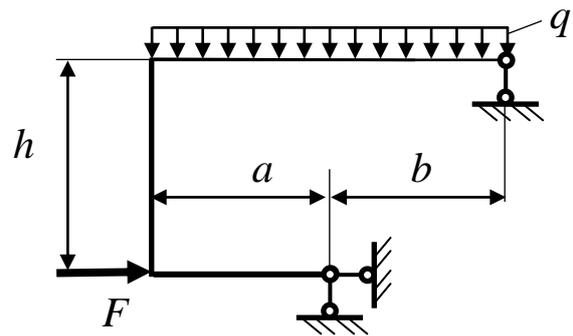


Рис. 3.3.30

Таблица 3.3

Данные для вариантов

Номер варианта (рисунка)	F , кН	q , кН/м	m , кН·м	a , м	b , м	h , м
1 (3.3.1)	10	3	20	2	1	4
2 (3.3.2)	12	4	30	3	2	3
3 (3.3.3)	14	2	40	4	3	4
4 (3.3.4)	16	1	50	5	3	4
5 (3.3.5)	18	2	30	2	1	3
6 (3.3.6)	20	3	30	3	2	4
7 (3.3.7)	22	4	40	4	3	3
8 (3.3.8)	24	5	20	5	3	4
9 (3.3.9)	26	2	30	2	2	3
10 (3.3.10)	28	3	40	3	3	4
11 (3.3.11)	30	4	50	4	4	4
12 (3.3.12)	32	5	60	5	3	3
13 (3.3.13)	34	2	50	2	2	3
14 (3.3.14)	36	3	30	3	2	4
15 (3.3.15)	38	4	40	4	3	5
16 (3.3.16)	40	5	60	5	3	4
17 (3.3.17)	42	8	80	4	1	3
18 (3.3.18)	44	6	90	3	2	4
19 (3.3.19)	46	9	70	4	3	3
20 (3.3.20)	48	8	50	5	2	4
21 (3.3.21)	50	10	40	2	2	3
22 (3.3.22)	52	12	60	3	3	4
23 (3.3.23)	54	10	80	4	2	2
24 (3.3.24)	56	8	60	5	3	3
25 (3.3.25)	58	9	50	6	4	4
26 (3.3.26)	60	10	60	6	5	5
27 (3.3.27)	62	12	70	5	4	4
28 (3.3.28)	64	14	80	3	2	3
29 (3.3.29)	66	12	90	6	4	5
30 (3.3.30)	68	10	80	5	5	4

Примечание. Номер варианта соответствует номеру рисунка (например, в задаче 3.3 варианту 7 соответствует рис. 3.3.7).

Методические указания к решению задачи

1. Составить уравнения равновесия и определить опорные реакции рамы.

2. Разбить раму на участки. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние нагрузки, и сечения, в которых ось рамы претерпевает излом.

3. На каждом участке взять произвольное сечение и задать его текущей координатой от выбранного начала координат. Разрешается применять скользящую систему координат, то есть помещать начало координат в начале текущего участка, направляя ось x вдоль оси участка.

4. Записать выражения для N , Q , M в произвольном сечении и пределы изменения текущей координаты.

5. По полученным аналитическим выражениям для N , Q и M построить их эпюры.

Пример решения задачи

Исходные данные

Построить эпюры Q , M и N для рамы (см. рис. 3.3.31, *a*).

Решение

1. В рассматриваемой П-образной раме прежде всего необходимо определить опорные реакции. Шарнирно-неподвижная опора A дает две составляющие опорной реакции: R_A и H_A ; шарнирно-подвижная опора B — лишь одну вертикальную реакцию R_B (предварительно принимаем, что она направлена вверх).

Составляем уравнение равновесия:

$$\sum m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad -R_B \cdot \frac{h}{2} - F_2 \cdot \frac{h}{2} = 0,$$

откуда $R_B = -F_2 = -50 \text{ кН}$.

Знак «-» указывает на то, что направление опорной реакции было выбрано неверно: реакция R_B направлена вниз. Наносим на чертеж реакцию R_B , учитывая ее действительное направление, а реакцию, направленную вверх, зачеркиваем (рис. 3.3.31, *a*).

Составляем второе уравнение равновесия:

$$\sum m_B(\vec{F}_i) = 0; R_A \cdot \frac{h}{2} - F_2 \cdot \frac{h}{2} = 0,$$

откуда $R_A = F_2 = 50$ кН.

Горизонтальную составляющую полной реакции шарнира A , то есть H_A , определим из условия, что сумма проекции всех сил на горизонтальную ось x равна нулю:

$$\sum F_{ix} = 0; H_A - F_1 - F_2 = 0,$$

откуда $H_A = F_1 + F_2 = 80$ кН.

Проверка. Используем уравнение $\sum F_{iy} = 0$:

$$R_A - R_B = 50 - 50 = 0.$$

Таким образом, опорные реакции найдены правильно.

2. Построение эпюры Q . Рама имеет четыре участка: AC , CD , DK и KB . Рассмотрим участок I — AC ($0 \leq x_1 \leq h$), взяв начало координат в точке A . Находим поперечную силу как сумму проекций на ось, перпендикулярную к стержню AC , сил, расположенных слева от сечения:

$$Q_I = - H_A = -80 \text{ кН}.$$

Значение Q_I , очевидно, остается неизменным на всем участке AC .

На участке II — CD : $\left(0 \leq x_2 \leq \frac{h}{2}\right)$

$$Q_{II} = R_A = 50 \text{ кН}.$$

Следующие участки III и IV (DK и KB) рамы рассмотрим, двигаясь со стороны ее правого конца точки.

На участке III (DK): $0 \leq x_3 \leq \frac{h}{2}$;

$$Q_{III} = F_1 = 30 \text{ кН} \text{ на всем участке } BK;$$

На участке IV (KB): $0 \leq x_4 \leq \frac{h}{2}$;

$$Q_{IV} = F_1 + F_2 = 30 + 50 = 80 \text{ кН} \text{ на всем участке } KD.$$

По полученным значениям строим эпюру Q (см. рис. 3.3.31, б).

3. Построение эпюры M .

Участок I ($0 \leq x_1 \leq h$). Определяем M как сумму моментов сил, расположенных слева от сечения:

$$M_I = -H_A x_1.$$

Придавая x_1 значения, соответствующие границам участка, получаем

$$M_I|_{x_1=0} = M_A = 0;$$

$$M_I|_{x_1=h} = M_C = -H_A h = -480 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок II ($0 \leq x_2 \leq \frac{h}{2}$). Находим M_{II} также как сумму моментов сил, расположенных слева от сечения:

$$M_{II} = R_A x_2 - H_A h.$$

Определяем два значения M_{II} в сечениях C и D :

$$M_{II}|_{x_2=0} = M_C = -H_A h = -480 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{II}|_{x_2=\frac{h}{2}} = M_D = R_A \frac{h}{2} - H_A h = 50 \cdot \frac{6}{2} - 80 \cdot 6 = -330 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок III ($0 \leq x_3 \leq \frac{h}{2}$). Определяем M_{III} как сумму моментов сил, расположенных справа от сечения:

$$M_{III} = -F_1 x_3.$$

Определяем граничные значения M_{III} :

$$M_{III}|_{x_3=0} = M_B = 0;$$

$$M_{III}|_{x_3=\frac{h}{2}} = M_K = -F_1 \cdot \frac{h}{2} = -30 \cdot \frac{6}{2} = -90 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок IV $\left(0 \leq x_4 \leq \frac{h}{2}\right)$. Определяем M_{IV} как сумму моментов сил, расположенных справа от сечения:

$$M_{IV} = -F_1 \cdot \left(\frac{h}{2} + x_4\right) - F_2 x_4.$$

Находим граничные значения M_{IV} :

$$M_{IV|_{x_4=0}} = M_K = -F_1 \cdot \frac{h}{2} = -90 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{IV|_{x_4=\frac{h}{2}}} = M_D = -F_1 \cdot h - F_2 \cdot \frac{h}{2} = -30 \cdot 6 - 50 \cdot 3 = -330 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

что совпадает с ранее полученными значениями изгибающего момента в узле D .

Строим эпюру M , откладывая, как было условлено, ординаты со стороны сжатых волокон (рис 3.3.31, в).

4. Построение эпюры N . На участке I находим N как сумму проекций на ось AC всех сил, расположенных слева от сечения:

$$N_I = -R_A = -50 \text{ кН}.$$

Знак « $-$ » указывает, что стойка AC сжата. Проецируя все силы, расположенные слева от сечения II, на направление ригеля* CD , получаем

$$N_{II} = -H_A = -80 \text{ кН} \text{ (ригель сжат)}.$$

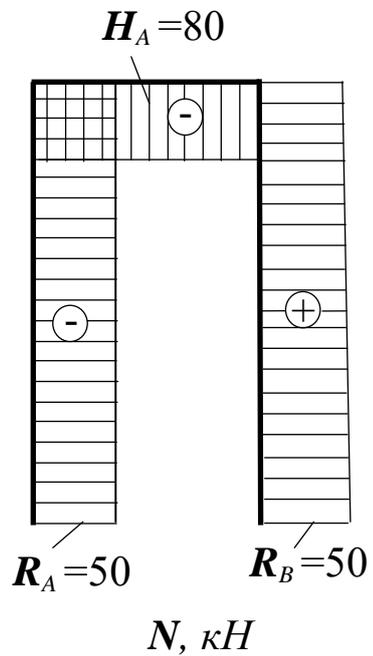
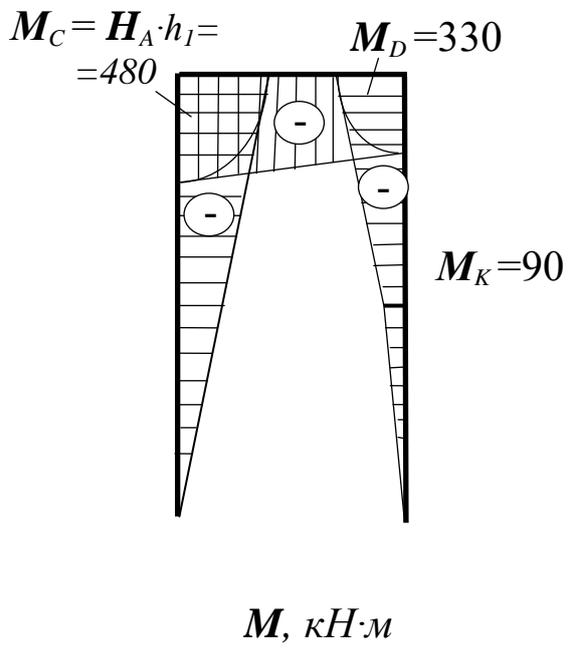
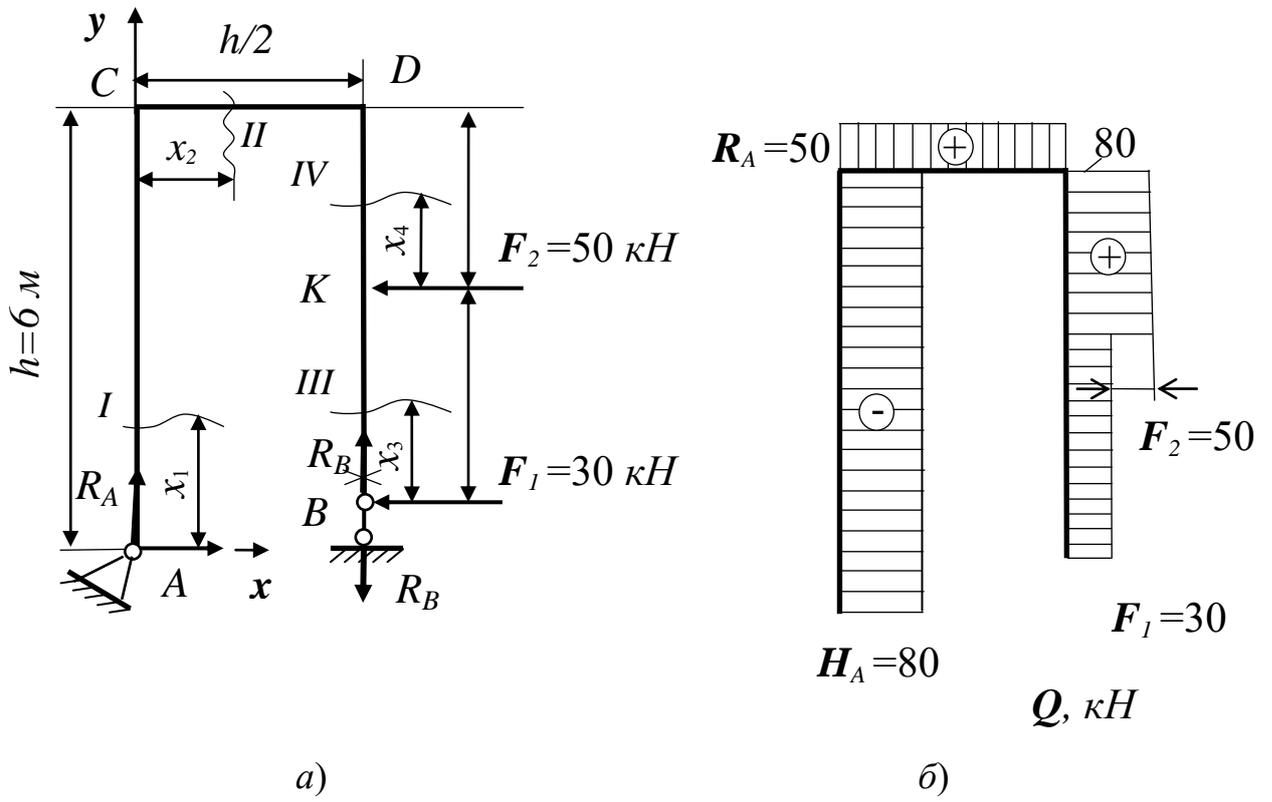
На участках III и IV определяем продольную силу как сумму проекций на ось DB всех сил, расположенных справа от сечения:

$$N_{III} = N_{IV} = R_B = 50 \text{ кН} \text{ (правая стойка растянута)}.$$

Строим эпюру N , откладывая положительные ординаты снаружи, а отрицательные — внутри контура рамы (рис. 3.3.31, г).

* Ригелем называют горизонтальный участок рамы.

Графическая часть задачи



в)

г)

Рис. 3.3.31

Задание №4. Статически неопределимые системы при изгибе

Задача 4.1. Расчет статически неопределимой балки

Исходные данные

Построить опоры внутренних силовых факторов для балки; подобрать сечение балки, определить прогиб посередине первого пролета. Принять $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Схемы к задаче 4.1

