

**Федеральное агентство по образованию
Архангельский государственный технический университет**

В.В. Апанасов, А.Р. Баланцев, В.М. Волков

Теоретические основы электротехники

Сборник заданий

Допущено Научно-методическим советом Минобразования и науки РФ по электротехнике и электронике в качестве учебного пособия по теоретическим основам электротехники для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки – 650900 «Электроэнергетика» специальности – 100400 – «Электроснабжение»

Архангельск 2005

Рассмотрен и рекомендован к изданию Научно-методическим советом по электротехнике и электронике
Минобразования и науки РФ 1 марта 2005 г.

Рецензенты:

В.Ф. Дмитриков, д-р техн. наук, проф., зав. каф. теории
электрических цепей Санкт-Петербургского
государственного университета телекоммуникаций;

А.Б. Новгородцев, доц., д-р техн. наук, проф.
Санкт-Петербургского государственного
политехнического университета

УДК 6П2.01

ББК 31.21

А 76

Апанасов В.В. Теоретические основы электротехники: сборник заданий/ В.В. Апанасов, А.Р. Баланцев, В.М. Волков. - Архангельск: Изд-во АГТУ, 2005, – 196 с.

Подготовлен кафедрой электроснабжения промышленных предприятий АГТУ.

Содержит задания по основным разделам курса «Теоретические основы электротехники». Даны основные сведения по теории, методика и приёмы расчёта, примеры решения. Уделено внимание применению компьютерных средств решения электротехнических задач.

Ил. 105. Табл. 36. Библиогр. 6 назв.

ISBN 5-261-00213-3

© Архангельский государственный
технический университет, 2005

© В.В. Апанасов, А.Р. Баланцев,
В.М. Волков, 2005

Предисловие

Сборник включает задания по дисциплине «Теоретические основы электротехники», являющейся базовой для специальности 100400 – электроснабжение промышленных предприятий. Некоторые из заданий могут быть использованы при изучении аналогичной дисциплины специальностью 210200 – автоматизация технологических процессов и производств. Содержание сборника отражает коллективный опыт преподавания курса ТОЭ на кафедре Электроснабжения промышленных предприятий АГТУ с начала её существования. Учтён также опыт кафедр, теоретических основ электротехники и теории электрических цепей ведущих электротехнических вузов страны. Материал, используемый при составлении заданий, соответствует разделам действующей программы дисциплины «Теоретическая электротехника» для высших учебных заведений, рекомендованной Главным управлением образовательно – профессиональных программ и технологий ГК РФ по высшему образованию в 1994 г.

Большая часть заданий, включённых в сборник, опробована ранее при изучении дисциплин ТОЭ и ТЭ в АГТУ (АЛТИ). В предлагаемом варианте расширена теоретическая база разделов включённых в задания. Нашло отражение, характерное для настоящего времени, использование компьютерных методов и современных программных продуктов. Количество заданий, включённых в сборник, значительно больше, чем предусмотрено семестровыми рабочими планами. Предполагается, что отдельные задания или их части, не включённые в план текущего семестра, могут быть рекомендованы студентам для самостоятельной проработки и использоваться в качестве кафедрального задачника по указанным выше дисциплинам.

Порядок выполнения и требования к оформлению заданий

Методические указания содержат: задания к работе, рекомендации по их выполнению, необходимый теоретический материал и методические пояснения. Содержатся рекомендации по реализации расчётной части на основе персонального компьютера и стандартных программных средств.

Задание выполняется в следующей последовательности. Перед выполнением задания необходимо проработать соответствующий материал, используя для этого краткое изложение теоретических основ, предваряющих каждое задание. При необходимости следует использо-

вать материал конкретной темы по основной учебной литературе и конспекты лекций. Особое внимание при этом следует обратить на обобщённые понятия и законы электромагнитных явлений, их математическую формулировку. Из имеющейся в каждом задании таблицы выбирается вариант по буквенной литере **A–Д** и числам **m** и **n**, соответствующим коду студента, который задается преподавателем. Пояснительная записка оформляется на листах формата А4, скреплённых любым способом. Обязательно указание выполняемого варианта, группы, фамилии и инициалов студента. Все записи и графическая часть должны быть выполнены аккуратно. Графические и расчётные материалы, полученные с помощью технических средств (принтеры, графопостроители и пр.) прикрепляются или подклеиваются в текст пояснительной записки, в места соответствующие конкретному расчёту. Система обозначений физических величин должна соответствовать общепринятым в электротехнике.

Пояснительная записка обязательно должна содержать следующие элементы:

- изложение постановки задачи в целом и по отдельным разделам;
- рабочий набор исходных данных конкретного варианта;
- схему электрической (магнитной) цепи или конструктивный элемент варианта;
- полную последовательность всех расчётных этапов каждого раздела, включающая вывод выражения определяемой величины.

Расчётные формулы записываются в общем виде, затем производятся математические преобразования и только после этого подставляются численные значения и выполняются вычисления. После результата указывается размерность величины. Промежуточные и вспомогательные схемы, иллюстрирующие различные преобразования приводятся по тексту. В конце указываются литературные источники, программные и вычислительные средства, использованные при выполнении задания.

В некоторые расчётные задания включены пункты под общим названием “Дополнительные задания”. Они предназначены для углубленной проработки отдельных положений теории. Выполнение этих пунктов для студентов **не обязательно**.

Задание №1

Расчёт электрического поля, усилий, энергии и электрических параметров простейших конструкций

Целью задания является закрепление теоретического материала, излагаемого в первой части курса – физические основы электротехники (ФОЭ). Теоретическая часть расчётов базируется на уравнениях поля в интегральной форме. Особенности конструкций элементов (сферическая и цилиндрическая симметрия) существенно упрощают расчётную часть и позволяют при выполнении задания сосредоточить внимание на физической стороне процессов.

Содержание задания

В соответствие с буквенной literой с помощью табл. 1.1 выбирается расчётный вариант, заданный геометрией элемента, номерами условий задания и номерами самого задания. Условия задания и сами задания (величины и зависимости, подлежащие расчёту) указаны соответственно в табл. 1.2 и 1.3.

Основы теории

Основой для расчёта поля является полная система уравнений электромагнитного поля (уравнений Максвелла). В задании предлагается расчёт электростатического поля неподвижных зарядов, следовательно основой расчёта будут уравнения :

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = q \quad \text{и} \quad (1.1)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \quad (1.2)$$

– постулат Максвелла и уравнение связи. В этих уравнениях величины \vec{D} и \vec{E} – соответственно электрическое смещение и напряжённость электрического поля; ε – диэлектрическая проницаемость среды; q – свободный заряд внутри замкнутой поверхности s . В случае, если пространство, окружающее заряженное тело есть пустота (вакуум), связь между зарядом и полем проще. Она выражается теоремой Гаусса (частный случай постулата Максвелла) –

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad (1.3)$$

где ε_0 – электрическая постоянная (константа, равная $8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м).

Среда (диэлектрик) реагирует на внешнее поле заряженного тела. Под его действием происходят деформация и ориентация микроструктур, представляющих собой систему двойных зарядов противоположного знака (диполей) из которых состоит всякий диэлектрик. При этом за пределы поверхности s вытесняется суммарный заряд Q' того же знака (одноимённые заряды отталкиваются). Величина его зависит от свойств диэлектрика (поляризуемости). Вынесение за пределы поверхности заряда Q' эквивалентно внесению внутрь поверхности такого же заряда противоположного знака $q' = -Q'$. Этот заряд называют связанным. Если в выражение теоремы Гаусса кроме основного заряда q (его называют свободным) добавить связанный

$$\oint_s \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{q + q'}{\epsilon_0},$$

то влияние среды будет учтено. После несложных преобразований последнее выражение принимает вид (1.1) :

$$\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = q,$$

т.е. получается выражение постулата Максвелла, который иногда называют обобщённой теоремой Гаусса. Посредством постулата Максвелла смещение \bar{D} (можно рассматривать как расчётную величину) определяется только свободным зарядом и геометрией и не зависит от среды.

$$\bar{D} = \epsilon \cdot \bar{E} = \epsilon_0 \cdot \bar{E} + \bar{P}. \quad (1.4)$$

В этом выражении \bar{P} – поляризованность диэлектрика. Её величина определяется зарядом, вынесенным в процессе поляризации за пределы поверхности S , отнесённым к единице этой поверхности, т.е. нормальная к поверхности составляющая $P_n = dQ'/ds$. Соответственно, полный заряд, вынесенный за пределы поверхности

$$Q' = \oint \bar{P} \cdot d\bar{s} = -q'. \quad (1.5)$$

Потенциал U есть энергетическая характеристика электростатического поля (размерность – Вольт) определяет работу на перенос заряда в поле. Отношение этой работы к величине заряда равно

$$u_{AB} = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l} = U_A - U_B; \quad (1.6)$$

и называется напряжением между точками А и В. Под величинами U_A и U_B (потенциалы в точках А и В) понимается такой же интеграл, где нижний предел (начальная точка интегрирования) бесконечно удалённая

точка, потенциал которой принят равным нулю. Таким образом, потенциал есть скалярная функция, определяемая с точностью до произвольной постоянной. В электростатическом поле интеграл не зависит от пути, а только от начальной и конечной точек интегрирования и поэтому напряжение может быть определено как разность потенциалов.

Если работа по перемещению зарядов совершается силой, направленной против сил поля, то без учёта потерь она вся превратится в энергию поля. Полная энергия системы n заряженных тел

$$W_{\vartheta} = \sum_{k=1}^n q_k \cdot U_k. \quad (1.7)$$

Энергия распределена в пространстве, окружающем заряженные тела. Её объёмная плотность

$$W'_{\vartheta} = \frac{dW_{\vartheta}}{dV} = \frac{\bar{E} \cdot \bar{D}}{2} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}. \quad (1.8)$$

При необходимости найти часть энергии поля, которая заключена в ограниченной части пространства, следует выражение объёмной плотности проинтегрировать по этой части пространства

$$W_{\vartheta} = \int_V W'_{\vartheta} dV = \frac{1}{2} \int_V \bar{E} \cdot \bar{D} dV. \quad (1.9)$$

Силы, действующие на заряженные тела, принципиально можно рассчитать на основе известного закона Кулона, следующего непосредственно из теоремы Гаусса. Однако, последний сформулирован для точечных заряженных тел, размеры которых много меньше расстояний между ними, поэтому усилия в электрическом поле принято рассчитывать по следующим формулам:

$$f = -\left(\frac{d_g W_{\vartheta}}{dg}\right)_{q=\text{const}} = +\left(\frac{d_g W_{\vartheta}}{dg}\right)_{U=\text{const}}. \quad (1.10)$$

В последних формулах f – есть обобщённая сила, а g – обобщённая координата. Если f , например, обычная сила, то g – линейное перемещение; если f – момент пары сил, то g – угол поворота; если f – поверхностное натяжение, то g – поверхность. В любом случае произведение $f dg$ должно иметь размерность работы. Индекс « g » в выражении производной означает, что убыль (прибыль) энергии поля происходит за счёт изменения координаты g .

Если физические свойства диэлектрика (диэлектрическая проницаемость ε) не зависят от напряжённости поля (линейная среда), то потенциал заряженного тела (системы двух заряженных тел) пропорционален заряду:

$$U = q/C . \quad (1.11)$$

Коэффициент C имеет размерность Кл/В = Ф (фарада) и называется электрической ёмкостью. Электрическая ёмкость конкретной конструкции определяется свойствами материала (окружающей средой) и геометрией этой конструкции.

Пример выполнения задания №1

Проиллюстрируем выполнение задания № 1 на следующем примере. Конструкция, изображённая на рис. 1.1 представляет собой систему двух заряженных тел (цилиндрический конденсатор). Первая обкладка – внутренний металлический стержень большой длины с радиусом $R_1 = 3$ см (область 1).

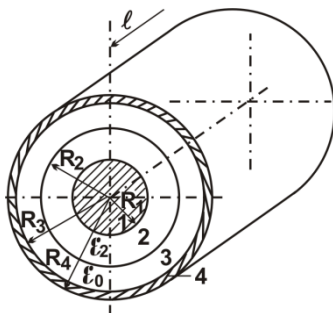


Рис. 1.1

Вторая обкладка – цилиндрическая металлическая поверхность с внутренним радиусом $R_3 = 5$ см (область 4). Область 2 – слой диэлектрика с $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$ и с радиусом $R_2 = 4$ см. Область 3 – воздушная прослойка с $\varepsilon_3 = \varepsilon_0$.

При выполнении расчётов зададим произвольно номера условия – 5, и номера заданий – 1,2 и 3. Пусть число n равно 3.

Номер условия 5 (табл. 1.2) задаёт величину заряда на единицу длины конструкции, т.е. на единицу длины стержня, также как и наружной обкладки, приходится распределённый заряд $\tau = 3 \cdot 10^{-9}$ Кл/м.

1. В соответствии с заданием 1 требуется найти зависимости электрического смещения D , напряжённости электрического поля E , поляризованности P и потенциала U в произвольной точке как функции расстояния r точки от оси цилиндрического конденсатора. Построить графики зависимостей $D = f_1(r)$; $E = f_2(r)$; $P = f_3(r)$; $U = f_4(r)$ и объяснить характер их изменений во всех областях и на границах этих областей. Найти выражения объёмной плотности энергии электрического поля W' во всех областях. Построить график $W' = f_5(r)$.

Так как длина конденсатора много больше внешнего радиуса, то полем на его торцевых поверхностях стержня можно пренебречь. При таком допущении задача имеет цилиндрическую симметрию. В области 1 поле отсутствует. Найдём зависимость электрического смещения $D = f_1(r)$. Основа для расчёта – постулат Максвелла (1.1) :

$$\int_{S_{\text{цил.}}} \bar{D} d\vec{s} = q = \tau \cdot l ,$$

где l – длина цилиндра. Область интегрирования – поверхность цилиндра, так как поток через торцевые поверхности равен нулю.

В силу симметрии поля смещение и напряжённость на поверхности цилиндра имеют постоянное значение, а угол α между векторами \bar{D} и $d\vec{s}$ равен нулю т.е.

$$\bar{D} d\vec{s} = D \cdot ds \cdot \cos \alpha = D \cdot ds .$$

Тогда
$$D \cdot \int_{S_{\text{цил.}}} ds = D \cdot S_{\text{цил.}} = D \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l = \tau \cdot l \quad \text{и} \quad D(r) = \frac{\tau}{2\pi r} .$$

Это выражение справедливо в пределах от r_1 до r_3 . При r больше r_4 смещение равно нулю, т.к. поверхность цилиндра охватывает обе обкладки и суммарный заряд внутри поверхности равен нулю.

Напряжённость электрического поля найдём из соотношения (1.2)

$$E(r) = D/\varepsilon = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r} .$$

Вектор \bar{E} также совпадает с направлением $d\vec{s}$.

Поляризованность диэлектрика в области 2 можно определить на основе выражения (1.4):

$$\bar{P} = \bar{D} - \varepsilon_0 \cdot \bar{E}; \quad P = \frac{\tau}{2\pi r} - \varepsilon_0 \frac{\tau}{2\pi\varepsilon r} .$$

Окончательно
$$P(r) = \frac{\tau}{2\pi r} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right).$$

Для определения потенциала электрического поля воспользуемся выражением (1.6), принимая потенциал центрального стержня равным нулю. Поскольку вектор \vec{E} совпадает по направлению с $d\vec{r}$, выражение (1.6) перепишем в виде

$$U(r) = \int_{R_1}^r E dr = \int_{R_1}^r \frac{\tau}{2\pi \varepsilon r} dr.$$

Путь интегрирования от R_1 до произвольной точки r проходит в областях с различной диэлектрической проницаемостью, то при переходе из области 2 в область 3 подынтегральная функция меняется скачком.

Поэтому при $r \leq R_2$
$$U(r) = \frac{\tau}{2\pi \cdot 2\varepsilon_0} \int_{R_1}^r \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{4\pi \varepsilon_0} \ln \frac{r}{R_1}.$$

При $r > R_2$
$$U(r) = \frac{\tau}{4\pi \varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} + \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0} \int_{R_2}^r \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \ln \frac{r}{R_2} \right).$$

Следует помнить, что найденные зависимости: $D = f_1(r)$; $E = f_2(r)$; $P = f_3(r)$; $U = f_4(r)$ определяют соответствующие величины только при $R_1 \leq r \leq R_3$. Поскольку заряд второй обкладки равен заряду первой, то суммарный свободный заряд, определяющий поток вектора \vec{D} через цилиндрическую поверхность с радиусом $r > R_3$ равен нулю, т.е.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Ниже на рис. 1.2 изображены графики – эпюры полученных зависимостей с указанием номера области.

Определим объёмную плотность энергии электрического поля. В соответствии с 1.8

$$W'_3 = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{\tau^2}{8\varepsilon \pi^2 r^2}.$$

На рис. 1.3 приведён график-эпюра объёмной плотности энергии. На графике видно, что при переходе из области 2 в область 3 происходит скачок W'_3 , что объясняется скачкообразным изменением свойств среды на границе перехода диэлектрик-воздух.

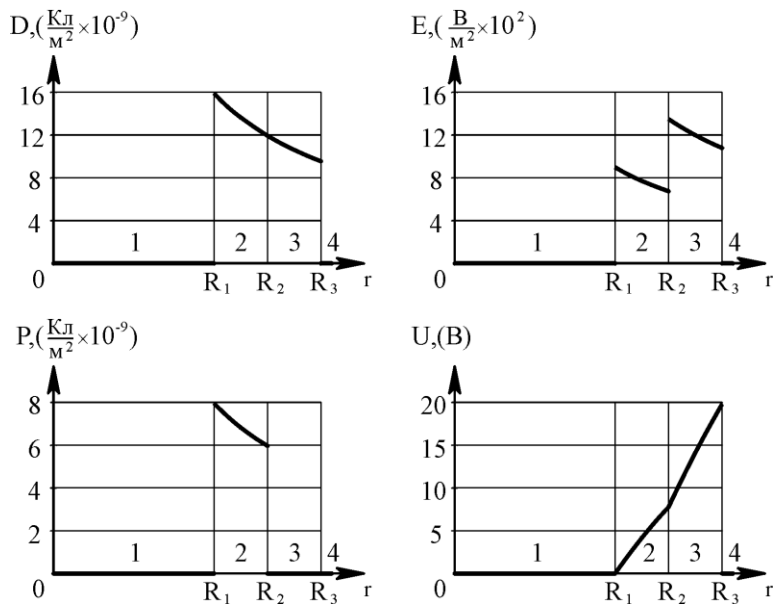


Рис. 1.2

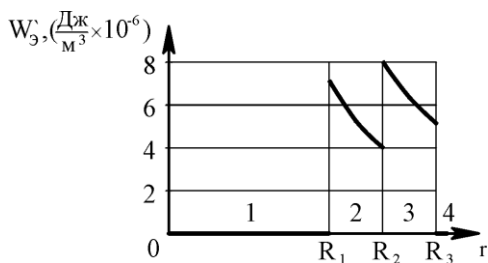


Рис. 1.3

2. Задаaniem 2 предусмотрен расчёт полной электрической энергии конденсатора и обобщённой силы, действующей на его обкладки.