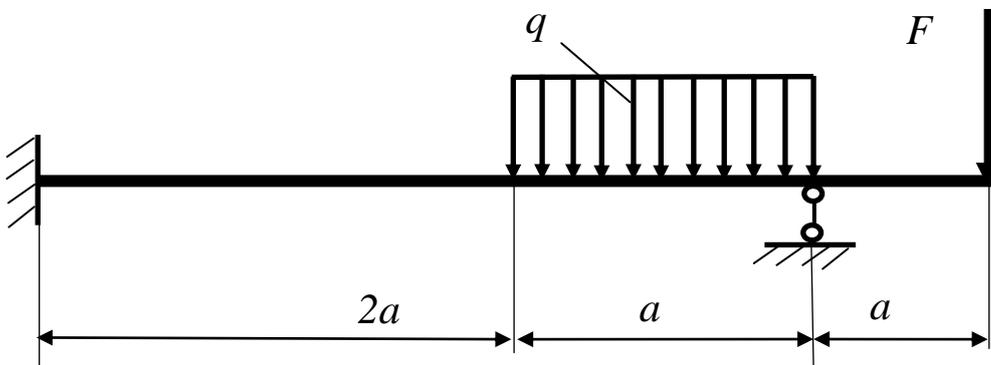


Рис. 4.1.1

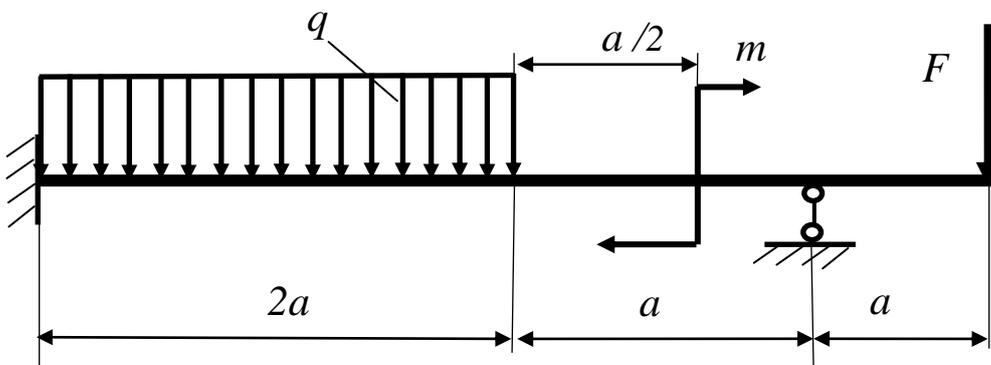


Рис. 4.1.2

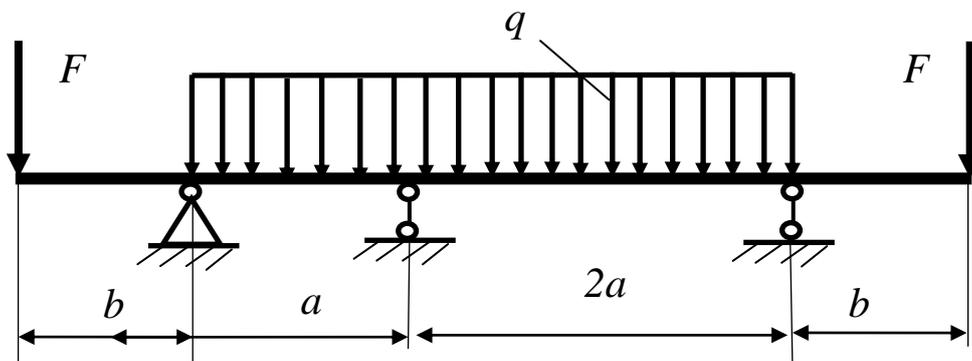


Рис. 4.1.3

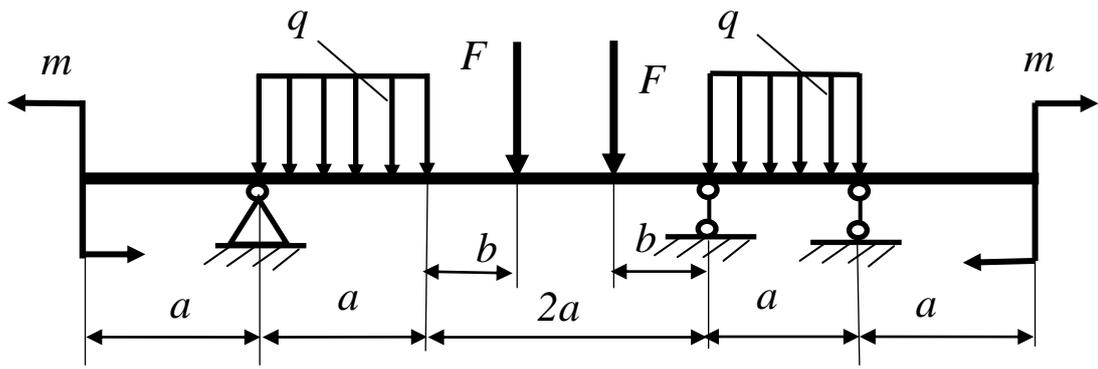


Рис. 4.1.4

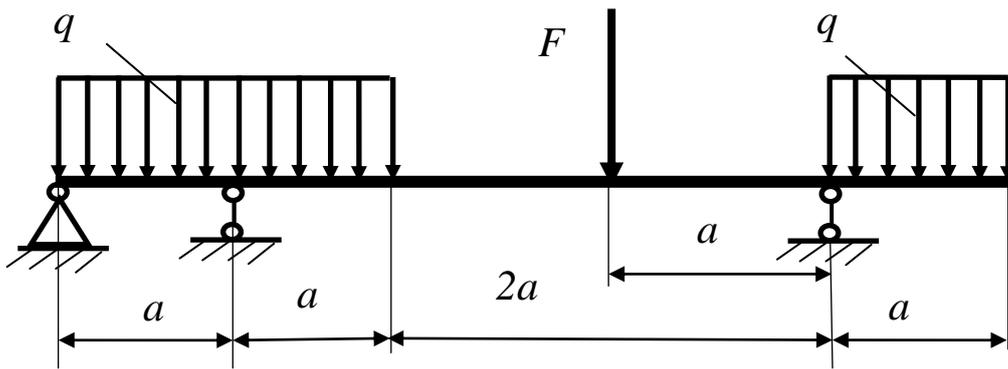


Рис. 4.1.5

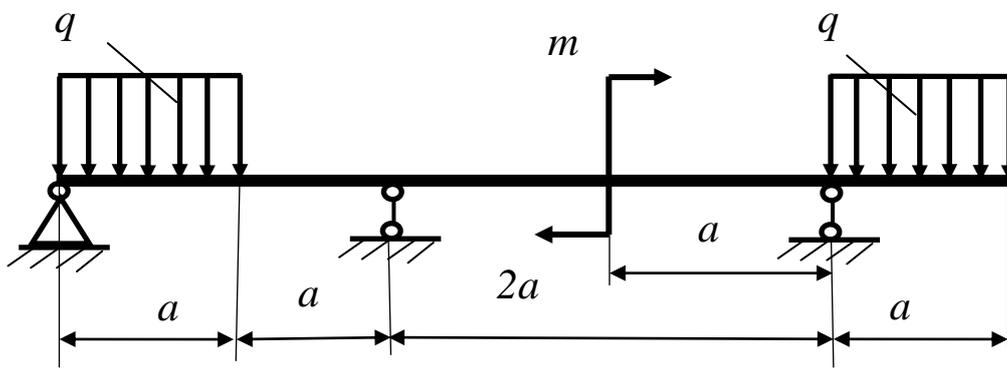


Рис. 4.1.6

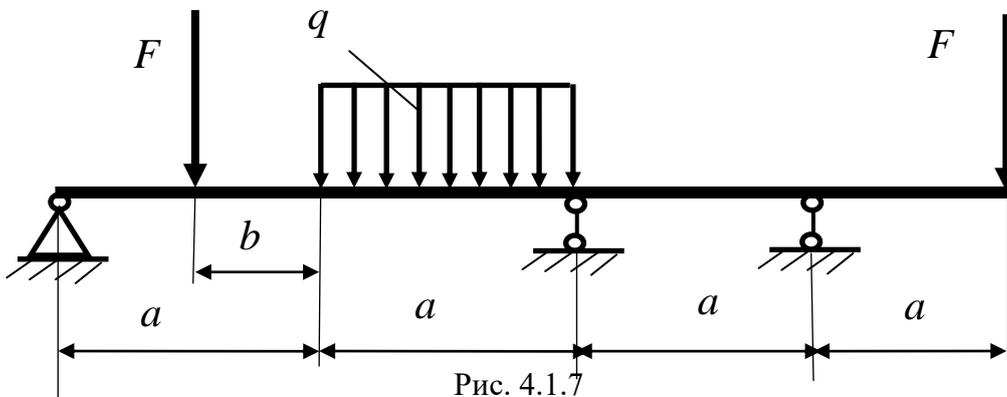


Рис. 4.1.7

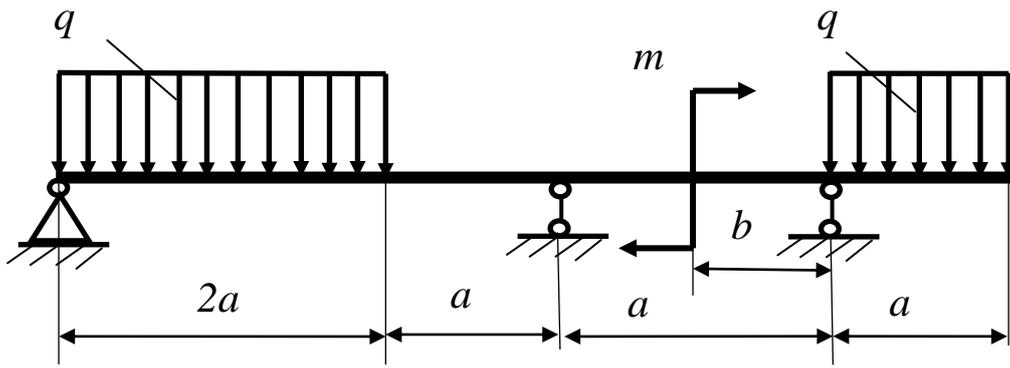


Рис. 4.1.8

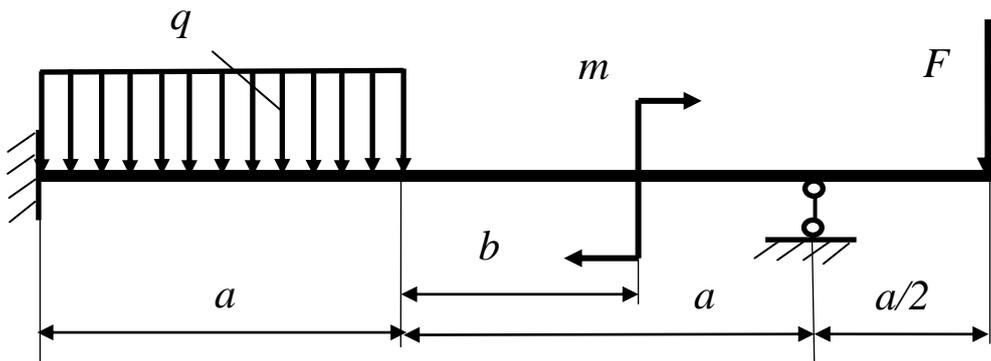


Рис. 4.1.9

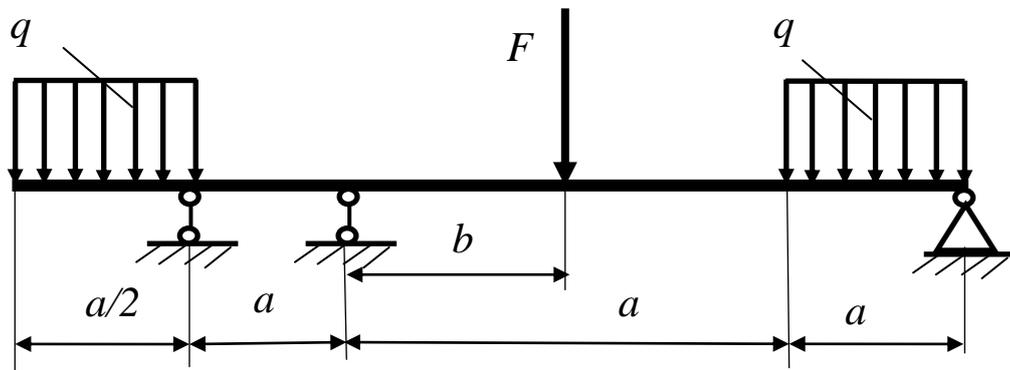


Рис. 4.1.10

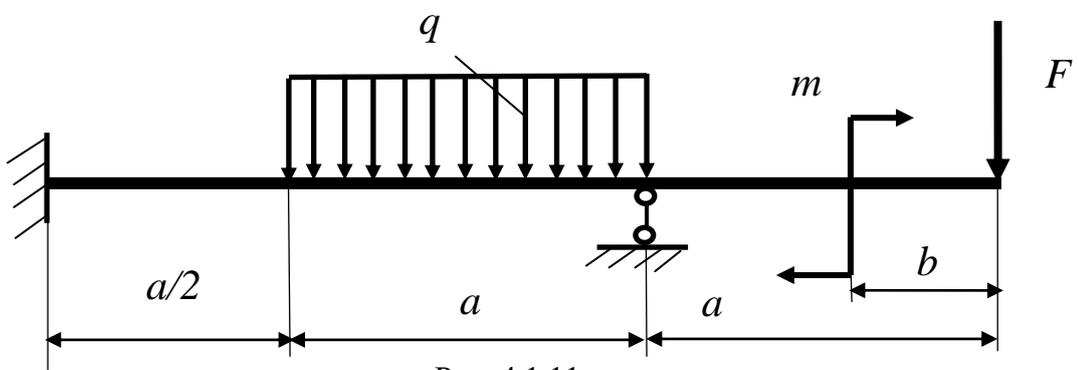


Рис. 4.1.11

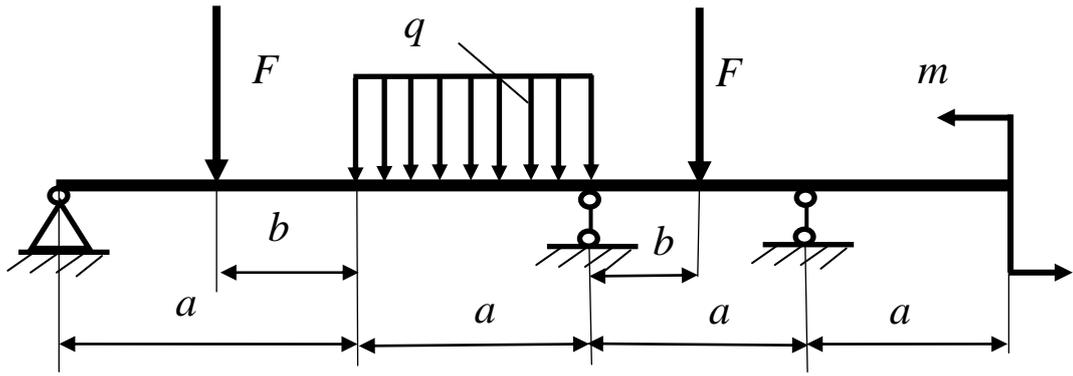


Рис. 4.1.12

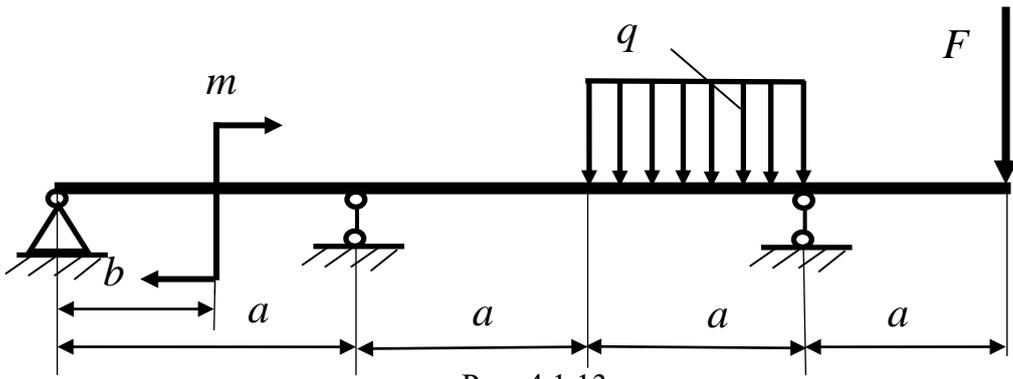


Рис. 4.1.13

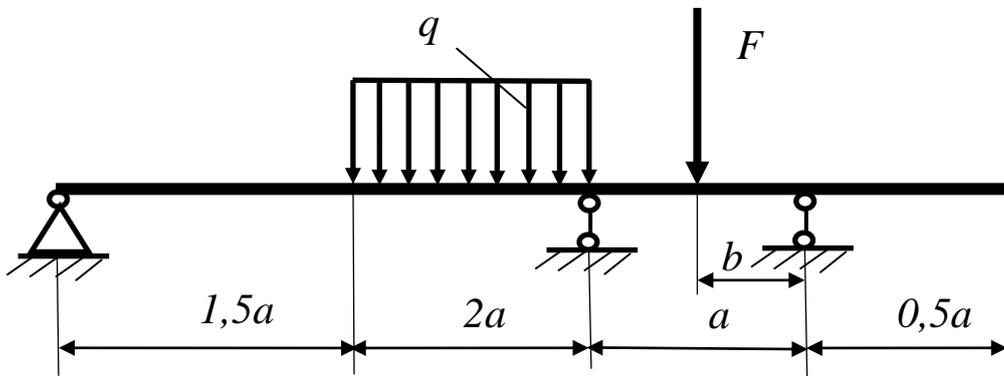


Рис. 4.1.14

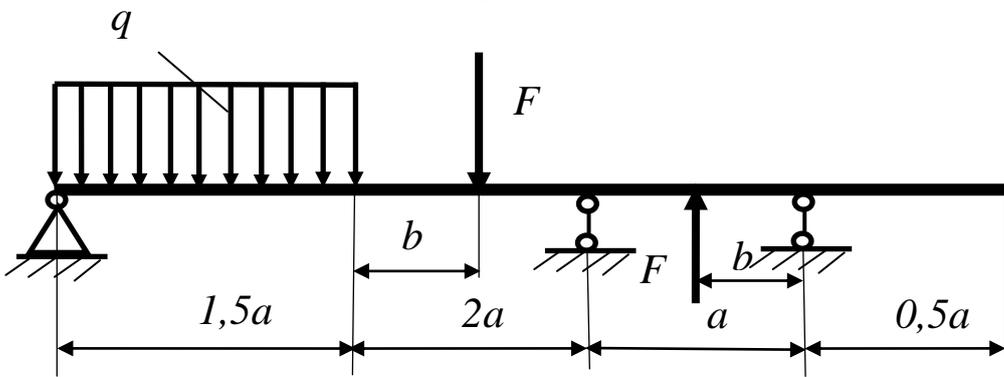


Рис. 4.1.15

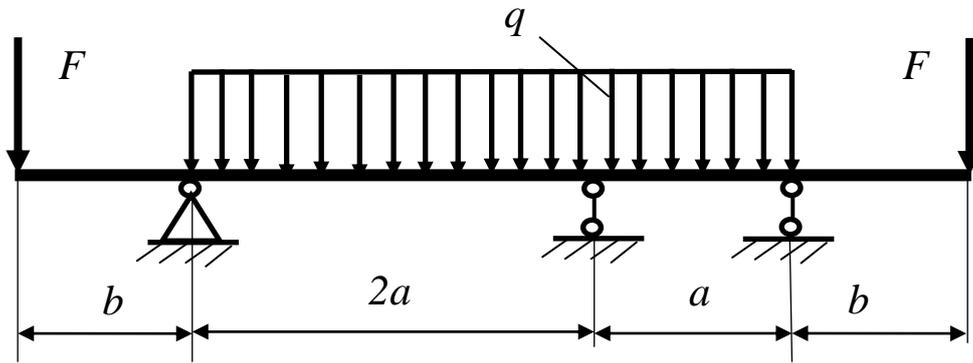


Рис. 4.1.16

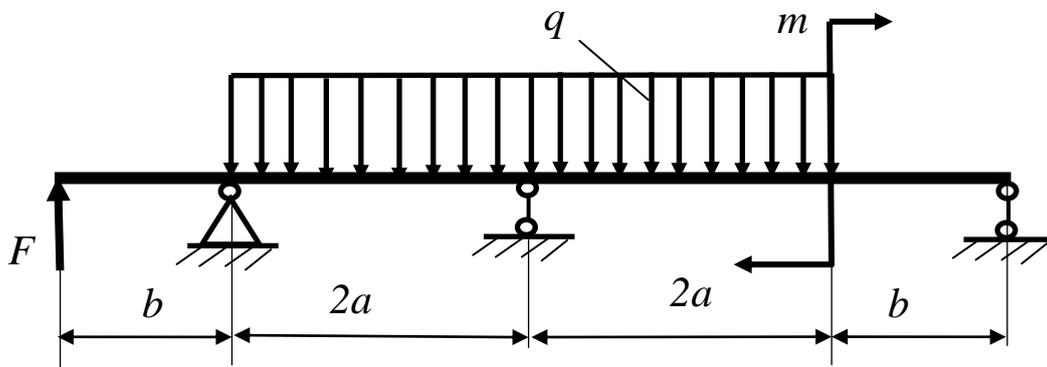


Рис. 4.1.17

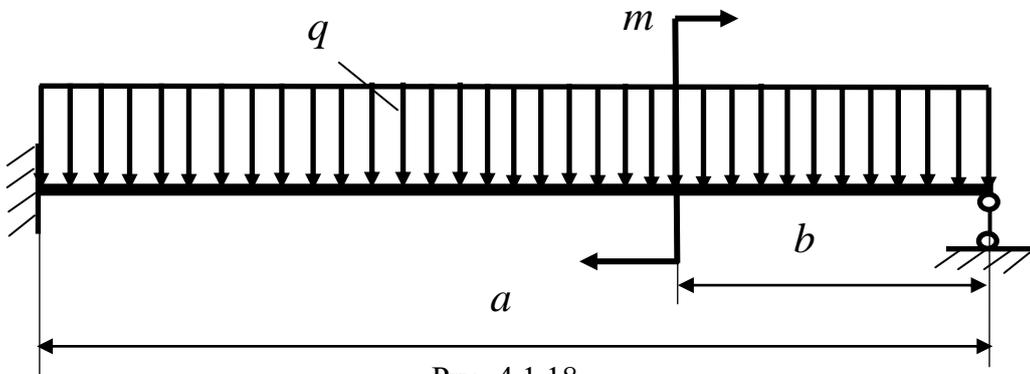


Рис. 4.1.18

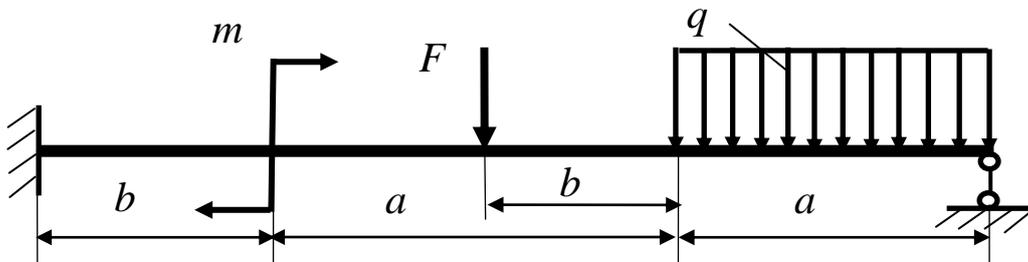


Рис. 4.1.19

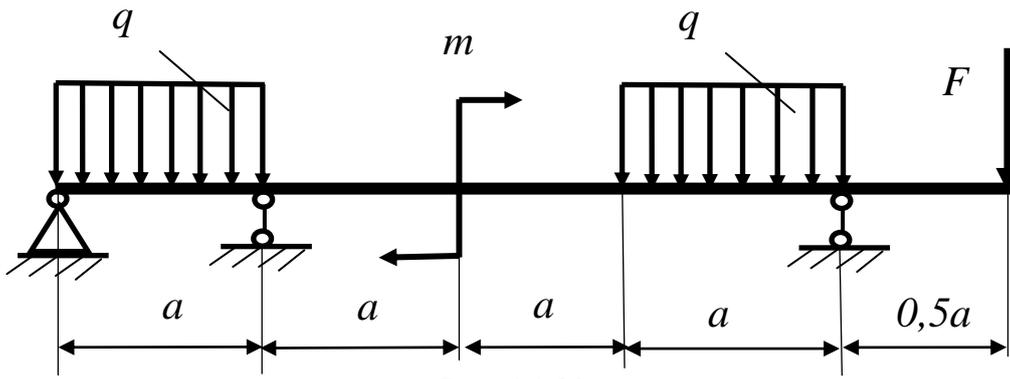


Рис. 4.1.20

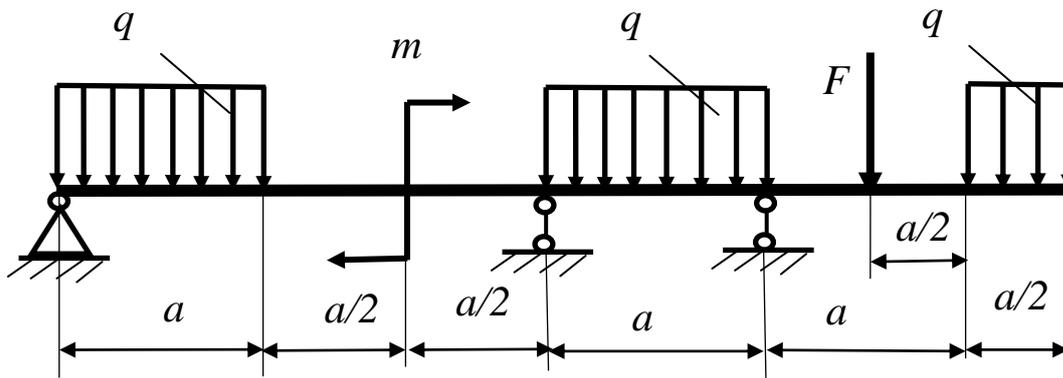


Рис. 4.1.21

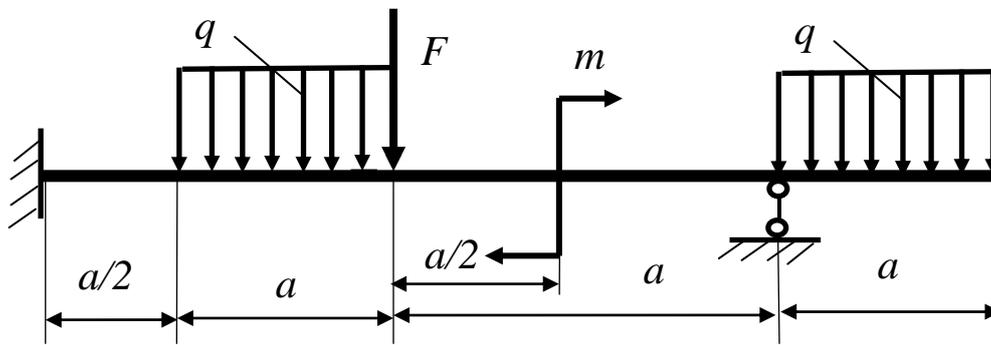


Рис. 4.1.22

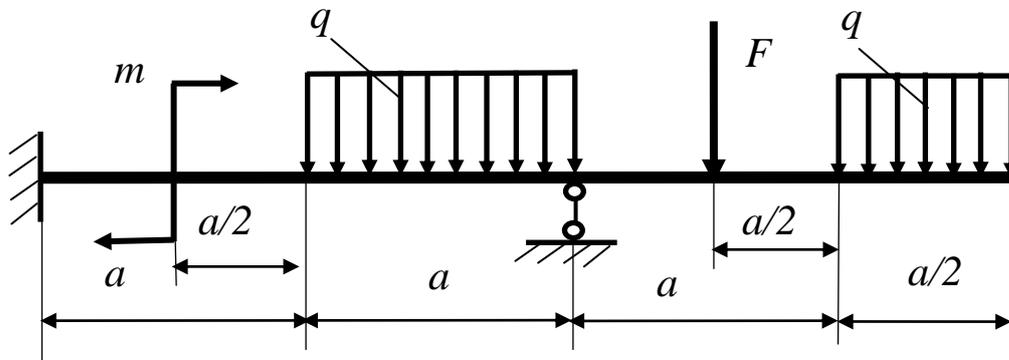


Рис. 4.1.23

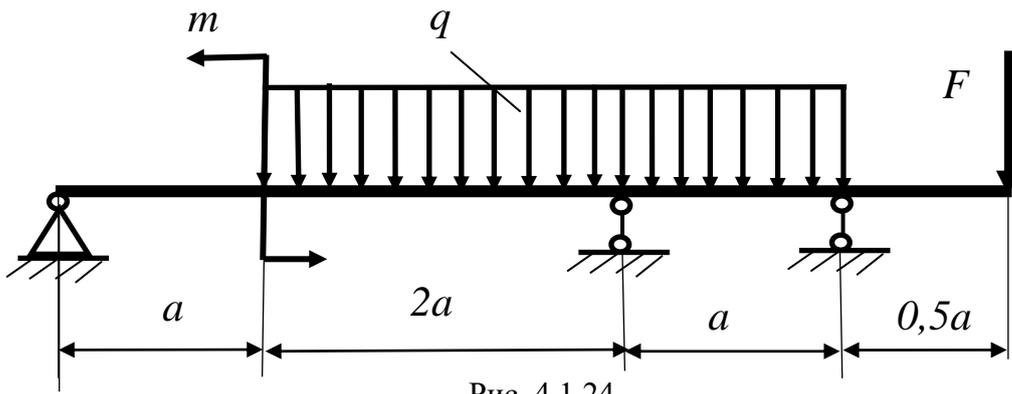


Рис. 4.1.24

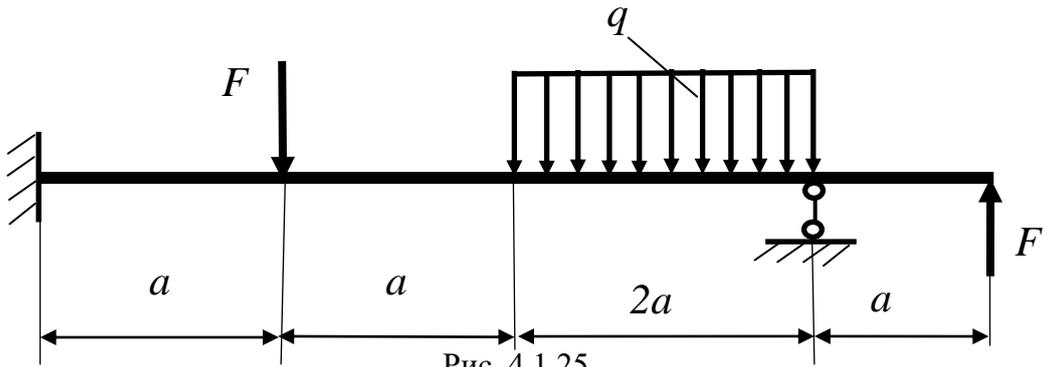


Рис. 4.1.25

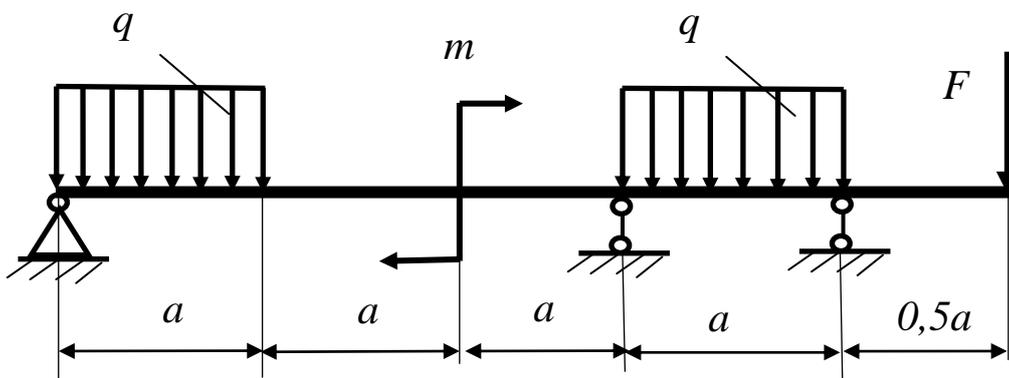


Рис. 4.1.26

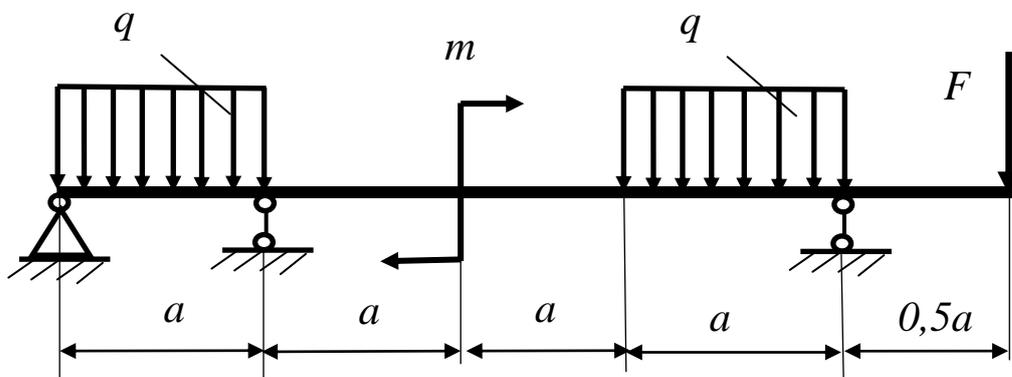


Рис. 4.1.27

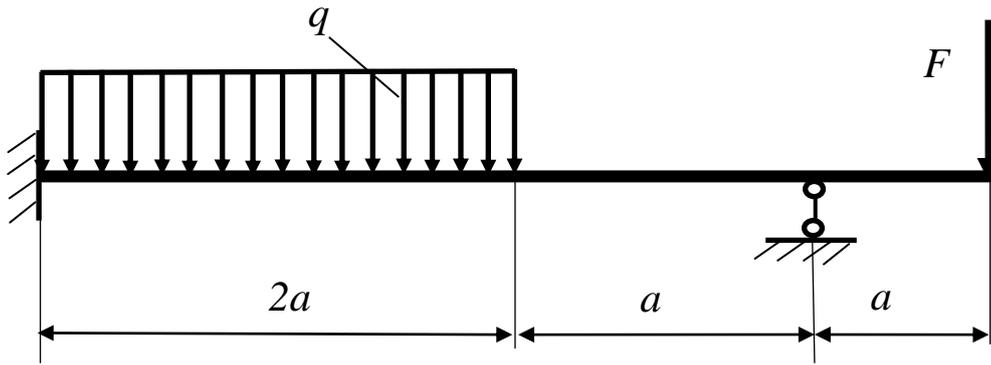


Рис. 4.1.28

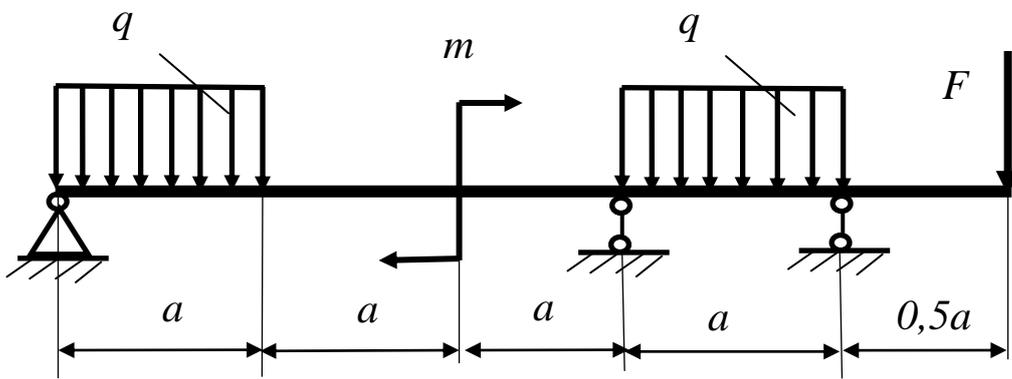


Рис. 4.1.29

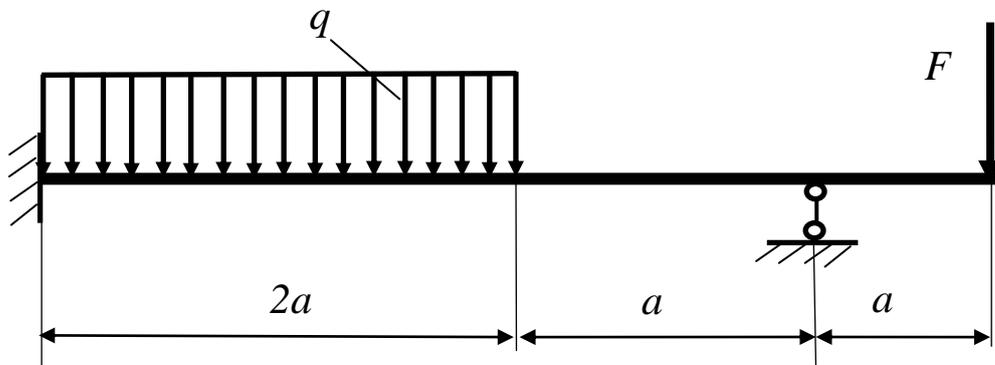


Рис. 4.1.30

Таблица 4.1

Данные для вариантов

Номер варианта (рисунка)	t , кН·м	F , кН	q , кН/м	a , м	b , м	Номер варианта (рисунка)	t , кН·м	F , кН	q , кН/м	a , м	b , м
1 (4.1.1)	5,0	2,0	0,5	4,0	2,0	16 (4.1.16)	17,5	14,0	2,5	4,0	3,0
2 (4.1.2)	7,5	4,0	1,0	3,5	1,5	17 (4.1.17)	20,0	16,0	3,0	2,5	2,0
3 (4.1.3)	10,0	6,0	1,5	3,0	2,0	18 (4.1.18)	22,5	18,0	5,0	3,0	1,5
4 (4.1.4)	12,5	8,0	2,0	2,5	1,0	19 (4.1.19)	25,0	20,0	5,0	2,5	1,0
5 (4.1.5)	15,0	10,0	2,5	2,0	1,0	20 (4.1.20)	27,5	22,0	6,0	2,0	1,0
6 (4.1.6)	17,5	12,0	4,0	1,5	0,5	21 (4.1.21)	30,0	24,0	4,0	2,5	1,0
7 (4.1.7)	20,0	14,0	10,0	1,0	0,5	22 (4.1.22)	32,5	26,0	8,0	3,0	1,5
8 (4.1.8)	22,5	16,0	8,0	2,0	1,0	23 (4.1.23)	35,0	28,0	6,0	3,5	2,0
9 (4.1.9)	25,0	18,0	6,0	3,0	2,0	24 (4.1.24)	37,5	30,0	8,0	4,0	2,0
10 (4.1.10)	30,0	20,0	4,0	4,0	3,0	25 (4.1.25)	40,0	32,0	6,0	3,0	1,0
11 (4.1.11)	5,0	4,0	1,0	4,0	2,0	26 (4.1.26)	20,0	10,0	5,0	2,0	1,0
12 (4.1.12)	7,5	6,0	1,5	3,5	1,5	27 (4.1.27)	22,5	12,0	4,0	2,5	1,5
13 (4.1.13)	10,0	8,0	2,0	3,0	1,0	28 (4.1.28)	25,0	14,0	3,0	3,0	1,5
14 (4.1.14)	12,5	10,0	4,0	2,5	2,0	29 (4.1.29)	27,5	16,0	4,0	3,5	2,0
15 (4.1.15)	15,0	12,0	5,0	2,0	1,0	30 (4.1.30)	30,0	18,0	6,0	2,0	1,0

Примечание. Номер варианта соответствует номеру рисунка (например, в задаче 4.1 варианту 9 соответствует рис. 4.1.9).

Методические указания к решению задачи

1. Установить степень статической неопределимости балки.
2. Раскрыть статическую неопределимость.

2.1. Построить эпюры изгибающих моментов от заданной внешней нагрузки для каждого пролета неразрезной балки как для самостоятельных шарнирно-опертых балок;

2.2. Вычислить грузовые площади ω в каждом пролете и положения их центров тяжести, пользуясь табл. 4.1.

2.3. Составить уравнения трех моментов и определить опорные моменты.

2.4. Рассмотрев ряд шарнирно-закрепленных балок, нагруженных уже известными опорными моментами и заданной нагрузкой, определить сначала частичные, а затем и полные реакции неразрезной балки.

3. Построить эпюры внутренних силовых факторов.

4. Подобрать из условия прочности двутавровое сечение балки.

5. Методом Мора с применением правила Верещагина определить прогиб посередине первого пролета балки.

6. Произвести капитальную проверку правильности расчета неразрезной балки путем определения одного из известных перемещений.

Примеры решения задачи

Исходные данные

Рассмотрим неразрезную балку (см. рис. 4.1.31, *а*). Пусть дано: $\ell_1 = 4$ м; $\ell_2 = 5$ м; $a = 1,5$ м; $q_1 = 30$ кН/м; $F_1 = 40$ кН; $F_2 = 80$ кН; $m = 25$ кН·м. Для данной балки построить эпюры Q и M , подобрать номер двутавра, определить прогиб посередине первого пролета балки.

Решение

1. Балка один раз статически неопределима (четыре неизвестных при трех уравнениях равновесия).

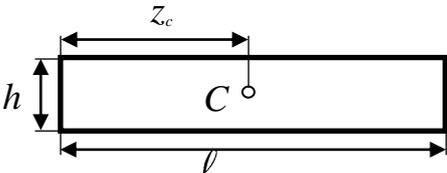
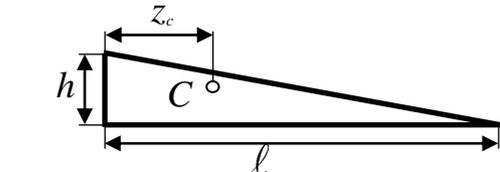
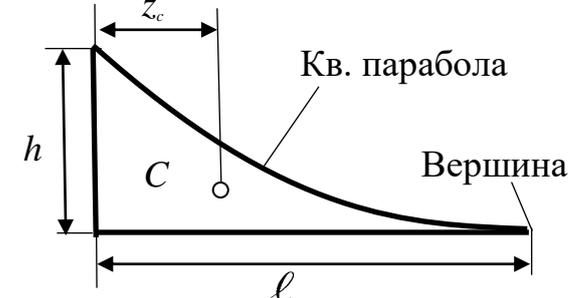
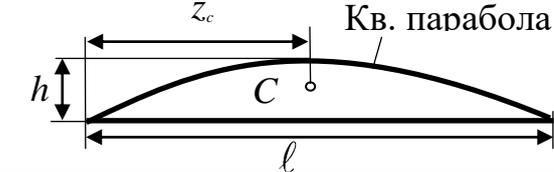
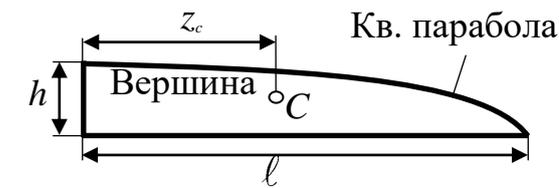
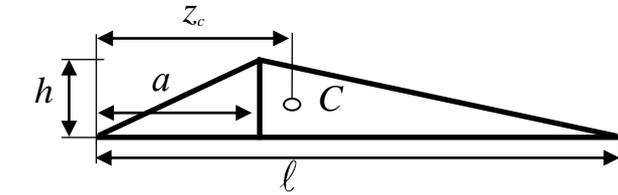
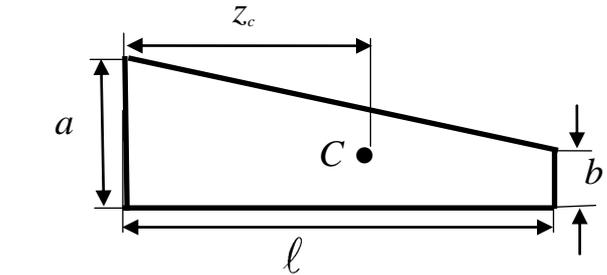
2. Строим эпюры изгибающих моментов для первого и второго пролетов неразрезной балки как для простых однопролетных балок от заданной в пролетах внешней нагрузки (рис. 4.1.31, *б*).

3. Вычисляем грузовые площади ω_1 и ω_2 и находим положение их центров тяжести.

Рассмотрим отдельно первый пролет (см. рис. 4.1.32, *а*). Грузовую площадь $\omega_1 = \omega_2' + \omega_2''$ и координату $x_{ц.м}$ определим по табл. 4.1.

Таблица 4.1

Геометрические характеристики эпюр

1		ω lh	z_c $\frac{1}{2}l$
2		$\frac{1}{2}lh$	$\frac{1}{3}l$
3		$\frac{1}{3}lh$	$\frac{1}{4}l$
4		$\frac{2}{3}lh$	$\frac{1}{2}l$
5		$\frac{2}{3}lh$	$\frac{3}{8}l$
6		$\frac{1}{2}lh$	$\frac{a+l}{3}$
7		$\frac{a+b}{2}l$	$\frac{a+2b}{3(a+b)}l$

Графическая часть задачи

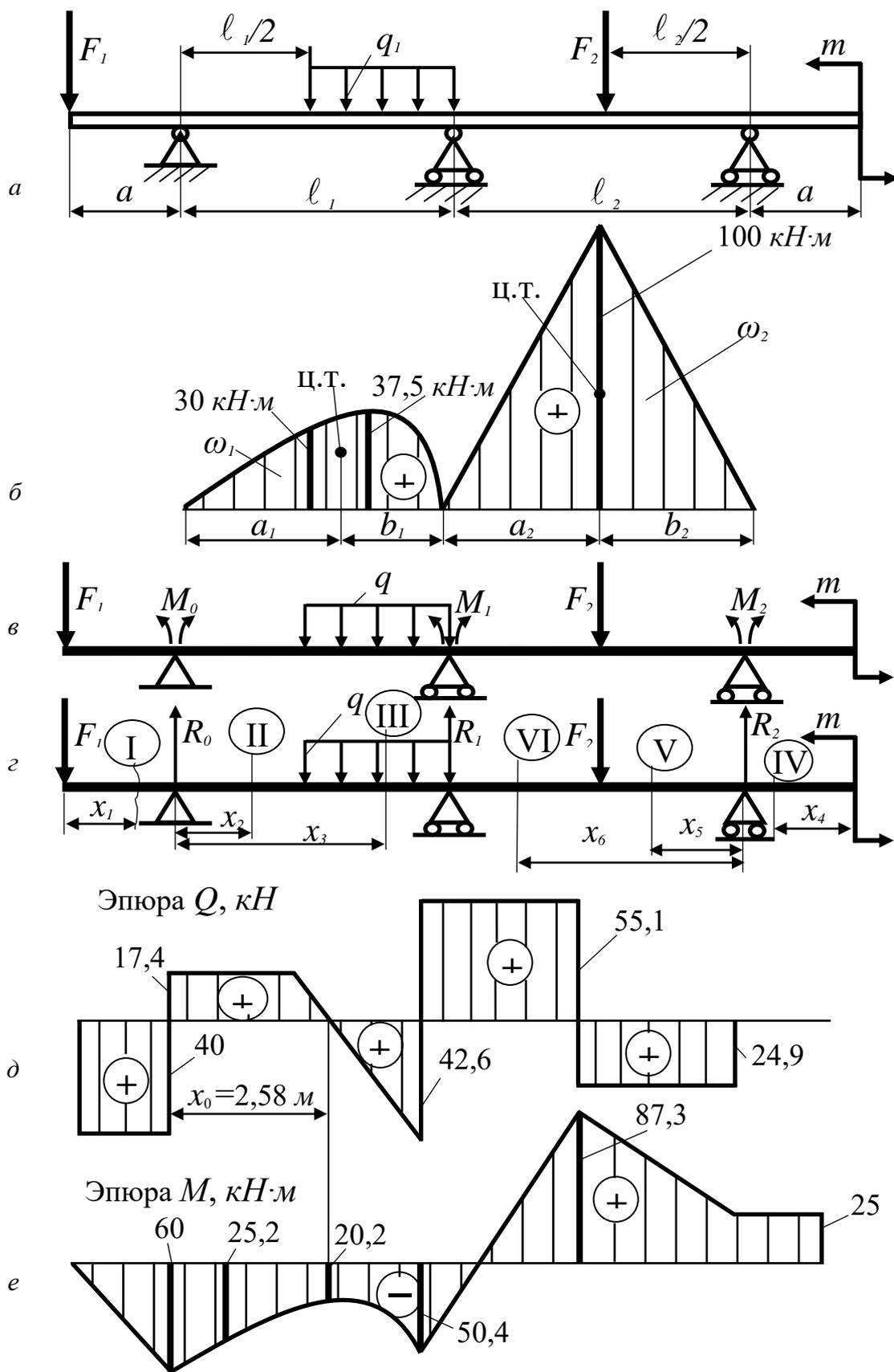


Рис. 4.1.31

Рассмотрим эпюру M (см. рис. 4.1.32, б) для первого пролета.

Из уравнений равновесия

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{1}{8} q_1 \ell_1 = \frac{1}{8} \cdot 30 \cdot 4 = 15 \text{ кН}, \\ R_B &= \frac{3}{8} q_1 \ell_1 = \frac{3}{8} \cdot 30 \cdot 4 = 45 \text{ кН}. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

На рис. 4.1.32 грузовая площадь

$$\omega_1 = \omega'_1 + \omega''_1,$$

где ω'_1 — площадь равнобедренного треугольника;

$$\omega''_1 = \frac{2}{3} \ell \cdot h = \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell_1}{2} \cdot \frac{q_1 \cdot \left(\frac{\ell_1}{2}\right)^2}{8} = \frac{q_1 \cdot \ell_1^3}{96}.$$

На рис. 4.1.32, б найдем положения центров тяжести площадей ω'_1 и ω''_1 :

– для ω'_1 $a_1 = b_1 = \ell_1 / 2$;

– для ω''_1 (на рис. 4.1.32, б не показано) $a''_1 = \frac{\ell_1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell_1}{2} = \frac{3}{4} \ell_1$; $b''_1 = \frac{1}{4} \ell_1$.

Грузовая площадь ω_2 определяется аналогично ω'_1 , поэтому вычисления ее здесь не приводятся.

Схема первого пролета

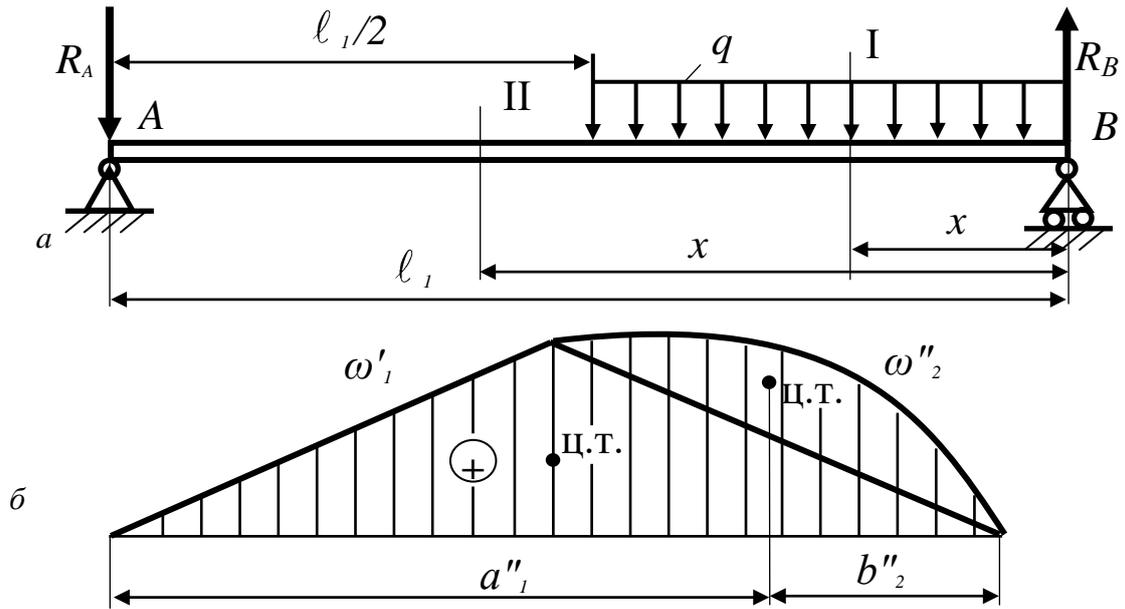


Рис. 4.1.32

Эквивалентная схема первого пролета

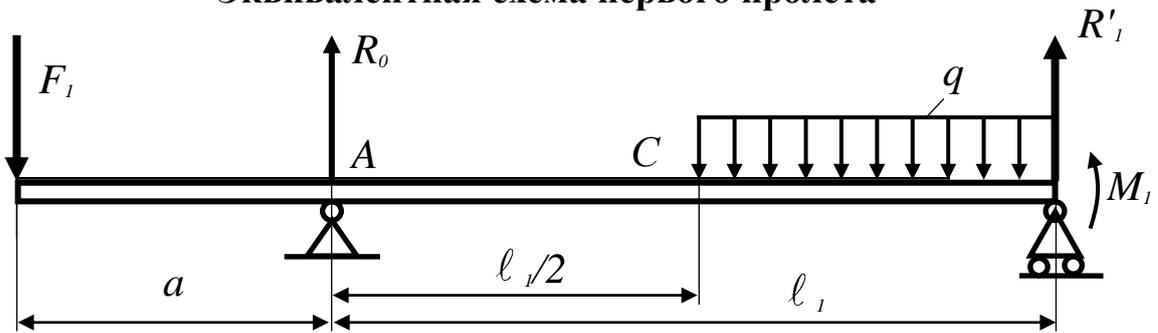


Рис. 4.1.33

Эквивалентная схема второго пролета

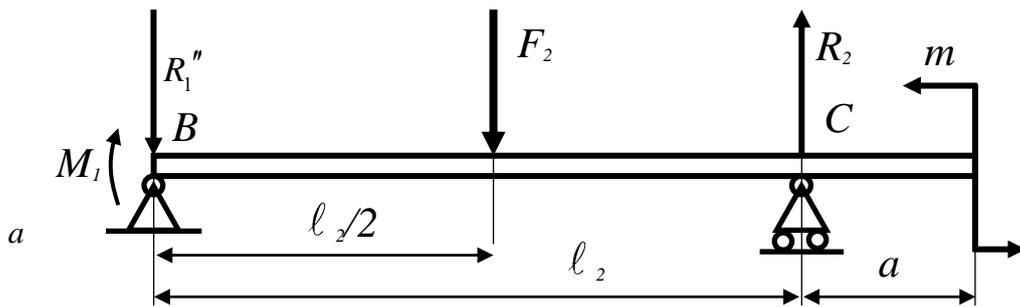


Схема суммирования реакций

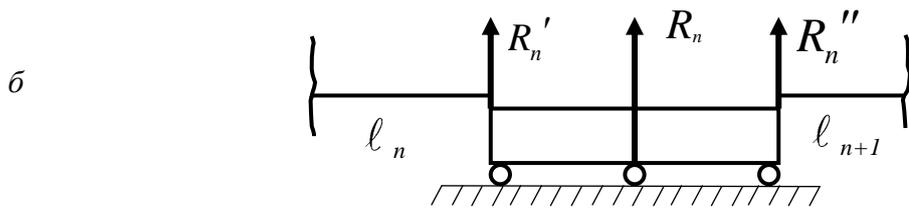


Рис. 4.1.34

4. Определяем опорные моменты. Запишем уравнение трех моментов:

$$M_{n-1} \ell_n + 2M_n (\ell_n + \ell_{n-2}) + M_{n+1} \ell_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{\ell_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{\ell_{n+1}} \right). \quad (4.1.2)$$

В нашем случае уравнение примет вид

$$M_0 \ell_1 + 2M_1 (\ell_1 + \ell_2) + M_2 \ell_2 = -6 \left(\frac{\omega'_1 a'_1 + \omega''_1 a'_1}{\ell_1} + \frac{\omega_2 b_2}{\ell_2} \right). \quad (4.1.3)$$

Учитывая, что $M_0 = -F_1 a$; $M_2 = m$, находим M_1 :

$$-240 + 18M_1 + 125 = -6 \left(\frac{120 + 60}{4} + \frac{250 \cdot 2,5}{5} \right),$$

откуда

$$M_1 \approx -50,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5. Перейдем к определению опорных реакций неразрезной балки. Рассмотрим сначала первый, а затем второй пролет, нагруженный заданной нагрузкой и найденными опорными моментами.

Первый пролет (см. рис. 4.1.33). Вычислим опорные реакции из уравнений равновесия:

$$\sum m_A (\vec{F}_i) = 0; \quad -F_1 a - R'_1 \ell_1 + q_1 \frac{\ell_1}{2} \cdot \frac{3}{4} \ell_1 - M_1 = 0,$$

или

$$-60 - 4R'_1 + 30 \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 + 50,3 = 0,$$

откуда

$$R'_1 = 42,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sum m_B (\vec{F}_i) = 0; \quad -F_1 (a + \ell_1) + R_0 \ell_1 - M_1 - q_1 \frac{\ell_1}{2} \cdot \frac{\ell_1}{4} = 0,$$

или

$$-40 \cdot 5,5 + 4R_0 + 50,3 - 60 = 0,$$

откуда

$$R_0 = 57,4 \text{ кН}.$$

Во втором пролете (рис. 4.1.34, а) аналогично получим

$$\sum m_B(\vec{F}_i) = 0; \quad -m - R_2 \ell_2 + F_2 \frac{\ell_2}{2} + M_1 = 0,$$

или

$$-25 - 5R_2 + 200 - 50,3 = 0,$$

откуда

$$R_2 \approx 24,9 \text{ кН};$$

$$\sum m_C(\vec{F}_i) = 0; \quad M_1 + R_1' \ell_2 - F_2 \frac{\ell_2}{2} - m = 0,$$

или

$$-50,3 + 5R_1'' - 80 \cdot \frac{5}{3} - 25 = 0,$$

откуда

$$R_1'' \approx 55,1 \text{ кН}.$$

Полные реакции неразрезной балки найдем согласно схеме рис. 4.1.34, б по формуле

$$R_n = R_n' + R_n'' \quad (4.1.4)$$

Тогда окончательно получим

$$R_0 = 57,4 \text{ кН};$$

$$R_1 = R_1' + R_1'' = 55,1 + 42,6 = 97,7 \text{ кН}; \quad (4.1.5)$$

$$R_2 = 24,9 \text{ кН}.$$

6. Построим эпюры Q и M для неразрезной балки (рис. 4.1.31, а) аналитическим методом:

- на участке I

$$0 \leq x_1 \leq a; Q = -F_1 = -40 \text{ кН}; M = -F_1 x_1;$$

$$M_{x_1=0} = 0; M_{x_1=a} = -F_1 a = -60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

- на участке II

$$0 \leq x_2 \leq \frac{\ell_1}{2}; Q = -F_1 + R_0 = 17,4 \text{ кН};$$

$$M = -F_1 (a + x_2) + R_0 x_2;$$

$$M_{x_2=0} = -F_1 a = -60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x_2=\frac{\ell_1}{2}} = -F_1 \left(a + \frac{\ell_1}{2} \right) + R_0 \frac{\ell_1}{2} = -40 \cdot 3,5 + 57,4 \cdot 2 = -25,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

- на участке III

$$\frac{\ell_1}{2} \leq x_3 \leq \ell_1; Q = -F_1 + R_0 - q \left(x_3 - \frac{\ell_1}{2} \right); Q_{x_3=\frac{\ell_1}{2}} = 17,4 \text{ кН};$$

$$Q_{x_3=\ell_1} = 17,4 - 30 \cdot 2 = -42,6 \text{ кН};$$

$$M = -F_1 (a + x_3) + R_0 x_3 - \frac{q_1 \left(x_3 - \frac{\ell_1}{2} \right)^2}{2}; M_{x_3=\frac{\ell_1}{2}} = -25,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x_3=\ell_1} = -40 \cdot 5,5 + 57,4 \cdot 4 - 60 = -50,4 \text{ кН} \cdot \text{м} \approx M_1.$$

Так как на этом участке эпюра поперечных сил Q меняет знак, то, значит, на исследуемом участке Q проходит через ноль.

Взяв производную $\frac{dM}{dx} = Q$ и приравняв ее к нулю, найдем

$$-F_1 + R_0 - q \left(x_0 - \frac{\ell_1}{2} \right) = 0;$$

откуда

$$x_0 = 2,58 \text{ м.}$$

Получаем

$$M_{x_3=2,58} = -40(1,5 + 2,58) + 57,4 \cdot 2,58 - 30(2,58 \cdot 2)^2 \cdot \frac{1}{2} \approx -20,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

на участке IV:

$$0 \leq x_4 \leq \alpha; Q = 0; M = m = 25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

на участке V:

$$0 \leq x_5 \leq \frac{\ell_2}{2}; Q = -R_2 = -24,9 \text{ кН} \cdot \text{м}; M = R_2 x_5 + m;$$

$$M_{x_5=0} = m = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_{x_5=\frac{\ell_2}{2}} = 24,9 \cdot 2,5 + 25 \approx 87,3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

на участке VI:

$$\frac{\ell_2}{2} \leq x_6 \leq \ell_2; Q = -R_2 + F_2 = -24,9 + 80 = 55,1 \text{ кН};$$

$$M = R_2 \cdot x_6 + m - F_2 \left(x_6 - \frac{\ell_2}{2} \right); M_{x_6=\frac{\ell_2}{2}} = 87,3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x_6=\ell_2} = R_2 \ell_2 + m - F_2 \cdot \frac{\ell_2}{2} = -50,4 \text{ кН} \cdot \text{м} \approx M_1.$$

На основании проведенных вычислений построены эпюры Q и M (см. рис. 4.1.31, ∂ , e).

7. Проверяем полученные результаты.

А. Проверку равновесия сделаем согласно равенству $\sum F_{iy} = 0$.

В соответствии со схемой рис. 4.1.31, z и равенством (4.1.5) запишем:

$$R_0 + R_1 + R_2 - F_1 - q_1 \frac{\ell_1}{2} - F_2 = 0.$$

После подстановки числовых значений получим:

$$57,4 + 97,7 + 24,9 - 40 - 80 - 60 = 0.$$

Б. Проверку деформаций можно выполнить путем вычисления, например, прогиба y_2 на второй опоре, зная заранее, что $y_2 = 0$. Для определения y_2 воспользуемся методом начальных параметров в форме, предложенной проф. А. П. Коробовым. Применительно к данной задаче

$$y_n(x) = y_0 + \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2 E J_z} + \frac{Q_0 x^3}{6 E J_z} - \frac{1}{6 E J_z} \int_{\ell_1/2}^{\ell_1} q_1 (x - \xi)^3 d\xi + \left. \frac{R_1 (x - \ell_1)^3}{6 E J_z} \right|_{x>2} - \left. \frac{F_2 (x - (\ell_1 + \ell_2 / 2))^3}{6 E J_z} \right|_{x>\ell_1 + \frac{\ell_1}{2}}, \quad (4.1.6)$$

где y_0 , θ_0 , M_0 и Q_0 — начальные параметры.

Поместив начало координат на опоре O и приняв во внимание рис. 4.1.31, z , ∂ , e , найдем:

$y_0 = 0$ — начальный прогиб;

$\theta_0 \neq 0$ — начальный угол поворота сечения, который подлежит определению;

$M_0 = -60 \text{ кН}\cdot\text{м}$ — изгибающий момент в начале координат;

$Q_0 = 17,4 \text{ кН}$ — поперечная сила в начале координат.

В случае равномерно распределенной нагрузки интеграл, входящий в уравнение прогибов,

$$\int_{\ell_1/2}^{\ell_1} q_1 (x - \xi)^3 d\xi = - \frac{q_1 (x - \xi)^4}{4} \Big|_{\frac{\ell_1}{2}}^{\ell_1} = - \frac{q_1 (x - \ell_1)^4}{4} + \frac{q_1 \left(x - \frac{\ell_1}{2}\right)^4}{4}.$$

После подстановки числовых значений получим:

$$y_n(x) = \theta_0 x - \frac{30x^2}{EJ_z} + \frac{17,4x^3}{6EJ_z} - \frac{30(x-2)^2}{24EJ_z} \Bigg|_{x>2} + \frac{30(x-4)^4}{24EJ_z} \Bigg|_{x>4} +$$

$$+ \frac{97,7(x-4)^3}{6EJ_z} \Bigg|_{x>2} - \frac{80(x-6,5)^3}{6EJ_z} \Bigg|_{x>6,5}.$$

Начальный угол поворота сечения θ_0 найдем из условия

$$y_n(\ell_1) = 0,$$

то есть

$$\theta_0 \cdot 4 - \frac{30 \cdot 16}{EJ_z} + \frac{17,4 \cdot 4^3}{6EJ_z} - \frac{30 \cdot 2^4}{24EJ_z} = 0,$$

откуда

$$\theta_0 = \frac{78,6}{EJ_z}.$$

Окончательно

$$y_n(x) = \frac{78,6x}{EJ_z} - \frac{30x^2}{EJ_z} + \frac{2,9x^3}{EJ_z} - \frac{5(x-2)^4}{4EJ_z} \Bigg|_{x>2} + \frac{5(x-2)^4}{4EJ_z} \Bigg|_{x>4} +$$

$$+ \frac{97,7(x-4)^3}{6EJ_z} \Bigg|_{x>4} - \frac{40(x-6,5)^3}{3EJ_z} \Bigg|_{x>6,5}. \quad (4.1.7)$$

Искомое значение y найдем по формуле

$$y_2 = y_{x=9} = \frac{78,6 \cdot 9}{EJ_z} - \frac{30 \cdot 9^2}{EJ_z} + \frac{2,9 \cdot 9^3}{EJ_z} - \frac{5 \cdot 7^4}{4EJ_z} + \frac{5 \cdot 5^4}{4EJ_z} + \frac{97,7 \cdot 5^3}{6EJ_z} - \frac{40 \cdot 2,5^3}{3EJ_z}$$

или

$$y_2 = \frac{1}{E J_z} (206,92 - 208,33) \approx 0,$$

что указывает на правильность расчета (результат можно считать равным нулю, если разность между положительным и отрицательным числами по абсолютной величине не превышает погрешности расчета, то есть не больше, чем 5 %).

8. Подбираем сечение двутавра:

$$W_z \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{87,3 \cdot 10^{-3}}{160} \approx 546 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

то есть $W_x = 546 \text{ см}^3$.

По сортаменту (ГОСТ 8239-72) принимаем двутавр №33 с $W_z = 597 \text{ см}^3$.

9. Методом Мора с применением правила Верещагина определим прогиб посередине первого пролета балки y_c . Обратимся к рис. 4.1.33: укажем правильное направление опорного момента M_1 , числовые значения нагрузок, длин (см. рис. 4.1.35, а). Напомним, что перемещение по правилу Верещагина определяется по формуле

$$\delta = \sum \frac{\omega \eta_c}{E J_z}, \quad (4.1.8)$$

где δ — искомое перемещение от заданной нагрузки;

ω — площадь нелинейной эпюры моментов;

η_c — ордината под центром тяжести, взятая на линейной эпюре;

$E J_z$ — жесткость поперечного сечения на данном участке балки.

В соответствии с рис. 4.1.35, б, в, д

$$y_c = \frac{1}{E J_z} (\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2 + \omega_3 \eta_3 + \omega_4 \eta_4 + \omega_5 \eta_5). \quad (4.1.9)$$

На рис. 4.1.35, б, в изображены эпюры M_F и M'_F в расслоенном виде; на рис. 4.1.35, г, д — соответственно единичная система и эпюра.

Далее получаем

$$\omega_1 = \frac{1}{2} R_0 \frac{\ell_1}{2} \cdot \frac{\ell_1}{2} = \frac{R_0 \ell_1^2}{8} = \frac{57,4 \cdot 4^2}{8} = 114,8 \text{ [кН} \cdot \text{м}^2\text{]}; \quad \eta_1 = \frac{1}{6} \ell_1 = \frac{2}{3} \text{ [м]};$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \frac{\ell_1}{2} \frac{\ell_1}{4} = \frac{\ell_1^2}{16} = \frac{4^2}{16} = 1; \quad \eta_2 = \left(a + \frac{\ell_1}{3} \right) F_1 = -113,2;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} R'_1 \frac{\ell_1}{2} \cdot \frac{\ell_1}{2} = \frac{R'_1 \ell_1^2}{8} = \frac{42,6 \cdot 4^2}{8} = 85,2; \quad \eta_3 = \frac{\ell_1}{6} = \frac{4}{6};$$

$$\omega_4 = -\frac{1}{3} \ell h = -\frac{1}{3} \frac{\ell_1}{2} \frac{q_1 \ell_1^2}{8} = -\frac{q_1 \ell_1^3}{48} = -40; \quad \eta_4 = \frac{3 \ell_1}{16} = \frac{3}{4};$$

$$\omega_5 = -\frac{\ell_1}{2} M_1 = -2 \cdot 50,3 = -100,6; \quad \eta_5 = \frac{\ell_1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Подставим полученные числовые значения ω и η в формулу (4.1.9):

$$y_c = \frac{1}{E J_z} \left(114,8 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot 113,2 + 85,2 \cdot \frac{4}{6} - 40 \cdot \frac{3}{4} - 100,6 \cdot \frac{1}{2} \right),$$

откуда окончательно получим искомое перемещение

$$y_c \approx -\frac{60,6}{E J_z}. \quad (4.1.10)$$

Определение перемещений в первом пролете

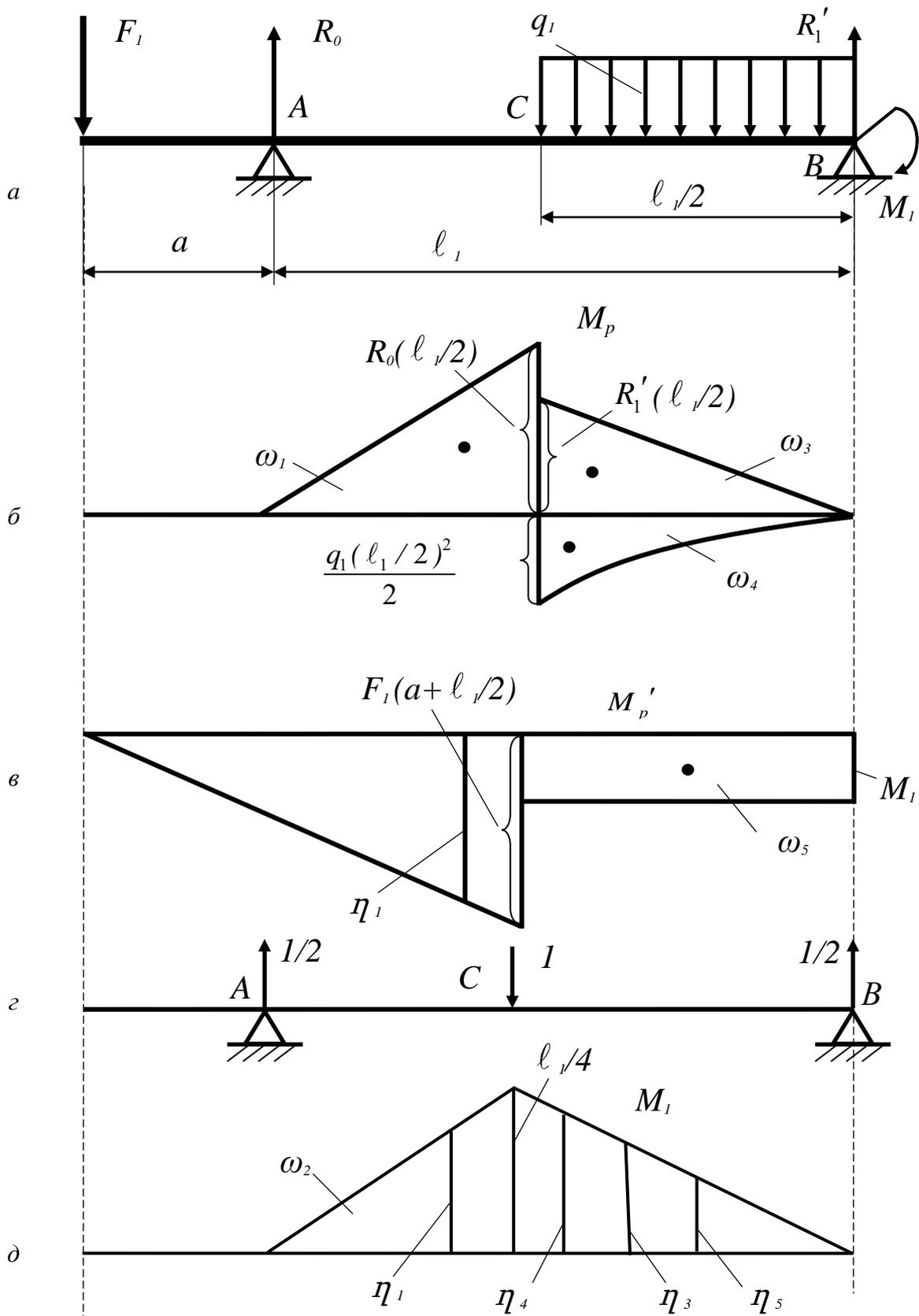


Рис. 4.1.35

Задача 4.2. Расчет статически неопределимой рамы

Исходные данные

Для заданной рамы построить эпюры внутренних силовых факторов N , Q , M .