Энергия электрического поля равна сумме энергий в областях 2 и 3 :

$$W_3 = \int_{V_2} W'_3 dV + \int_{V_3} W'_3 dV.$$

$$\begin{aligned}
\int_{V_2} W'_3 dV &= \frac{\tau^2}{8 \cdot 2\pi^2 \varepsilon_0} \int_{V_2} \frac{dV}{r^2} = \frac{\tau^2}{16\pi^2 \varepsilon_0} \int_0^l dl \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} \frac{r dr}{r^2} = \frac{\tau^2 l}{8\pi \varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = \\
&= \frac{9 \cdot 10^{-18} l}{8 \cdot 3,14 \cdot 8,9 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{0,04}{0,03} = 0,1158 \cdot 10^{-7} \cdot l \text{ Дж.} \\
\int_{V_3} W'_3 dV &= \frac{\tau^2}{8 \cdot \pi^2 \varepsilon_0} \int_{V_3} \frac{dV}{r^2} = \frac{\tau^2 l}{4\pi \varepsilon_0} \ln \frac{R_3}{R_2} = \frac{9 \cdot 10^{-18} l}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,9 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{0,05}{0,04} = \\
&= 0,1796 \cdot 10^{-7} \cdot l \text{ Дж.}
\end{aligned}$$

Отсюда вся энергия $W_3 = (0,1188 + 0,1796) \cdot 10^{-7} \cdot 1 \text{ Дж}$.

Определим силу, действующую на обкладки конденсатора, т.е. силу стремящуюся изменить координату R_3 . Физическая природа этой силы – взаимное притяжение зарядов противоположного знака. В соответствии с 1.10 :

$$\begin{aligned}
f &= \left(-\frac{dW_3}{dR_3} \right)_{\tau=\text{const}} = -\frac{d}{dR_3} \left(\frac{\tau^2 l}{8\pi \varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\tau^2 l}{4\pi \varepsilon_0} \ln \frac{R_3}{R_2} \right) = -\frac{\tau^2 l}{4\pi \varepsilon_0 R_3} = \\
&= -\frac{9 \cdot 10^{-18} l}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,9 \cdot 10^{-12} \cdot 0,05} = -1,614 \cdot 10^{-6} \cdot l \text{ Н.}
\end{aligned}$$

Знак «минус» показывает, что сила стремится уменьшить координату R_3 .

3. Задание 3 – определение выражения для электрической ёмкости конденсатора на единицу длины.

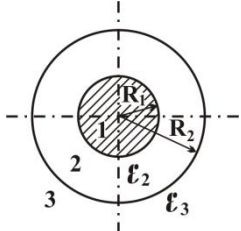
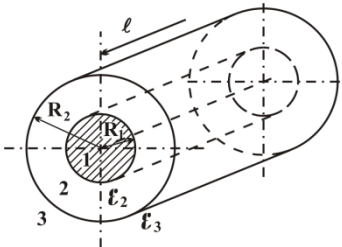
В соответствии с выражениями 1.11 и 1.6 электрическая ёмкость

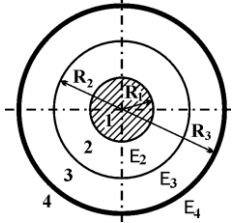
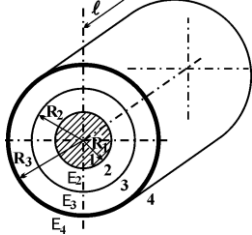
$$C = \frac{q}{u} = \frac{\tau \cdot l}{u}, \quad \text{где} \quad u = U_4 - U_1 = U_4.$$

Используя ранее полученное выражение для потенциала получим:

$$\begin{aligned}
\frac{C}{l} &= \frac{\tau}{u} = \frac{\tau}{\frac{\tau}{4\pi \varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{R_3}{R_2}} = \frac{2\pi \varepsilon_0}{\frac{1}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \ln \frac{R_3}{R_2}} = \\
&= \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 8,9 \cdot 10^{-12}}{\frac{1}{2} \ln \frac{0,04}{0,03} + \ln \frac{0,05}{0,04}} = 15,28 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.}
\end{aligned}$$

Таблица 1.1

Вариант	Конструкция	Условие и задания
А	 <p>1 – проводящий шар радиусом $R_1 = n$ см; 2 – оболочка из диэлектрика с внешним радиусом $R_2 = 2,5n$ см, и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_0$; 3 – окружающее пространство – диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_3 = 0,5 \varepsilon_2$ при m нечётном и $\varepsilon_3 = 2 \varepsilon_2$ при m чётном; R_4 – точка с координатой $R = 3n$ см.</p>	<p>Условие</p> <p>Для $m = 1$ и 5 – 1, для $m = 2$ и 6 – 2, для $m = 3$ – 3, для $m = 4$ – 4.</p> <p>Задания:</p> <p>Для всех m № 1 и № 4. Кроме того: для $m = 1, 4$ и 5 найти потенциал заряженного тела относительно бесконечно удалённой точки; для $m = 2, 3$ и 6 найти заряд q.</p>
Б	 <p>1 – длинный металлический цилиндр кругового сечения радиусом $R_1 = 0,5n$ см; 2 – оболочка из диэлектрика с внешним радиусом $R_2 = 3n$ см, и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 = 3\varepsilon$; 3 – окружающее пространство – диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_3 = 0,5 \varepsilon_2$ при m нечётном и $\varepsilon_3 = 2 \varepsilon_2$ при m чётном; R_4 – точка с координатой $R = 3,5n$ см.</p>	<p>Условие</p> <p>Для $m = 1$ и 4 – 1, для $m = 2$ и 5 – 3, для $m = 3$ и 6 – 5.</p> <p>Задания:</p> <p>Для всех m № 1 и № 4 и, кроме того: для $m = 1$ и 4 – найти потенциал проводящей поверхности относительно бесконечно удалённой точки; для $m = 2$ и 5 – линейную плотность заряда на проводнике; для $m = 3$ и 6 – связанный заряд на единицу длины поверхности диэлектрика 2.</p>

Вариант	Конструкция	Условие и задания
В	 <p>1 – внутренняя металлическая обкладка сферического конденсатора с радиусом $R_1 = n$ см, 2,3 – сферические слои диэлектриков с радиусами $R_2 = 1,3R_1$ см. и $R_3 = 2,1R_1$ см. и $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_0$, а $\varepsilon_3 = 2\varepsilon_0$ при m нечётном и $\varepsilon_3 = 4\varepsilon_0$ при m чётном. (R_3 – внутренний радиус внешней металлической обкладки конденсатора). 4 – окружающее пространство с $\varepsilon_4 = \varepsilon_0$. R_4 – точка с координатой $R = R_2$ см.</p>	<p>Условие</p> <p>Для $m = 3$ – 1, для $m = 4$ и 6 – 3, для $m = 1$ – 4, для $m = 2$ и 5 – 6.</p> <p>Задания:</p> <p>Для всех m № 1 и, кроме того: для нечётных m № 2, для чётных m № 3.</p>
Г	 <p>1 – внутренняя металлическая жила коаксиального кабеля радиусом $R_1 = n/3$ см. 2,3 – слои изоляции, ограниченные цилиндрическими поверхностями с радиусами $R_2 = 1,4R_1$ см. и $R_3 = 2,1R_1$ см., имеющими $\varepsilon_2 = 2,5\varepsilon_0$, $\varepsilon_3 = 2\varepsilon_0$ при m нечётном и $\varepsilon_3 = 4\varepsilon_0$ при m чётном. (R_3 – внутренний радиус внешней металлической жилы кабеля) 4 – окружающее пространство с $\varepsilon_4 = \varepsilon_0$. R_4 – точка с координатой $R = (R_3 - R_2)/2$ см.</p>	<p>Условие</p> <p>Для $m = 1$ и 5 – 1, для $m = 2$ и 6 – 3, для $m = 3$ – 5, для $m = 4$ – 6.</p> <p>Задания:</p> <p>Для всех m № 1 и, кроме того: для нечётных m № 3, для чётных m № 2.</p>

Продолжение табл. 1.1

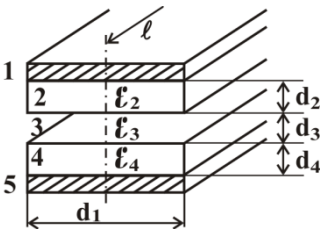
Вариант	Конструкция	Условие и задания
Д	 <p>1,5 – параллельные металлические обкладки плоского конденсатора. 2,3 и 4 – слои изоляции из диэлектриков, имеющих $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_0$, $\varepsilon_3 = 1,5\varepsilon_0$, $\varepsilon_4 = 4\varepsilon_0$ при m нечётном и $\varepsilon_2 = 1,5\varepsilon_0$, $\varepsilon_3 = 3\varepsilon_0$, $\varepsilon_4 = \varepsilon_0$ при m чётном.</p> <p>Линейные размеры конденсатора: $d_1 = n$ см.; $d_2 = d_4 = 2$ см.; $d_3 = 0,2n$ см. Координата $d_0 = d_2$ (Начало отсчёта от верхней пластины).</p>	<p>Условие</p> <p>Для $m = 1$ и 4 – 4, для $m = 2$ и 5 – 5, для $m = 3$ и 6 – 6.</p> <p>Задания:</p> <p>Для всех m № 1 и, кроме того: для нечётных m № 2, для чётных m № 3.</p>

Таблица 1.2

№ условия	Условия задания
1	В точке с координатой R_4 (или d_0) напряжённость электрического поля равна $E=100\ n$ В/м.
2	В точке с координатой R_4 (или d_0) потенциал электрического поля равен $U=100\ n$ В.
3	В точке с координатой R_4 (или d_0) электрическое смещение равно $D=10^{-9}\ n$ Кл/м ² .
4	Заряд металлического тела или системы двух заряженных тел (конденсатор) равен $q_1 = -q_2 = q = 10^{-9}\ n$ Кл.
5	Линейная плотность заряда (на единицу длины) металлического тела (жил кабеля, пластин конденсатора) – равна $\tau = 10^{-9}\ n$ Кл/м.
6	Напряжение на жилах кабеля (обкладках конденсатора) равно $u = 100\ n$ В.

Таблица 1.3

№ задания	Величины и зависимости, подлежащие расчёту.
1	<p>Найти зависимости электрического смещения D, напряжённости электрического поля E, поляризованности P и потенциала U в произвольной точке как функции расстояния r (d). Начало отсчёта (r или $d = 0$) считать в центре сфер или на оси цилиндрических поверхностей (в плоском конденсаторе от верхней пластины).</p> <p>Построить графики зависимостей $D = f_1(r)$; $E = f_2(r)$; $P = f_3(r)$; $U = f_4(r)$ и объяснить характер их изменений во всех областях и на границах этих областей.</p> <p>Найти выражения объёмной плотности энергии электрического поля $W'_э$ во всех областях. Построить график $W'_э = f_5(r)$.</p>
2	Вычислить энергию электрического поля конденсатора. Найти выражение и вычислить обобщённую силу, действующую на оболочки кабеля (обкладки конденсатора).
3	Вывести выражение для ёмкости сферического конденсатора или ёмкости на единицу длины для плоских и цилиндрических конструкций.
4	В области 2 определить полную энергию электрического поля для сферических конструкций и энергию электрического поля на единицу длины для плоских и цилиндрических конструкций.

Задание №2

Расчёт магнитной цепи с магнитопроводом постоянной магнитной проницаемости

Целью задания является закрепление теоретического материала, изложенного в первой части курса – физические основы электротехники (ФОЭ). Теоретическая часть расчётов базируется на интегральных понятиях магнитной цепи: магнитном потоке, магнитном напряжении, магнитодвижущей силе (м.д.с.) и других. Предлагается линейный вариант магнитной цепи, т.е. пренебрегается зависимостью магнитной проницаемости среды (ферромагнитного материала) от напряжённости магнитного поля.

Содержание задания

На рис. 2.1 изображена конструкция, представляющая магнитопровод из ферромагнитного материала, магнитная проницаемость которого постоянна и не зависит от напряжённости магнитного поля.

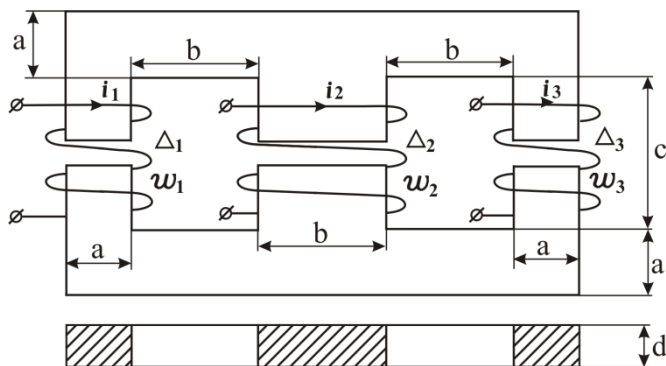


Рис. 2.1

На рис. 2.1 приведено изображение магнитопровода, топология которого (три обмотки с токами и три воздушных зазора) является базовой. В индивидуальном расчетном варианте имеются:

- Зазор только на одном стержне. Номер такого стержня задан в табл. 2.1.
- Одна катушка с током и одна без тока (номера стержней, на которых расположены обмотки определяются табл. 2.2, причем первая цифра определяет номер обмотки с током).

Для всех вариантов величина тока определяется по формуле:

$$i = 1 + 0,1(n/m) \text{ А.}$$

Воздушный зазор $\Delta = (0,3+0,1m)$ мм. Число витков:

$$w_1 = \{|(m-4)| + 1\} \cdot 100; \quad w_2 = \{|(m-3)| + 1\} \cdot 100; \quad w_3 = \{|(m-2)| + 1\} \cdot 100.$$

Отношение $\mu/\mu_0 = 400+100m$.

Определить магнитные потоки, индукцию и напряжённость магнитного поля во всех участках магнитной цепи. При расчёте магнитными потоками рассеяния пренебречь. Вычислить объёмную плотность энергии магнитного поля W_m' на всех участках магнитной цепи, включая воздушный зазор. Объяснить разницу значений W_m' в воздушном зазоре и ферромагнитном участке. Дать развёрнутый ответ на вопрос – изменятся ли потоки на участках магнитной цепи в случае отсутствия воздушного зазора? Вычислить собственные индуктивности обмоток и взаимную индуктивность между ними.

Геометрические размеры магнитопровода (в сантиметрах) для каждого варианта приведены в табл. 2.3 Номер варианта определяется по формулам: $N_0 = n$ при $n < 11$; $N_0 = n - 10$ при $10 < n < 21$; $N_0 = n - 20$ при $20 < n < 31$ и т. д.

Основы теории

Основой для расчёта любого электромагнитного процесса является полная система уравнений электромагнитного поля (уравнений Максвелла), точнее та их часть, которая соответствует конкретным условиям задачи. Однако для широкого класса задач нет необходимости рассматривать электромагнитное явление во всей полноте. Можно принять ряд допущений, существенно упрощающих процедуру вычислений.

Так, если для конструкции, состоящей из магнитопровода и катушки (рис. 2.2), пренебречь линиями магнитной индукции, замыкающимися частично или полностью в воздухе (поток рассеяния) и считать, что линии основного потока равномерно распределены по сечению магнитопровода и нормальны ему, то магнитный поток на участке магнитопровода:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S B ds = B \int_S ds = B \cdot S.$$

Принцип непрерывности магнитного потока:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0,$$

при принятых допущениях превращается в аналогию первого закона

Кирхгофа для электрической цепи:

$$\sum_{k=1} \Phi_k = 0 . \quad (2.1)$$

Например, для узла «а» магнитной цепи, изображённой на рис. 2.2

$$-\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 .$$

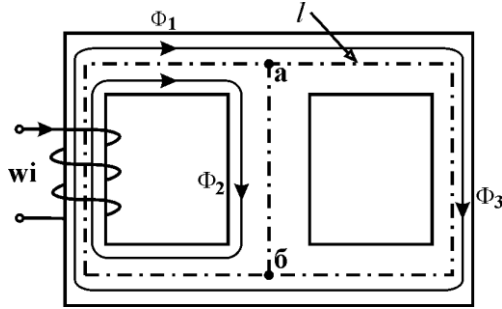


Рис. 2.2

Если допустить, что на любом участке магнитной цепи вектор напряжённости магнитного поля неизменен и по направлению совпадает с направлением I , то магнитное напряжение U_M (в некоторых источниках называется намагничивающей силой и обозначается буквой F) определяется как:

$$U_M = \int_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_l H dl = H \int_l dl = H \cdot l , \quad \text{где}$$

l – рассматривается как средний путь, проходящий через геометрический центр сечения. При принятых допущениях закон полного тока превращается в аналогию второго закона Кирхгофа для магнитной цепи:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum U_M = wi .$$

Если учесть, что магнитопровод может иметь больше, чем одну обмотку с током, в правой части предыдущего выражения учитываются все обмотки, принадлежащие контуру. То есть, в общем случае для любого контура магнитопровода:

$$\sum_{k=1} U_{Mk} = w_k i_k . \quad (2.2)$$

Для магнитной цепи существует понятие магнитного сопротивления участка цепи. Если магнитное напряжение участка цепи U_M , а магнитный поток Φ , то

$$R_M = \frac{U_M}{\Phi} = \frac{H \cdot l}{B \cdot S} = \frac{l}{\mu \cdot S}.$$

Размерность магнитного сопротивления 1/Г (единица, деленная на Генри). Соответственно закон Ома для участка магнитной цепи идентичен обычному закону Ома:

$$\Phi = \frac{U_M}{R_M}. \quad (2.3)$$

Магнитные сопротивления последовательных и параллельных участков находятся по известным правилам, аналогичным электрической цепи. Например, электрическим аналогом магнитной цепи (рис. 2.2) будет электрическая цепь, схема которой изображена на рис. 2.3.

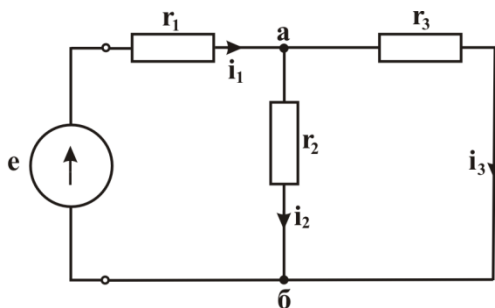


Рис. 2.3

Полное магнитное сопротивление для цепи, изображённой на рис. 2.2 определится так же, как для электрической цепи (рис. 2.3):

$$R_M = R_{M1} + R_{M(aб)} = R_{M1} + \frac{R_{M2} \cdot R_{M3}}{R_{M2} + R_{M3}},$$

поток Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 соответственно:

$$\Phi_1 = \frac{w \cdot i}{R_{M1}}, \quad U_{M(aб)} = R_{M(aб)} \cdot \Phi_1, \quad \Phi_2 = \frac{U_{M(aб)}}{R_{M2}}, \quad \Phi_3 = \frac{U_{M(aб)}}{R_{M3}}.$$

При определении магнитного сопротивления воздушного зазора в соответствующую формулу подставляется значение магнитной проницаемости воздуха, равной магнитной постоянной $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м. Длина l соответствует протяжённости зазора, а сечение принимается равным сечению магнитопровода в области зазора.