Схемы к задаче 4.2

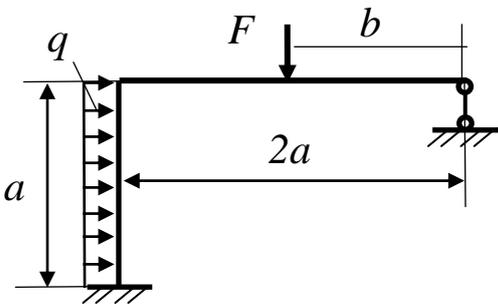


Рис. 4.2.1

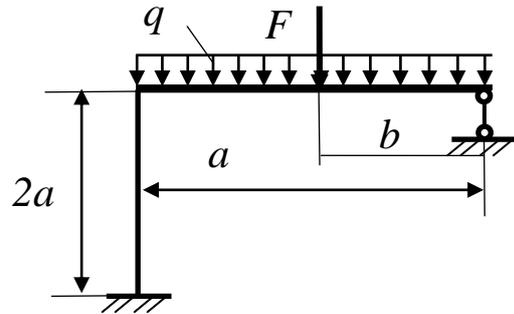


Рис. 4.2.2

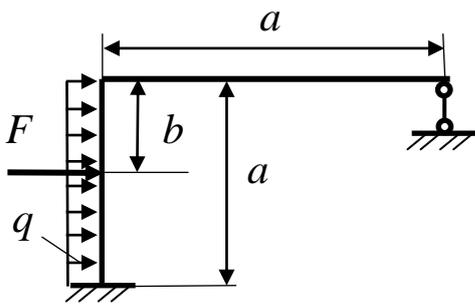


Рис. 4.2.3

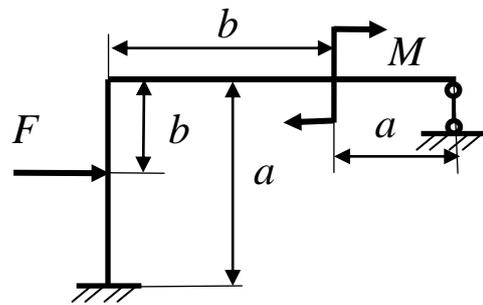


Рис. 4.2.4

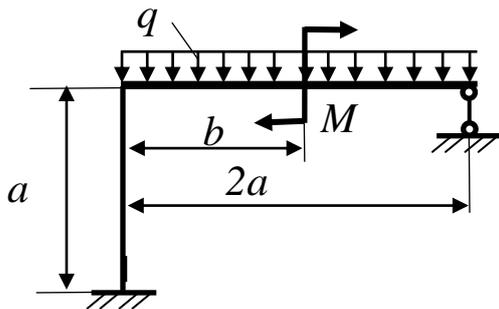


Рис. 4.2.5

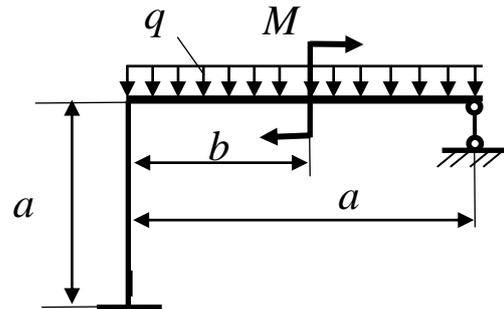


Рис. 4.2.6

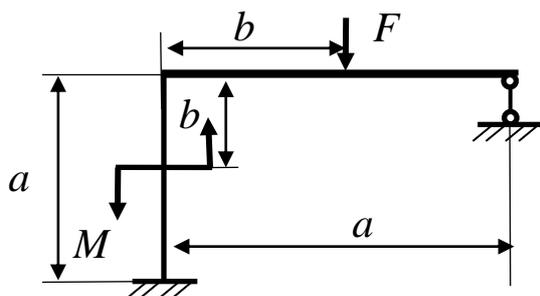


Рис. 4.2.7

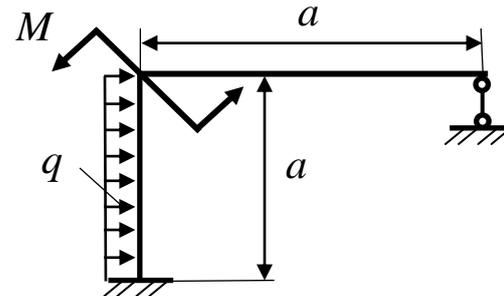


Рис. 4.2.8

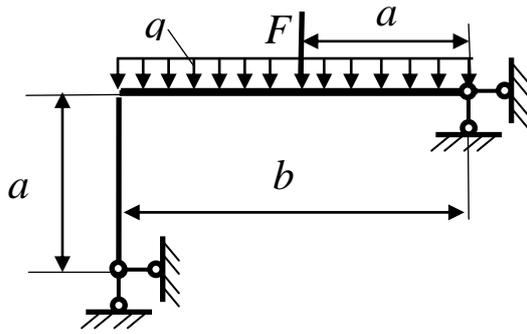


Рис. 4.2.9

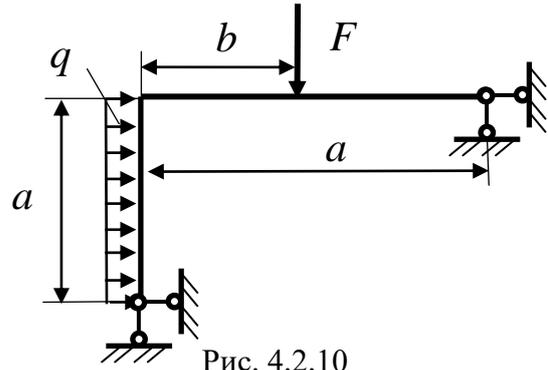


Рис. 4.2.10

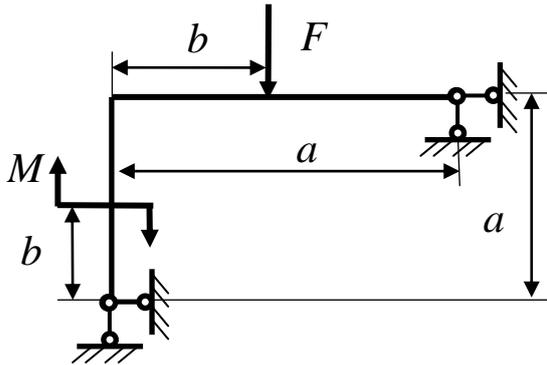


Рис. 4.2.11

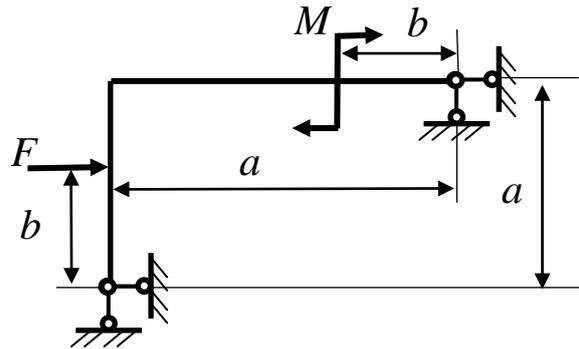


Рис. 4.2.12

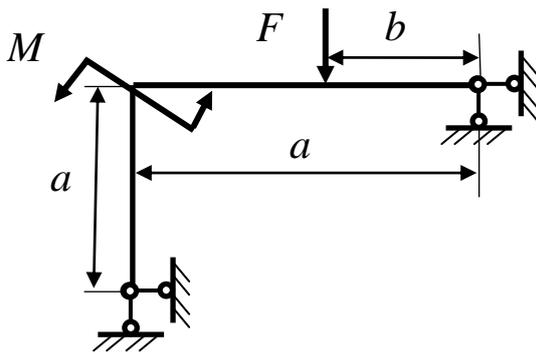


Рис. 4.2.13

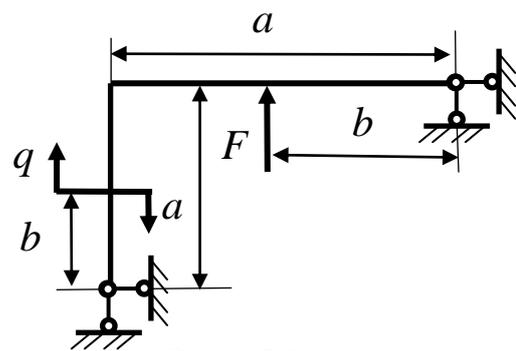


Рис. 4.2.14

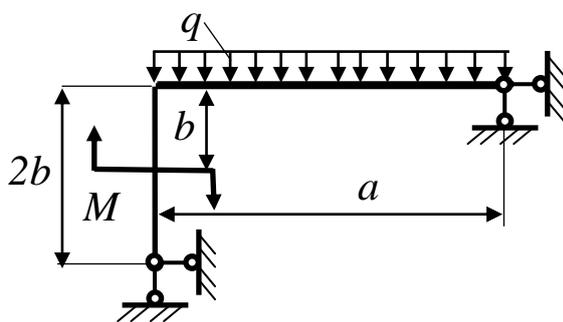


Рис. 4.2.15

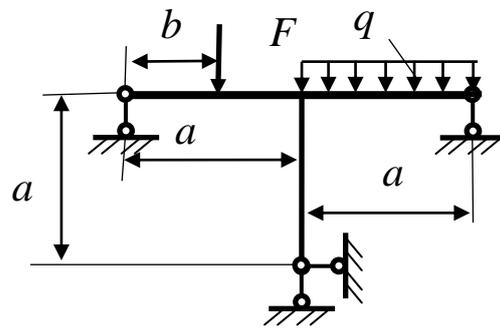


Рис. 4.2.16

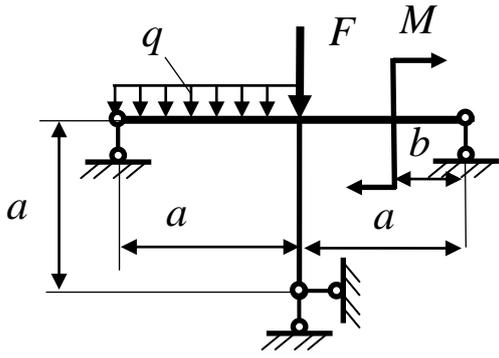


Рис. 4.2.17

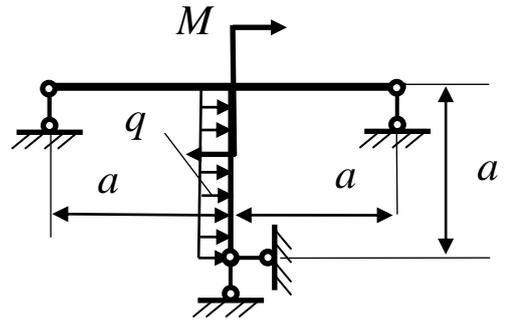


Рис. 4.2.18

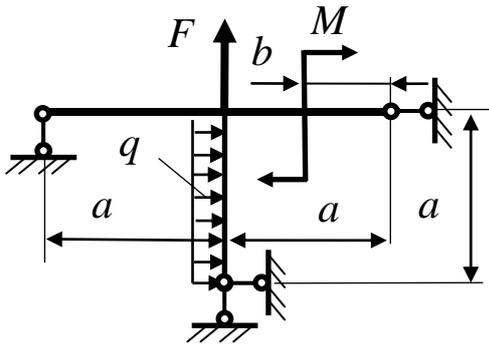


Рис. 4.2.19

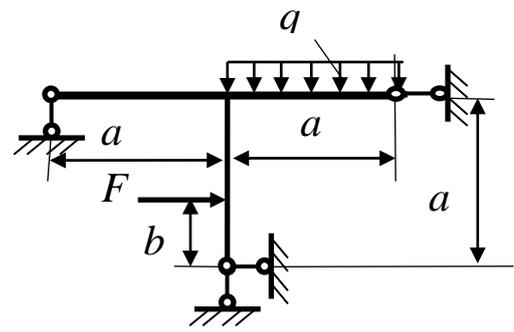


Рис. 4.2.20

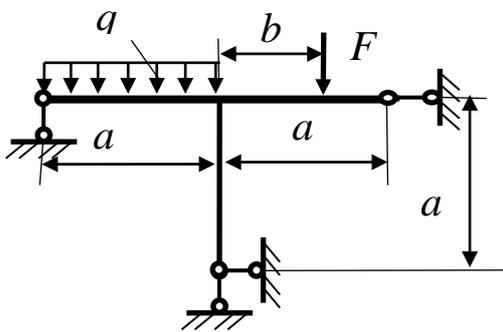


Рис. 4.2.21

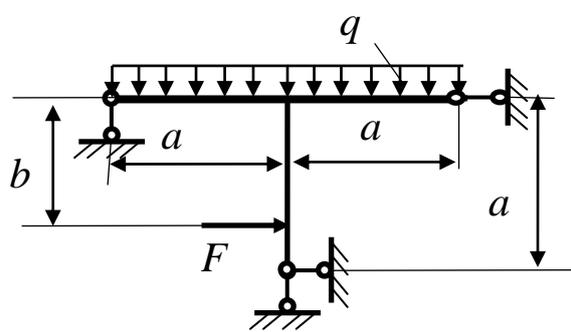


Рис. 4.2.22

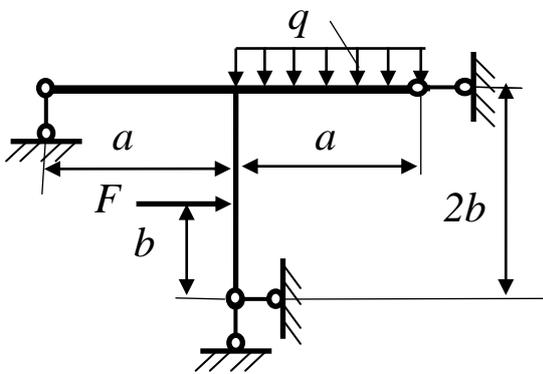


Рис. 4.2.23

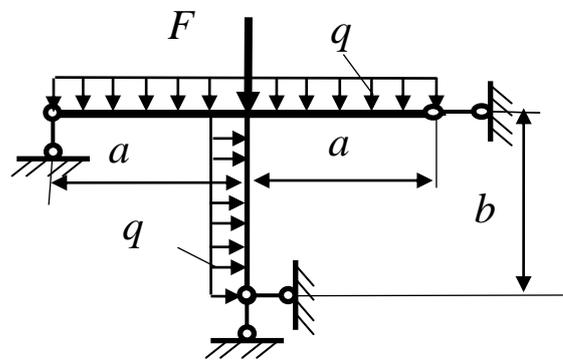


Рис. 4.2.24

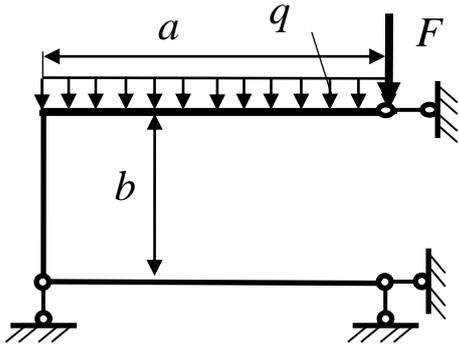


Рис. 4.2.25

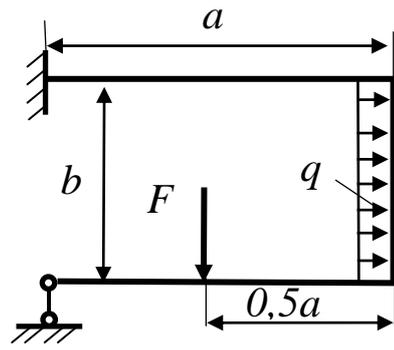


Рис. 4.2.26

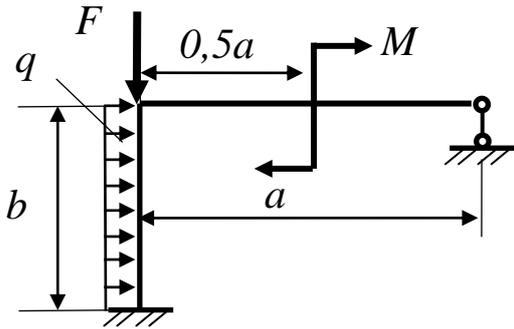


Рис. 4.2.27

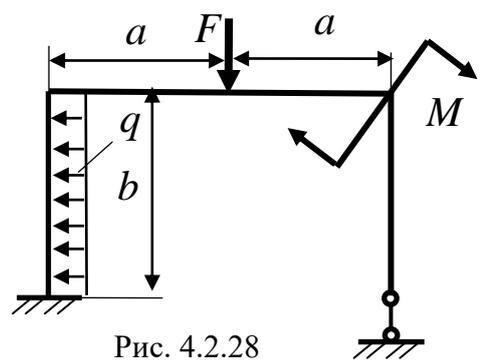


Рис. 4.2.28

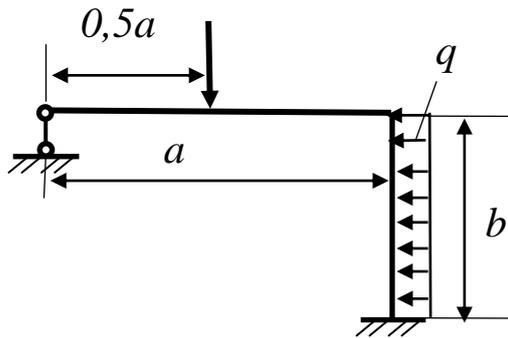


Рис. 4.2.29

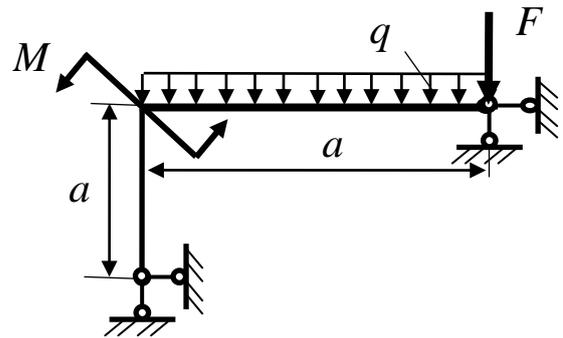


Рис. 4.2.30

Таблица 4.2

Данные для вариантов

Номер варианта (рисунка)	m , кН·м	F , кН	q , кН/м	a , м	b , м	Номер варианта (рисунка)	m , кН·м	F , кН	q , кН/м	a , м	b , м
1 (4.2.1)	5,0	2,0	0,5	4,0	2,0	16 (4.2.16)	17,5	14,0	2,5	4,0	3,0
2 (4.2.2)	7,5	4,0	1,0	3,5	1,5	17 (4.2.17)	20,0	16,0	3,0	2,5	2,0
3 (4.2.3)	10,0	6,0	1,5	3,0	2,0	18 (4.2.18)	22,5	18,0	5,0	3,0	1,5
4 (4.2.4)	12,5	8,0	2,0	2,5	1,0	19 (4.2.19)	25,0	20,0	5,0	2,5	1,0
5 (4.2.5)	15,0	10,0	2,5	2,0	1,0	20 (4.2.20)	27,5	22,0	6,0	2,0	1,0
6 (4.2.6)	17,5	12,0	4,0	1,5	0,5	21 (4.2.21)	30,0	24,0	4,0	2,5	1,0
7 (4.2.7)	20,0	14,0	10,0	1,0	0,5	22 (4.2.22)	32,5	26,0	8,0	3,0	1,5
8 (4.2.8)	22,5	16,0	8,0	2,0	1,0	23 (4.2.23)	35,0	28,0	6,0	3,5	2,0
9 (4.2.9)	25,0	18,0	6,0	3,0	2,0	24 (4.2.24)	37,5	30,0	8,0	4,0	2,0
10 (4.2.10)	30,0	20,0	4,0	4,0	3,0	25 (4.2.25)	40,0	32,0	6,0	3,0	1,0
11 (4.2.11)	5,0	4,0	1,0	4,0	2,0	26 (4.2.26)	20,0	10,0	5,0	2,0	1,0
12 (4.2.12)	7,5	6,0	1,5	3,5	1,5	27 (4.2.27)	22,5	12,0	4,0	2,5	1,5
13 (4.2.13)	10,0	8,0	2,0	3,0	1,0	28 (4.2.28)	25,0	14,0	3,0	3,0	1,5
14 (4.2.14)	12,5	10,0	4,0	2,5	2,0	29 (4.2.29)	27,5	16,0	4,0	3,5	2,0
15 (4.2.15)	15,0	12,0	5,0	2,0	1,0	30 (4.2.30)	30,0	18,0	6,0	2,0	1,0

Примечание. Номер варианта соответствует номеру рисунка (например, в задаче 4.2 варианту 5 соответствует рис. 4.2.5).

Методические указания к решению задачи

1. Установить степень статической неопределимости рамы как разность между числом неизвестных усилий и количеством независимых уравнений равновесия статики.
2. Выбрать основную систему.
3. Преобразовать основную систему в эквивалентную.
4. Записать систему канонических уравнений по методу сил.
5. Найти перемещения (коэффициенты при неизвестных и свободные члены) энергетическим методом с применением правила Верещагина.

6. Решить систему канонических уравнений.

7. Построить эпюры N , Q , M , рассматривая эквивалентную систему.

Пример решения задачи

Исходные данные

Для заданной рамы (см. рис. 4.2.31, а) построить эпюры M , Q и N .

Решение

В данной раме пять реактивных усилий: три в жесткой заделке и два в шарнирно-неподвижной опоре. Следовательно, рама ($5 - 3 = 2$) дважды статически неопределима. Основную систему получаем, отбрасывая две связи шарнирно-неподвижной опоры. Заменяем действие связей неизвестными усилиями X_1 и X_2 ; получаем эквивалентную систему (см. рис. 4.2.31, б).

Система канонических уравнений для статически неопределимой рамы с двумя лишними неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1F} = 0, \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Определяем перемещения (коэффициенты и свободные члены) канонических уравнений. Для этого, нагружая основную систему последовательно силами $\bar{X}_1 = 1$ (см. рис. 4.2.31, в), $\bar{X}_2 = 1$ (см. рис. 4.2.31, д) и заданной нагрузкой (см. рис. 4.2.31, ж), строим соответствующие эпюры изгибающих моментов (см. рис. 4.2.31, з, е, з).

Перемножая эти эпюры по правилу Верещагина, получаем

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EJ_z} \left(\frac{qb^2}{2} \cdot 2bb + \frac{1}{3} \cdot \frac{qb^2}{2} \cdot b \cdot \frac{3}{4}b \right) = -\frac{9qb^4}{8EJ_z};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EJ_z} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{qb^2}{2} \cdot bb = \frac{qb^4}{6EJ_z};$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \frac{2}{3} \cdot b + b \cdot 2b \cdot b \right) = \frac{7b^3}{3EJ_z};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EJ_z} \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot b = -\frac{b^3}{2EJ_z};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_z} \left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \frac{2}{3} \cdot b + b \cdot b \cdot b \right) = \frac{2b^3}{EJ_z}.$$

После подстановки

$$\begin{aligned} \frac{7b^3}{3EJ_z} X_1 - \frac{b^3}{2EJ_z} X_2 - \frac{9qb^4}{8EJ_z} &= 0; \\ -\frac{b^3}{2EJ_z} X_1 + \frac{2b^3}{EJ_z} X_2 + \frac{qb^4}{6EJ_z} &= 0 \end{aligned}$$

и после упрощений

$$\begin{aligned} 56X_1 - 12X_2 - 27qb &= 0; \\ -3X_1 + 12X_2 + qb &= 0. \end{aligned}$$

Решаем уравнения

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{26}{53} qb = \frac{26}{53} \cdot 10 \cdot 3 = 14,7 \text{ кН}; \\ X_2 &= \frac{26}{636} qb = \frac{26}{636} \cdot 10 \cdot 3 = 1,18 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Положительные значения X_1 и X_2 указывают на то, что направления этих реакций были выбраны правильно.

Теперь, рассматривая данную раму как статически определимую, можно построить суммарную эпюру изгибающих моментов M (см. рис. 4.2.31, *и*), а также эпюры поперечных Q (см. рис. 4.2.31, *к*) и продольных N (см. рис. 4.2.31, *л*) сил.

Графическая часть задачи

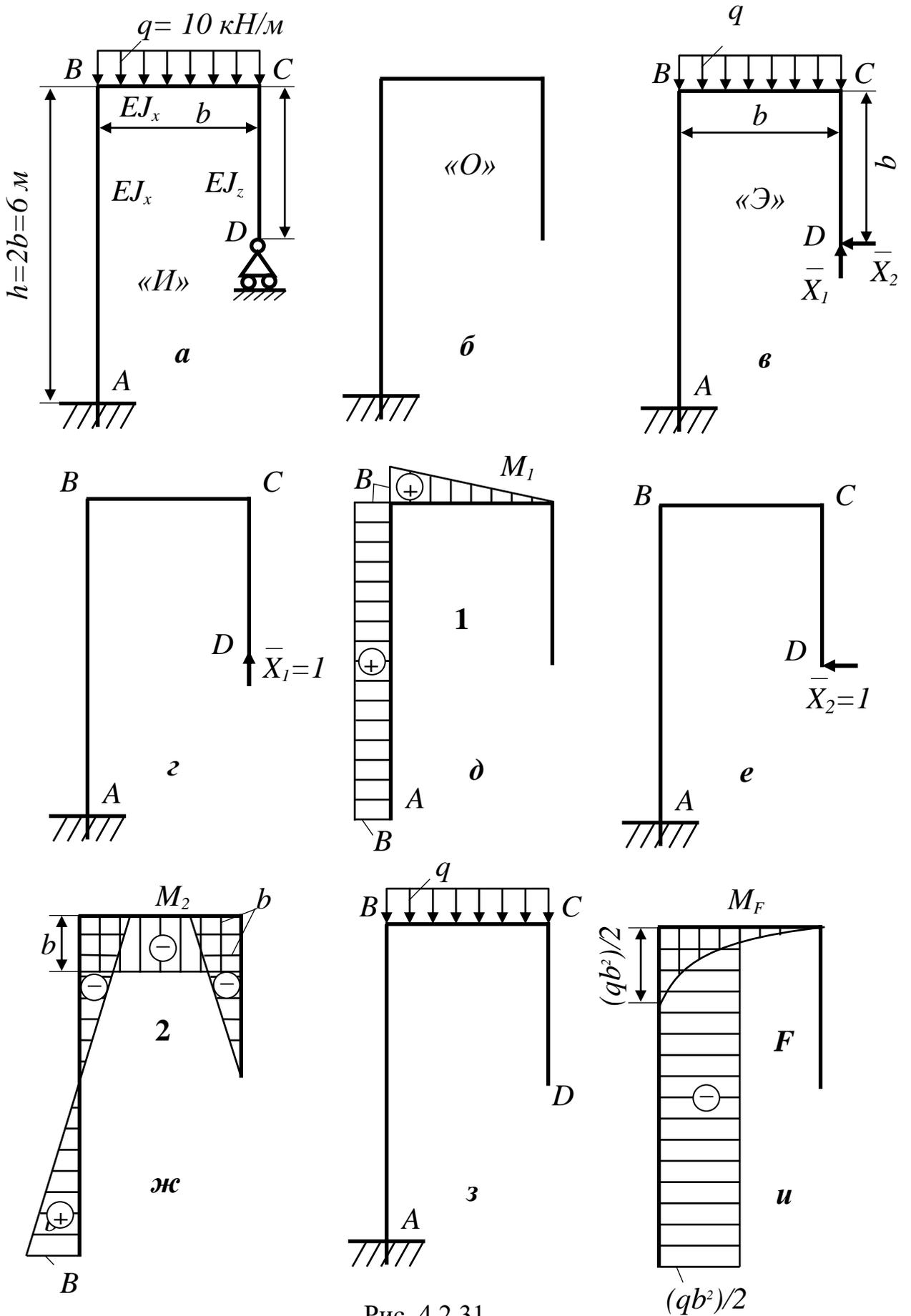


Рис. 4.2.31

(продолжение см. на с. 141)

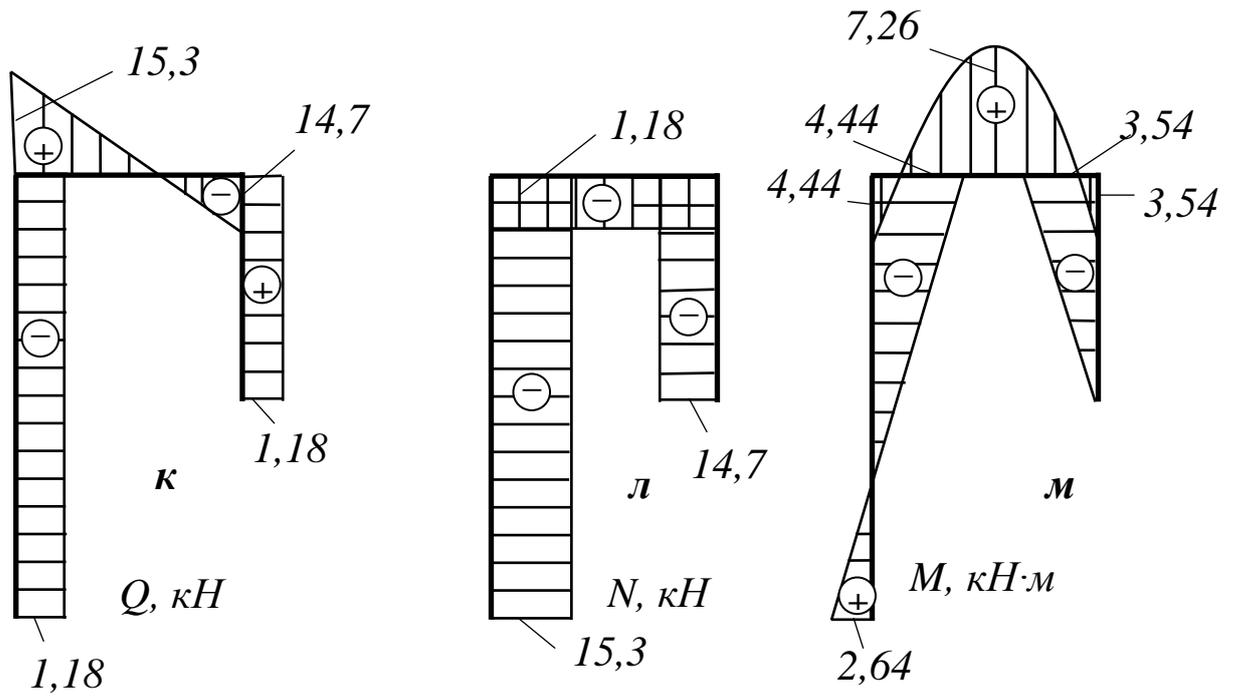


Рис. 4.2.31 (продолжение)

Задание №5. Сложное сопротивление

Задача 5.1. Внецентренное сжатие

Исходные данные: короткий чугунный брус, поперечное сечение которого изображено на схеме, сжимается внецентренно продольной силой F , приложенной в i -той точке ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

Требуется:

- 1) определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в поперечном сечении, выразив их через F и размеры сечения;
- 2) найти допустимую нагрузку из условия прочности бруса при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на растяжение $[\sigma_{рас}] = 50 \text{ МПа}$ и сжатие $[\sigma_{сж}] = 160 \text{ МПа}$.

Схемы к задаче 5.1

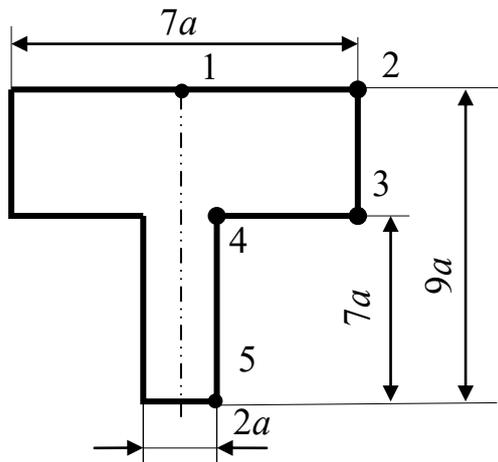


Рис. 5.1.1

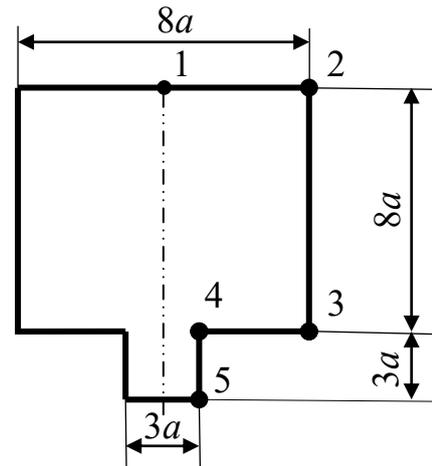


Рис. 5.1.2

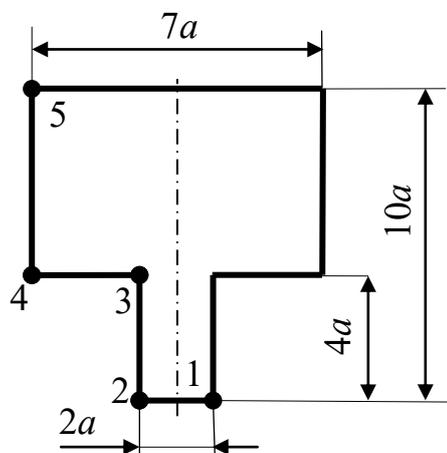


Рис. 5.1.3

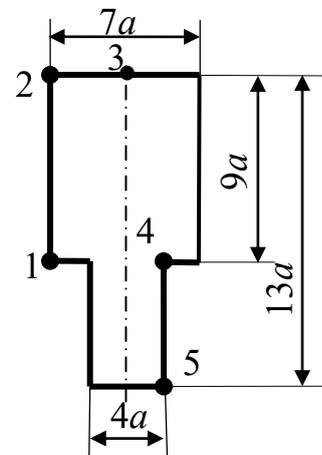


Рис. 5.1.4

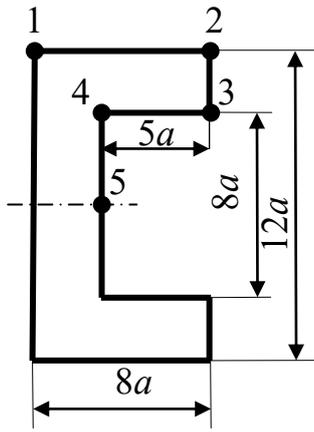


Рис. 5.1.5

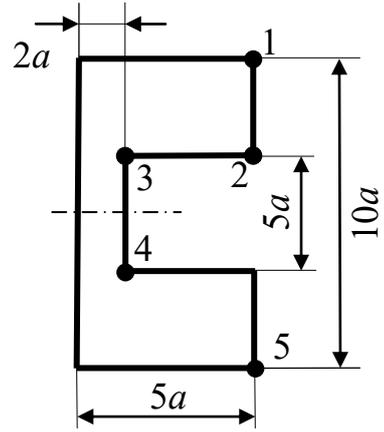


Рис. 5.1.6

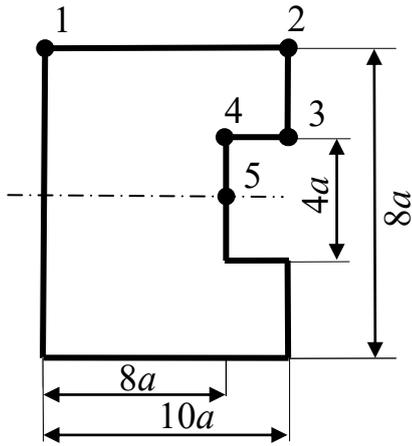


Рис. 5.1.7

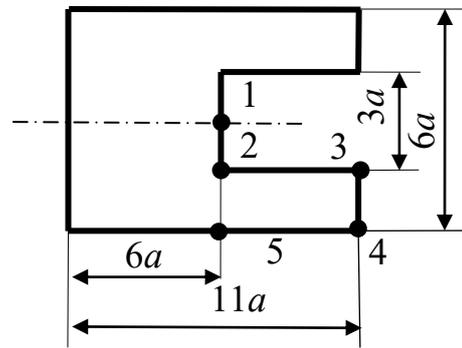


Рис. 5.1.8

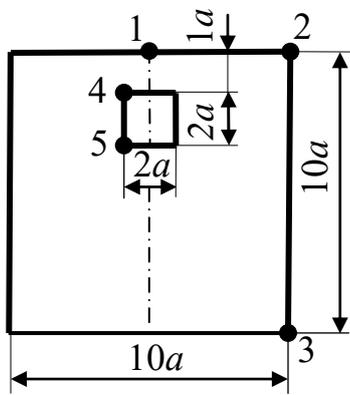


Рис. 5.1.9

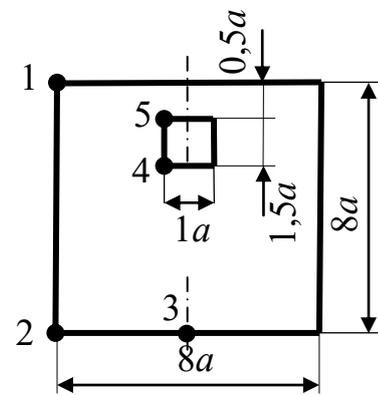


Рис. 5.1.10

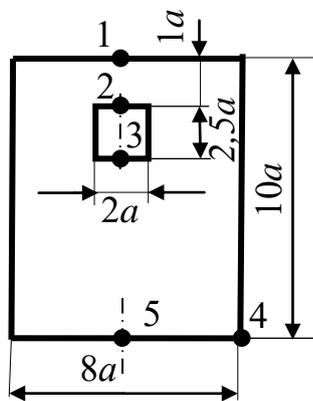


Рис. 5.1.11

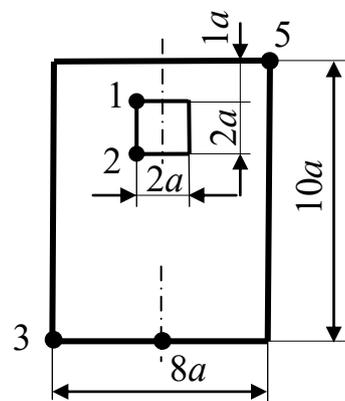


Рис. 5.1.12

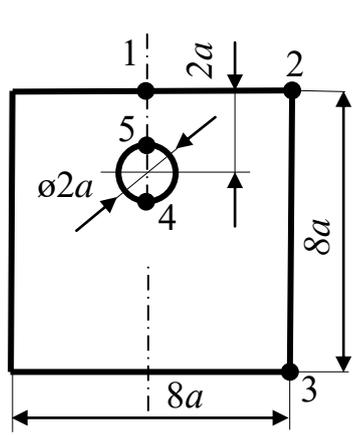


Рис. 5.1.13

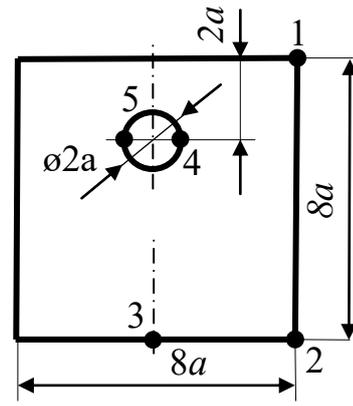


Рис. 5.1.14

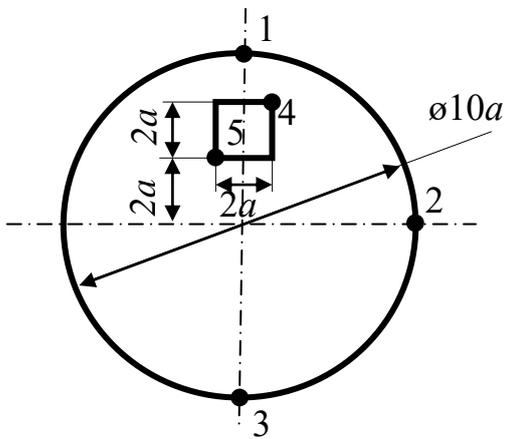


Рис. 5.1.15

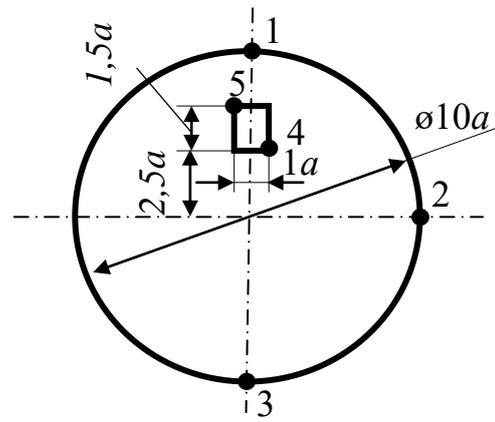


Рис. 5.1.16

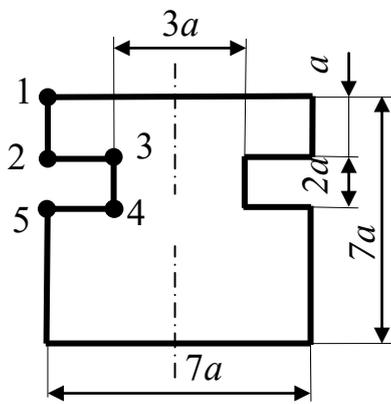


Рис. 5.1.17

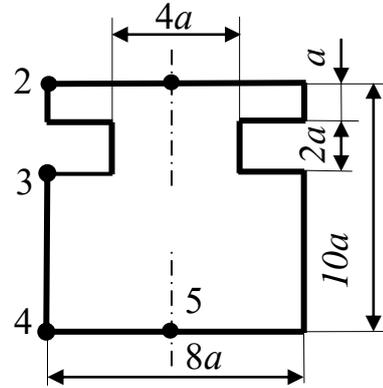


Рис. 5.1.18

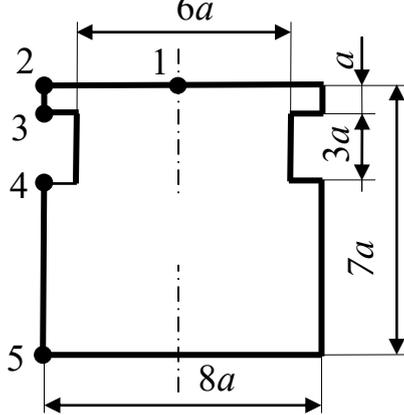


Рис. 5.1.19

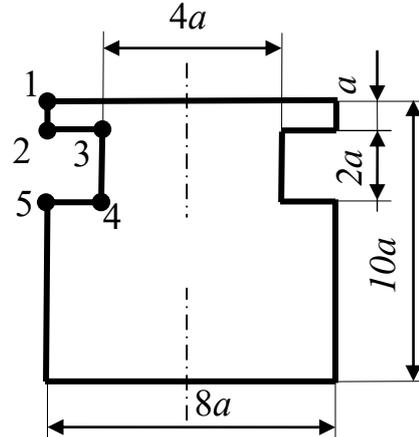


Рис. 5.1.20

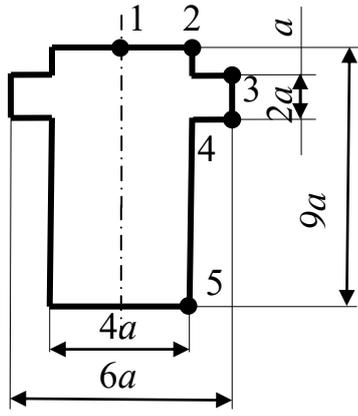


Рис. 5.1.21

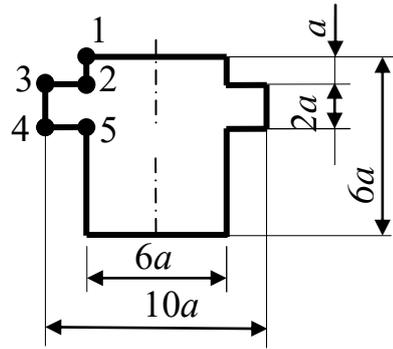


Рис. 5.1.22

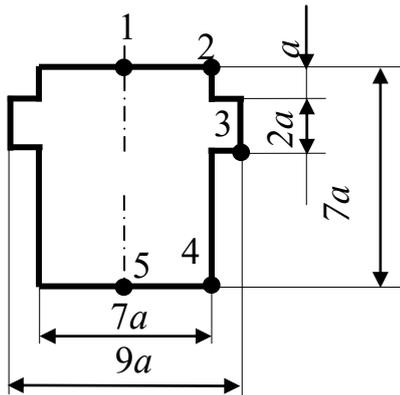


Рис. 5.1.23

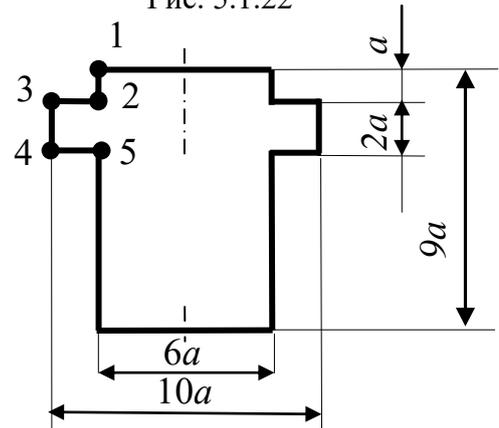


Рис. 5.1.24

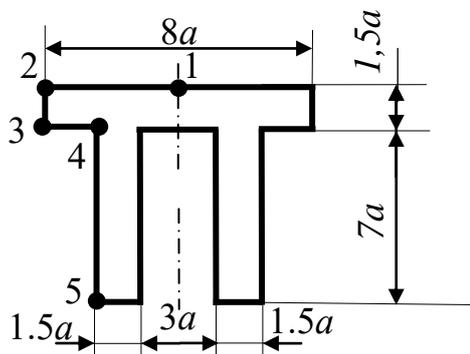


Рис. 5.1.25

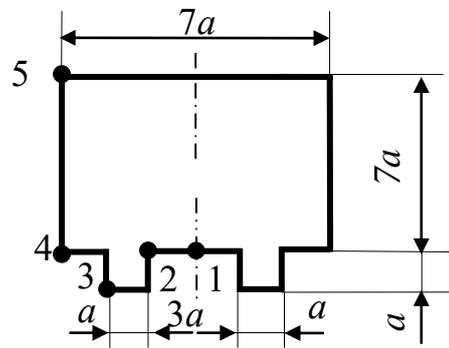


Рис. 5.1.26

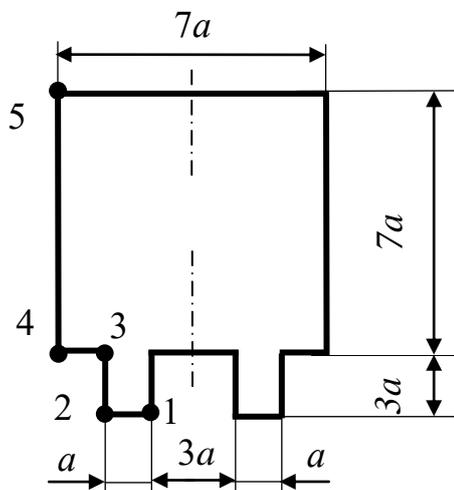


Рис. 5.1.27

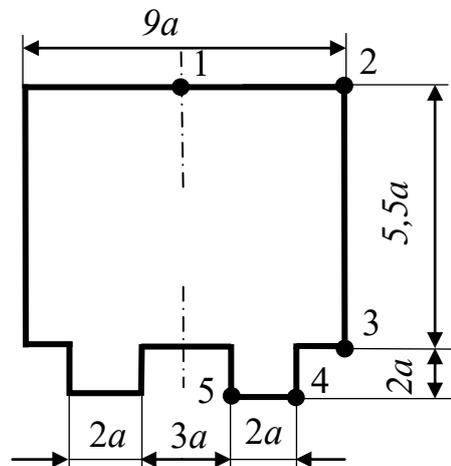


Рис. 5.1.28

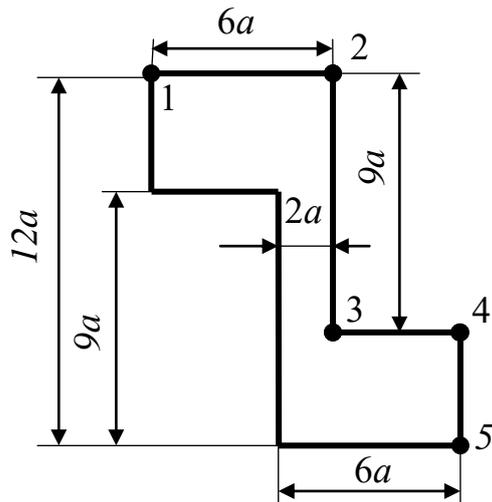


Рис. 5.1.29

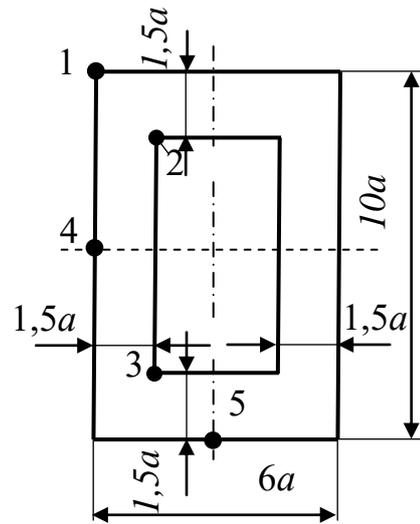


Рис. 5.1.30

Таблица 5.1

Данные для вариантов

Номер варианта (рисунка)	a , мм	Расположение полюса в точке	Номер варианта (рисунка)	a , мм	Расположение полюса в точке
1 (5.1.1)	10	1	16 (5.1.16)	16	1
2 (5.1.2)	12	2	17 (5.1.17)	18	2
3 (5.1.3)	14	3	18 (5.1.18)	20	3
4 (5.1.4)	16	4	19 (5.1.19)	10	4
5 (5.1.5)	18	5	20 (5.1.20)	12	5
6 (5.1.6)	20	1	21 (5.1.21)	14	1
7 (5.1.7)	10	2	22 (5.1.22)	16	2
8 (5.1.8)	12	3	23 (5.1.23)	18	3
9 (5.1.9)	14	4	24 (5.1.24)	20	4
10 (5.1.10)	16	5	25 (5.1.25)	10	5
11 (5.1.11)	18	1	26 (5.1.26)	12	1
12 (5.1.12)	20	2	27 (5.1.27)	14	2
13 (5.1.13)	10	3	28 (5.1.28)	16	3
14 (5.1.14)	12	4	29 (5.1.29)	18	4
15 (5.1.15)	14	5	30 (5.1.30)	20	5

Примечание. Номер варианта соответствует номеру рисунка (например, в задаче 5.1 варианту 9 соответствует рис. 5.1.9).

Методические указания к решению задачи

1. Определить положение главных центральных осей инерции сечения.
2. Вычислить геометрические характеристики сечения: площадь, главные центральные моменты инерции, квадраты радиусов инерции.
3. Определить положение нейтральной линии в сечении, вычислив отрезки, отсекаемые нейтральной линией на координатных осях. Изобразить нейтральную линию в сечении.
4. Записать выражения для напряжений при внецентренном сжатии.
5. Установить положение опасных точек по растягивающим и сжимающим напряжениям, вычислить напряжения в опасных точках $\sigma_{рас}^{max}$ и $\sigma_{сж}^{max}$.
6. Составить условия прочности и определить допускаемую нагрузку из условия прочности по растягивающим $[F_{рас}]$ и сжимающим $[F_{сж}]$ напряжениям.
7. Сформулировать окончательный вывод относительно значения допускаемой нагрузки $[F]$.

Пример решения задачи

Исходные данные

Точка A — полюс силы;

$$[\sigma_{рас}] = 50 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{сж}] = 160 \text{ МПа (см. рис. 5.1.31).}$$

Решение

1. Для определения положения главных центральных осей инерции используем свойства симметрии сечения бруса. В системе координатных

осей z и y одна из координат центра тяжести принимает значения $z_c = 45$ мм. Для определения другой координаты y_c используем формулу

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{A_1 c_1 + A_2 c_2}{A_1 + A_2} = \frac{100 \cdot 90 \cdot 100 + 60 \cdot 50 \cdot 25}{100 \cdot 90 + 60 \cdot 50} \approx 81,25 \text{ мм.}$$

Проведем главные центральные оси инерции z_c и y_c .

2. Значения главных центральных осей инерции J_{z_c} и J_{y_c} определяем согласно выражениям

$$\begin{aligned} J_{z_c} &= J_{z_1}^I + A_1 (c_1 - y_c)^2 + J_{z_2}^{II} + A_2 (y_c - c_2)^2 = \frac{90 \cdot 100^3}{12} + \\ &+ 90 \cdot 100 \cdot (100 - 81,25)^2 + \frac{60 \cdot 50^3}{12} + 60 \cdot 50 (81,25 - 25)^2 \approx 0,208 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-4}; \\ J_{y_c} &= \frac{100 \cdot 90^3}{12} + \frac{50 \cdot 60^3}{12} \approx 0,0698 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-4}. \end{aligned}$$

Площадь сечения

$$A = A_1 + A_2 = 90 \cdot 100 + 60 \cdot 50 = 12000 \text{ мм}^2 = 0,012 \text{ м}^2.$$

Квадраты радиусов инерции

$$\begin{aligned} i_y^2 &= \frac{J_{y_c}}{A} = \frac{0,0698 \cdot 10^{-4}}{0,012} \approx 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \\ i_z^2 &= \frac{J_{z_c}}{A} = \frac{0,208 \cdot 10^{-4}}{0,012} \approx 17,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2. \end{aligned}$$

3. При внецентренном сжатии напряжения в произвольной точке вычисляются по формуле

$$\sigma = -F \left(\frac{1}{A} - \frac{z_p z}{J_{y_c}} - \frac{y_p y}{J_{z_c}} \right),$$

где z_p и y_p — координаты полюса силы, в нашем случае $z_p = -45$ мм;

$$y_p = -31,25 \text{ мм};$$

z и y — координаты произвольной точки сечения.

4. Наиболее нагруженными являются точки, максимально удаленные от нейтральной линии. Найдем положение нейтральной линии, вычислив отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях y_c и z_c :

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{17,3 \cdot 10^{-4}}{-3,125 \cdot 10^{-2}} \approx 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{5,8 \cdot 10^{-4}}{-4,5 \cdot 10^{-2}} \approx 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

откладываем полученные отрезки и стоим нейтральную линию.

Теперь видно, что в растянутой зоне наиболее нагруженной является точка C , а в сжатой зоне — точка B либо точка A .

5. Исходя из условия прочности бруса определяем значение допустимых нагрузок $[F_{сж}]$ и $[F_{рас}]$.

На условия прочности по сжимающим напряжениям

$$|\sigma_B| = F \left(\frac{1}{A} - \frac{z_p z_B}{J_{y_c}} - \frac{y_p y_B}{J_{z_c}} \right) \leq [\sigma_{сж}].$$

Для точки B имеем $z_B = -30 \text{ мм}$ и $y_B = -81,25 \text{ мм}$, тогда

$$[F_{сж}]' = \frac{[\sigma_{сж}]}{\frac{1}{A} - \frac{z_p z_B}{J_{y_c}} - \frac{y_p y_b}{J_{z_c}}} = \frac{160 \cdot 10^6}{\frac{1}{0,012} + \frac{0,045 \cdot 0,03}{0,0698 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,03125 \cdot 0,08125}{0,2078 \cdot 10^{-4}}} =$$

$$\approx 0,401 \cdot 10^6 \text{ Н} = 401 \text{ кН};$$

$$|\sigma_A| = F \left(\frac{1}{A} - \frac{z_p z_A}{J_{y_c}} - \frac{y_p y_A}{J_{z_c}} \right) \leq [\sigma_{сж}],$$

где $z_A = -45 \text{ мм}$; $y_A = -31,25 \text{ мм}$.

Тогда

$$[F_{сж}]'' = \frac{[\sigma_{сж}]}{\frac{1}{A} - \frac{z_p z_A}{J_{y_c}} - \frac{y_p y_A}{J_{z_c}}} = \frac{160 \cdot 10^6}{\frac{1}{0,012} + \frac{0,045 \cdot 0,045}{0,0698 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,03125 \cdot 0,03125}{0,2078 \cdot 10^{-4}}} =$$

$$\approx 0,38 \cdot 10^6 \text{ Н} = 380 \text{ кН};$$

то есть $\sigma_{сж}^{max} = \sigma_A$.

Из условия прочности по растягивающим напряжениям

$$\sigma_{рас}^{max} = \sigma_{сж} = F \left(-\frac{1}{A} + \frac{z_p z_c}{J_{y_c}} + \frac{y_p y_c}{J_{z_c}} \right) \leq [\sigma_{рас}].$$

Для точки C с координатами $z_C = 45 \text{ мм}$ и $y_C = 68,75 \text{ мм}$

$$[F_{рас}] = \frac{[\sigma_{рас}]}{-\frac{1}{A} + \frac{z_p z_c}{J_{y_c}} + \frac{y_p y_c}{J_{z_c}}} = \frac{50 \cdot 10^6}{-\frac{1}{0,012} + \frac{0,045 \cdot 0,045}{0,0698 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,03125 \cdot 0,06875}{0,2078 \cdot 10^{-4}}} =$$

$$\approx 0,161 \cdot 10^6 \text{ Н} = 161 \text{ кН}.$$

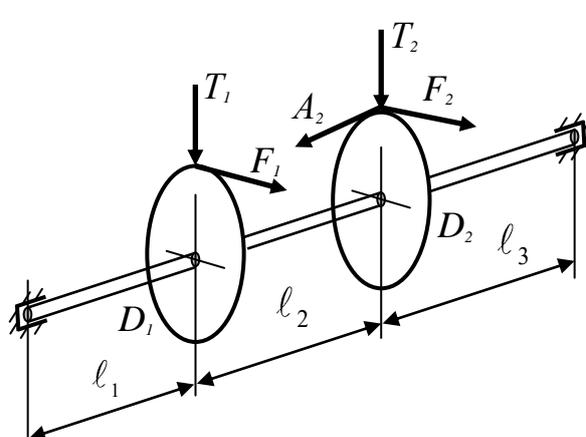
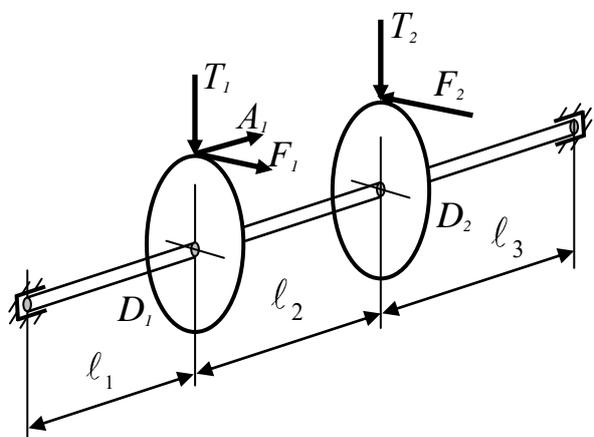
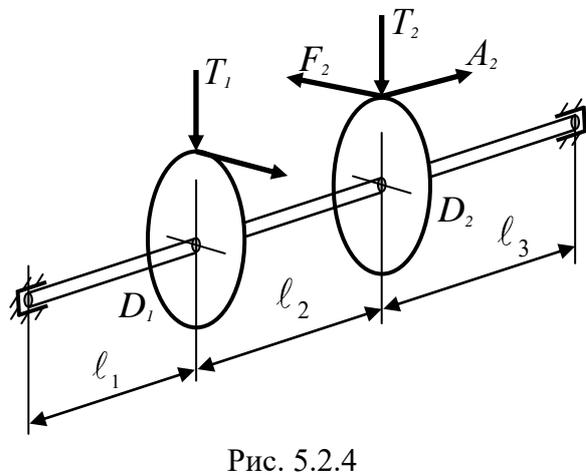
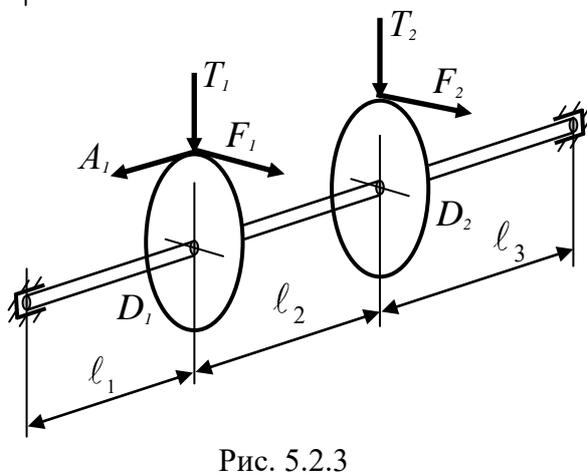
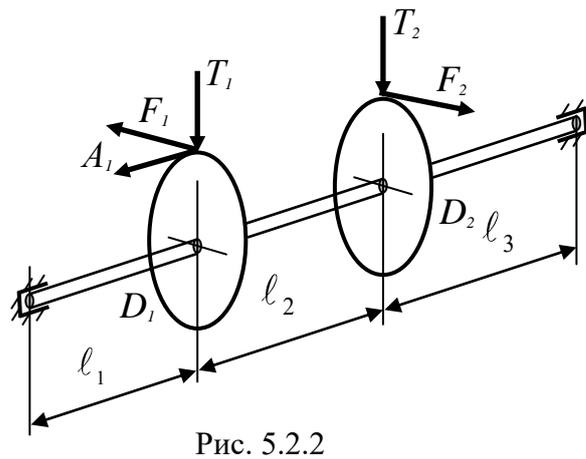
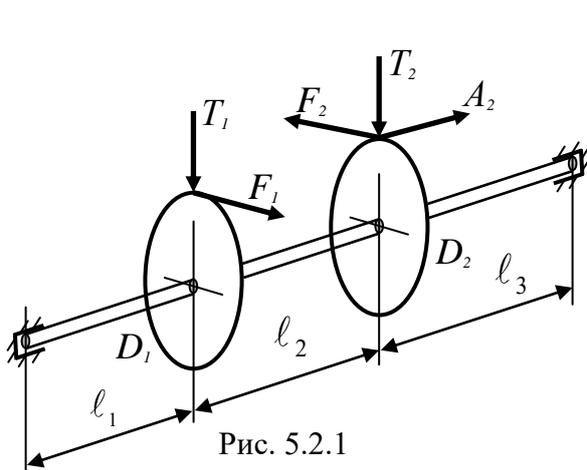
6. Из двух вариантов допускаемой нагрузки $[F_{сж}] = 380 \text{ кН}$ и $[F_{рас}] = 161 \text{ кН}$ окончательно выбираем вариант с меньшей нагрузкой, то есть $[F_{рас}] = 161 \text{ кН}$.

Задача 5.2. Совместное действие кручения и изгиба

Исходные данные

Исходя из условия прочности определить требуемый диаметр опасного сечения промежуточного вала редуктора. При решении принять $T = 0,37 F$, $A = 0,14 F$.