Собственная и взаимная индуктивности контуров (катушек) определяются соотношениями между потокоцеплениями и токами самой катушки (собственная) и сторонней катушки (взаимная):

$$\Psi = L \cdot i \quad \text{и} \quad \Psi_{ij} = M_{ij} \cdot i_j,$$

где: Ψ и L – потокоцепление и собственная индуктивность контура (катушки); Ψ_{ij} и M_{ij} – потокоцепление i -го контура (катушки) от тока в j -ом контуре (катушке) и взаимная индуктивность между i -м и j -м контурами (катушками). Единица измерения L и M – Генри. Для идеальной катушки потокоцепление определяется величиной магнитного потока, умноженного на число раз, которое он пересекает контур, образованный проводом катушки, т.е. на число витков катушки $\psi = w\Phi$.

Энергия магнитного поля, заключённая в некотором объёме пространства V , определяется аналогично энергии электрического поля (см. РГЗ №1):

$$W_m = \int_V W'_m dV, \quad \text{где} \quad W'_m = \frac{\bar{B} \cdot \bar{H}}{2}.$$

Для магнитной цепи, где вектора \bar{B} , \bar{H} , совпадают с векторами \bar{l} и \bar{s} выражение для объёмной плотности энергии:

$$W'_m = \frac{BH}{2}.$$

Пример выполнения задания №2

Проиллюстрируем выполнение задания №2 на следующем примере. Конструкция, изображённая на рис. 2.4, представляет собой трёх-стержневой магнитопровод из электротехнической стали. Магнитная проницаемость магнитопровода принимается постоянной, равной $500 \mu_0$.

Геометрические размеры: $a = 3$ см.; $b = 6$ см.; $c = 9$ см.; $d = 3$ см. Обмотки: $w_1 = 150$; $w_2 = 150$; $i_2 = 2$ А.

Определить магнитные потоки, индукцию и напряжённость магнитного поля во всех участках магнитной цепи. Вычислить объёмную плотность энергии W'_m магнитного поля во всех участках магнитной цепи. Вычислить собственные индуктивности обмоток w_1 и w_2 и взаимную индуктивность между ними.

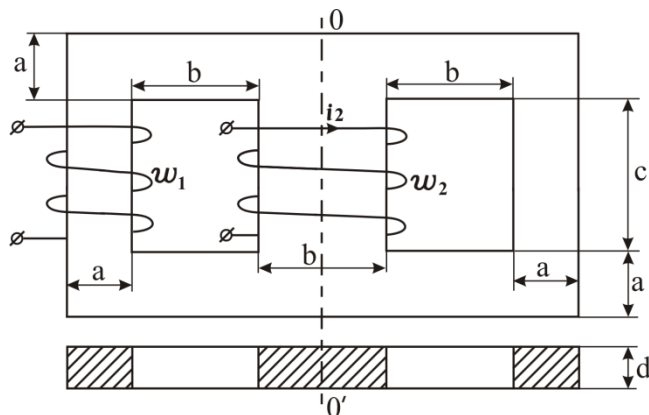


Рис. 2.4

Так как магнитными потоками рассеяния пренебрегаем по условию, магнитная цепь будет аналогична электрической цепи, изображённой на рис. 2.5,

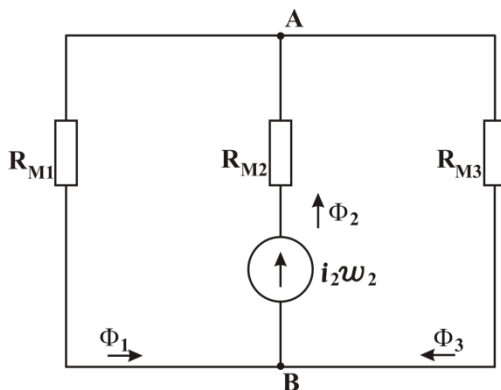


Рис. 2.5

Т.е. такая схема будет схемой замещения для исходной задачи. Для её расчёта необходимо задаться условно положительными направлениями потоков и указать направление магнитодвижущей силы (м.д.с.). Её направление связано с направлением тока правилом буравчика. При заданном направлении тока i_2 м.д.с. равная $w_2 i_2$ будет направлена вверх. После определения условно положительных направлений можно составить необходимое число уравнений (2.1 и 2.2), аналогичных законам

Кирхгофа и решение системы этих уравнений даст искомые потоки Φ_1, Φ_2 и Φ_3 .

Решение можно получить проще, если учесть, что данная магнитная цепь симметрична. Магнитный поток Φ_2 , проходящий через средний стержень, делится на две равные части, которые замыкаются через крайние стержни магнитопровода. Ещё один вариант решения: схема на рис. 2.5 может быть преобразована посредством сворачивания в схему, изображённую на рис. 2.6.

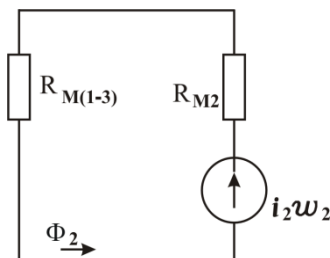


Рис. 2.6

Так как поперечное сечение каждого стержня неизменно, то его магнитное сопротивление:

$$R_M = \frac{l_{cp}}{\mu \cdot S},$$

где l_{cp} – длина средней магнитной линии в стержне; S – поперечное сечение стержня.

Определим длины средних магнитных линий и поперечные сечения стержней:

$$l_{cp1} = 3b + 2a + c = 0,33 \text{ м};$$

$$l_{cp2} = c + a = 0,12 \text{ м};$$

$$S_1 = ad = 0,0009 \text{ м}^2;$$

$$S_2 = bd = 0,0018 \text{ м}^2.$$

Вычислим магнитные сопротивления:

$$R_{M1} = R_{M3} = l_{cp1} / (\mu S_1) = 0,33 / (500 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,0009) = 5,83 \cdot 10^5 \text{ 1/Гн};$$

$$R_{M2} = l_{cp2} / (\mu S_2) = 0,12 / (500 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,0018) = 1,06 \cdot 10^5 \text{ 1/Гн};$$

$$R_{M(1+3)} = R_{M1} / 2 = 2,915 \cdot 10^5 \text{ 1/Гн};$$

$$R_M = R_{M2} + R_{M(1+3)} = 3,975 \cdot 10^5 \text{ 1/Гн}.$$

Определим магнитные потоки во всех участках магнитной цепи (2.3):

$$\Phi_2 = w_2 i_2 / R_M = (2 \cdot 150) / 3,975 \cdot 10^5 = 75,5 \cdot 10^{-5} \text{ Вб};$$

$$\Phi_1 = \Phi_3 = \Phi_2 / 2 = 37,75 \cdot 10^{-5} \text{ Вб}.$$

Исходя из равномерного распределения магнитной индукции по сечению стержня, находим магнитную индукцию на каждом участке:

$$B_1 = B_3 = \Phi_1 / S_1 = 37,75 \cdot 10^{-5} / 0,0009 = 0,42 \text{ Тл} ;$$

$$B_2 = \Phi_2 / S_2 = 75,5 \cdot 10^{-5} / 0,0018 = 0,42 \text{ Тл} .$$

Напряжённость поля на участках магнитной цепи определим по известным значениям магнитной индукции на этих участках:

$$H_1 = B_1 / \mu = 0,42 / (500 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}) = 6,675 \cdot 10^2 \text{ А/м} ;$$

$$H_1 = H_2 = H_3 = 6,675 \cdot 10^2 \text{ А/м} .$$

Найденные значения магнитной индукции и напряжённости магнитного поля позволяют вычислить объёмную плотность энергии W'_m магнитного поля на всех участках магнитной цепи.

$$W'_{m1} = (B_1 \cdot H_1) / 2 = (0,42 \cdot 6,675 \cdot 10^2) / 2 = 140 \text{ Дж/м}^3 ;$$

$$W'_{m3} = W'_{m2} = W'_{m1} = 140 \text{ Дж/м}^3 .$$

Собственные индуктивности обмоток L_1 и L_2 могут быть найдены из выражения для потокоцепления:

$$\Psi_L = L \cdot i .$$

Отсюда $L_2 = w_2 \cdot \Phi_2 / i_2 = 75,5 \cdot 10^{-5} \cdot 150 / 2 = 0,0566 \text{ Гн}$. Собственная индуктивность обмотки L_1 определяется аналогично. При этом из расчётного выражения следует исключить ток, поскольку в обмотке w_1 он отсутствует:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\Psi_{L1}}{i_1} = \frac{w_1 \cdot \Phi_1}{i_1} = \frac{w_1}{i_1} \cdot \frac{w_1 i_1}{R_M} = \frac{w_1^2}{R_M} = \frac{w_1^2}{R_{M1} + \frac{R_{M2} \cdot R_{M3}}{R_{M2} + R_{M3}}} = \\ &= \frac{150^2}{5,83 \cdot 10^5 + \frac{1,06 \cdot 10^5 \cdot 5,83 \cdot 10^5}{1,06 \cdot 10^5 + 5,83 \cdot 10^5}} = 0,0335 \text{ Гн} . \end{aligned}$$

Здесь магнитное сопротивление R_M есть сопротивление магнитному потоку Φ_1 , если бы последний создавался током, протекающим по первой обмотке.

Взаимная индуктивность между обмотками может быть найдена из выражений: $\Psi_{12} = M_{12} \cdot i_2$ или $\Psi_{12} = w_1 \cdot \Phi_1$

$$\text{Отсюда } M_{12} = w_1 \cdot \Phi_1 / i_2 = (150 \cdot 37,75 \cdot 10^{-5}) / 2 = 0,0283 \text{ Гн} .$$

Таблица 2.1

Литера	А	Б	В	Г	Д
Номер стержня с зазором	1	2	3	1	2

Таблица 2.2

Литера	<i>m</i>					
	1	2	3	4	5	6
А	1-2	1-3	2-1	2-3	3-1	3-2
Б	3-2	1-2	1-3	2-1	2-3	3-1
В	3-1	3-2	1-2	1-3	2-1	2-3
Г	2-3	3-1	3-2	1-2	1-3	2-1
Д	2-1	2-3	3-1	3-2	1-2	1-3

Таблица 2.3

№	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	3	4	9	3
2	3	6	9	3
3	3,5	7	10,5	3
4	3	5	9	3
5	3,5	7	10,5	4
6	5,5	11	16,5	6
7	3	6	9	3,5
8	3,5	7	10,5	5
9	3	6	10	4
10	4,5	9	14,5	5,5

Задание №3

Законы Кирхгофа и расчёт резистивных электрических цепей

Целью задания является закрепление теоретического материала, излагаемого в первой части курса – в разделе «методы расчёта линейных электрических цепей». Заданием предусмотрена отработка расчётных приёмов, основанных на использовании: законов Кирхгофа, принципа наложения, сворачивания цепей со смешанными соединениями ветвей, простейших преобразований резистивных цепей, а так же расчёта резистивных цепей методами контурных токов, узловых напряжений и эквивалентного генератора.

Содержание задания

В соответствие с буквенной литерой с помощью табл. 3.1. – 3.3 выбирается расчётный вариант, состоящий из пяти отдельных задач. Шестая задача дополнительная. Условия задания и сами задания: схемы цепей, численные значения параметров и величины, подлежащие расчёту, указаны соответственно в тех же таблицах.

1. Задача №1. Для цепей, схемы которых даны в табл. 3.1, составить системы уравнений по законам Кирхгофа (необходимое число структурных и компонентных уравнений).

2. Задача №2. Определить входное сопротивление между узлами «а» и «б» цепей, схемы которых даны в табл. 3.2. Найти его численное значение при $r = 2\text{ мОм}$.

3. Задача №3. В цепях, схемы которых даны в табл. 3.2, определить напряжение между узлами «а» и «б» при следующих значениях сопротивления (в омах) и тока (в амперах): $r = 2(m+n)$, $J_0 = 2n$. При расчёте рекомендуется использовать эквивалентные преобразования схемы.

4. Задача №4. В цепях, схемы которых даны в табл. 3.3, определить токи в ветвях методом контурных токов и узловых напряжений. Сопротивления всех резисторов (в омах), э.д.с. источников напряжения (в вольтах) и задающие источники токов (в амперах) положить равными n .

5. Задача №5. В цепи, схема и параметры которой даны в табл. 3.4, методом эквивалентного генератора напряжения определить ток в ветви, номер которой соответствует индексу варианта:

6. Дополнительное задание: решить предыдущую задачу, используя принцип наложения.

Основы теории

Законы Кирхгофа. Расчёт электрических цепей базируется на законах Кирхгофа. Различают структурные и компонентные уравнения. Структурные устанавливают соотношения между токами и напряжениями различных ветвей цепи. Компонентные – между током и напряжением одной ветви.

Первый закон Кирхгофа, сформулированный для узла цепи, (более полная форма записи формулируется для сечений) утверждает, что алгебраическая сумма токов всех ветвей, присоединённых к узлу, равна нулю в любой момент времени:

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0.$$

Как правило, ток берётся со знаком минус, если условно-положительное направление (УПН) к узлу, иначе плюс.

Второй закон Кирхгофа, формулируется для замкнутого контура. Алгебраическая сумма напряжений в замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС в любой момент времени:

$$\sum_{k=1}^n u_k(t) = \sum_{k=1}^n e_k(t).$$

Знаки напряжения и ЭДС выбираются положительными, если их УПН совпадает с направлением обхода контура, выбранного произвольно. Иначе знаки отрицательные.

Компонентные уравнения для простой ветви (содержащей один элемент резистор, индуктивность или ёмкость, соответственно):

$$u_r = r \cdot i \text{ или } i = g \cdot u_r, \text{ где } g = 1/r;$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} \text{ или } i = \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt + i(0); \quad (3.1)$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} \text{ или } u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0).$$

Если по условиям задачи необходимо найти токи всех ветвей, при известных источниках и параметрах элементов ветвей, то полное число структурных уравнений по первому и второму законам Кирхгофа должно быть равно числу ветвей N_B . По первому закону Кирхгофа количество уравнений равно количеству узлов минус единица ($N_V - 1$). Остальные уравнения формируются по второму закону Кирхгофа:

$$N_K = N_B - (N_V - 1) = N_B - N_V + 1.$$

Их число соответствует числу независимых контуров N_K .

Так как полученная на основе структурных уравнений система будет содержать неизвестных больше, чем уравнений, она дополняется необходимым числом компонентных уравнений.

Преобразования схемы. При смешанном соединении резистивных элементов, представляющем собой совокупность последовательных и параллельных соединений, наиболее подходящим приёмом расчёта является сворачивание цепи, т.е. приведение её к одному эквивалентному сопротивлению r_3 . На рис. 3.1 показана последовательность преобразования. Сопротивления r_{23} и r_{123} находятся по следующим формулам:

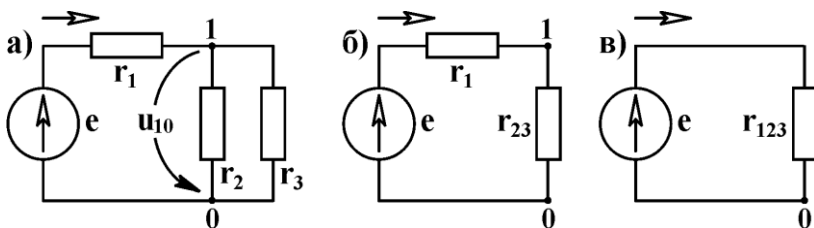


Рис. 3.1

$$r_{23} = \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}; \quad r_{123} = r_1 + r_{23} = r_3.$$

Дальнейший расчёт сводится к нахождению напряжения u_{10} и токов: i_1 , i_2 и i_3 .

$$i_1 = e / r_3; \quad u_{10} = r_{23} \cdot i_1; \quad i_2 = u_{10} / r_2; \quad i_3 = u_{10} / r_3.$$

Если в схеме невозможно выделить последовательно или параллельно соединённые элементы, то можно применить преобразование треугольника сопротивлений (рис. 3.2а) в эквивалентную звезду (рис. 3.2б) или обратно.

Обе схемы будут эквивалентными, если при замене одной на другую токи и напряжения на их внешних зажимах не изменяются. Звезда эквивалентна треугольнику, если её сопротивления определяются через сопротивления треугольника по формулам:

$$r_1 = \frac{r_{12} \cdot r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \quad r_2 = \frac{r_{12} \cdot r_{23}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \quad r_3 = \frac{r_{23} \cdot r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}.$$

Треугольник эквивалентен звезде, если его сопротивления определяются через заданные сопротивления звезды:

$$r_{12} = r_1 + r_2 + \frac{r_1 \cdot r_2}{r_3}; \quad r_{23} = r_2 + r_3 + \frac{r_2 \cdot r_3}{r_1}; \quad r_{31} = r_3 + r_1 + \frac{r_3 \cdot r_1}{r_2}.$$

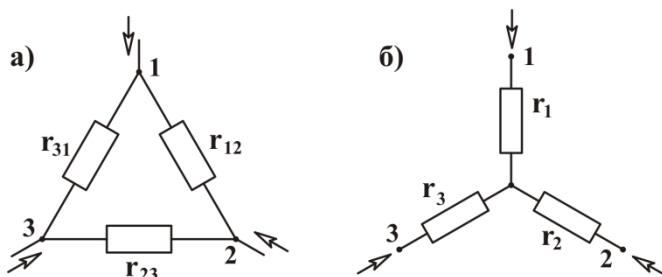


Рис. 3.2

У реальных источников электромагнитной энергии (генераторов) схема замещения содержит идеальный источник напряжения и внутреннее сопротивление (рис. 3.3а) или идеальный источник тока и внутреннюю проводимость (рис. 3.3б).

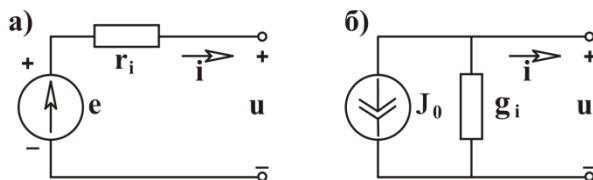


Рис. 3.3

Внутреннее сопротивление и проводимость отражают необратимые процессы внутри генератора электромагнитной энергии. Для пересчёта реального источника напряжения в эквивалентный источник тока используют соотношения:

$$J_0 = \frac{e}{r_i}, \quad g_i = \frac{1}{r_i},$$

а для пересчёта источника тока в эквивалентный источник напряжения:

$$e = \frac{J_0}{g_i}, \quad r_i = \frac{1}{g_i}.$$

Принцип наложения. Основным свойством линейной электрической цепи является принцип наложения (принцип суперпозиции): реакция линейной электрической цепи на совокупность воздействий равна сумме реакций, вызываемых в той же цепи каждым из воздействий в отдельности. На этом принципе основан метод расчёта сложных цепей – метод наложения. Существо метода заключается в том, что в цепи, содержащей несколько источников, реакцию (искомый ток или напряжение) можно определить как сумму реакций, создаваемых каждым воздействием (источником) в отдельности, т.е. полагается, что каждый источник действует независимо.

Для этого ЭДС и задающие токи всех источников цепи, за исключением одного, полагают равными нулю. Определяют токи и напряжения, создаваемые единственным оставшимся источником. Эти токи и напряжения называют частичными. Остальные частичные токи и напряжения определяют аналогично, исключением остальных источников. Исключаемый источник заменяется его внутренним сопротивлением. Идеальный источник напряжения ($r_{\text{вн}} = 0$) заменяется коротким замыканием, а идеальный источник тока ($r_{\text{вн}} = \infty$) заменяется обрывом. Искомый ток (напряжение) находят как алгебраическую сумму частичных токов (напряжений). Знак «плюс» у тех слагаемых, направление которых совпадает с УПН искомого тока или напряжения.

Метод контурных токов. При расчёте цепи методом контурных токов неизвестными в системе уравнений являются контурные токи. Число неизвестных и уравнений должно быть равно числу независимых контуров.

Например, цепь, схема которой изображена на рис. 3.4, содержит три независимых контура: $N_K = N_B - N_V + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$.

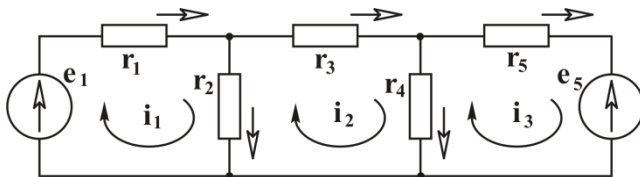


Рис. 3.4

В каждом контуре УПН контурных токов выбирается произвольно. Система уравнений для контурных токов имеет универсальную форму:

$$\begin{cases} r_{11}i_1 + r_{12}i_2 + r_{13}i_3 = e_{11}, \\ r_{21}i_1 + r_{22}i_2 + r_{23}i_3 = e_{22}, \\ r_{31}i_1 + r_{32}i_2 + r_{33}i_3 = e_{33}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Сопротивления по главной диагонали r_{ii} называются собственными сопротивлениями i -го контура. Они определяются как сумма всех сопротивлений, входящих в данный контур и всегда берутся со знаком плюс. Для приведённого примера:

$$r_{11} = r_1 + r_2; \quad r_{22} = r_2 + r_3 + r_4; \quad r_{33} = r_4 + r_5.$$

Сопротивления r_{ij} называется общими сопротивлениями i -го и j -го контуров. Они определяются как сумма сопротивлений, общих для i -го и j -го контуров, и берутся со знаком плюс, если i -ый и j -ый контурные токи совпадают по направлению. В противном случае – знак минус. Для примера (рис. 3.4):

$$r_{12} = r_{21} = -r_2; \quad r_{13} = r_{31} = 0; \quad r_{23} = r_{32} = -r_4.$$

В линейных цепях, не содержащих зависимых источников, общие сопротивления $r_{ij} = r_{ji}$ одинаковы. ЭДС e_{ii} – определяются как алгебраическая сумма ЭДС источников, входящих в i -ый контур, причем знак плюс берется, если направление обхода контура совпадает с направлением ЭДС, в противном случае знак минус. В примере (рис. 3.4):

$$e_{11} = e_1; \quad e_{22} = 0; \quad e_{33} = -e_5.$$

Решая систему уравнений относительно контурного тока i_k , воспользуемся известным выражением:

$$i_k = e_{11} \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + e_{22} \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + e_{33} \frac{\Delta_{k3}}{\Delta} + \dots + e_{nn} \frac{\Delta_{kn}}{\Delta}.$$

Здесь главный определитель системы:

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

а $\Delta_{k1}, \Delta_{k2}, \dots, \Delta_{kn}$ – алгебраические дополнения, полученные из главного определителя путём вычёркивания в нём k -ой строки и n -го столбца и умножения на $(-1)^{k+n}$.

Ток любой ветви определяется как алгебраическая сумма контурных токов, протекающих по этой ветви. При этом со знаком плюс берутся те контурные токи, направление которых совпадает с УПН тока ветви.

В приведённом примере:

$$i_{r1} = i_1, \quad i_{r2} = i_1 - i_2, \quad i_{r3} = i_2, \quad i_{r4} = i_2 - i_3, \quad i_{r5} = i_3.$$

При расчёте на компьютере обычно используют матричную форму записи уравнений контурных токов:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \end{pmatrix}.$$

Метод узловых напряжений. При расчёте цепи методом узловых напряжений неизвестными в системе уравнений будут узловые напряжения u_{k0} (иногда обозначается одним индексом u_k), равные разности потенциалов k -го и нулевого (базисного) узлов. В качестве базисного может быть выбран любой узел. Его потенциал выбирается равным нулю. Число неизвестных и уравнений должно быть равно числу узлов цепи минус единица.

В цепи, схема которой изображена на рис. 3.5, три узла и система состоит из двух уравнений.

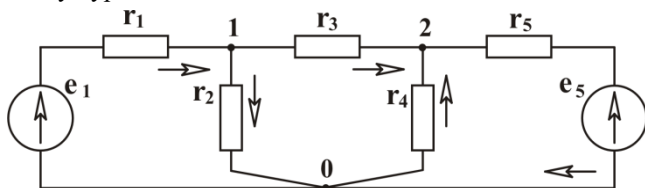


Рис. 3.5.

Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} g_{11}u_1 + g_{12}u_2 = J_{11}, \\ g_{21}u_1 + g_{22}u_2 = J_{22}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Проводимости по главной диагонали g_{ii} называются собственными проводимостями i -го узла. Они определяются как сумма проводимостей всех ветвей, сходящихся в i -ом узле, и всегда берутся со знаком плюс. Проводимости g_{ij} называются взаимными проводимостями i -го и j -го узлов. Они определяются как сумма проводимостей всех ветвей, соединяющих непосредственно i -ый и j -ый узлы, и берутся со знаком минус. Для примера (рис. 3.5):

$$g_{11} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}, \quad g_{22} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5}, \quad g_{12} = g_{21} = -\frac{1}{r_3}.$$

В линейных цепях, не содержащих зависимых источников, взаимные проводимости $g_{ij} = g_{ji}$ одинаковы. Задающие токи J_{ii} — определяются как алгебраическая сумма задающих токов источников, присоединённых одним из зажимов к i -му узлу. Со знаком плюс берутся токи, направленные к узлу. В примере (рис. 3.5) к узлу 1 подходит только одна ветвь, содержащая источник. Это первая ветвь. Если заменить в ней источник напряжения эквивалентным источником тока, то его задающий ток будет направлен к узлу и равен току $J_{11} = e_1/r_1$. Аналогично и для второго узла $J_{22} = e_2/r_2$.

В математическом отношении система уравнений по методу узловых напряжений идентична системе уравнений контурных токов, а, следовательно, и способы их решения будут идентичными. По найденным узловым напряжениям можно рассчитать токи во всех ветвях цепи. Делается это на основе закона Ома:

$$i_{r(ij)} = \frac{u_{i0} - u_{j0} + e_{ij}}{r_{ij}}. \quad (3.4)$$

Метод эквивалентного генератора. Метод находит наиболее частое применение в случаях, когда необходимо найти ток только в одной ветви. Эта ветвь, с зажимами **a** и **b**, выделяется относительно остальной части цепи. Остальная часть цепи заменяется эквивалентным генератором. Возможные схемы замещения эквивалентного генератора изображены на рис. 3.6.

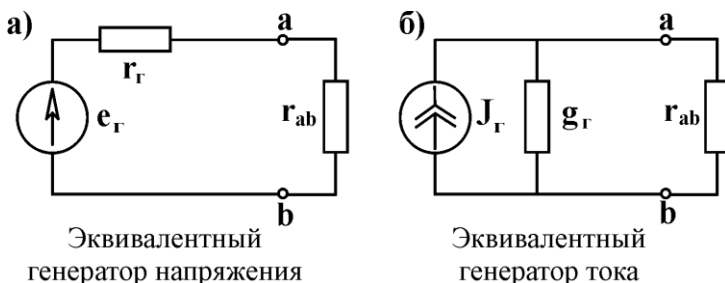


Рис. 3.6

Параметры этих схем определяются следующим образом. ЭДС e_r эквивалентного генератора находится как напряжение на разомкнутых зажимах **a** и **b**. Задающий ток J_r находят как ток через замкнутые коротко зажимы **a** и **b**. Внутреннее сопротивление или проводимость опре-

деляются как сопротивление или проводимость между разомкнутыми зажимами a и b , при условии, что все ЭДС и задающие токи, входящие в цепь, равны нулю. Ток в ветви $a - b$ находится по закону Ома. Например, для варианта а) (рис. 3.6):

$$i_{r(ab)} = \frac{e_z}{r_z + r_{ab}}. \quad (3.5)$$

Пример выполнения задания №3

Выполнение задания №3 проиллюстрируем на примере решения следующих задач:

1. Для цепи, схема которой изображена на рис. 3.7, составить необходимое число структурных и компонентных уравнений, для определения токов ветвей. Все источники и параметры элементов считать заданными.

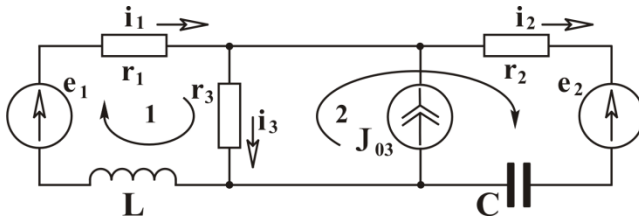


Рис. 3.7

Выбор условно-положительных направлений (УПН) токов ветвей произволен. Количество структурных уравнений на основе первого и второго законов Кирхгофа должно равняться числу ветвей с неизвестными токами $N_B = 3$. Количество уравнений по первому закону равно числу узлов минус единица $(N_Y - 1) = 2 - 1 = 1$. Остальные по второму $N_B - (N_Y - 1) = 2$.

$$\begin{cases} -i_1 + i_3 - J_{03} + i_2 = 0, \\ u_{r1} + u_{r3} + u_L = e_1, \\ -u_{r3} + u_{r2} + u_C = -e_2. \end{cases}$$

Система из трёх уравнений содержит семь неизвестных. Для определённости решения необходимы ещё четыре уравнения. Ими будут

компонентные уравнения (3.1):

$$u_{r_2} = r_2 i_2, \quad u_{r_3} = r_3 i_3, \quad u_L = L \frac{di_1}{dt}, \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

2. В цепи, схема которой приведена на рис. 3.8а определить ток i_3 при заданных значениях параметров схемы: $r = r_1 = r_2 = 2$ Ом, $r_3 = 4$ Ом, $e_1 = 4$ В.

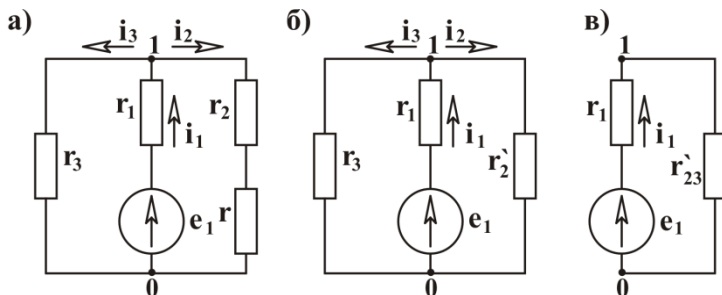


Рис. 3.8

Смешанное соединение, состоящее из совокупности последовательных и параллельных участков, проще всего преобразовать (свернуть) к одному эквивалентному сопротивлению. Сопротивления r и r_2 соединены последовательно, и их можно заменить одним эквивалентным (см. рис. 3.8б) $r_2' = r + r_2 = 2 = 4$ Ом. Сопротивления r_2' и r_3 соединены параллельно, т.к. к ним приложено одно и то же напряжение u_{10} . Их следует заменить эквивалентным (рис. 3.8в): $r_{23}' = (r_2' \cdot r_3) / (r_2' + r_3) = 16/8 = 2$ Ом.

Ток в преобразованной цепи:

$$i_1 = \frac{e_1}{r_1 + r_{23}'} = \frac{4}{2 + 2} = 1 \text{ А}.$$

Для нахождения искомого тока, необходимо предварительно определить напряжение u_{10} . В соответствии с законом Ома:

$$u_{10} = r_{23}' \cdot i_1 = 2 \cdot 1 = 2 \text{ В}, \quad i_3 = \frac{u_{10}}{r_3} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ А}.$$

3. Методом контурных токов рассчитать токи в ветвях цепи, схема которой дана на рис. 3.9, если $e = 2$ В, $J_0 = 2$ А, все сопротивления $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 4$ Ом.

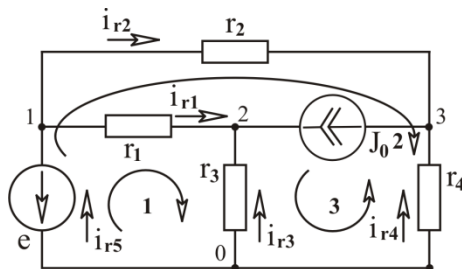


Рис. 3.9

Схема содержит 6 ветвей и 4 узла, и соответственно число независимых контуров $N_K = N_B - (N_V - 1) = 6 - 4 + 1 = 3$. Формально система уравнений по методу контурных токов должна состоять из трёх уравнений. Однако сформировать их невозможно, т.к. в одной из ветвей находится идеальный источник тока, сопротивление которого бесконечно велико. Сопротивление контура, содержащего такой источник, будет бесконечность, а система неопределённая. Чтобы этого не произошло, контуры следует выбирать таким образом, что бы через ветвь с источником тока протекал **только один** контурный ток, и направление его **совпадало** с задающим током. В данном примере контурный ток $i_3 = J_0 = 2$ А. Система (3.2) примет вид:

$$\begin{cases} r_{11}i_1 + r_{12}i_2 + r_{13}i_3 = e_{11}, \\ r_{21}i_1 + r_{22}i_2 + r_{23}i_3 = e_{22}. \end{cases}$$

Третье уравнение не требуется т.к. контурный ток известен. По этой причине систему удобней переписать в виде:

$$\begin{cases} r_{11}i_1 + r_{12}i_2 = e_{11} - r_{13}i_3, \\ r_{21}i_1 + r_{22}i_2 = e_{22} - r_{23}i_3. \end{cases}$$

Определим собственные сопротивления контуров:

$$r_{11} = r_1 + r_3 = 4 + 4 = 8 \text{ Ом}, \quad r_{22} = r_2 + r_4 = 4 + 4 = 8 \text{ Ом}.$$

Общей для первого и второго контуров является ветвь с источником напряжения, сопротивление которой равно нулю, поэтому $r_{12} = r_{21} = 0$. Для первого и третьего контуров общей является ветвь с сопротивлением r_3 , причём оба контурных тока протекают в одном направлении, поэтому $r_{13} = r_{31} = r_3 = 4$ Ом. Для второго и третьего контуров общей является ветвь с сопротивлением r_4 , причём контурные токи протекают в разных направлениях, поэтому $r_{23} = r_{32} = -r_4 = -4$ Ом.

Определим правые части уравнений. Первый контур содержит только один источник с ЭДС $-e$, направленный навстречу контурному току. Поэтому $e_{11} = -e = -2$ В. Аналогично для второго контура $e_{22} = -e = -2$ В. Подставим найденные значения в контурные уравнения:

$$\begin{cases} 8i_1 + 0i_2 = -2 - 4 \cdot 2, \\ 0i_1 + 8i_2 = -2 + 4 \cdot 2. \end{cases}$$

Контурные токи: $i_1 = -1,25$ А и $i_2 = 0,5$ А. Токи ветвей определяются по найденным контурным токам в соответствии с выбранными ранее УПН. По первой ветви протекает только один контурный ток i_1 , направленный так же, как и ток ветви i_{r1} , поэтому $i_{r1} = i_1 = -1,25$ А. Через вторую ветвь протекает также один контурный ток i_2 , совпадающий по направлению с током ветви, потому $i_{r2} = i_2 = 0,75$ А. Через третью ветвь протекают контурные токи i_1 и i_3 , оба направленные навстречу току ветви, поэтому $i_{r3} = -i_1 - i_3 = 1,25 - 2 = -0,75$ А. Рассуждая аналогично получим: $i_{r4} = -i_2 + i_3 = -0,75 + 2 = -1,25$ А, $i_{r5} = i_2 + i_1 = 0,75 - 1,25 = -0,5$ А.

4. Решить предыдущую задачу методом узловых напряжений.

Цепь содержит 4 узла, следовательно, система уравнений по методу узловых напряжений должна состоять из трёх уравнений. Однако, в конкретной схеме при определении коэффициентов неизбежно возникнет трудность. Существо её в том, что ветвь с идеальным источником напряжения имеет нулевое сопротивление, т.е. бесконечно большую проводимость. Обойти эту трудность можно, выбрав в качестве нулевого узла один из узлов, присоединённых к источнику. При этом узловое напряжение второго узла определится до решения системы и будет равно ЭДС источника (со знаком плюс или минус). При выбранной на рис. 3.9 нумерации узлов, на основании второго закона Кирхгофа: $u_{10} = -e = -2$ В. Остаётся составить уравнения (3.3) только для второго и третьего узлов:

$$\begin{cases} g_{21}u_{10} + g_{22}u_{20} + g_{23}u_{30} = J_{22}, \\ g_{31}u_{10} + g_{32}u_{20} + g_{33}u_{30} = J_{33}. \end{cases}$$

Следует обратить особое внимание на тот факт, что отсутствие первой строки (уравнения для первого узла) сняло проблему задания коэффициента g_{11} .