Схемы к задаче 5.2



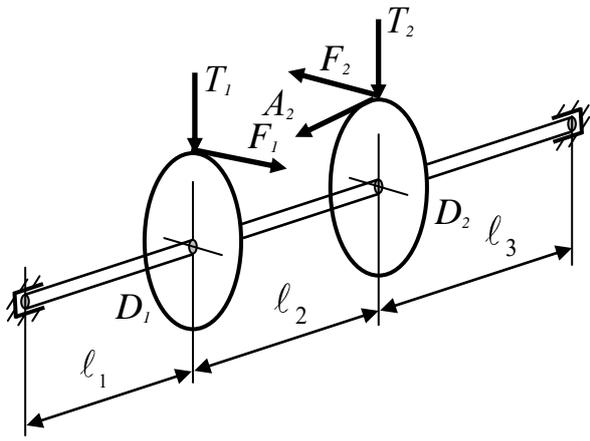


Рис. 5.2.7

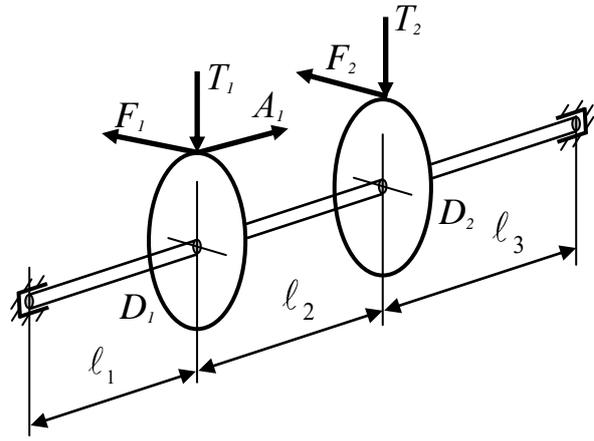


Рис. 5.2.8

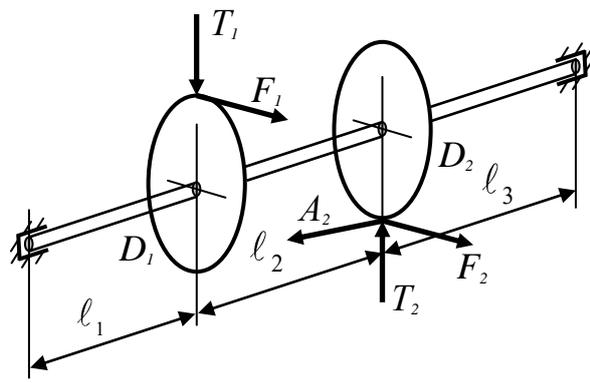


Рис. 5.2.9

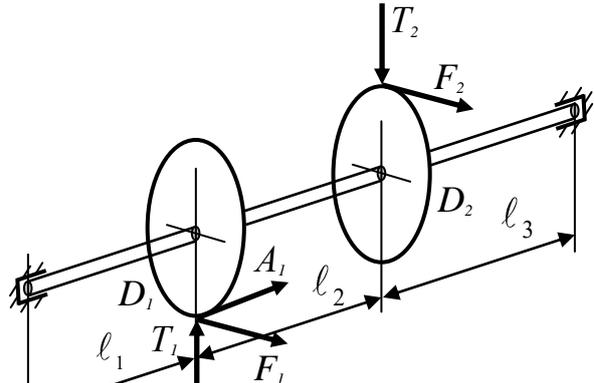


Рис. 5.2.10

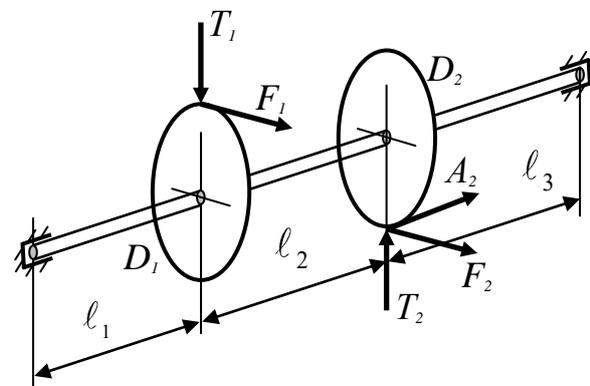


Рис. 5.2.11

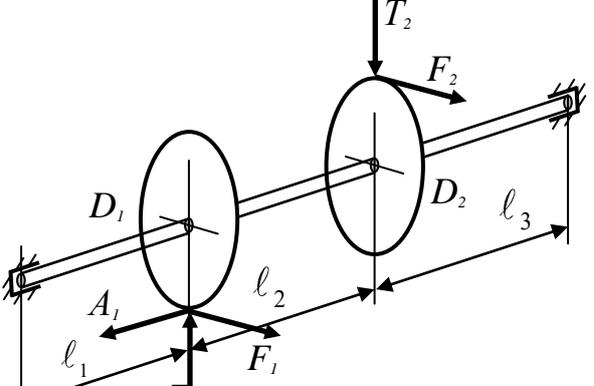


Рис. 5.2.12

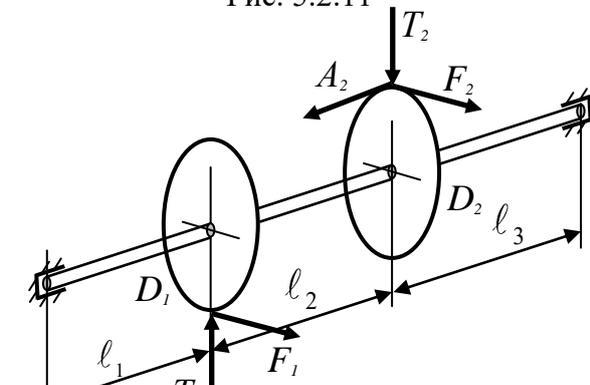


Рис. 5.2.13

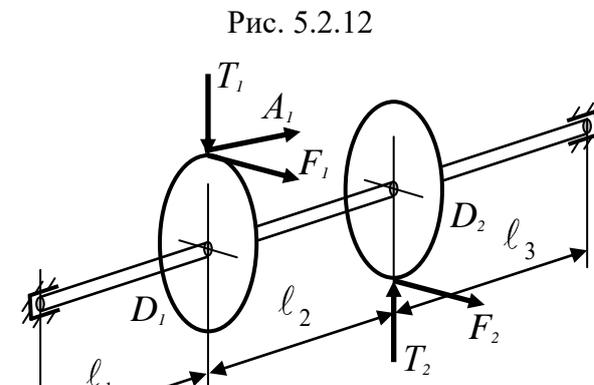


Рис. 5.2.14

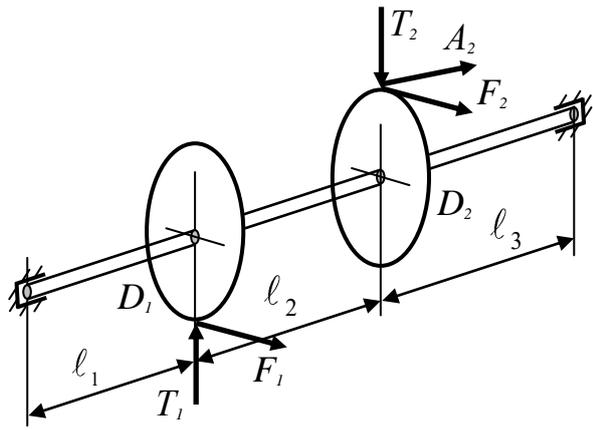


Рис. 5.2.15

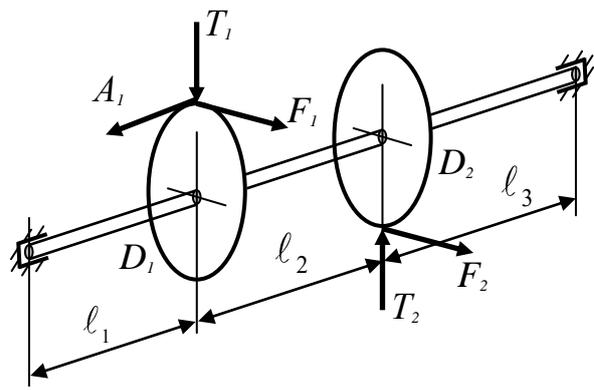


Рис. 5.2.16

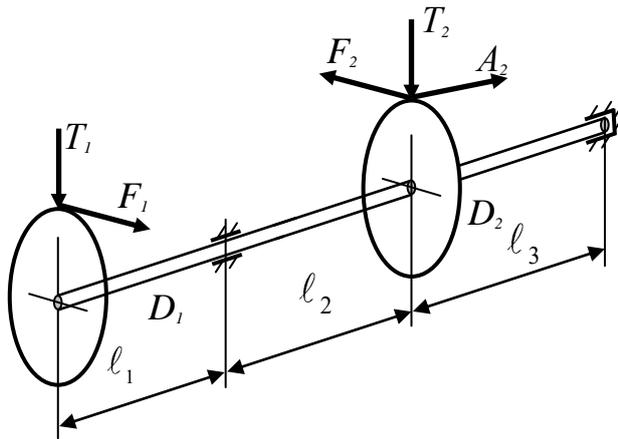


Рис. 5.2.17

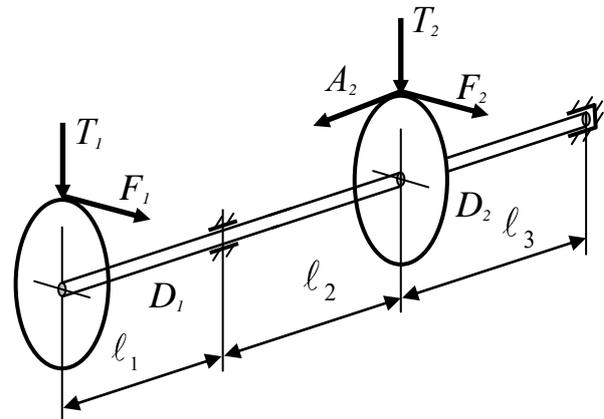


Рис. 5.2.18

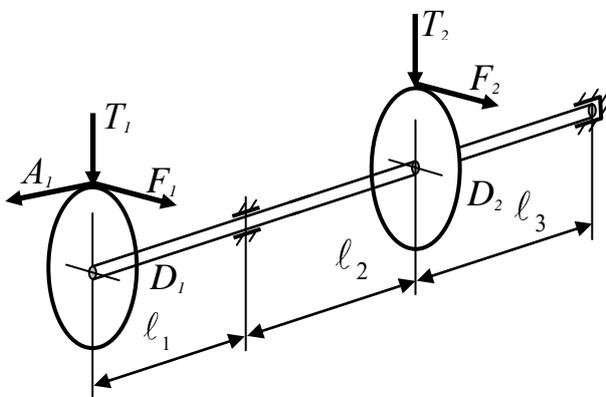


Рис. 5.2.19

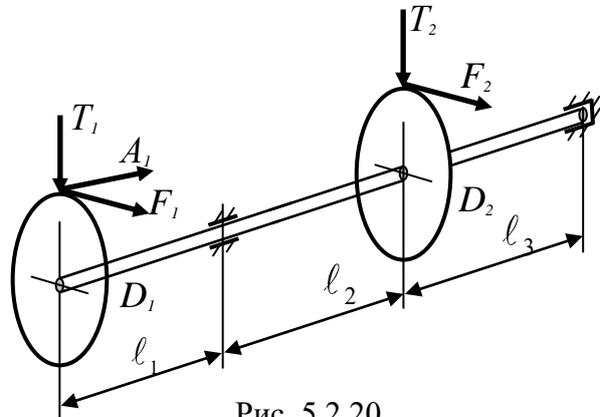


Рис. 5.2.20

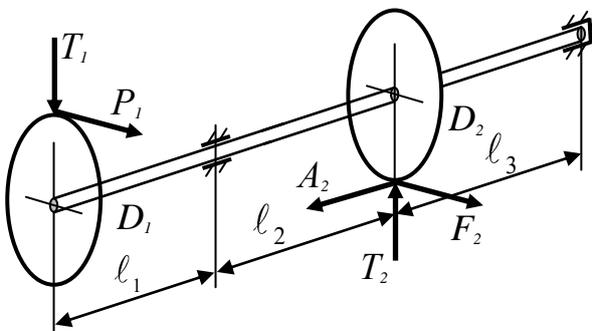


Рис. 5.2.21

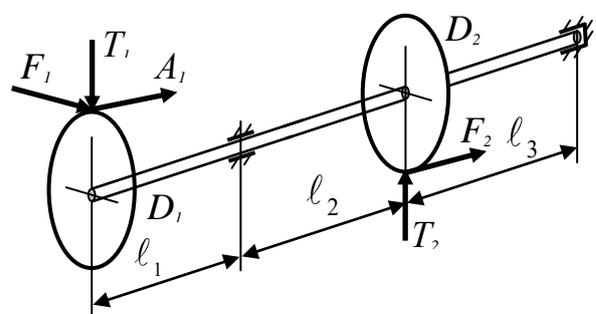


Рис. 5.2.22

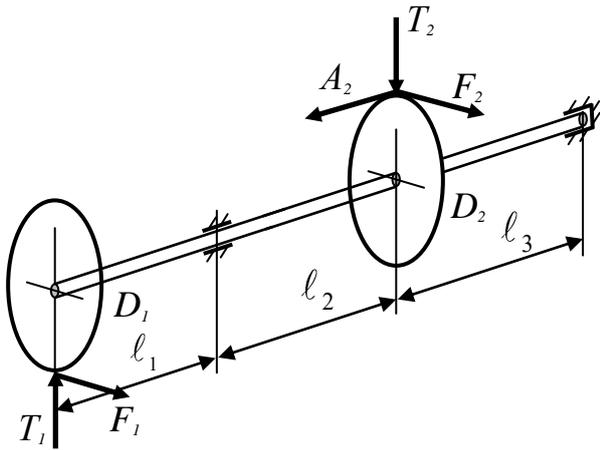


Рис. 5.2.23

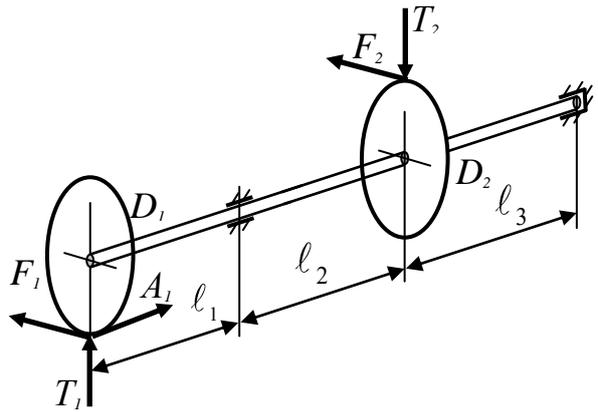


Рис. 5.2.24

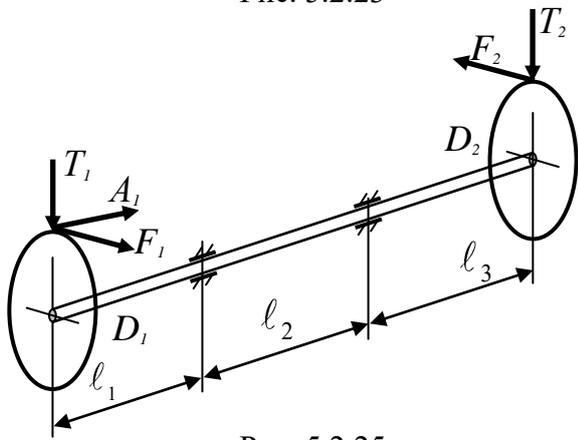


Рис. 5.2.25

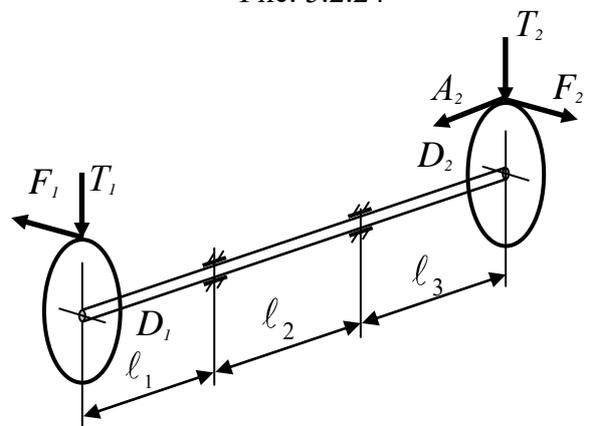


Рис. 5.2.26

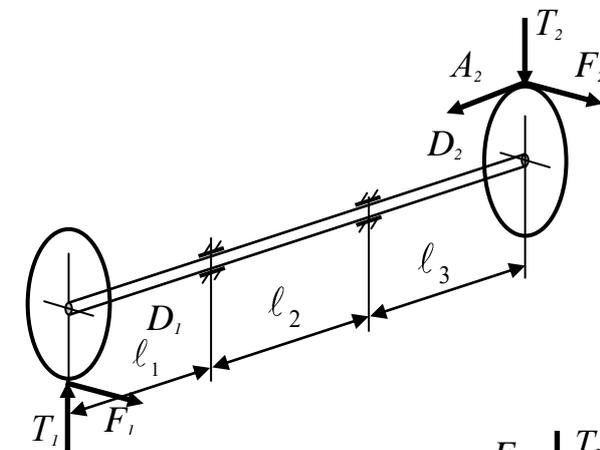


Рис. 5.2.27

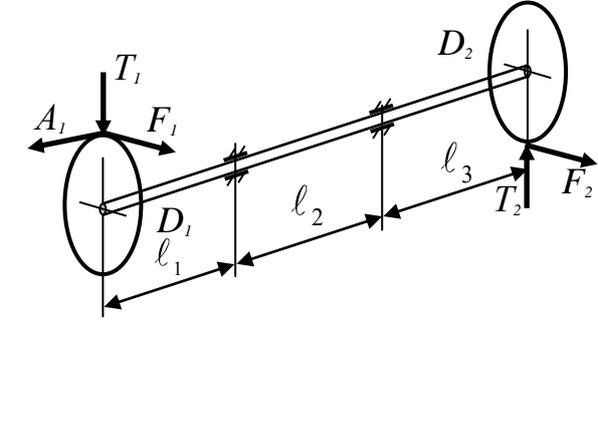


Рис. 5.2.28

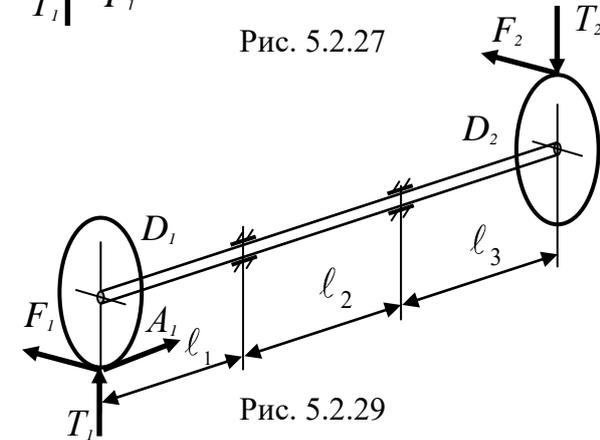


Рис. 5.2.29

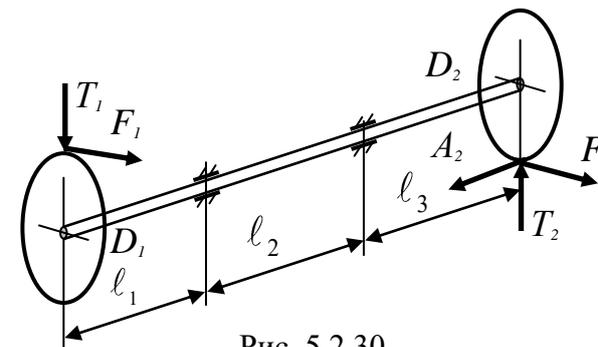


Рис. 5.2.30

Таблица 5.2

Данные для вариантов

Номер варианта (рисунка)	N , кВт	ω , с ⁻¹	ℓ_1 , мм	ℓ_2 , мм	ℓ_3 , мм	D_1 , мм	D_2 , мм	$[\sigma]$, МПа
1 (5.2.1)	8,0	10	80	100	110	150	210	52
2 (5.2.2)	8,4	15	90	80	70	140	220	55
3 (5.2.3)	8,8	20	100	70	90	125	200	60
4 (5.2.4)	9,2	22	90	100	60	110	190	45
5 (5.2.5)	9,6	18	110	120	80	145	205	48
6 (5.2.6)	10,0	15	80	110	100	130	220	65
7 (5.2.7)	10,4	20	120	80	90	140	210	60
8 (5.2.8)	10,8	10	90	100	110	125	195	64
9 (5.2.9)	11,2	22	80	110	90	150	230	55
10 (5.2.10)	11,6	18	100	120	110	140	205	58
11 (5.2.11)	12,0	15	120	70	130	125	195	42
12 (5.2.12)	12,4	20	80	90	120	150	230	54
13 (5.2.13)	12,8	16	90	100	80	140	210	50
14 (5.2.14)	13,2	22	120	100	90	130	185	56
15 (5.2.15)	13,6	18	105	95	120	130	200	52
16 (5.2.16)	14,0	15	110	80	130	120	220	62
17 (5.2.17)	14,4	10	100	120	90	110	200	52
18 (5.2.18)	14,8	16	140	70	100	120	210	48
19 (5.2.19)	15,2	22	85	120	95	105	185	52
20 (5.2.20)	15,6	18	95	130	75	125	190	60
21 (5.2.21)	16,0	15	100	110	120	130	205	54
22 (5.2.22)	16,4	20	105	140	80	120	210	66
23 (5.2.23)	16,8	16	90	130	110	130	205	58
24 (5.2.24)	17,2	22	95	120	100	110	210	64
25 (5.2.25)	17,6	18	95	105	120	180	230	52
26 (5.2.26)	18,0	15	100	120	130	170	210	48
27 (5.2.27)	18,4	20	105	130	85	165	230	60
28 (5.2.28)	18,8	16	90	120	105	170	235	54
29 (5.2.29)	19,2	22	120	80	95	160	220	60
30 (5.2.30)	19,6	18	105	120	110	180	240	58

Примечание. Номер варианта соответствует номеру рисунка (например, в задаче 5.2 варианту 12 соответствует рис. 5.2.12).

Методические указания к решению задачи

1. Определить момент, передаваемый валом, по заданным величинам N и ω .
2. Построить эпюру крутящих моментов $M_{кр}$.
3. Определить окружные F , радиальные T и осевые усилия, действующие на вал.

4. Построить эпюры изгибающих моментов в вертикальной $M_{вер}$ и горизонтальной плоскостях $M_{гор}$.

5. Построить эпюры суммарных изгибающих моментов, пользуясь формулой $M_{из} = \sqrt{M_{вер}^2 + M_{гор}^2}$.

6. С помощью эпюр $M_{кр}$ и $M_{из}$ найти опасное сечение вала и определить значение максимального расчетного (эквивалентного) момента по теории наибольших касательных напряжений (третья теория прочности).

7. При заданных допускаемых напряжениях определить требуемый диаметр опасного сечения вала и округлить его до стандартного значения.

Пример решения задачи

Исходные данные

$N = 14,4 \text{ кВт}$; $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$; $l_1 = 100 \text{ мм}$; $l_2 = 120 \text{ мм}$; $l_3 = 90 \text{ мм}$;
 $D_1 = 110 \text{ мм}$; $D_2 = 200 \text{ мм}$; $[\sigma] = 52 \text{ МПа}$ (см. рис. 5.2.31).

Решение

1. По заданным величинам N и ω определяем момент, передаваемый валом,

$$m = \frac{N}{\omega} = \frac{14,4 \cdot 1000}{10} = 1440 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

2. Применяя метод сечений, строим эпюру крутящих моментов по участкам вала, пренебрегая трением в подшипниках:

I участок $M_{кр}^I = 0$;

II участок $M_{кр}^{II} = m = 1440 \text{ Н} \cdot \text{м}$;

III участок $M_{кр}^{III} = 0$.

3. По найденному значению m и заданным величинам D_1 и D_2 определяем окружные усилия F_1 и F_2 :

$$F_1 = \frac{2m}{D_1} = \frac{2 \cdot 1440}{0,11} \approx 26200 \text{ H},$$

$$F_2 = \frac{2m}{D_2} = \frac{2 \cdot 1440}{0,2} = 14400 \text{ H}.$$

Используя соотношения $T = 0,37F$ и $A = 0,14F$, определяем радиальные T и осевые усилия:

$$T_1 = 0,37F_1 = 0,37 \cdot 26200 \approx 9690 \text{ H};$$

$$T_2 = 0,37F_2 = 0,37 \cdot 14400 \approx 5330 \text{ H};$$

$$A = 0,14F_2 = 0,14 \cdot 14400 \approx 2020 \text{ H}.$$

4. Для построения эпюр изгибающих моментов в вертикальной $M_{вер}$ и горизонтальной $M_{гор}$ плоскостях предварительно составим расчетные схемы вала на изгиб соответственно в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

А. Вертикальная плоскость. Определяем опорные реакции R_A и R_B :

$$\sum m_A = 0; \quad T_1 l_1 - T_2 (l_1 + l_2) + M + R_B (l_1 + l_2 + l_3) = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{-T_1 l_1 + T_2 (l_1 + l_2) - M}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{-9690 \cdot 0,1 + 5330 \cdot (0,1 + 0,12) - 2020 \cdot 0,2 / 2}{0,1 + 0,12 + 0,09} \approx 5,0 \text{ H};$$

$$\sum m_B = 0; \quad R_A (l_1 + l_2 + l_3) - T_1 (l_2 + l_3) + T_2 l_3 + M = 0.$$

Отсюда

$$R_A = \frac{T_1 (l_2 + l_3) - T_2 l_3 - M}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{9690 \cdot (0,12 + 0,09) - 5330 \cdot 0,09 - 2020 \cdot 0,2 / 2}{0,1 + 0,12 + 0,09} \approx 4365 \text{ H}.$$

Проверка

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_A - T_1 + T_2 - R_B = 4365 - 9690 + 533 - 5,0 = 0,$$

$0=0$ (реакции найдены верно).

Построим эпюру $M_{\text{веп}}$ (рис. 5.2.31) по следующим характерным точкам:

$$M_{\text{веп}}^I = R_A \ell_1 = 4365 \cdot 0,1 \approx 437 \text{ H} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{веп}}^{II} = -R_B \ell_3 = -5,0 \cdot 0,09 = -0,45 \text{ H} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{веп}}^{III} = -R_B \ell_3 - M = -5,0 \cdot 0,09 - 2020 \cdot 0,2 / 2 \approx -202,5 \text{ H} \cdot \text{м}.$$

Б. Горизонтальная плоскость. Определим опорные реакции H_A и H_B :

$$\sum m_A (\vec{F}_i) = 0; \quad F_1 \ell_1 + F_2 (\ell_1 + \ell_2) - H_B (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) = 0,$$

откуда

$$H_B = \frac{F_1 \ell_1 + F_2 (\ell_1 + \ell_2)}{(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)} = \frac{26200 \cdot 0,1 + 14400 \cdot (0,1 + 0,12)}{0,1 + 0,12 + 0,09} \approx 18670,967$$

$$\approx 18670 \text{ H};$$

$$\sum m_B (\vec{F}_i) = 0; \quad -F_1 (\ell_1 + \ell_2) - F_2 \ell_2 + H_A (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) = 0.$$

Отсюда

$$H_B = \frac{F_1 (\ell_1 + \ell_2) + F_2 \ell_2}{(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)} = \frac{26200(0,12 + 0,09) + 14400 \cdot 0,09}{0,1 + 0,12 + 0,09} \approx 21930 \text{ H}.$$

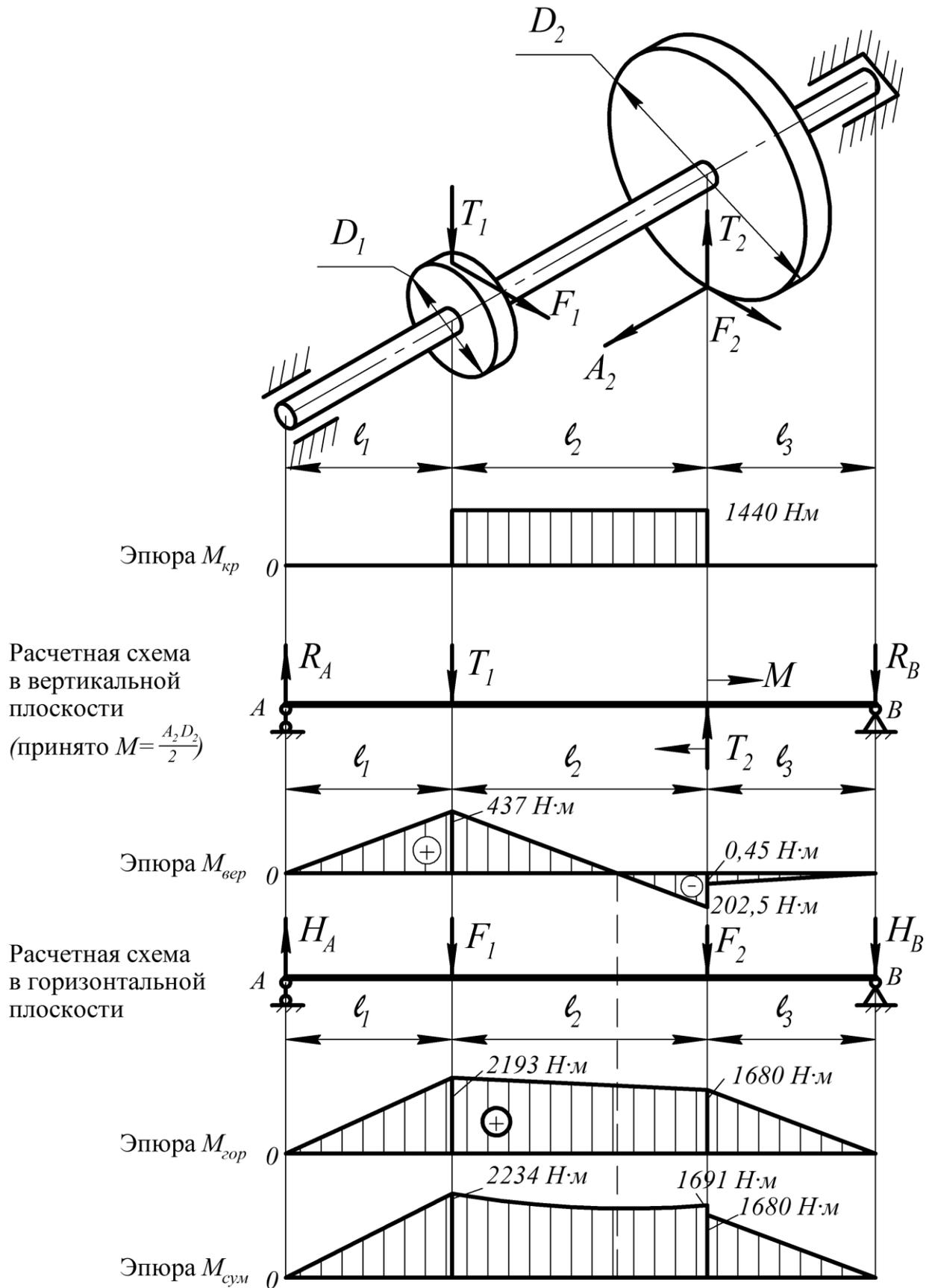


Рис. 5.2.31

Проверка

$$\sum F_{ix} = 0; \quad H_A - F_1 - F_2 + H_B = 21930 - 26200 - 14400 + 18670 = 0.$$

Построим эпюру $M_{гор}$ (рис. 5.2.31) по следующим характерным точкам:

$$M_{гор}^I = H_A \ell_1 = 21930 \cdot 0,1 = 2193 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{гор}^{II} = H_B \ell_3 = 18670 \cdot 0,09 \approx 1680 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

5. Построим эпюру суммарных изгибающих моментов с использованием формулы

$$M_{сум.из} = \sqrt{M_{гор}^2 + M_{вер}^2};$$

$$M_{сум.из}^I = \sqrt{2193^2 + 437^2} \approx 2234 \text{ Н} \cdot \text{м} \text{ в точке } C;$$

$$M_{сум.из}^{II} = \sqrt{1680^2 + 0,45^2} \approx 1680 \text{ Н} \cdot \text{м} \text{ в точке } D \text{ слева};$$

$$M_{сум.из}^{III} = \sqrt{1680^2 + 202^2} \approx 1691 \text{ Н} \cdot \text{м} \text{ в точке } D \text{ справа}.$$

6. Анализируя эпюры $M_{кр}$ и $M_{сум.из}$, устанавливаем, что опасным сечением вала является сечение вала под первым колесом (точка C), для которого $M_{кр} = 1440 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и $M_{сум.из}^I = 2234 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Используя теорию наибольших касательных напряжений (третью теорию прочности), определяем значение максимального расчетного (эквивалентного) момента

$$M_{экр}^{III} = \sqrt{M_{кр}^2 + M_{из}^2} = \sqrt{1440^2 + 2234^2} \approx 2658 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

7. Исходя из условия прочности вала

$$\sigma_{экр} = \frac{M_{экр}}{W} \leq [\sigma],$$

определяем требуемый диаметр опасного сечения вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{экр}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{2658}{0,1 \cdot 52 \cdot 10^6}} \approx 7,96 \cdot 10^{-2} \text{ м} \approx 80 \text{ мм}.$$

Задание №6. Устойчивость. Удар

Задача 6.1. Расчет центрально сжатых стержней на устойчивость

Исходные данные

Для центрально сжатой стойки, состоящей из двух прокатных профилей, жестко соединенных между собой, требуется:

- 1) подобрать размеры поперечного сечения прокатных профилей, пользуясь коэффициентом продольного изгиба φ ;
- 2) для принятых размеров сечения определить критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.

Материал стойки Ст. 3. Допустимые напряжения на сжатие $[\sigma_{сж}] = 160 \text{ МПа}$. Нормальный модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Форма сечения, вид прокатных профилей и способы закрепления концов стойки в двух главных плоскостях инерции показаны на заданной схеме. Данные для расчета принимаются по номеру варианта из таблицы вариантов.

Схемы к задаче 6.1

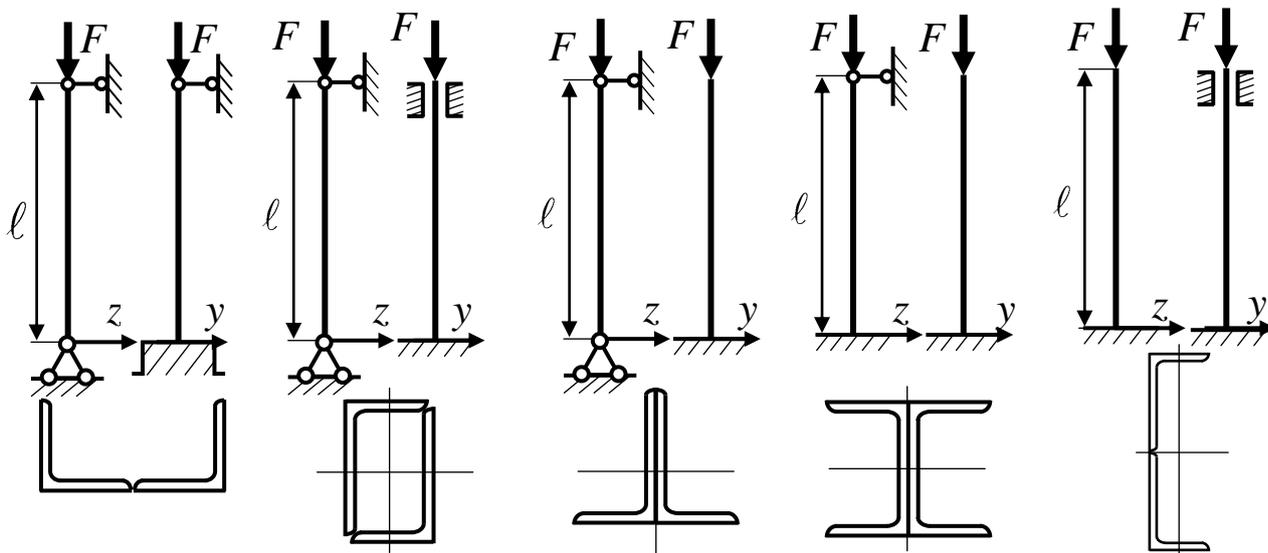


Рис. 6.1.1

Рис. 6.1.2

Рис. 6.1.3

Рис. 6.1.4

Рис. 6.1.5

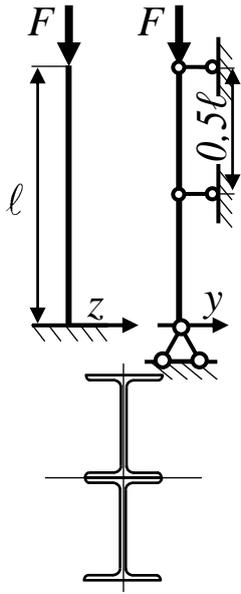


Рис. 6.1.6

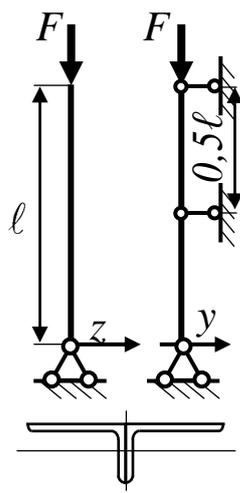


Рис. 6.1.7

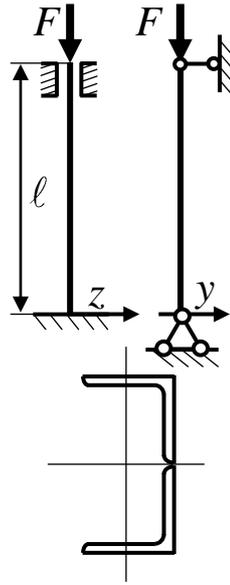


Рис. 6.1.8

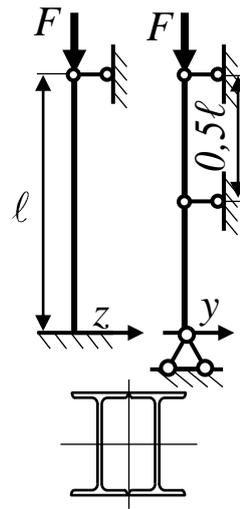


Рис. 6.1.9

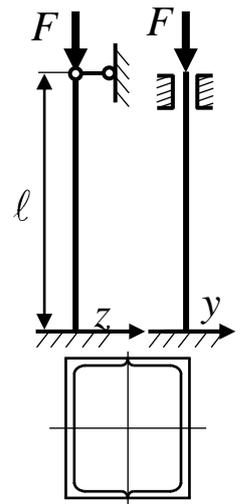


Рис. 6.1.10

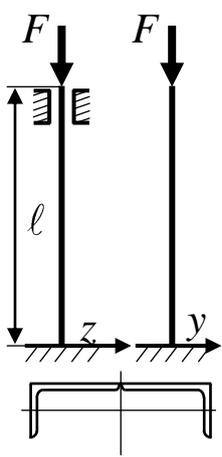


Рис. 6.1.11

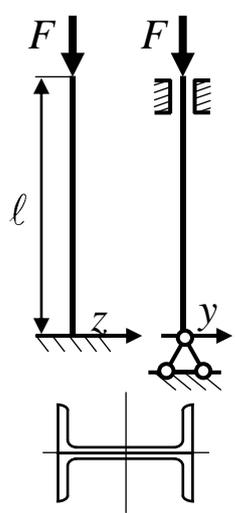


Рис. 6.1.12

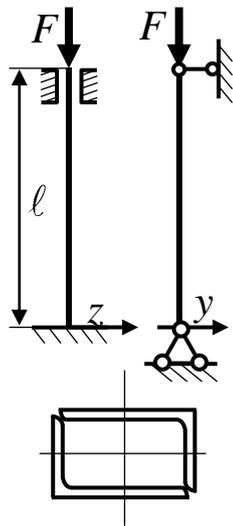


Рис. 6.1.13

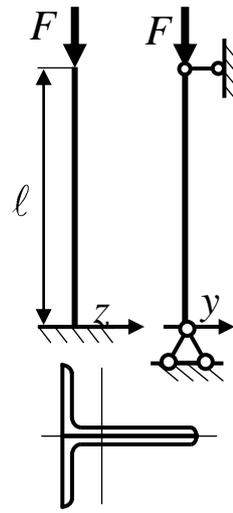


Рис. 6.1.14

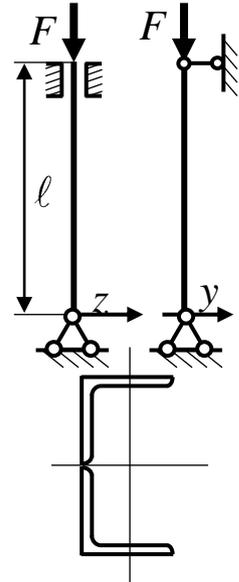


Рис. 6.1.15

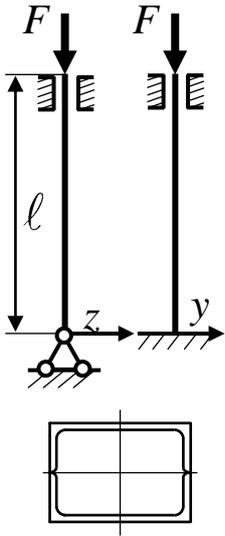


Рис. 6.1.16

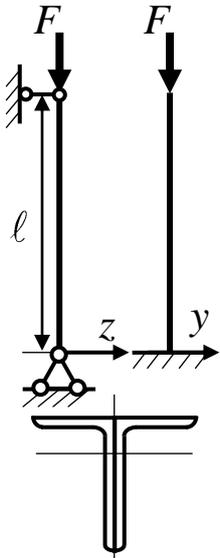


Рис. 6.1.21

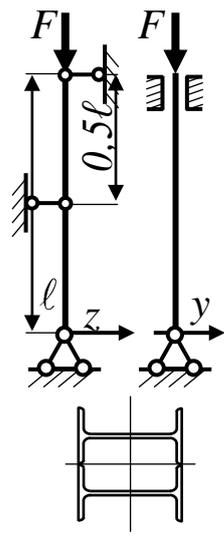


Рис. 6.1.17

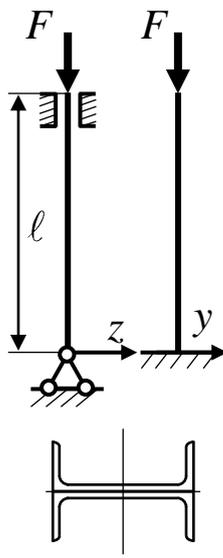


Рис. 6.1.22

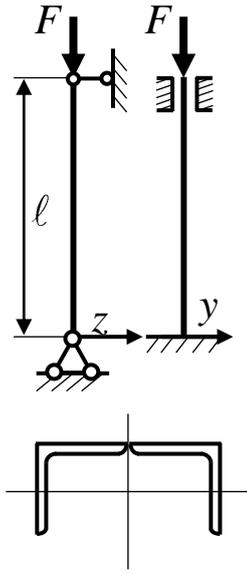


Рис. 6.1.18

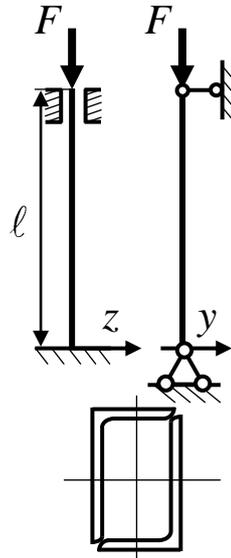


Рис. 6.1.23

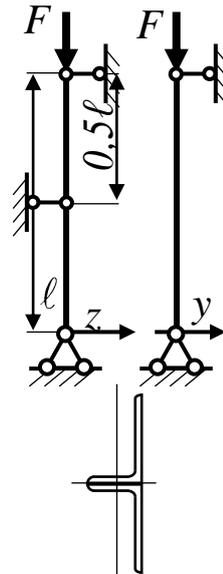


Рис. 6.1.19

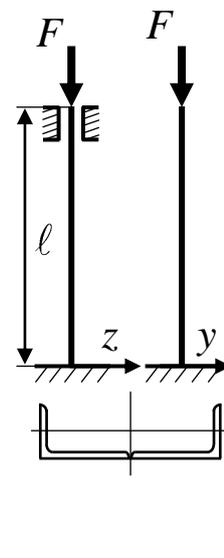


Рис. 6.1.24

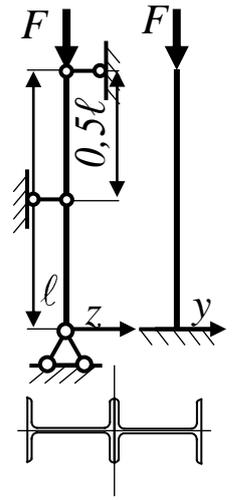


Рис. 6.1.20

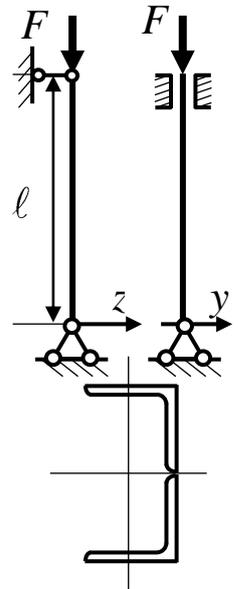


Рис. 6.1.25

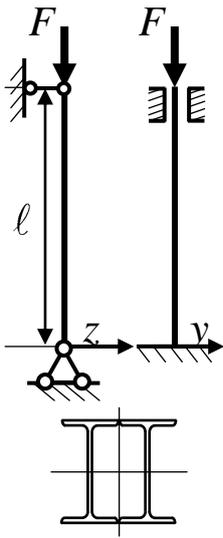


Рис. 6.1.26

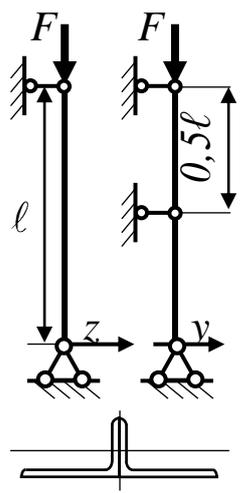


Рис. 6.1.27

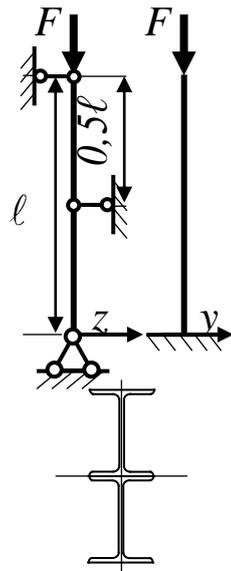


Рис. 6.1.28

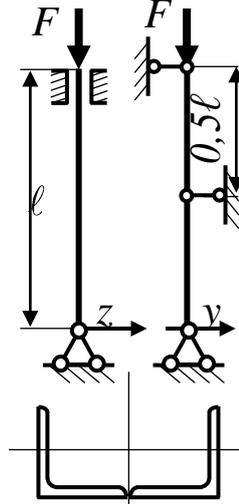


Рис. 6.1.29

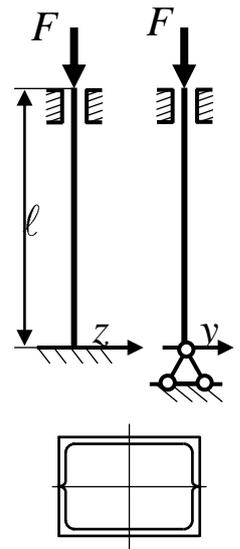


Рис. 6.1.30

Таблица 6.1

Данные для вариантов

Номер варианта (рисунка)	Сила F , кН	Длина l , м	№ варианта (рисунка)	Сила F , кН	Длина l , м
1 (6.1.1)	240	4,0	16 (6.1.16)	300	5,0
2 (6.1.2)	400	5,0	17 (6.1.17)	300	4,0
3 (6.1.3)	400	2,5	18 (6.1.18)	200	2,5
4 (6.1.4)	450	5,0	19 (6.1.19)	200	2,4
5 (6.1.5)	360	4,0	20 (6.1.20)	300	4,0
6 (6.1.6)	500	5,0	21 (6.1.21)	260	2,0
7 (6.1.7)	350	4,0	22 (6.1.22)	300	4,0
8 (6.1.8)	300	3,5	23 (6.1.23)	300	4,0
9 (6.1.9)	500	6,0	24 (6.1.24)	250	3,0
10 (6.1.10)	400	6,0	25 (6.1.25)	100	2,0
11 (6.1.11)	200	3,0	26 (6.1.26)	300	4,0
12 (6.1.12)	300	4,0	27 (6.1.27)	200	3,0
13 (6.1.13)	260	3,5	28 (6.1.28)	350	4,0
14 (6.1.14)	220	2,0	29 (6.1.29)	200	3,0
15 (6.1.15)	200	2,5	30 (6.1.30)	240	4,5

Примечание. Номер варианта соответствует номеру рисунка (например, в задаче 6.1 варианту 15 соответствует рис. 6.1.15).

Методические указания к решению задачи

Прежде чем приступать к решению задачи, необходимо изучить главу «Устойчивость равновесия деформируемых систем».

Особое внимание следует обратить на такую важную величину, как гибкость стержня λ , которая одновременно учитывает четыре характеристики сжатого стержня (длину, способ закрепления концов, площадь поперечного сечения и его форму). Гибкость входит в формулу для вычисления критических напряжений, и от ее значения зависит значение коэффициента снижения допускаемых напряжений φ , который используется при практических расчетах на устойчивость сжатых стержней.

Важным этапом расчета является установление той плоскости, в которой при данных условиях гибкость стержня будет максимальной, то есть плоскости наименьшей жесткости. Дальнейший расчет сводится к тому, чтобы не допустить потери устойчивости именно в этой плоскости.

При ориентации сечения относительно главных осей инерции следует сравнивать два возможных варианта (так как имеем две главные оси) и принять тот вариант, при котором разность между λ_z и λ_y будет меньшей.

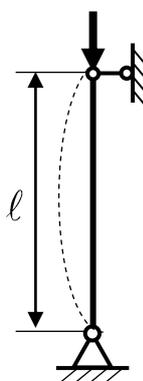
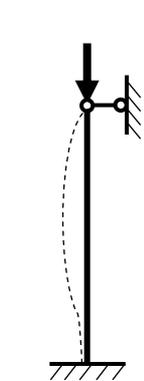
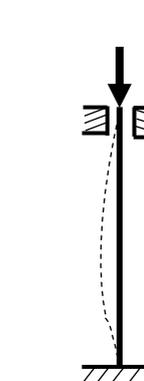
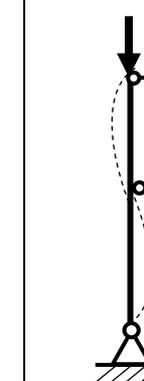
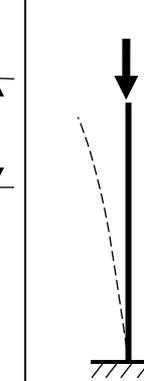
Для этого необходимо так расположить сечение, чтобы при $\mu_z > \mu_y$ выполнялось условие $i_z > i_y$, то есть большему коэффициенту приведения длины μ соответствовал больший радиус инерции сечения i . В качестве индекса при λ , μ и i указана ось, перпендикулярная к плоскости, в которой предполагается потеря устойчивости.

С учетом изложенного рекомендуется следующий порядок расчета.

1. Изображаем заданную схему. Пользуясь табл. 6.1, устанавливаем значение коэффициентов приведения длины μ_y и μ_z , ориентируясь на указанные на схеме обозначения осей и способы закрепления концов стержня.

Таблица 6.1

Значение коэффициентов приведения длины μ для различных случаев закрепления стержня

Схема зашце- пления					
μ	1,0	0,7	0,5	0,5	2,0

2. Из условия устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma],$$

задавшись значением коэффициента φ (обычно принимают $\varphi = 0,5$), на-

ходим требуемую площадь поперечного сечения $A_{cm} \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]}$, а затем

площадь одного профиля $A_1 = \frac{A_{cm}}{2}$.

3. По значению площади A_1 , пользуясь таблицами сортамента, определяем номер профиля и необходимые для расчета характеристики принятого профиля (его основные размеры, значения моментов инерции, положение центра тяжести, значение площади A).

4. Изображаем сечение, устанавливаем положение его центра тяжести и через центр тяжести проводим главные центральные оси инерции сечения z и y (следует помнить, что ось симметрии сечения всегда будет главной центральной осью).

5. Вычисляем значение моментов инерции J_z и J_y относительно проведенных осей z и y , а затем значения радиусов инерции

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{2A}} \quad \text{и} \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{2A}},$$

где A — площадь принятого номера профиля.

6. Проверяем рациональность предварительно принятой ориентировки сечения. Если большему из двух значений μ соответствует большее из двух значений i (соответствие будет выражаться в совпадении индексов, например, если $\mu_y > \mu_z$, то должно быть $i_y > i_z$), то сечение расположено рационально. Если это условие не выполняется, то следует переобозначить оси и изобразить сечение с рациональным расположением осей.

7. При рациональном расположении сечения определяем гибкости λ_y и λ_z ; устанавливаем плоскость наибольшей гибкости, то есть плоскость, перпендикулярную к оси, которая стоит индексом у большего λ .

8. По большему из двух λ определяем табличное значение коэффициента φ , пользуясь табл. 6.2 (или данными из справочника), и сравниваем это значение с тем значением φ , которым мы задались предварительно. Если они отличаются незначительно (не более чем на 5–7 %), то останавливаемся на принятом номере профиля, вычисляем напряжения (с учетом фактических значений A_{cm} и φ_m) и сравниваем их с допускаемыми. Если условие прочности выполняется, подбор сечения прекращаем (допускается отклонение не более 5 %).

Если найденное по таблице $\varphi = \varphi_m$ значительно отличается от предварительного значения $\varphi = \varphi_1$, то задаются новым значением $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_m}{2}$,

и расчет повторяют заново.

При ответе на второй вопрос следует помнить, что формула Эйлера применима лишь для стержней большой гибкости, когда $\lambda > \lambda_{пред}$.

Для стали Ст. 3 предельное значение гибкости $\lambda_{пред} = 100$. Следовательно, если для принятой стойки $\lambda_{max} > 100$, то значение критической силы можно определить по формуле Эйлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J}{(\mu \ell)^2} .$$

Таблица 6.2

Значения коэффициента φ

λ	Ст. 2	Ст. 5	λ	Ст. 2	Ст. 5
	Ст. 3 Ст. 4			Ст. 3 Ст. 4	
0	1,00	1,00	100	0,60	0,51
10	0,99	0,98	110	0,52	0,43
20	0,96	0,95	120	0,45	0,36
30	0,94	0,92	130	0,40	0,33
40	0,92	0,89	140	0,36	0,29
50	0,89	0,86	150	0,32	0,26
60	0,86	0,82	160	0,29	0,24
70	0,81	0,76	170	0,26	0,21
80	0,75	0,70	180	0,23	0,19
90	0,69	0,62	190	0,21	0,17
			200	0,19	0,16

Если окажется, что $\lambda_0 < \lambda_{max} < \lambda_{пред}$, то для определения критической силы нужно сначала вычислить значение критических напряжений по формуле Ясинского ($\lambda_0 \approx 60$ для стали Ст. 3):

$$\sigma_{кр} = a - b \lambda ,$$

где a и b — экспериментальные коэффициенты.

Для стали Ст. 3 можно принять $a = 310$ МПа и $b = 1,14$ МПа, значения критической силы получают по формуле

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A_{ст};$$

значение коэффициента запаса устойчивости определяется как отношение

$$\text{критической силы к заданной, то есть } n_y = \frac{F_{кр}}{F}.$$

Пример решения задачи

Исходные данные: для заданной стойки, составленной из двух неравнополочных уголков, жестко соединенных между собой, подобрать размеры поперечного сечения и расположить сечение наиболее выгодным образом. Способ закрепления концов стержня в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и форма сечения показаны на рис. 6.1.31.

Материал стойки Ст. 3. Допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma_c] = 160 \text{ МПа}$, $F = 260 \text{ кН}$, $\ell = 4 \text{ м}$.

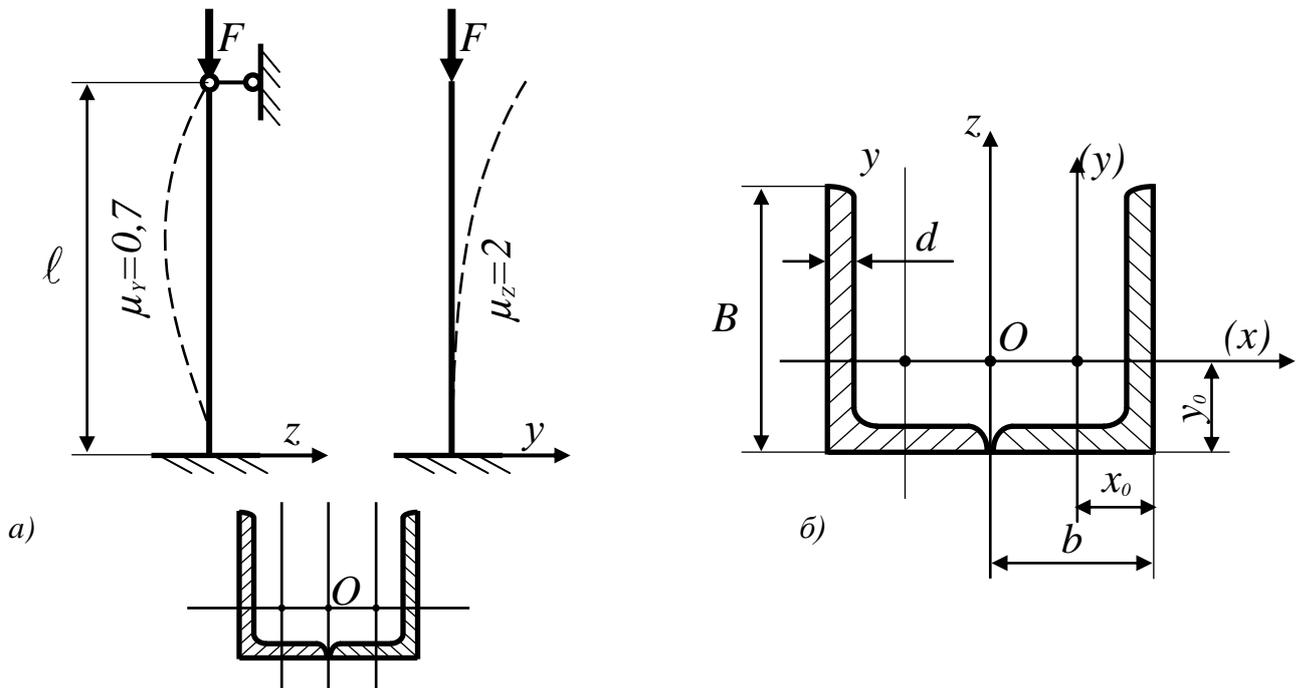


Рис. 6.1.31. Расчетная схема стойки

Решение

1. Устанавливаем значения коэффициентов приведения длины с учетом способа закрепления концов стойки. Пользуясь табл. 6.1, получим

$\mu_y = 0,7$ и $\mu_z = 2$ (значения μ и характер изогнутой оси желательно изобразить на схеме, как это сделано на рис. 6.1.31). Задавшись значением $\varphi_1 = 0,5$, определим требуемую площадь поперечного сечения

$$A_{cm} \geq \frac{F}{\varphi_1 [\sigma_c]} = \frac{260 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 160} = 32,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 32,5 \text{ см}^2.$$

Площадь одного уголка

$$A_1 = \frac{A_{cm}}{2} = \frac{32,5}{2} \approx 16,3 \text{ см}^2.$$

По таблицы сортамента по ГОСТ 8510-72 принимаем уголок № 12,5/8: $d = 8 \text{ мм}$; $A = 16 \text{ см}^2$; $B = 125 \text{ мм}$; $b = 80 \text{ мм}$; $x_0 = 1,8 \text{ см}$; $y_0 = 4,05 \text{ см}$; $J_{(x)} = 256 \text{ см}^4$; $i_{(x)} = 4 \text{ см}$; $J_{(y)} = 83 \text{ см}^4$.

Изображаем сечение в масштабе 1:5, наносим необходимые размеры, проводим главные центральные оси инерции сечения и даем им предварительные наименования z и y (см. рис. 6.1.31, б). Вычисляем значения радиусов инерции сечения относительно оси z и y :

$$J_z = 2J_x = 2 \cdot 256 = 512 \text{ см}^4, \quad i_z = i_x = 4 \text{ см};$$

$$J_y = 2J_{(y)} + 2 \left[(b - x_0)^2 A \right] = 2 \cdot 83 + 2 \left[(8 - 1,84)^2 16 \right] \approx 1380 \text{ см}^4;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{2A}} = \sqrt{\frac{1380}{2 \cdot 16}} \approx 6,57 \text{ см}.$$

Сопоставляя полученные значения радиусов инерции и значения коэффициентов приведения длины μ , приходим к выводу, что принятая ориентировка сечения нерациональна, так как $\mu_z > \mu_y$, а $i_z < i_y$ поэтому сечение нужно развернуть (первоначальное расположение осей на рис. 6.1.31, б зачеркнуть). Соответственно следует изменить индексы у радиусов инерции, то есть считать $i_x = 6,57 \text{ см}$, $i_y = 4 \text{ см}$.

Вычисляем гибкости стержня:

$$\lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_z} = \frac{2 \cdot 400}{6,57} \approx 122;$$

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 400}{4} = 70.$$

Так как $\lambda_z > \lambda_y$, то плоскостью наименьшей жесткости будет плоскость xOy , и дальнейший расчет проводим по гибкости λ_z .

Из табл. 6.2 при $\lambda = 122$ для стали Ст. 3 находим табличное значение $\varphi_m = 0,44$ (при определении φ для промежуточных значений λ пользуются линейной интерполяцией). Сравнивая принятое $\varphi = 0,5$ и полученное $\varphi_m = 0,44$, видим, что они отличаются на 12 %.

Поэтому задаемся новым значением

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_m}{2} = \frac{0,50 + 0,44}{2} = 0,47$$

и повторяем расчет

$$A_{cm} = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma_{сж}]} = \frac{260 \cdot 10^{-3}}{0,47 \cdot 160} \approx 3,46 \cdot 10^{-3} \text{ мм} = 34,6 \text{ см}^2;$$

$$A_1 = \frac{A_{cm}}{2} = \frac{34,6}{2} = 17,3 \text{ см}^2.$$

Принимаем уголок № 14/9: $d = 8$; $A = 18 \text{ см}^2$; $B = 140 \text{ мм}$;
 $b = 90 \text{ мм}$; $x_0 = 2,03 \text{ см}$; $y_0 = 4,49 \text{ см}$; $J_{(x)} = 364 \text{ см}^4$; $i_{(x)} = 4,49 \text{ см}$;

$$J_{(y)} = 120 \text{ см}^4;$$

Вычисляем значение осевого момента инерции

$$J_z = 2J_{(y)} + 2 \left[(b - x_0)^2 A \right] = 2 \cdot 120 + 2 \left[(9 - 2,03)^2 18 \right] \approx 1989 \text{ см}^4.$$

Радиус инерции $i_z = \sqrt{\frac{1989}{2 \cdot 18}} \approx 7,43 \text{ см}$; гибкость $\lambda_z = \frac{2 \cdot 400}{7,43} \approx 108$.

По табл. 6.2 находим $\varphi_m = 0,53$; вычисляем напряжения

$$\sigma = \frac{260 \cdot 10^{-3}}{0,53 \cdot 2 \cdot 18} = 136 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

и определяем процент недонапряжения

$$p = \frac{160 - 136}{160} 100\% = 15\%.$$

Так как процент недогрузки значительный, то можно было бы взять уголок меньшего размера. Однако неравнополочный уголок с ближайшим меньшим значением площади № 12,5/8: $d = 8 \text{ мм}$; $F_L = 16 \text{ см}^2$ нами уже проверялся и оказался перегруженным. Поэтому оставляем окончательно уголок 14/9: $d = 8$.

2. При определении критической силы можно воспользоваться формулой Эйлера, так как $\lambda > \lambda_{np}$ ($\lambda = 108$; $\lambda_{np} = 100$):

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J}{(\mu l)^2}$$

где $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Поскольку $\lambda_{max} = \lambda_z$, то $J = J_z = 1380 \text{ см}^4 = 1380 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$, $\mu = \mu_z = 2,0$,

тогда

$$F_{кр} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1380 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 4)^2} \approx 425 \text{ кН}.$$

Запас устойчивости $n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{425}{260} \approx 1,64$.

Задача 6.2. Расчет балки при ударной нагрузке

Исходные данные: на балку, расчетная схема которой, а также форма и размеры поперечного сечения заданы, с высоты H падает груз Q .

Требуется:

- 1) найти наибольшее нормальное напряжение, если опоры балки абсолютно жесткие, то есть податливость пружины $\alpha = 0$ (податливостью пружины называют величину ее осадки от силы, равной единице);
- 2) решить эту же задачу при заданном значении податливости пружины α ;
- 3) определить прогиб точки M (положение точки M указано на схеме) при статическом действии нагрузки;
- 4) определить прогиб точки M при ударе (динамический прогиб);
- 5) сравнить результаты и сделать выводы.