Собственные проводимости узлов 2 и 3:

$$g_{22} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0,5 \text{ Ом}^{-1}, \quad g_{33} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0,5 \text{ Ом}^{-1}.$$

Узлы 1 и 2 соединяются непосредственно только первой ветвью, поэтому

$$g_{12} = g_{21} = -\frac{1}{r_1} = -0,25 \text{ Ом}^{-1}.$$

Узлы 2 и 3 соединяются ветвью с источником тока, имеющим нулевую проводимость, поэтому $g_{23} = g_{32} = 0$. Узлы 1 и 3 соединяются непосредственно второй ветвью, следовательно

$$g_{13} = g_{31} = -\frac{1}{r_2} = -0,25 \text{ Ом}^{-1}.$$

Ко второму узлу подходит только одна ветвь, имеющая источник, причём ток этой ветви равен задающему току источника и направлен к узлу, следовательно, $J_{22} = J_0 = 2 \text{ А}$. К третьему узлу тоже подходит только одна ветвь с источником, причём ток этой ветви также равен задающему току источника, но направлен от узла, поэтому $J_{33} = -J_0 = -2 \text{ А}$. Подставив эти значения в систему, получим:

$$\begin{cases} -0,25(-2) + 0,5 \cdot u_{20} + 0 \cdot u_{30} = 2, \\ -0,25(-2) + 0 \cdot u_{20} + 0,5 \cdot u_{30} = -2. \end{cases}$$

Решение системы: $u_{20} = 3 \text{ В}$, $u_{30} = -5 \text{ В}$. Токи ветвей находятся через узловые напряжения (3.4):

$$i_{r1} = \frac{u_{10} - u_{20}}{r_1} = \frac{-2 - 3}{4} = -1,25 \text{ А},$$

$$i_{r2} = \frac{u_{10} - u_{30}}{r_2} = \frac{-2 + 5}{4} = 0,75 \text{ А},$$

$$i_{r3} = \frac{-u_{20}}{r_3} = \frac{-3}{4} = -0,75 \text{ А},$$

$$i_{r4} = \frac{-u_{30}}{r_4} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ А}.$$

Ток в пятой ветви можно определить из уравнения, составленного по первому закону Кирхгофа для узла 1:

$$i_{r5} = i_{r1} + i_{r2} = -1,25 + 0,75 = -0,5 \text{ А}.$$

5. В цепи, схема которой изображена на рис. 3.10а, найти ток i_1 методом эквивалентного генератора, если $J_{05} = 4$ А, $r_1 = r_2 = r_4 = 2$ Ом, $e_1 = e_2 = e_3 = 3$ В.

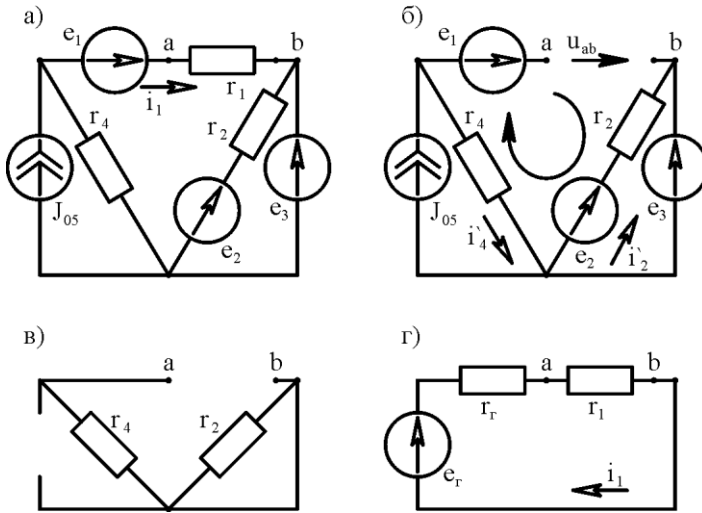


Рис. 3.10

Выделим сопротивление r_1 , а остальную часть цепи заменим эквивалентным генератором напряжения. ЭДС эквивалентного генератора u_{ab} будет равно напряжению на разомкнутых зажимах a и b (рис. 3.10б). Для определения u_{ab} нужно составить уравнение по второму закону Кирхгофа для любого контура, включающего это напряжение.

$$-r_4 i'_4 + u_{ab} - r_2 i'_2 = e_1 - e_2.$$

Штрих означает, что данный ток определён при разомкнутых зажимах a и b . Токи, входящие в уравнение:

$$i'_2 = \frac{e_2 - e_3}{r_2} = 0, \quad i'_4 = J_{05} = 4 \text{ А}.$$

Отсюда: $e_e = u_{ab} = e_1 - e_2 + r_2 i'_2 + r_4 i'_4 = 3 - 3 + 2 \cdot 4 = 8 \text{ В}.$

Сопротивление эквивалентного генератора равно сопротивлению между зажимами a и b , при условии, что все источники равны нулю (заменены внутренними сопротивлениями, как показано на рис. 3.10в). $r_e = r_4 = 2$ Ом. Через сопротивление r_1 , присоединённое к зажимам a и b (рис. 3.10г) будет протекать ток (3.5):

$$i_1 = \frac{e_e}{r_r + r_1} = \frac{8}{2+2} = 2 \text{ A.}$$

6. Предыдущую задачу решить методом наложения.

Найдём частичные токи через сопротивление r_1 , от каждого источника в отдельности, заменяя исключённые источники их внутренними сопротивлениями. Для определения частичного тока i_1' от источника e_1 воспользуемся схемой, изображённой на рис. 3.11а. Это схема цепи у которой все источники, кроме e_1 , заменены внутренними сопротивлениями, т.е. источники напряжения – нулевым (коротким замыканием), а источник тока – бесконечно большим (разрывом).

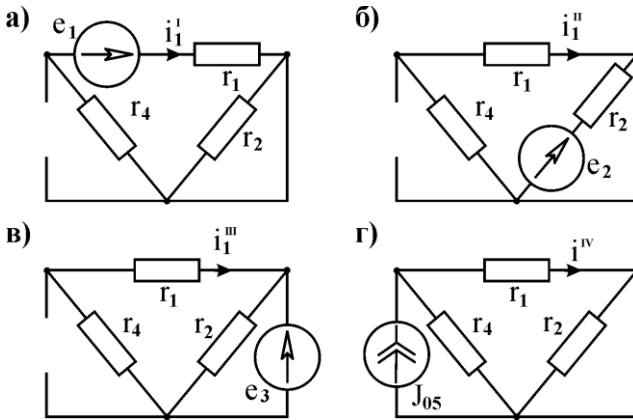


Рис. 3.11

$$i_1' = \frac{e_1}{r_1 + r_4} = \frac{3}{2+2} = 0,75 \text{ A.}$$

Аналогично определяются остальные частичные токи: i_1'' , i_1''' и i_1^{IV} . В соответствие со схемами рис. 3.11б,в,г:

$$i_1'' = 0, \quad i_1''' = -\frac{e_3}{r_1 + r_4} = -\frac{3}{2+2} = -0,75 \text{ A,}$$

$$i_1^{IV} = J_{50} \cdot \frac{r_1 r_4}{r_1 + r_4} \cdot \frac{1}{r_1} = 4 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2+2} \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ A.}$$

Полный ток i_1 определяется наложением частных:

$$i_1 = i_1' + i_1'' + i_1''' + i_1^{IV} = 0,75 + 0 + (-0,75) + 2 = 2 \text{ A.}$$

Условия задачи № 1

Вариант	Схема 1	Схема 2
А		
Б		
В		
Г		
Д		

Условия задач № 2 и № 3

Вариант	К задаче № 2	К задаче № 3
А	<p>$r_1=r_3=r$ $r_2=r_4=2r$</p>	<p>$r_1=r_1=r_3=r_5=r_6=r$ $r_2=r_4=2r$</p>
Б	<p>$r_1=r_3=r_4=2r$ $r_2=r$</p>	<p>$r_1=r_1=r_2=r_3=r_6=r$ $r_4=r_5=2r$</p>
В	<p>$r_1=r_2=r_4=2r$ $r_3=r$</p>	<p>$r_1=r_1=r_4=r_5=r_6=r$ $r_2=r_3=2r$</p>
Г	<p>$r_1=r_3=r_4=2r$ $r_2=r$</p>	<p>$r_1=r_1=r_2=r_5=r_6=r$ $r_3=r_4=2r$</p>
Д	<p>$r_1=r_3=r_4=2r$ $r_2=r$</p>	<p>$r_1=r_1=r_3=r_5=r_6=r$ $r_2=r_4=2r$</p>

Таблица 3.3

Условия задачи № 4

Вариант	Схема цепи	Вариант	Схема цепи
А		Г	
Б		Д	
В			

Таблица 3.4

Условия задач № 5 и № 6

Схема цепи	Вари- ант	Найти ток	При расчёте принять:
	А	i_1 ,	$e_1 = e_2 = e_4 = e_6 = n$ (в Вольтах), $r_1 = r_3 = r_4 = r_5 = m$ (в Омах), $J_{07} = m/n$ (в Амперах).
	Б	i_2 ,	
	В	i_3 ,	
	Г	i_4 ,	
	Д	i_5 .	

Задание №4

Расчёт линейных электрических цепей при гармоническом (синусоидальном) воздействии.

Целью задания является отработка техники расчёта гармонических установившихся режимов в линейных электрических цепях, закрепление теоретического материала в части применения комплексного метода и построения векторных диаграмм. Заданием предусмотрена отработка расчётных приёмов преобразования цепи со смешанным соединением R, L, C – элементов к одному эквивалентному параметру (комплексным сопротивлению или проводимости). Задание содержит проверку баланса активных и реактивных мощностей.

Содержание задания.

Расчётный вариант выбирается в соответствие с буквенной лите-рой с помощью табл. 4.1. Таблица вариантов включает схемы пяти электрических цепей различной конфигурации и численные значения параметров цепей.

Для цепи, соответствующей конкретному варианту, рассчитать:

1. Действующие и мгновенные значения токов всех ветвей.
2. Действующие и мгновенные значения напряжений на всех элементах приемника.
3. Построить в выбранных масштабах для тока и напряжения векторные диаграммы. Диаграммы должны включать токи всех ветвей и напряжения всех элементов цепи.
4. Изобразить на графике мгновенные значения полного тока цепи $i(t)$ и напряжения на приёмнике электрической энергии (нагрузке) $u(t)$. Показать на графике угол сдвига φ .
5. Построить эквивалентную схему замещения нагрузки, на основе найденных в п.1, комплексных значений Z или Y .
6. Проверить балансы по активной и реактивной мощностям.

Основы теории

1. Гармоническими (синусоидальными) воздействиями называют токи, напряжения и ЭДС, графики которых изображены на рис. 4.1, и определяемые математической функцией следующего вида:

$$i = I_m \sin(\omega t + \Psi_i);$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \Psi_u).$$

Здесь u и i называются мгновенными значениями тока и напряжения. I_m и U_m – амплитудными. Аргумент синуса называется фазой. Углы Ψ_i и Ψ_u – аргументы синуса при $t = 0$, называются начальными фазами. Угловая частота ω – равна $2\pi/T$, где T – период тока и напряжения (цикл полного повторения). Величина, обратная периоду T , $f = 1/T$, называется частотой. Численное значение f – соответствует числу периодов в единицу времени. Если единица времени секунда, частота определяется в Герцах (Гц.). При гармоническом процессе начало отсчёта времени не играет роли и, следовательно, начальные фазы определяются произвольным образом. Неизменной оказывается разность начальных фаз: $\varphi = \Psi_u - \Psi_i$, которая называется углом фазового сдвига.

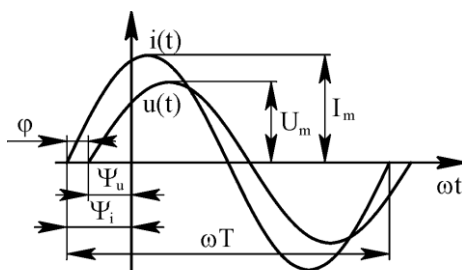


Рис. 4.1.

2. Из курса высшей математики известно, что гармонические функции (например синус или косинус) могут быть представлены на плоскости с помощью вращающегося вектора. Пусть, изображённый на рис. 4.2 вектор, длина которого U_{m1} вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω . Проекция вектора на ось ординат будет равна $U_{m1} \sin(\omega t + \Psi_1)$, т.е. мгновенному значению напряжения $u_1(t)$ с амплитудой U_{m1} и начальной фазой Ψ_1 . Аналогичным образом, на плоскости могут быть изображены одновременно вектора других напряжений и токов одинаковой частоты. При одинаковой частоте напряжений и, соответственно, одинаковой скорости вращения векторов, их взаимное расположение при вращении будет оставаться неизменным. Это обстоятельство позволяет рассматривать картину векторов, изображённых на рис. 4.2, неподвижной. При необходимости сложения мгновенных значений напряжений или токов, не требуется складывать отдельные проекции векторов на ось ординат. Так, как сумма проекций отдельных векторов равна проекции суммы векторов на ту же ось, в смысле трудоёмкости расчётов и их наглядности, удобнее выполнять действия сложения и вычитания над векторами по правилам векторной алгебры.

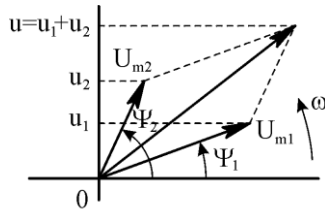


Рис. 4.2.

Как известно из теоретического курса, в линейной электрической цепи все токи и напряжения имеют одинаковую частоту, и могут быть изображены с помощью системы неподвижных векторов. Система векторов, в заданном масштабе для амплитудных (или действующих) значений, изображающая гармонические процессы в электрической цепи, называется векторной диаграммой.

3. Для изображения гармонических функций $i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i)$ или $u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u)$, достаточно задать две величины: амплитуду и начальную фазу. Третью величину (угловую частоту ω) при анализе режима цепи, можно полагать априорно известной, т.к. в линейной цепи частоты всех токов и напряжений одинаковы и равны частоте воздействия. Это делает возможным изображение гармонических токов и напряжений на комплексной плоскости. Такое представление позволяет, при анализе режима цепи, использовать совершенный алгебраический аппарат при сохранении наглядности векторного представления (п.2). Опуская строгие математические выкладки, технику замены мгновенного значения гармонической функции комплексным изображением можно свести к достаточно простой формальной схеме

$$i = I_m \sin(\omega t + \Psi_i) \Leftrightarrow \dot{I}_m = I_m e^{j\Psi_i} \quad (4.1).$$

Например, если $i = 10 \sin(314t - 45^\circ)$ А, то соответствующее изображение на комплексной плоскости, которое принято называть комплексной амплитудой: $\dot{I}_m = 10 e^{-j45^\circ} = 7,07 + j7,07$ А. Наравне с комплексной амплитудой используют комплексное действующее значение (чаще называемое «комплексом»). Комплекс отличается от комплексной амплитуды в $\sqrt{2}$ раз и в приведённом примере

$$\dot{I} = \dot{I}_m / \sqrt{2} = 7,07 e^{-j45^\circ} = 5 + j5 \text{ А.}$$

Ни в коем случае изображение нельзя понимать как равенство. **Запись типа:** $i = 10 \sin(314t - 45^\circ) = 7,07 e^{-j45^\circ} = 5 + j5$ **принципиально не верна.** Идея заключается в замене (изображении) функции времени – соот-

ветствующей функцией на комплексной плоскости, т.е. в своеобразном математическом преобразовании. Ещё ряд примеров преобразования (4.1):

$$\begin{aligned} u &= 141 \sin(1000t) \text{ В}, & \dot{U}_m &= 141 e^{j0^\circ} = 141 \text{ В}, & \dot{U} &= 100 \text{ В}; \\ \dot{I} &= 4 + j3 = 5 e^{j36,87^\circ} \text{ А}, & i &= \sqrt{2} \cdot 5 \sin(\omega t + 36,87^\circ) \text{ А}; \\ e &= \sqrt{2} \cdot 200 \sin(314t - 45^\circ) \text{ В}, & \dot{E} &= 200 e^{-j45^\circ} = 141,4 - j141,4 \text{ В}; \\ i &= \sqrt{2} \cdot 20 \sin(10^5 t + 135^\circ) \text{ А}, & \dot{I}_m &= 28,2 e^{j135^\circ} = -19,94 + j19,94 \text{ А}; \\ \dot{U} &= 1000 e^{-j90^\circ} = -j1000 \text{ В}, & u &= 1414,2 \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ В}. \end{aligned}$$

Основные законы электрических цепей в комплексной форме записываются так же, как для мгновенных значений.

Первый и второй законы Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \dot{U}_k = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k,$$

при этом всегда следует помнить, что:

$$\sum_{k=1}^n I_k \neq 0, \quad \sum_{k=1}^n U_k \neq \sum_{k=1}^n E_k,$$

т.к. в отличие от комплексных, действующие значения не содержат информации о фазе.

Закон Ома в комплексной форме:

$$\dot{I} = \dot{U} / Z,$$

где Z – комплексное сопротивление. Для резистора $Z_r = r$, для индуктивности $Z_L = jx_L = j\omega L$, для ёмкости $Z_C = -jx_C = 1/(j\omega C) = -j/(\omega C)$.

4. Спустя достаточно большое время после включения линейной электрической цепи под действие периодического синусоидального напряжения (э.д.с., тока) во всех её ветвях устанавливаются синусоидальные токи (падения напряжений) с тем же периодом, что и у воздействия. Такой режим работы цепи называется *установившимся*. Время достижения установившегося режима определяется как характером воздействия, так и свойствами цепи. В классической постановке основной задачей анализа является определение токов ветвей в цепи заданной топологии при известных параметрах и источниках электромагнитной энергии. В случаях, когда цель анализа определение токов во всех ветвях сложной цепи, наиболее удобно использование приёмов контурного или узлового анализа. В настоящем задании все варианты цепей представляет собой не сложное, а смешанное соединение, т.е. представляет совокупность

последовательных и параллельных участков. Для такого соединения рекомендуется приведение цепи к одному эквивалентному комплексному сопротивлению Z (или проводимости Y). Последующий анализ основан исключительно на законах Ома и Кирхгофа в комплексной форме. Например, для цепи, изображённой на рис. 4.3, эквивалентное сопротивление:

$$Z = Z_1 + Z_{a\bar{b}} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

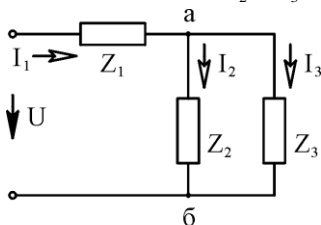


Рис. 4.3.

Ток \dot{I}_1 на основании закона Ома:

$$\dot{I}_1 = \dot{U} / Z.$$

Напряжение между зажимами a и \bar{b} и токи \dot{I}_2 и \dot{I}_3 соответственно определяются:

$$\dot{U}_{a\bar{b}} = Z_{a\bar{b}} \cdot \dot{I}_1, \quad \dot{I}_2 = \dot{U}_{a\bar{b}} / Z_2, \quad \dot{I}_3 = \dot{U}_{a\bar{b}} / Z_3.$$

Мгновенные значения найденных токов находятся по правилам, показанным выше (п.3).

5. Баланс активных мощностей отражает принцип сохранения энергии применительно к электромагнитным процессам, протекающим в электрической цепи. Он заключается в том, что активная мощность, вырабаты-

ваемая источником (источниками) $P_{ист} = \sum \operatorname{Re}(\dot{U} \dot{I}^*)$,

где \dot{U} – комплексное напряжение источников, \dot{I}^* – сопряжённый комплекс токов источников, полностью рассеивается в ветвях цепи и равна $P_{цепи} = \sum r_k I_k^2$, где r_k и I_k – активное сопротивление и действующее значение тока в k -ой ветви. Аналогичный баланс существует и для реактив-

ных мощностей: $\sum \operatorname{Im}(\dot{U} \dot{I}^*) = \sum \pm X_k \cdot I_k^2$, где «плюс» соответствует индуктивному характеру сопротивления, а «минус» ёмкостному.

Пример выполнения задания №4.