Схемы к задаче 6.1

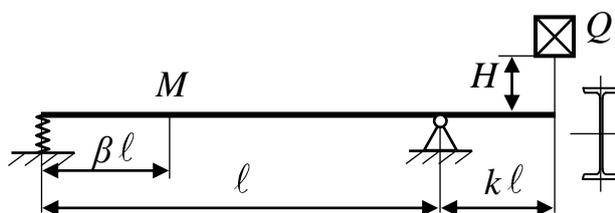


Рис. 6.2.1

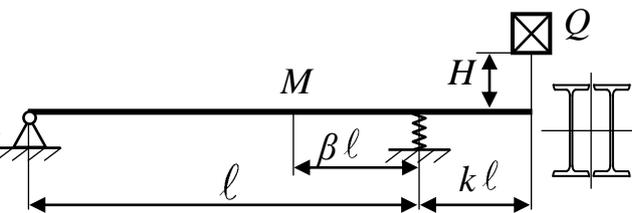


Рис. 6.2.2

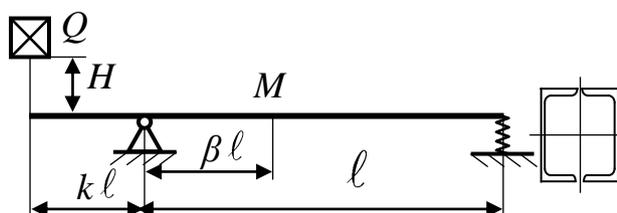


Рис. 6.2.3

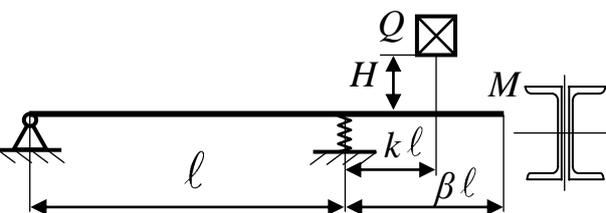


Рис. 6.2.4

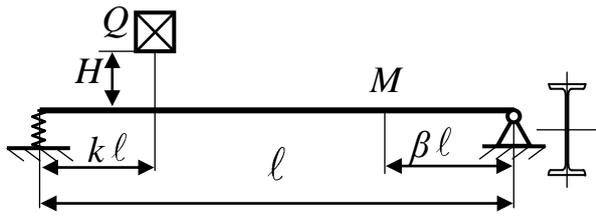


Рис. 6.2.5

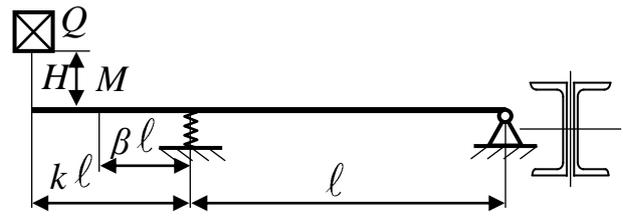


Рис. 6.2.6

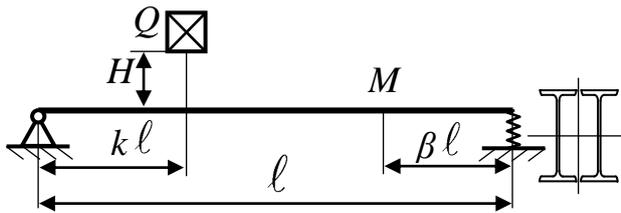


Рис. 6.2.7

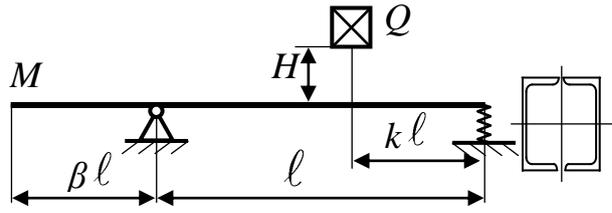


Рис. 6.2.8

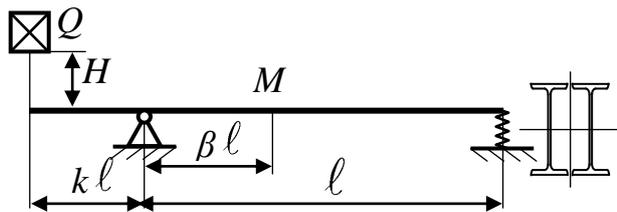


Рис. 6.2.9

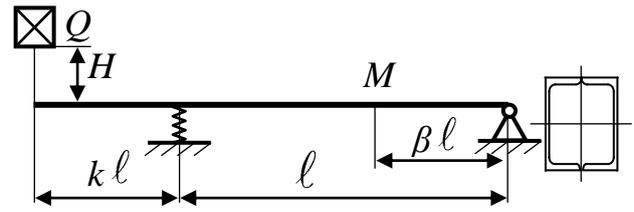


Рис. 6.2.10

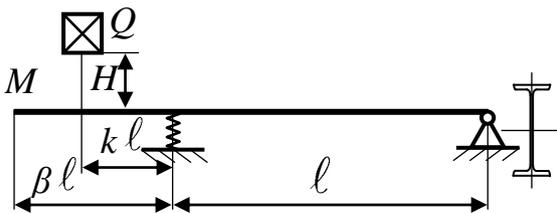


Рис. 6.2.11

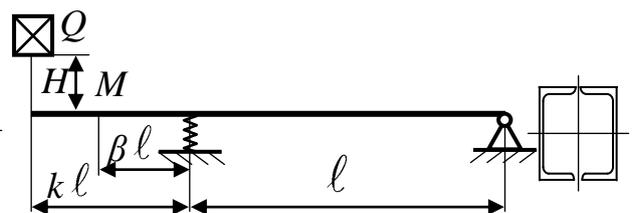


Рис. 6.2.12

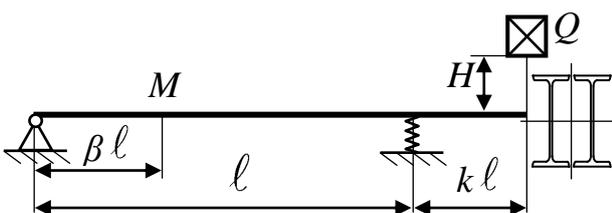


Рис. 6.2.13

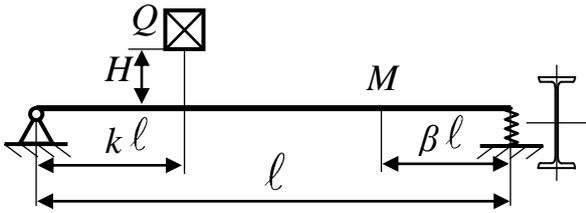


Рис. 6.2.14

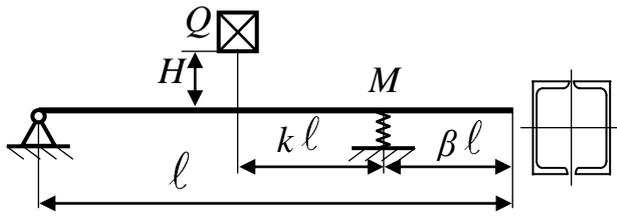


Рис. 6.2.15

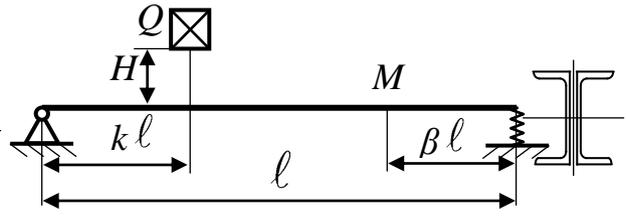


Рис. 6.2.16

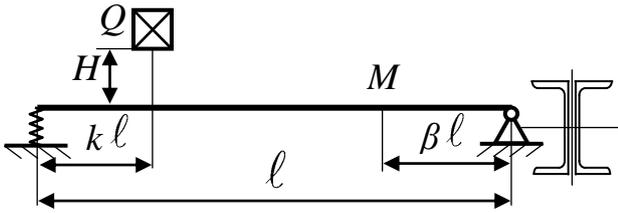


Рис. 6.2.17

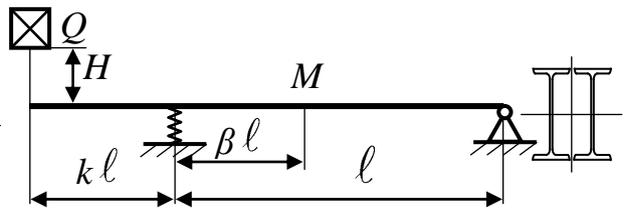


Рис. 6.2.18

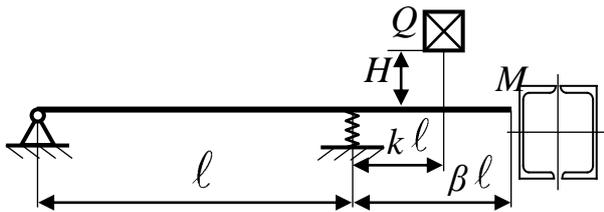


Рис. 6.2.19

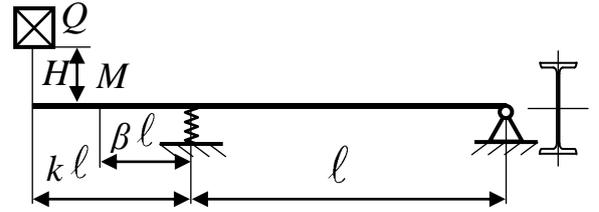


Рис. 6.2.20

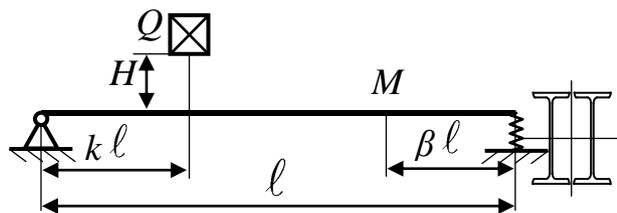


Рис. 6.2.21

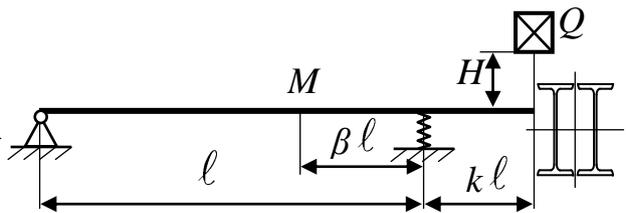


Рис. 6.2.22

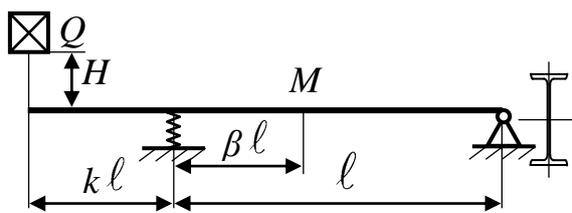


Рис. 6.2.23

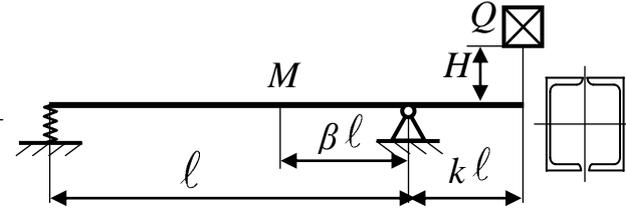


Рис. 6.2.24

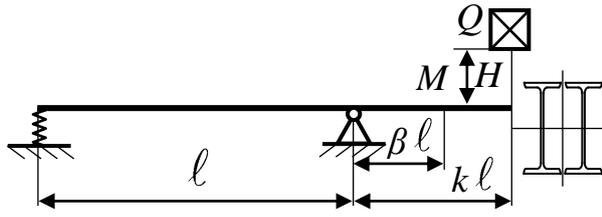


Рис. 6.2.25

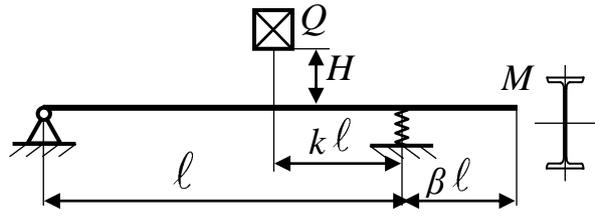


Рис. 6.2.26

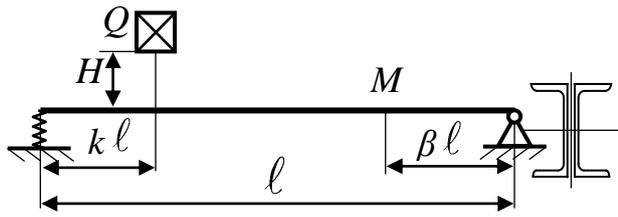


Рис. 6.2.27

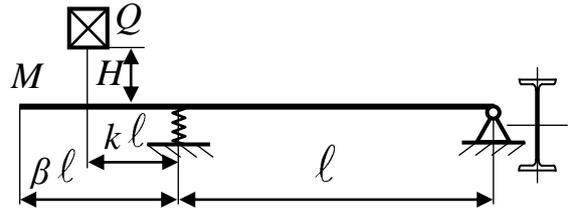


Рис. 6.2.28

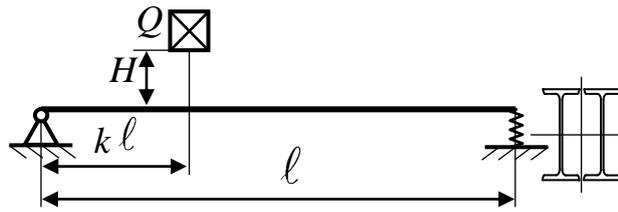


Рис. 6.2.29

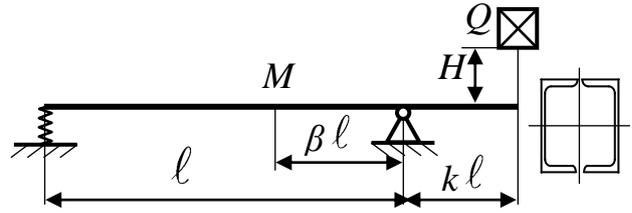


Рис. 6.2.30

Таблица 6.2

Данные для вариантов

Номер варианта (рисунка)	Пролет балки $l, м$	k	β	Тип сечения	Номер профиля	Вес груза $Q, кН$	Высота падения груза $H, см$	Податливость пружины $\alpha, 10^{-3} м/кН$
1 (6.2.1)	2,5	0,6	0,40	1	22	2,3	10	8
2 (6.2.2)	3,0	0,55	0,45	1	24	2,4	12	7,6
3 (6.2.3)	3,5	0,50	0,40	1	24а	2,5	13	7,4
4 (6.2.4)	4,0	0,45	0,40	1	27	2,6	14	7,2
5 (6.2.5)	4,2	0,4	0,30	1	30	2,8	15	6,8
6 (6.2.6)	2,4	0,65	0,50	2	18	2,2	10	7
7 (6.2.7)	2,8	0,6	0,40	2	18а	2,0	11	7,5
8 (6.2.8)	3,4	0,55	0,50	2	20	2,1	12	6
9 (6.2.9)	3,8	0,5	0,40	2	20а	2,2	13	5,8
10 (6.2.10)	4,2	0,45	0,35	2	22	2,5	14	6,6
11 (6.2.11)	3,6	0,6	0,2	3	20	2,4	10	7
12 (6.2.12)	3,8	0,55	0,3	3	22	2,0	12	6
13 (6.2.13)	4,0	0,6	0,25	3	24а	2,1	15	7
14 (6.2.14)	3,2	0,5	0,3	3	27	2,2	12	6
15 (6.2.15)	3,4	0,6	0,35	3	24	2,0	11	8
16 (6.2.16)	2,5	0,6	0,4	3	18	2,2	12	7,5
17 (6.2.17)	2,7	0,55	0,35	3	18а	2,4	10	8
18 (6.2.18)	3,5	0,45	0,40	3	24	2,5	12	8
19 (6.2.19)	3,8	0,45	0,3	3	27	2,6	14	7
20 (6.2.20)	4,0	0,5	0,4	3	27а	2,4	15	6,8
21 (6.2.21)	2,1	0,25	0,3	1	20	1,6	11	12
22 (6.2.22)	2,2	0,3	0,3	1	20а	1,5	10	14
23 (6.2.23)	2,4	0,4	0,3	1	24	1,7	12	16
24 (6.2.24)	2,3	0,35	0,4	1	20	1,6	10	15
25 (6.2.25)	2,8	0,3	0,3	1	27	1,6	10	18
26 (6.2.26)	3,2	0,2	0,3	2	20	1,9	11	6,3
27 (6.2.27)	3,6	0,4	0,5	2	22	2,0	12	7
28 (6.2.28)	3,8	0,3	0,45	2	24	2,5	13	8
29 (6.2.29)	4,0	0,35	0,45	2	22а	2,6	10	7,5
30 (6.2.30)	4,2	0,4	0,5	2	24	2,4	12	6,8

Примечание. Номер варианта соответствует номеру рисунка (например, в задаче 6.2 варианту 25 соответствует рис. 6.2.25).

Методические указания к решению задачи

Динамический коэффициент представляет собой очень важную характеристику, зависящую от вида деформации, свойств материала (E, G), формы и размеров стержня, от положения сечения, по которому наносится удар, и т.д.

В то же время значение этого коэффициента во всех случаях, где применим расчет с его использованием, рассчитывается по простой формуле

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta'_{ст}}} . \quad (6.2.1)$$

При известном значении $K_{дин}$ динамическое напряжение $\sigma_{дин}$, $\tau_{дин}$, а также перемещение $\delta_{дин}$ находят умножением соответствующих статических величин на динамический коэффициент:

$$\sigma_{дин} = K_{дин} \cdot \sigma_{ст} ; \quad \delta_{дин} = K_{дин} \cdot \delta_{ст} . \quad (6.2.2)$$

При изучении материала и решении задачи следует четко представлять разницу между $\delta_{ст}$ и $\delta'_{ст}$, которая входит в выражение 6.2.1 для $K_{дин}$ (величина H — высота падения груза — обычно известна по условию задачи).

В выражениях (6.2.2) $\sigma_{ст}$ и $\delta_{ст}$ - это, соответственно, статическое напряжение и деформация (перемещение) в любом сечении бруса, где нас интересуют значения напряжений и перемещений при ударе. Они определяются обычными методами, для чего рассчитывается заданная система, нагруженная статически приложенной силой, равной весу падающего груза (эта сила прикладывается в точке, по которой совершается удар, в направлении удара).

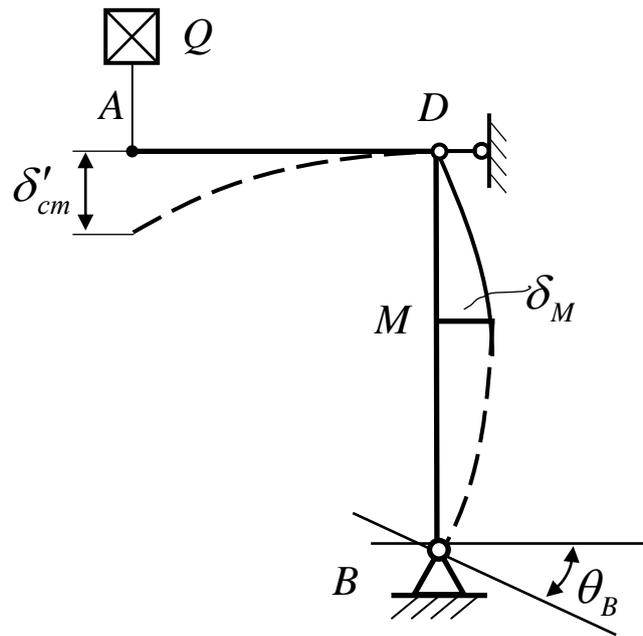


Рис. 6.2.31

Величина δ_{cm} может представлять собой линейное перемещение интересующего нас сечения в любом направлении, или даже угол поворота этого сечения. Например, для схемы на рис. 6.2.31 угол поворота сечения B , равный θ_B , или горизонтальное перемещение любой точки участка BD (например, точки M , равное δ_M) может вычисляться по формуле (6.2.2), и в этом случае δ_{cm} будет иметь, соответственно, значение угла поворота θ_{cm} или горизонтального перемещения точки M , т. е. $\delta_{cm} = \delta_{M_{cm}}$. В то же время, величина δ'_{cm} , входящая в выражение для подсчета $K_{дин}$, всегда определяется как статическое перемещение в том и только в том сечении, по которому совершается удар, и только как статическое линейное перемещение этого сечения в направлении удара.

В нашем примере δ'_{cm} — вертикальное перемещение точки A от силы Q . Величина δ'_{cm} вычисляется в каждом конкретном случае исходя из принятой расчетной схемы (если система статически неопределима, то

вначале приходится раскрыть статическую неопределимость). С учетом изложенного, обычно используется следующий порядок расчета:

- 1) загружаем заданную систему статически приложенной силой, равной весу падающего груза, и вычисляем $\delta'_{ст}$;
- 2) определяем статические напряжения и перемещения в сечениях, где это требуется по условию задачи;
- 3) значения напряжений $\sigma_{дин}$ и перемещений $\delta_{дин}$ вычисляем по формулам (6.2.2), то есть умножением статических величин на $K_{дин}$.

Пример решения задачи

Исходные данные

На балку, свободно лежащую на двух жестких опорах (см. рис. 6.2.32), с высоты $H = 10\text{ см}$ падает груз $Q = 2,5\text{ кН}$. Сечение балки состоит из двух швеллеров № 27. Пролет балки $\ell = 4\text{ м}$, вылет консоли $\beta \ell = 2,2\text{ м}$, расстояние до точки K $k \ell = 2\text{ м}$.

Требуется:

- 1) найти наибольшие нормальные напряжения в балке;
- 2) решить аналогичную задачу при условии, что левая опора заменена пружиной, податливость которой $\alpha = 8 \cdot 10^{-3}\text{ м / кН}$;
- 3) сравнить полученные решения.

Решение

1. По таблицам сортамента находим:

$$J_z = 2J_x = 2 \cdot 4160 = 8320\text{ см}^4; \quad W_z = 2W_x = 2 \cdot 308 = 616\text{ см}^3.$$

Статическое перемещение $\delta_{ст} = \delta'_{ст}$ под грузом Q при жестких опорах можно определить по правилу Верещагина. Для этого, приложим статическую силу $Q = 2,5\text{ кН}$ на конце консоли (в месте удара) и построим эпюры изгибающих моментов.

Значения опорных реакций получим из уравнений равновесия:

$$\sum m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad -Q(\ell + k\ell) + R_B \ell = 0,$$

откуда $R_B = Q \frac{\ell + k\ell}{\ell} = 2,5 \cdot \frac{4+2}{4} = 3,75 \text{ кН}.$

$$\sum m_B(\vec{F}_i) = 0; \quad Q k\ell - R_A \ell = 0,$$

Откуда $R_A = \frac{k\ell}{\ell} Q = 2,5 \cdot \frac{2}{4} = 1,25 \text{ кН}.$

Определив значения изгибающих моментов в точках A , B и K , получим $M_A = 0$; $M_B = Q k\ell = 2,5 \cdot 2 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_K = 0$ и построим эпюру $M_{уз}$ (см. рис. 6.2.32, б).

Аналогично строим эпюру изгибающих моментов от единичной силы (см. рис. 6.2.32, в), приложенной к точке K .

Перемножая эпюры, получаем

$$\delta'_{cm} = \frac{1}{E J_z} \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 8320 \cdot 10^{-8}} \approx 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta'_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0,12}} \approx 1 + 12,9 = 13,9.$$

Вычисляем максимальные статические напряжения в сечении над опорой B , где изгибающий момент максимальный,

$$\max \sigma_{cm} = \frac{\max M_{уз}}{W_z} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{616 \cdot 10^{-6}} \approx 8,11 \text{ МПа}$$

и максимальное динамическое напряжение

$$\max \sigma_{дин} = K_{дин} \sigma_{cm} = 13,9 \cdot 8,11 \approx 113 \text{ МПа}.$$

2. Находим перемещение конца консоли при установке пружины на левой опоре. Следует учесть, что в этом случае к перемещению от силы Q , уже вычисленному, добавится перемещение Δ_k , обусловленное податливостью левой опоры. Величину Δ_k можно выразить через перемещение точки A , которая в свою очередь будет пропорциональна

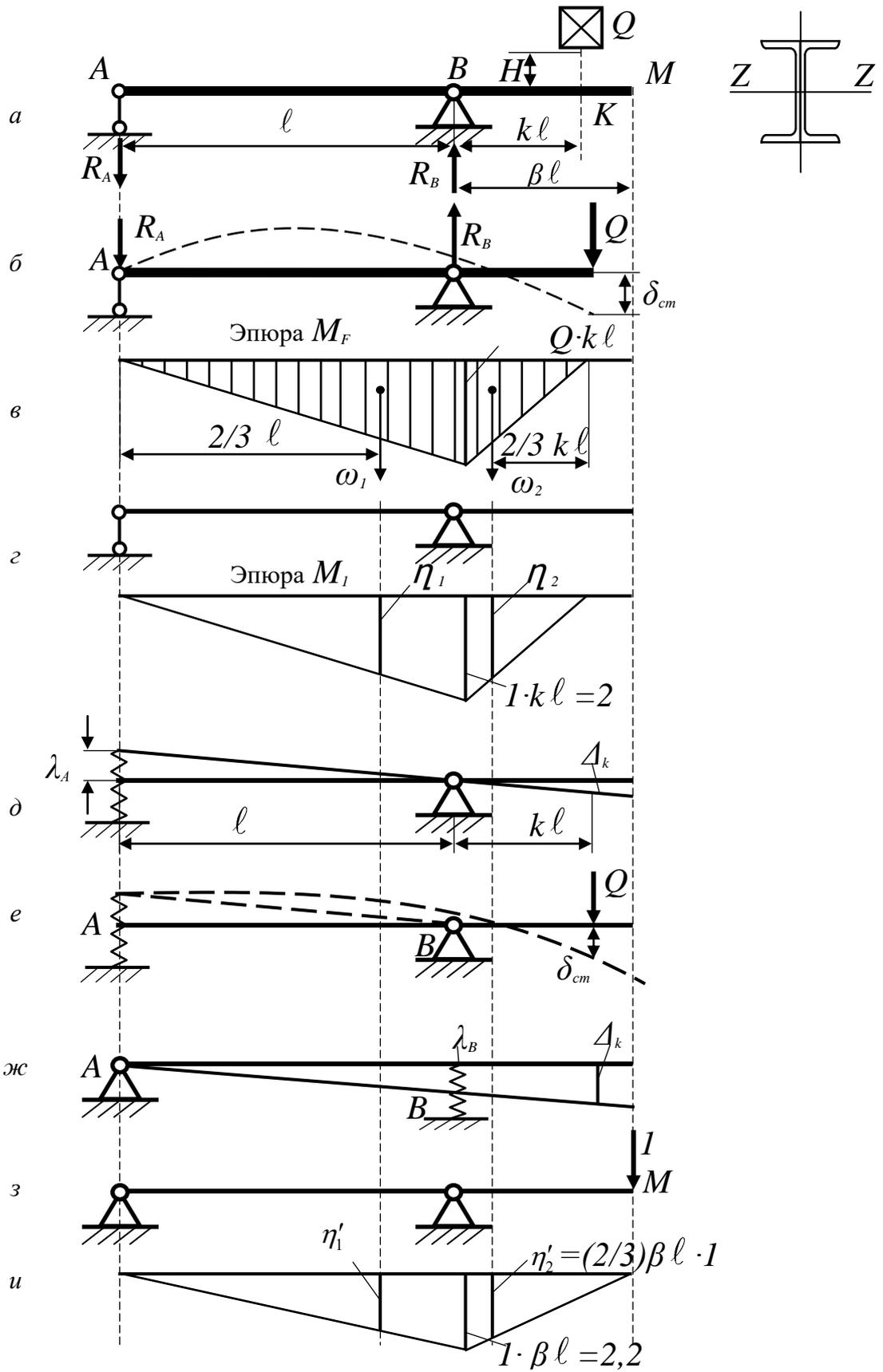


Рис. 6.2.32

реакции R_A (силе, сжимающей пружину). Тогда

$$\lambda_A = R_A \alpha = Q \frac{k \ell}{\ell} \alpha = \frac{2,5 \cdot 2}{4} 8 \cdot 10^{-3} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Из подобия треугольников (см. рис. 6.3, з)

$$\Delta_k = \lambda_A \frac{k \ell}{\ell} = 1 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{2}{4} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м;}$$

тогда

$$\delta'_{ст} = \delta_{ст} + \Delta_k = 1,2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} = 6,2 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Динамический коэффициент

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{6,2 \cdot 10^{-3}}} \approx 6,68 ;$$

максимальное напряжение

$$\max \sigma'_{дин} = K_{дин} \sigma_{ст} = 6,68 \cdot 8,11 \approx 54,2 \text{ МПа.}$$

3. Находим отношение

$$\frac{\max \sigma_{дин}}{\max \sigma'_{дин}} = \frac{113}{54,2} \approx 2,1 .$$

Таким образом, установка пружины привела к снижению динамических напряжений в 2,1 раза.

4. Решим эту задачу для случая, когда левая опора остается жесткой, а пружина установлена на правой опоре.

В этом случае связь между осадкой пружины λ_B под действием реакции R_B и перемещением конца консоли Δ_k может быть установлена исходя из схемы (см. рис. 6.2.32, ж). В силу подобия треугольников

$$\frac{\Delta_k}{k \ell + \ell} = \frac{\lambda \lambda_B}{\ell} ,$$

откуда

$$\Delta_k = \lambda_B \frac{k \ell + \ell}{\ell} .$$

Величина

$$\lambda_B = R_B a = 3,75 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\Delta_k = 3 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{2+4}{4} = 45 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

тогда

$$\delta'_{cm} = 1,2 \cdot 10^{-3} + 45 \cdot 10^{-3} = 46,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Динамический коэффициент

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{4,6 \cdot 10^{-3}}} \approx 3,3.$$

Найдем максимальное напряжение в балке

$$\max \sigma''_{дин} = K_{дин} \sigma_{cm} = 3,3 \cdot 8,11 \approx 26,8 \text{ МПа}.$$

Отношение

$$\frac{\max \sigma_{дин}}{\max \sigma''_{дин}} = \frac{113}{26,8} \approx 4,2.$$

При установке пружины на правой опоре динамические напряжения снизились в 4,2 раза по отношению к напряжениям в балке с жесткими опорами.

Определим статический прогиб точки M . Для этого в данной точке прикладываем единичную силу и строим единичную эпюру изгибающих моментов (см. рис. 6.2.32, u). Перемножив эпюры по правилу Верещагина (см. рис. 6.2.32, a, u), получаем прогиб точки M :

$$y_{M_{cm}} = \frac{1}{E J_z} (\omega_1 \eta'_1 + \omega_2 \eta'_2) = \frac{1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 8320 \cdot 10^{-8}} \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,2 \right) =$$

$$\approx 1,32 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Динамический прогиб точки

$$y_{M_{дин}} = K_{дин} \cdot y_{M_{cm}} = 3,3 \cdot 1,32 \cdot 10^{-3} \approx 4,36 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Литература

Основная

1. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. 16-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2016. – 543 с.
2. Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. Под ред. А. В. Александрова. 7-е изд., испр. М.: Высш. шк., 2009. – 560 с.
3. Артюх В. Г., Байрамов А. Б. Сопротивление материалов: Методические указания по изучению дисциплины и выполнению контрольной работы для студентов заочного факультета всех направлений подготовки / ГУ ГА. СПб., 2020. – 74 с.
4. Артюх В. Г., Байрамов А. Б. Механика (прикладная механика): Методические указания по изучению дисциплины и выполнению контрольной работы для студентов очного и заочного факультета всех направлений подготовки / ГУ ГА. СПб., 2017. – 42 с.
5. Мельников Б. Е., Паршин Л. К., Семенов А. С., Шерстнев В. А. Сопротивление материалов: учебник. – СПб.: Лань, 2020. – 576 с.

Дополнительная

6. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов: Уч. пособие для студентов машиностроительных и авиационных вузов. М.: Наука, 1986. – 561 с.
7. Заславский Б. В. Краткий курс сопротивления материалов: Учебник для авиационных специальностей вузов. М.: Машиностроение, 1986. – 328 с.
8. Чернов К. И. Основы технической механики: Учебник для техникумов. М.: Машиностроение, 1986. – 256 с. ил.

Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

9. Электронно-библиотечная система издательства «Лань». Режим доступа: www.e.lanbook.com
10. Электронно-библиотечная система издательства «Юрайт». Режим доступа: www.biblio-online.ru

*Артюх Виктор Геннадиевич
Китаева Дарья Анатольевна*

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать 08.11.2022. Формат 60×84/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 11,75. Тираж 48. Заказ 4628.

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами,
в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.