Проиллюстрируем выполнение задания №4 на примере расчёта электрической цепи, схема которой изображена на рис. 4.4, при следующих исходных данных: $r_0 = 3 \text{ Ом}$; $r_2 = r_3 = 15 \text{ Ом}$; $L_1 = 0,075 \text{ Гн}$; $L_3 = 0,0374 \text{ Гн}$; $C_2 = 2,65 \cdot 10^{-4} \text{ Ф}$, $e = 141,4 \sin(314 t - 45^\circ) \text{ В}$.

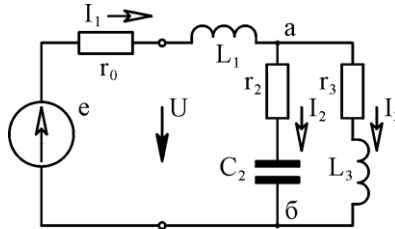


Рис. 4.4.

1. В соответствии с пунктами 1 и 2 задания, определим мгновенные значения токов всех ветвей и напряжений на участках цепи. Для этого предварительно найдём сопротивления реактивных элементов, соответствующие угловой частоте $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$ (50 Гц).

$$x_{L1} = \omega L_1 = 0,075 \cdot 314 = 23,55 \text{ Ом}; \quad x_{L3} = \omega L_3 = 0,0374 \cdot 314 = 11,75 \text{ Ом};$$

$$x_{C2} = 1/(\omega C_2) = 1/(314 \cdot 2,65 \cdot 10^{-4}) = 12 \text{ Ом}.$$

Сопротивления параллельных участков 2 и 3:

$$Z_2 = r_2 - jx_{C2} = 15 - j12 = 19,21e^{-j38,67^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_3 = r_3 + jx_{L3} = 15 + j11,75 = 19,05e^{j38,07^\circ} \text{ Ом}.$$

Результирующее сопротивление параллельной части цепи:

$$\begin{aligned} Z_{аб} &= \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{19,21e^{-j38,67^\circ} \cdot 19,05e^{j38,07^\circ}}{15 - j12 + 15 + j11,75} = \\ &= \frac{365,95e^{-j0,6^\circ}}{30e^{-j0,48^\circ}} = 12,2e^{-j0,12^\circ} \approx 12,2 \text{ Ом}, \end{aligned}$$

т.е. на этом участке цепи практически имеет место резонанс токов. Полное сопротивление нагрузки:

$$Z_H = jx_{L1} + Z_{аб} = j23,5 + 12,2 = 26,48e^{j62,56^\circ} \text{ Ом}.$$

Полное сопротивление всей цепи:

$$Z = r_0 + Z_H = 3 + 26,48e^{j27,44^\circ} = 28e^{j57,1^\circ} \text{ Ом.}$$

Для определения тока \dot{I}_1 используем закон Ома.

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{100e^{-j45^\circ}}{28e^{j57,1^\circ}} = 3,57e^{-j102,1^\circ} \text{ А.}$$

Соответствующее мгновенное значение: $i_1 = \sqrt{2} \cdot 3,57 \sin(314t - 102,1^\circ) \text{ А.}$

Напряжение на параллельном участке $a - б$:

$$\dot{U}_{aб} = Z_{aб} \dot{I}_1 = 12,2 \cdot 3,57e^{-j102,1^\circ} = 43,56e^{-j102,1^\circ},$$

$$u_{aб} = \sqrt{2} \cdot 43,56 \sin(314t - 102,1^\circ) \text{ В.}$$

Аналогично токи второй и третьей ветвей:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{aб}}{Z_2} = \frac{43,56e^{-j102,1^\circ}}{19,21e^{-j38,67^\circ}} = 2,27e^{-j63,43^\circ},$$

$$i_2 = \sqrt{2} \cdot 2,27 \sin(314t - 63,43^\circ) \text{ А ;}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{aб}}{Z_3} = \frac{43,56e^{-j102,1^\circ}}{19,05e^{j38,07^\circ}} = 2,29e^{-j140,2^\circ},$$

$$i_3 = \sqrt{2} \cdot 2,29 \sin(314t - 140,2^\circ) \text{ А.}$$

Напряжения на всех элементах нагрузки:

$$\dot{U}_{L1} = jx_{L1} \cdot \dot{I}_1 = j23,5 \cdot 3,57e^{-j12,1^\circ} = 83,9e^{-j102,1^\circ},$$

$$u_{L1} = \sqrt{2} \cdot 83,9 \sin(314t - 102,1^\circ) \text{ В ;}$$

$$\dot{U}_{r2} = r_2 \cdot \dot{I}_2 = 15 \cdot 2,27e^{-j63,43^\circ} = 34,05e^{-j63,43^\circ},$$

$$u_{r2} = \sqrt{2} \cdot 34,05 \sin(314t - 63,43^\circ) \text{ В ;}$$

$$\dot{U}_{C2} = -jx_{C2} \cdot \dot{I}_2 = -j12 \cdot 2,27e^{-j63,43^\circ} = 27,24e^{-j153,43^\circ},$$

$$u_{C2} = \sqrt{2} \cdot 27,24 \sin(314t - 153,43^\circ) \text{ В ;}$$

$$\dot{U}_{r3} = r_3 \cdot \dot{I}_3 = 15 \cdot 2,29e^{-j140,1^\circ} = 34,35e^{-j140,1^\circ},$$

$$u_{r3} = \sqrt{2} \cdot 34,35 \sin(314t - 140,1^\circ) \text{ В ;}$$

$$\dot{U}_{L3} = jx_{L3} \cdot \dot{I}_3 = j11,75 \cdot 2,29e^{-j140,1^\circ} = 26,91e^{-j50,1^\circ},$$

$$u_{L3} = \sqrt{2} \cdot 26,91 \sin(314t - 50,1^\circ) \text{ В ;}$$

а напряжение на выходе источника (выходе нагрузки):

$$\dot{U} = Z_{H1} \cdot \dot{I}_1 = 26,48 e^{j62,56^\circ} \cdot 3,57 e^{-j102,1^\circ} = 94,53 e^{-j39,54^\circ},$$

$$u = \sqrt{2} \cdot 94,53 \sin(314t - 39,54^\circ) \text{ В.}$$

2. На рис. 4.5 изображена векторная диаграмма токов и напряжений в соответствии с п.3 задания. Одному делению сетки на диаграмме соответствуют 20 Вольт напряжения и 1 Ампер тока.

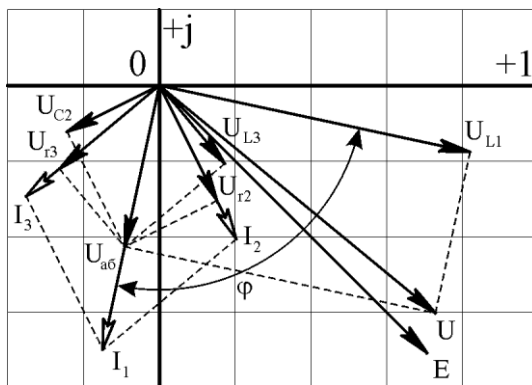


Рис. 4.5.

3. Синусоидальные функции, изображённые на графике (рисунок 4.6), соответствуют полному току цепи $i_1(\omega t)$ и напряжению $u(\omega t)$ на приёмнике (нагрузке). Там же показан угол фазового сдвига $\varphi = \Psi_u - \Psi_i = -39,54^\circ - (-102,1^\circ) = 62,56^\circ$. Одному делению сетки по оси ординат на графике соответствуют 25 Вольт и 1 Ампер соответственно для напряжения и тока.

4. Эквивалентной схемой замещения приёмника электрической энергии (нагрузки) при угловой частоте источника $\omega = 314 \text{ C}^{-1}$ (50 Гц.), будет схема, содержащая минимально возможное количество элементов и имеющая комплексное сопротивление:

$$Z_H = 12,2 + j23,5 = 26,48 e^{j62,56^\circ} \text{ Ом.}$$

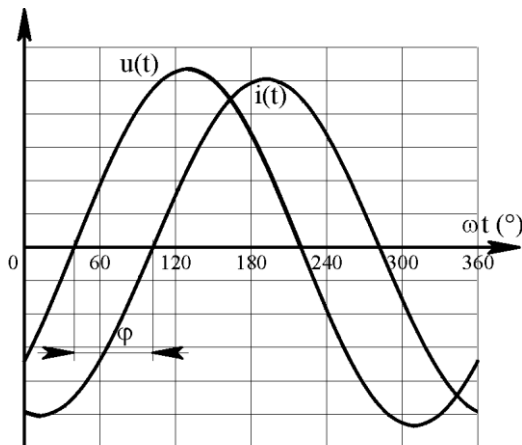


Рис. 4.6.

Такое сопротивление имеет цепь, состоящая из активного (резистивного) и индуктивного элементов (могут иметь место последовательный или параллельный варианты). Схема на рис. 4.7 соответствует последовательному варианту с $r_3 = 12,2$ Ом и $L_3 = x_{L3}/\omega = 23,5/314 = 0,0748$ Гн.

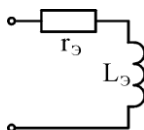


Рис. 4.7.

5. Проверим баланс активных и реактивных мощностей на входе нагрузки (на выходе источника). Полная комплексная мощность источника:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{ист} &= \dot{U} I^* = 94,53 e^{-j39,54^\circ} \cdot 3,57 e^{j102,1^\circ} = 337,47 e^{j62,56^\circ} = \\ &= 155,5 + j299,5 \text{ ВА},\end{aligned}$$

иными словами активная мощность, выдаваемая источником в цепь $P_{ист} = 155,5$ Вт, а реактивная $Q_{ист} = 299,5$ ВАр.

Активная мощность, рассеиваемая в ветвях приёмника:

$$P_{пр} = r_2 \cdot I_2^2 + r_3 \cdot I_3^2 = 15 \cdot 2,27^2 + 15 \cdot 2,29^2 = 155,95 \text{ Вт},$$

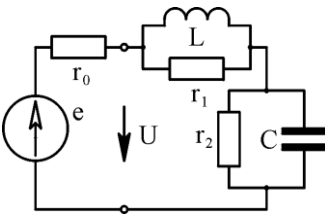
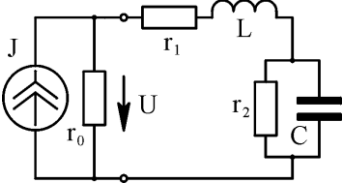
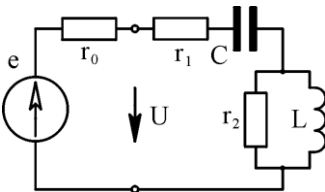
а реактивная:

$$Q_{\text{IP}} = -x_{C2} I_2^2 + x_{L3} I_3^2 + x_{L1} I_1^2 =$$

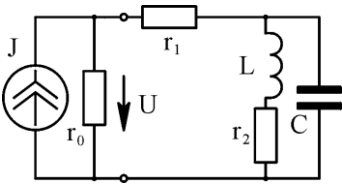
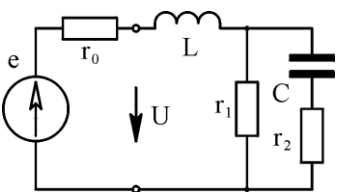
$$= -12 \cdot 2,27^2 + 11,75 \cdot 2,29^2 + 23,5 \cdot 3,57^2 = 299,3 \text{ ВАр}.$$

Незначительное расхождение в балансах объясняется расчётной погрешностью.

Таблица 4.1

Вариант	Схема	Исходные данные
А		$e = 10 \text{ н} \sin(314 t + (2\pi)/m) \text{ В};$ $r_1 = 10 \text{ м} \text{ Ом};$ $r_2 = 0,5 r_1 \text{ Ом};$ $r_0 = 0,1 r_1 \text{ Ом};$ $L = 0,025 \text{ м} \text{ Гн};$ $C = 4 \cdot 10^{-4}/m \text{ Ф}$
Б		$J = 0,1 \text{ н} \sin(314 t - (2\pi)/m) \text{ А};$ $r_0 = 100 \text{ Ом};$ $r_1 = 10 \text{ м} \text{ Ом};$ $r_2 = 2 r_1 \text{ Ом};$ $L = 0,025 \text{ м} \text{ Гн};$ $C = 4 \cdot 10^{-4}/m \text{ Ф}$
В		$e = 7,5 \text{ н} \sin(314 t + (2\pi)/m) \text{ В};$ $r_1 = 10 \text{ м} \text{ Ом};$ $r_2 = 2 r_1 \text{ Ом};$ $r_0 = 0,1 r_1 \text{ Ом};$ $L = 0,025 \text{ м} \text{ Гн};$ $C = 4 \cdot 10^{-4}/m \text{ Ф}$

Продолжение табл. 4.1

Вари- ант	Схема	Исходные данные
Г		$J = 0,05 \, n \sin(314 \, t - (2\pi)/m) \, A;$ $r_0 = 100 \, \Omega;$ $r_1 = 10 \, m \, \Omega;$ $r_2 = 0,5 \, r_1 \, \Omega;$ $L = 0,025 \, m \, \Gamma H;$ $C = 2 \cdot 10^{-4}/m \, \Phi$
Д		$e = 5 \, n \sin(314 \, t + (2\pi)/m) \, B;$ $r_1 = 10 \, m \, \Omega;$ $r_2 = 0,5 \, r_1 \, \Omega;$ $r_0 = 0,1 \, r_1 \, \Omega;$ $L = 0,025 \, m \, \Gamma H;$ $C = 8 \cdot 10^{-4}/m \, \Phi$

Задание №5

Расчёт трёхфазных электрических цепей.

Задание предназначено для закрепления теоретического материала по теме «Многофазные электрические цепи». Целью задания является отработка техники расчёта симметричных и несимметричных гармонических установившихся режимов в трёхфазных электрических цепях. Задание так же содержит расчёт активных и реактивных мощностей трёхфазных приёмников электрической энергии.

Содержание задания

Расчётный вариант выбирается в соответствии с буквенной литерой с помощью табл. 5.1. Таблица вариантов включает схемы пяти цепей с различными вариантами соединения источников и приёмников электрической энергии (генераторов и нагрузки). Условия задания: источники энергии, численные значения параметров и тип аварийной ситуации указаны в той же таблице. Аварийная коммутация конкретного варианта задаётся ключом, номер которого соответствует числу *m*.

В симметричной трёхфазной цепи, представляющей собой соединение генератора и приёмника возникает аварийная ситуация в виде короткого замыкания или обрыва провода, приводящая через определённое время к установившемуся несимметричному режиму. Для цепи, соответствующей конкретному варианту:

1. Рассчитать действующие и мгновенные значения фазных и линейных токов в нагрузке до и после аварийной коммутации.
2. Рассчитать действующие и мгновенные значения фазных и линейных напряжений на нагрузке до и после аварийной коммутации.
3. Построить в выбранных масштабах топографические диаграммы напряжений и векторные диаграммы токов на нагрузке до и после аварийной коммутации. Диаграммы напряжений и токов должны быть совмещены.
4. Сравнить активные и реактивные мощности потребления нагрузки до и после аварийной коммутации.

Основы теории

Трёхфазной электрической цепью называют совокупность цепей, в которых действуют синусоидальные э.д.с. одной частоты, сдвинутые друг относительно друга по фазе и создаваемые общим источником электрической энергии. Если указанная совокупность цепей соединена

по способу, изображённому на схеме рис. 5.1, её называют трёхфазной цепью соединённой *звездой*.

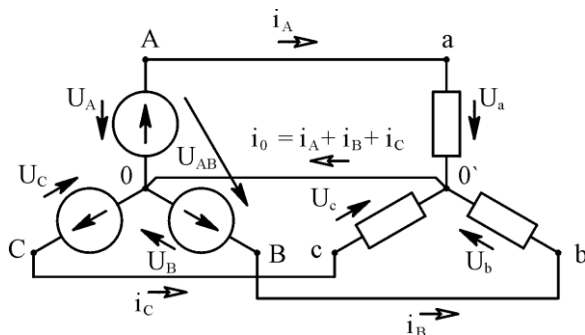


Рис. 5.1.

При этом начала обмоток фаз объединяются в *нейтральную (нулевую)* точку. Провода, соединяющие концы фаз генератора и приёмника называются *линейными* проводами. Провод, соединяющий нулевые точки генератора и приёмника, называется *нейтральным* или *нулевым*. Напряжения на зажимах отдельных фаз генератора и приёмника называют *фазными* напряжениями U_ϕ . Напряжения между линейными проводами — *линейными* напряжениями U_λ . Непосредственно из схемы видно, что линейные токи равны соответствующим фазным токам $I_\lambda = I_\phi$, а линейные напряжения равны разностям соответствующих фазных напряжений:

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_a - \dot{U}_b; \quad \dot{U}_{bc} = \dot{U}_b - \dot{U}_c; \quad \dot{U}_{ca} = \dot{U}_c - \dot{U}_a. \quad (5.1)$$

Соотношение $U_\lambda = \sqrt{3} U_\phi$ справедливо только в случае симметричного режима.

При симметричной системе напряжений генератора и симметричной нагрузке необходимости в нейтральном проводе нет. Если нагрузка несимметрична, то нейтральный провод (если его сопротивлением пренебречь) обеспечивает симметричную систему фазных напряжений генератора на нагрузку. В этом случае принято говорить, что «отсутствует смещение нейтрали на нагрузке». Если же пренебречь сопротивлением нейтрального провода нельзя, происходит смещение нейтрали, вызванное падением напряжения на нейтральном проводе:

$$\dot{U}_{0'-0} = \frac{Y_a \dot{U}_A + Y_b \dot{U}_B + Y_c \dot{U}_C}{Y_a + Y_b + Y_c + Y_0}. \quad (5.2)$$

Здесь Y – комплексные проводимости фаз нагрузки и нейтрального провода. Как следует из схемы (рис. 5.1), фазные напряжения на нагрузке будут:

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{0'-0}; \quad \dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{0'-0}; \quad \dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{0'-0}. \quad (5.3)$$

В случае несимметричной нагрузки и при отсутствии нейтрального провода напряжения на фазах нагрузки определяются на основе следующих выражений:

$$\begin{aligned} \dot{U}_a &= \frac{Y_b \dot{U}_{AB} - Y_c \dot{U}_{CA}}{Y_a + Y_b + Y_c}; \quad \dot{U}_b = \frac{Y_c \dot{U}_{BC} - Y_a \dot{U}_{AB}}{Y_a + Y_b + Y_c}; \\ \dot{U}_c &= \frac{Y_a \dot{U}_{CA} - Y_b \dot{U}_{BC}}{Y_a + Y_b + Y_c}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Если соединение выполнено по способу, изображённому на рис. 5.2, её называют трёхфазной цепью соединённой **треугольником**.

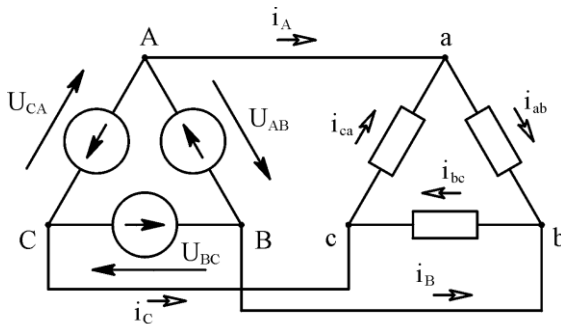


Рис. 5.2.

При этом конец каждой фазы соединяется с началом следующей фазы. Непосредственно из схемы соединения треугольником видно, что линейные напряжения равны соответствующим фазным напряжениям, а линейные токи равны разностям соответствующих фазных токов:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}. \quad (5.5)$$

В частном случае, когда система симметрична $I_\lambda = \sqrt{3} I_\phi$. Соединение треугольником всегда трёхпроводное, и для расчёта несимметричных режимов достаточно использования законов Ома и Кирхгофа.

При изображении установившегося гармонического режима в трёхфазных цепях с помощью векторных диаграмм, вектора напряжений на диаграмме целесообразно размещать (с точки зрения наглядности)

таким образом, что бы вектор напряжения между двумя точками на диаграмме в определённом масштабе соответствовал напряжению между теми же точками реальной цепи (схемы). Соответствие должно быть как по амплитудному (действующему) значению, так и по углу фазового сдвига. Векторная диаграмма, в которой каждой точке на диаграмме соответствует точка на схеме цепи, называется топографической диаграммой.

Пример выполнения задания №5.

В качестве примера выполнения задания №5, рассчитаем два режима в трёхфазной цепи, схема которой изображена на рис. 5.3, при следующих исходных данных: $r = 100 \text{ Ом}$; $r_o = 20 \text{ Ом}$; $x_c = 100 \text{ Ом}$; $E_m = 424 \text{ В}$.

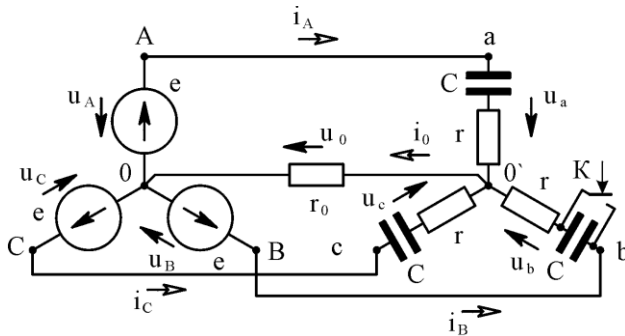


Рис. 5.3.

1. В соответствии с пунктами 1 и 2 задания, определим действующие и мгновенные значения всех токов и напряжений до аварийной коммутации. Как видно из схемы рис. 5.3 до коммутации сопротивления всех фаз нагрузки одинаковы и, следовательно, режим симметричный. Напряжения на фазах нагрузки равны фазным напряжениям генератора:

$$\dot{U}_A = \dot{U}_a = \frac{424}{\sqrt{2}} = 300 \text{ В}, \quad \dot{U}_B = \dot{U}_b = 300 e^{-j120^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_c = 300 e^{j120^\circ} \text{ В};$$

соответственно:

$$u_a = 424 \sin(\omega t) \text{ В}, \quad u_b = 424 \sin(\omega t - 120^\circ) \text{ В}, \quad u_c = 424 \sin(\omega t + 120^\circ) \text{ В}.$$

Проводимости фаз нагрузки одинаковы и равны:

$$Y_a = Y_b = Y_c = \frac{1}{r - jx_C} = \frac{1}{100 - j100} = 7,09 \cdot 10^{-3} e^{j45^\circ} \quad 1/\text{Ом}.$$

Фазные токи нагрузки:

$$\dot{I}_a = Y_a \dot{U}_a = 7,09 \cdot 10^{-3} e^{j45^\circ} \cdot 300 = 2,128 e^{j45^\circ} \quad \text{А},$$

$$i_a = 3 \sin(\omega t + 45^\circ) \quad \text{А};$$

$$\dot{I}_b = Y_b \dot{U}_b = 7,09 \cdot 10^{-3} e^{j45^\circ} \cdot 300 e^{-j120^\circ} = 2,128 e^{-j75^\circ} \quad \text{А},$$

$$i_b = 3 \sin(\omega t - 75^\circ) \quad \text{А};$$

$$\dot{I}_c = Y_c \dot{U}_c = 7,09 \cdot 10^{-3} e^{j45^\circ} \cdot 300 e^{j120^\circ} = 2,128 e^{j165^\circ} \quad \text{А},$$

$$i_c = 3 \sin(\omega t + 165^\circ) \quad \text{А}.$$

Убедимся, что при симметричном режиме ток в нейтральном проводе отсутствует,

$$\begin{aligned} \dot{I}_0 &= \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 2,128 (e^{j45^\circ} + e^{-j75^\circ} + e^{j165^\circ}) = \\ &= 2,128 (0,707 + j0,707 + 0,259 - j0,966 - 0,966 + j0,259) \approx 0. \end{aligned}$$

и необходимости в этом проводе нет.

Линейные напряжения на нагрузке равны линейным напряжениям генератора. Они образуют симметричную систему, в которой амплитудные и действующие значения в $\sqrt{3}$ больше, чем фазные, а угол фазового сдвига опережает на 30° соответствующее фазное напряжение:

$$\dot{U}_{ab} = 519,6 e^{j30^\circ} \quad \text{В}, \quad u_{ab} = 734,4 \sin(\omega t + 30^\circ) \quad \text{В};$$

$$\dot{U}_{bc} = 519,6 e^{-j90^\circ} \quad \text{В}, \quad u_{bc} = 734,4 \sin(\omega t - 90^\circ) \quad \text{В};$$

$$\dot{U}_{ca} = 519,6 e^{j150^\circ} \quad \text{В}, \quad u_{ca} = 734,4 \sin(\omega t + 150^\circ) \quad \text{В}.$$

Совмещённые топографическая диаграмма напряжений на нагрузке и векторная диаграмма фазных токов изображены на рис. 5.4. Одному делению сетки на диаграмме соответствуют 100 Вольт и 1 Ампер векторов напряжения и тока, соответственно. Активная мощность в одной фазе нагрузки равна:

$$P = r I^2 = 100 \cdot 2,128^2 = 452,8 \quad \text{Вт}.$$

Полная активная мощность потребления всей нагрузки:

$$P_\Sigma = P_a + P_b + P_c = 3P = 1358,5 \quad \text{Вт}.$$

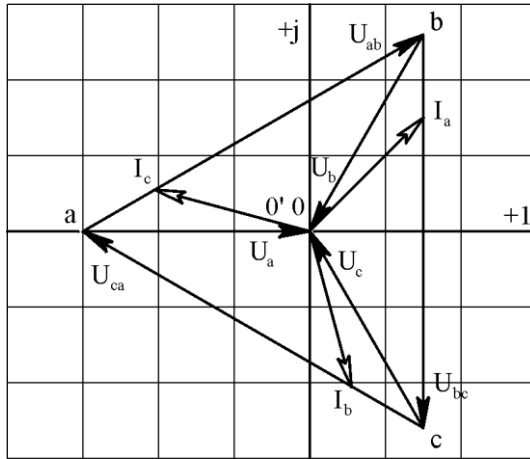


Рис. 5.4.

Соответственно полная реактивная мощность:

$$Q_{\Sigma} = 3(-x_c) \cdot I^2 = -1358,5 \text{ ВАр.}$$

2. После коммутации проводимость фазы «В» нагрузки изменится и станет активной, равной $Y_b = 0,01 \text{ Ом}^{-1}$. Несимметрия в нагрузке вызовет появление тока в нейтральном проводе и, т.к. его сопротивление отлично от нуля, смещение нейтрали на нагрузке согласно (5.2):

$$\begin{aligned} \dot{U}_{0'-0} &= \frac{Y_a \dot{U}_A + Y_b \dot{U}_B + Y_c \dot{U}_C}{Y_a + Y_b + Y_c + Y_0} = \\ &= \frac{300(7,09 \cdot 10^{-3} e^{j45^\circ} + 0,01 e^{-j120^\circ} + 7,09 \cdot 10^{-3} e^{j45^\circ} e^{j120^\circ})}{7,09 \cdot 10^{-3} e^{j45^\circ} + 0,01 + 7,09 \cdot 10^{-3} e^{j45^\circ} + 0,05} = \\ &= \frac{300(-6,85 \cdot 10^{-3} - j1,76 \cdot 10^{-3})}{0,07 + j0,01} = 30 e^{-j173,7^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Напряжения на фазах нагрузки (5.3):

$$\begin{aligned} \dot{U}_a &= \dot{U}_A - \dot{U}_{0'-0} = 300 - 30 e^{-j173,7^\circ} = 300 + 29,8 + j3,3 = 329,8 \cdot e^{j0,5^\circ} \approx 330 \text{ В,} \\ u_a &= 466,7 \sin(\omega t) \text{ В.} \end{aligned}$$

$$\dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{0'-0} = 300e^{-j120^\circ} - 30e^{-j173,7^\circ} = 283,27 \cdot e^{-j115^\circ} \text{ В ,}$$

$$u_b = 400,6 \sin(\omega t - 115^\circ) \text{ В ;}$$

$$\dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{0'-0} = 300e^{j120^\circ} - 30e^{-j173,7^\circ} = 289,1 \cdot e^{j114,5^\circ} \text{ В ,}$$

$$u_c = 408,8 \sin(\omega t + 114,5^\circ) \text{ В .}$$

Проверить правильность последних вычислений можно, убедившись в том, что линейные напряжения на нагрузке совпадают с линейными напряжениями генератора. Результаты проверки на основании (5.1):

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_a - \dot{U}_b = 518 \cdot e^{j29,68^\circ} \text{ В ,} \quad \dot{U}_{bc} = \dot{U}_b - \dot{U}_c = 519,8 \cdot e^{-j90^\circ} \text{ В ,}$$

$$\dot{U}_{ca} = \dot{U}_c - \dot{U}_a = 521 \cdot e^{j149,7^\circ} \text{ В ,}$$

показывают весьма незначительные расхождения, связанные с погрешностью вычислений.

Фазные токи нагрузки:

$$\dot{I}_a = Y_a \dot{U}_a = 7,09 \cdot 10^{-3} e^{j45^\circ} \cdot 330 = 2,34 e^{j45^\circ} \text{ А ,}$$

$$i_a = 3,3 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ А ;}$$

$$\dot{I}_b = Y_b \dot{U}_b = 0,01 \cdot 283,27 e^{-j115^\circ} = 2,83 e^{-j115^\circ} \text{ А ,}$$

$$i_b = 3,99 \sin(\omega t - 115^\circ) \text{ А ;}$$

$$\dot{I}_c = Y_c \dot{U}_c = 7,09 \cdot 10^{-3} e^{j45^\circ} \cdot 289,1 e^{j114,5^\circ} = 2,05 e^{j159,5^\circ} \text{ А ,}$$

$$i_c = 2,89 \sin(\omega t + 159,5^\circ) \text{ А .}$$

Ток в нейтральном проводе равен

$$\dot{I}_0 = Y_0 \cdot \dot{U}_{0'-0} = 0,05 \cdot 30 e^{-j173,7^\circ} = 1,5 e^{-j173,7^\circ} \text{ А .}$$

Для проверки:

$$\begin{aligned} \dot{I}_0 &= \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 2,34 e^{j45^\circ} + 2,83 e^{-j115^\circ} + 2,05 e^{j159,5^\circ} = \\ &= -1,47 - j0,19 = 1,48 e^{-j172,6^\circ} \text{ А ,} \end{aligned}$$

что практически совпадает с предыдущим результатом. Таким образом:

$$i_0 = 2,1 \sin(\omega t - 173^\circ) \text{ А .}$$

На рис. 5.5 изображена диаграмма, аналогичная диаграмме рис. 5.4 для рассчитанного выше несимметричного режима. Масштабы диаграмм на рис. 5.4 и рис. 5.5 одинаковы.

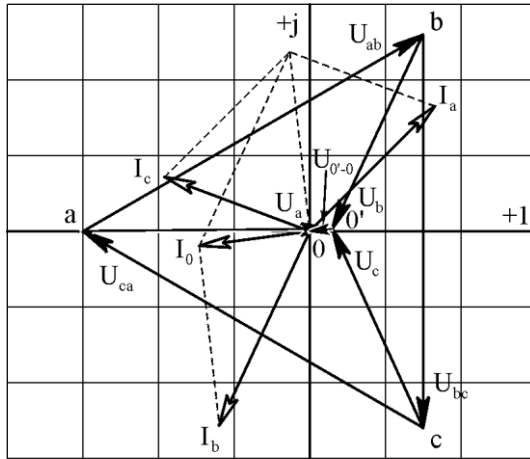


Рис. 5.5.

Активная мощность всех фаз нагрузки равна сумме

$$P_{\Sigma} = P_a + P_b + P_c = r(I_a^2 + I_b^2 + I_c^2) = 100 \cdot (2,34^2 + 2,83^2 + 2,05^2) = 1768,7 \text{ Вт.}$$

Реактивная:

$$Q_{\Sigma} = Q_a + Q_c = -x_c(I_a^2 + I_c^2) = -100 \cdot (2,34^2 + 2,05^2) = -967,8 \text{ ВАр.}$$

3. В результате коммутации активная мощность потребления энергии приёмником возросла на

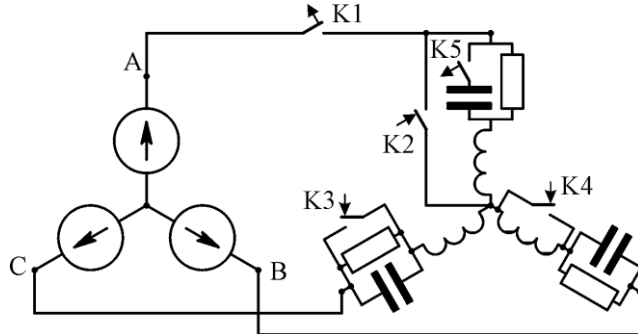
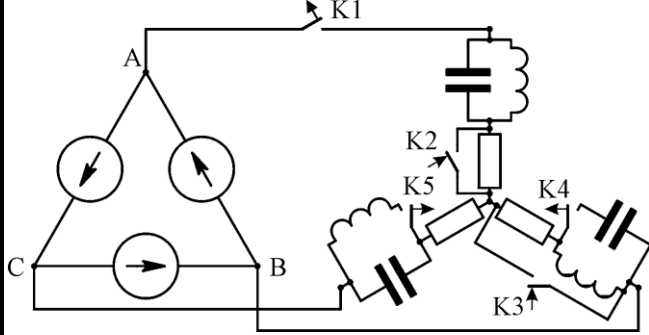
$$((1768,7 - 1358,5) / 1358,5) \cdot 100 \approx 30 \%,$$

а реактивная

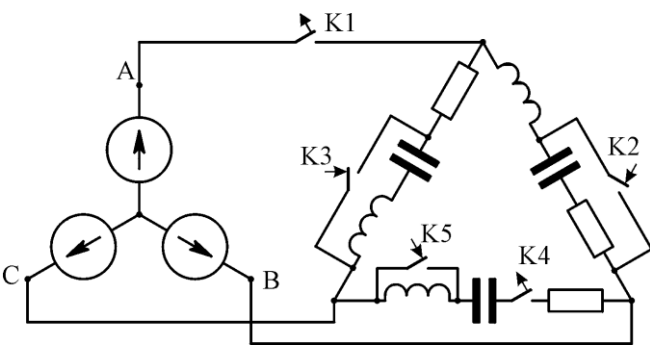
$$((967,8 - 1358,5) / 1358,5) \cdot 100 \approx -28,8 \%$$

примерно на столько же уменьшилась.

Таблица 5.1

Вариант	Схема и исходные данные
А	 <p> $r = 10 \text{ Ом} , \quad x_C = 5 \text{ м Ом} , \quad x_L = \frac{500m}{25m^2 + 100} \text{ Ом} , \quad E_{m2} = 141 \text{ В} .$ </p>
Б	 <p> $r = 10 \text{ Ом} , \quad x_C = 10 \text{ м Ом} , \quad x_L = 20 \text{ м Ом} , \quad E_{m2} = 282 \text{ В} .$ </p>

Вариант	Схема и исходные данные
В	<p> $r = 10 \text{ Ом} , \quad x_C = 5 \text{ м Ом} , \quad x_L = \frac{500m}{25m^2 + 100} \text{ Ом} , \quad E_{m2} = 282 \text{ В} .$ </p>
Г	<p> $r = 20 \text{ Ом} , \quad x_C = 10 \text{ м Ом} , \quad x_L = 20 \text{ м Ом} ,$ $r_0 = 10 \text{ Ом} , \quad E_{m2} = 141 \text{ В} .$ </p>

Вариант	Схема и исходные данные
Д	 <p data-bbox="229 686 879 718">$r = 10 \text{ Ом}$, $x_C = 10 \text{ m Ом}$, $x_L = 20 \text{ m Ом}$, $E_{m2} = 141 \text{ В}$.</p>

Задание №6

Формирование уравнений сложных r, L, C – цепей и расчёт установившегося гармонического (синусоидального) режима.

В задание включены задачи для расчёта электрических цепей сложной конфигурации с синусоидальными источниками электрической энергии. Целью задания является отработка расчётных приёмов, подробно рассмотренных в предыдущих заданиях, в частности, задания №4 в части использования комплексного метода расчёта электрических цепей. Топология цепей в задании соответствует топологии цепей в задании №3, но кроме резистивных элементов цепи содержат индуктивности и ёмкости.

Даны рекомендации по использованию современных вычислительных средств и программных продуктов.

Содержание задания

В соответствие с буквенной literой с помощью табл. 6.1 и 6.2 выбирается расчётный вариант. Численные значения параметров и величины, подлежащие расчёту, указаны ниже, в тексте задач.

Задача №1. В цепях, схемы которых даны в табл. 6.1, определить токи в ветвях методами: а) контурных токов; б) узловых напряжений. При расчёте принять: сопротивления всех резисторов $r = 5m$ Ом; все индуктивности $L = 15,92 \cdot m \cdot 10^{-3}$ Гн; все ёмкости $C = (|3 - m| + 1) \cdot 212,3 \cdot 10^{-6}$ Ф; Э.Д.С. всех источников напряжения $e = 10 \cdot m \cdot \sin(314 t)$ В; и задающие источники токов $J = m \cdot \sin(314 t + 90^\circ)$ А.

Задача №2. В цепи, схема которой изображена на рис. 6.1, методом эквивалентного генератора напряжения определить ток в ветви, номер которой соответствует индексу варианта согласно приведенной ниже табл. 6.1.

Таблица 6.1

Вариант	Ток	Вариант	Ток
А	i_1	Г	i_4
Б	i_2	Д	i_5
В	i_3		

Правила определения исходных данных для задачи №2 такие же, как для задачи №1.

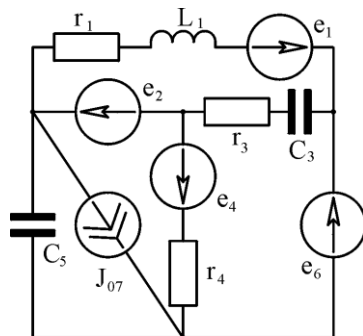


Рис. 6.1.

Основы теории

Расчёт установившегося режима в линейной цепи при гармоническом (синусоидальном) воздействии выполняется на основе комплексного метода расчёта, основные положения которого подробно рассмотрены и проработаны в задании №4. Там рассмотрены цепи со смешанным соединением элементов r , L и C . Было показано, что сворачивание таких цепей, т.е. приведение к одному эквивалентному сопротивлению или проводимости, выполняется по тем же правилам, что и для резистивных цепей, но сопротивления (проводимости) элементов цепи должны быть представлены в комплексной форме. При соблюдении этого условия могут быть использованы и другие приёмы, применённые ранее (РГЗ №3) при расчёте резистивных цепей, такие как преобразование треугольника в эквивалентную звезду и обратно, наложение и пр. Если цепь представляет собой сложное соединение, то предпочтение отдаётся контурному или узловому анализу.

Метод контурных токов. Описание метода, данное в РГЗ №3 для резистивной цепи в полной мере справедливо для цепи переменного тока, но в комплексной форме.

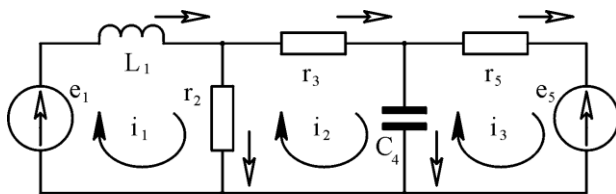


Рис. 6.2.

Цепь, схема которой изображена на рис. 6.2, по топологии полностью соответствует схеме рис. 3.4, содержит три независимых контура, но кроме резистивных элементов содержит L и C и источники синусоидального напряжения. Записанную ниже систему уравнений по методу контурных токов предлагается сравнить с аналогичной системой (3.2) в РГЗ №3 на стр 31.

$$\begin{cases} Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 + Z_{13}\dot{I}_3 = \dot{E}_{11}, \\ Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 + Z_{23}\dot{I}_3 = \dot{E}_{22}, \\ Z_{31}\dot{I}_1 + Z_{32}\dot{I}_2 + Z_{33}\dot{I}_3 = \dot{E}_{33}. \end{cases} \quad (6.1)$$

Комплексные сопротивления по главной диагонали Z_{ii} также как и там называются собственными сопротивлениями i -го контура. Они определяются как сумма всех комплексных сопротивлений, входящих в данный контур и всегда берутся со знаком плюс:

$$Z_{11} = j\omega L_1 + r_2; \quad Z_{22} = r_2 + r_3 - j\frac{1}{\omega C_4}; \quad Z_{33} = -j\frac{1}{\omega C_4} + r_5.$$

Сопротивления Z_{ij} называются общими сопротивлениями i -го и j -го контуров. Они определяются как сумма комплексных сопротивлений, общих для i -го и j -го контуров, и берутся со знаком плюс, если i -й и j -й контурные токи совпадают по направлению. В противном случае – со знаком минус

$$Z_{12} = Z_{21} = -r_2; \quad Z_{13} = Z_{31} = 0; \quad Z_{23} = Z_{32} = -(-j\frac{1}{\omega C_4}) = j\frac{1}{\omega C_4}.$$

ЭДС \dot{E}_{ii} - определяются как алгебраическая сумма ЭДС источников, входящих в i -ый контур: $\dot{E}_{11} = \dot{E}_1$; $\dot{E}_{22} = 0$; $\dot{E}_{33} = -\dot{E}_5$.

Решение системы можно получить по способу, изложенному в РГЗ №3, но в комплексной форме:

$$\dot{I}_k = \dot{E}_{11} \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + \dot{E}_{22} \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + \dot{E}_{33} \frac{\Delta_{k3}}{\Delta},$$

$$\text{где } \Delta - \text{главный определитель системы: } \Delta = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix},$$

а $\Delta_{k1}, \Delta_{k2}, \dots, \Delta_{k, n-1}, \dots, \Delta_{kn}$ – алгебраические дополнения, полученные из главного определителя путём вычёркивания в нём k -ой строки и l -го столбца и умножения на $(-1)^{k+l}$.

Ток любой ветви определяется как алгебраическая сумма контурных токов, протекающих по этой ветви. При этом со знаком плюс берутся те контурные токи, направление которых совпадает с УПН ветви. В приведённом примере:

$$i_{L1} = i_1, \quad i_{r2} = i_1 - i_2, \quad i_{r3} = i_2, \quad i_{C4} = i_2 - i_3, \quad i_{r5} = i_3.$$

При расчёте на компьютере обычно используют матричную форму записи уравнений контурных токов. Если цепь не содержит вырожденных ветвей (ветвей, содержащих идеальные источники тока), то:

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \dot{E}_{33} \end{pmatrix}.$$

При наличии вырожденных ветвей требуются предварительные преобразования.

Матрица \mathbf{Z}_K (контурных сопротивлений) может быть сформирована по правилам, показанным выше, или посредством формальных преобразований с использованием топологических матриц. Матрица $\mathbf{Z}_K = \mathbf{B} \times \mathbf{Z}_B \times \mathbf{B}^T$, где \mathbf{B} – топологическая матрица контуров, \mathbf{B}^T – транспонированная \mathbf{B} , а \mathbf{Z}_B – диагональная матрица сопротивлений ветвей. Для схемы цепи, изображённой на рис. 6.2

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_K &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j\omega L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j\frac{1}{\omega C_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} j\omega L_1 & r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_2 & r_3 & \frac{-j}{\omega C_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{j}{\omega C_4} & r_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} j\omega L_1 + r_2 & -r_2 & 0 \\ -r_2 & r_2 + r_3 + \frac{-j}{\omega C_4} & \frac{j}{\omega C_4} \\ 0 & \frac{j}{\omega C_4} & r_5 + \frac{-j}{\omega C_4} \end{pmatrix},$$

что полностью соответствует вычисленному выше.

Такой способ формирования матрицы сопротивлений предпочтителен, когда порядок системы сравнительно большой.

Метод узловых напряжений. Идея метода достаточно подробно изложена в РГЗ №3. Как и при использовании метода контурных токов, применение метода узловых напряжений для расчёта гармонического режима требует записи всех уравнений в комплексной форме.

При расчёте цепи методом узловых напряжений неизвестными в системе уравнений будут комплексные узловые напряжения \dot{U}_{k0} (иногда обозначаются одним индексом \dot{U}_k – индексом узла), равные разности потенциалов k -го и нулевого (базисного) узлов. Потенциал нулевого узла принимается равным нулю, а номер выбирается произвольно. Число неизвестных и уравнений должно быть равно числу узлов цепи минус единица.

На рис. 6.3 представлена схема, топология которой полностью соответствует топологии схемы рис. 3.5 в РГЗ №3 на стр. 32, но отличается от неё наличием реактивных элементов C и L .

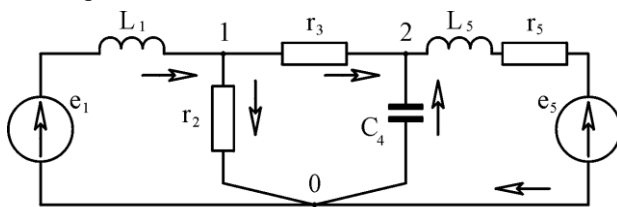


Рис. 6.3.

Предлагается сравнить, записанную ниже систему уравнений с соответствующей системой (3.3) на стр. 32 в РГЗ №3.

$$\begin{cases} Y_{11}\dot{U}_1 - Y_{12}\dot{U}_2 = \dot{J}_{11}, \\ -Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 = \dot{J}_{22}. \end{cases} \quad (6.2)$$

Сравнение показывает, что системы отличаются только тем, что все величины записаны в комплексной форме. Комплексные проводимости по главной диагонали Y_{ii} здесь также называются собственными проводимостями i -го узла и они также определяются как сумма проводимостей всех ветвей, сходящихся в i -ом узле, и всегда берутся со знаком плюс. Проводимости Y_{ij} называются взаимными проводимостями i -го и j -го узлов. Они определяются как сумма проводимостей всех ветвей, соединяющих непосредственно i -ый и j -ый узел. Для примера (рис. 6.3):

$$Y_{11} = \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}, \quad Y_{22} = \frac{1}{r_3} + j\omega C_4 + \frac{1}{r_5 + j\omega L_5}, \quad Y_{12} = Y_{21} = \frac{1}{r_3}.$$

В линейных цепях, не содержащих зависимых источников, взаимные комплексные проводимости $Y_{ij} = Y_{ji}$ одинаковы. Задающие токи \dot{J}_{ii} — определяются как алгебраическая сумма задающих токов источников, присоединённых одним из зажимов к i -му узлу. Со знаком плюс берутся токи, направленные к узлу. В примере (рис. 6.3) к узлу 1 подходит только одна ветвь, содержащая источник. Это первая ветвь. Если заменить в ней источник напряжения эквивалентным источником тока, то его задающий ток будет направлен к узлу и равен току короткого замыкания первой ветви. Аналогично и для второго узла:

$$\dot{J}_{11} = \frac{\dot{E}_1}{j\omega L_1}; \quad \dot{J}_{22} = \frac{\dot{E}_5}{r_5 + j\omega L_5}.$$

Система уравнений по методу узловых напряжений дуальна системе уравнений контурных токов, следовательно решение будет идентичным. Как и в предыдущем примере:

$$\dot{U}_{k0} = \dot{U}_k = \dot{J}_{11} \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + \dot{J}_{22} \frac{\Delta_{k2}}{\Delta},$$

где Δ — главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix},$$

а $\Delta_{k1}, \Delta_{k2}, \dots, \Delta_{kn}$ — алгебраические дополнения, полученные из главного определителя путём вычёркивания в нём k -ой строки и n -го столбца и умножения на $(-1)^{k+n}$.

При расчёте на компьютере предпочтительней матричная форма записи уравнений узловых напряжений, особенно, если порядок системы большой. Если цепь не содержит вырожденных ветвей (ветвей, содержащих идеальные источники напряжения), то:

$$\mathbf{Y}_y \times \dot{\mathbf{U}}_y = \dot{\mathbf{J}}_y .$$

При наличие вырожденных ветвей требуются предварительные преобразования.

Матрица \mathbf{Y}_y (узловых проводимостей) может быть сформированна способом продемонстрированном выше, или посредством формальных преобразований с использованием топологических матриц. Матрица $\mathbf{Y}_y = \mathbf{A} \times \mathbf{Y}_B \times \mathbf{A}^T$, где \mathbf{A} – топологическая матрица соединений, а \mathbf{Y}_B диагональная матрица проводимостей ветвей. Для схемы цепи, изображённой на рис. 6.3

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_y &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{j\omega L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_5 + j\omega L_5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{j\omega L_1} & \frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r_3} & -j\omega C_4 & -\frac{1}{r_5 + j\omega L_5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} & -\frac{1}{r_3} \\ -\frac{1}{r_3} & \frac{1}{r_3} + j\omega C_4 + \frac{1}{r_5 + j\omega L_5} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то есть совпадает с полученными выше результатами.

По найденным узловым напряжениям можно рассчитать токи во всех ветвях цепи. Делается это на основе закона Ома:

$$\dot{I}_{ij} = \frac{\dot{U}_{i0} - \dot{U}_{j0} + \dot{E}_{ij}}{Z_{ij}}. \quad (6.3)$$

Метод эквивалентного генератора. Метод описан в РГЗ №3. Там же на рис. 3.6 показаны возможные схемы замещения эквивалентного генератора. Параметры этих схем, ЭДС \dot{E}_r – эквивалентного генератора или задающий ток – \dot{J}_r , внутреннее сопротивление Z_r или проводимость Y_r определяются аналогичным образом, но в комплексной форме. Метод эквивалентного генератора позволяет найти ток в ветви **a – b** непосредственно по закону Ома:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{E}_r}{Z_r + Z_{ab}}.$$

Пример выполнения задания №6.

Пример выполнения задания №6 проще всего проиллюстрировать на примере расчёта цепей, с топологией, аналогичной цепям, расчёт которых иллюстрирует методы контурных токов, узловых напряжений и эквивалентного генератора резистивных цепей, подробно разобранных в РГЗ №3.

1. Методом контурных токов рассчитать действующие и мгновенные значения токов в ветвях цепи, схема которой приведена на рис. 6.4, если $L_1 = 0,0159$ Гн, $r_2 = 4$ Ом, $r_3 = 4$ Ом, $L_3 = 9,55$ мГн, $C_4 = 796$ мкФ, $e_5 = 28,2 \sin(314t - 30^\circ)$ В, $J_0 = 5,66 \sin(314t + 45^\circ)$ А.

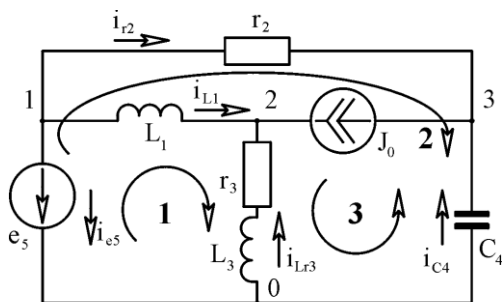


Рис. 6.4.

Схема содержит 6 ветвей и 4 узла, соответственно число независимых контуров $N_K = N_B - (N_Y - 1) = 6 - 4 + 1 = 3$. Формально система уравнений по методу контурных токов должна состоять из трёх уравнений, однако так же как и в аналогичной задаче в РГЗ №3 (задача 3 на стр. 35 – 37) один из контурных токов можно считать известным. В данном случае это контурный ток $i_3 = J_0 = 5,66 \sin(314t + 45^\circ)$ А. Как и в том примере, при наличии ветви с идеальным источником тока, контуры следует выбирать таким образом, что бы через ветвь с источником тока протекал **только один** контурный ток, и направление его **совпадало** с задающим током источника. Система (6.1) будет состоять из двух уравнений

$$\begin{cases} Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 + Z_{13}\dot{I}_3 = \dot{E}_{11} , \\ Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 + Z_{23}\dot{I}_3 = \dot{E}_{22} . \end{cases}$$

Третье уравнение не требуется т.к. система содержит две неизвестных

$$\dot{I}_3 = \dot{J}_0 = 5,66 / \sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ} = 4e^{j45^\circ} \text{ А.}$$

Систему удобней переписать в виде:

$$\begin{cases} Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 = \dot{E}_{11} - Z_{13}\dot{I}_3 , \\ Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = \dot{E}_{22} - Z_{23}\dot{I}_3 . \end{cases}$$

Собственные сопротивления контуров:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= r_3 + jx_{L3} + jx_{L1} = 4 + j314 \cdot 0,00955 + j314 \cdot 0,0159 = \\ &= 4 + j8 = 8,94e^{j63,43^\circ} \text{ Ом} , \end{aligned}$$

$$Z_{22} = r_2 - jx_{C4} = 4 - j \frac{1}{314 \cdot 796 \cdot 10^{-6}} = 4 - j4 = 5,66e^{-j45^\circ} \text{ Ом} .$$

Общей для первого и второго контуров является ветвь с источником напряжения, сопротивление которой равно нулю, поэтому $Z_{12} = Z_{21} = 0$. Общее сопротивление для первого и третьего контуров $Z_{13} = Z_{31} = r_3 + jx_{L3} = 4 + j3 = 5e^{j36,87^\circ}$ Ом. Для второго и третьего контуров общей является ветвь с ёмкостью, причём контурные токи протекают в разных направлениях, поэтому $Z_{23} = Z_{32} = -(-jx_{C4}) = j4 = 4e^{j90^\circ}$ Ом. Определим правые части уравнений. Первый контур содержит только один источник с ЭДС, направленный навстречу контурному току. Поэтому $\dot{E}_{11} = -\dot{E}_5 = -28,2 / \sqrt{2} \cdot e^{-j30^\circ}$ В. То же самое и для второго контура $\dot{E}_{22} = -\dot{E}_5 = -20e^{-j30^\circ}$ В. Подставим найденные значения в контурные уравнения:

$$\begin{cases} (4 + j8)\dot{I}_1 + 0 \cdot \dot{I}_2 = -20e^{-j30^\circ} - 5e^{j36,87^\circ} \cdot 4e^{j45^\circ}, \\ 0 \cdot \dot{I}_1 + (4 - j4)\dot{I}_2 = -20e^{-j30^\circ} - 4e^{j90^\circ} \cdot 4e^{j45^\circ}. \end{cases}$$

В результате решения этой системы контурные токи равны: $\dot{I}_1 = 2,5e^{j142,5^\circ} = -1,97 + j1,52$ А, и $\dot{I}_2 = 1,08e^{-j127,7^\circ} = -0,58 - j0,854$ А. Токи ветвей определяются по найденным контурным в соответствии с УПН и принятыми направлениями контуров, аналогично тому, как это сделано в РГЗ №3 (стр. 37):

$$\begin{aligned} \dot{I}_{r2} &= \dot{I}_2 = 1,08e^{-j127,7^\circ} \text{ А}, \quad \dot{I}_{L1} = \dot{I}_1 = 2,5e^{j142,5^\circ} \text{ А}, \\ \dot{I}_{rL3} &= -(\dot{I}_1 + \dot{I}_3) = 4,42e^{-j101,1^\circ} \text{ А}, \quad \dot{I}_{C4} = \dot{I}_3 - \dot{I}_2 = 5e^{j47,2^\circ} \text{ А}, \\ \dot{I}_{e5} &= -\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 2,64e^{j14,6^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

2. Решить предыдущую задачу методом узловых напряжений.

Цепь содержит 4 узла, следовательно, система уравнений по методу узловых напряжений должна состоять из трёх уравнений. Однако, в схеме на рис. 6.4 есть ветвь с идеальным источником напряжения, который имеет нулевое сопротивление, т.е. бесконечно большую проводимость. Подобная ситуация имела место и рассматривалась в аналогичной задаче (см. РГЗ №3, задача 4, стр. 37 – 38). Руководствуясь теми же соображениями, узловое напряжение первого узла примем равным $\dot{U}_{10} = -\dot{E}_5 = -20e^{-j30^\circ}$ В, а уравнения для второго и третьего узлов составят систему (6.2):

$$\begin{cases} Y_{21}\dot{U}_{10} + Y_{22}\dot{U}_{20} + Y_{23}\dot{U}_{30} = \dot{J}_{22}, \\ Y_{31}\dot{U}_{10} + Y_{32}\dot{U}_{20} + Y_{33}\dot{U}_{30} = \dot{J}_{33}. \end{cases}$$

Таким образом, отпадает необходимость в уравнении для первого узла, которое содержит бесконечность. Собственные проводимости узлов 2 и 3:

$$Y_{22} = Y_{L1} + Y_{rL3} = \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{r_3 + j\omega L_3} = 0,358e^{-j63,43^\circ} \text{ 1/Ом},$$

$$Y_{33} = Y_{r2} + Y_{C4} = \frac{1}{r_2} + j\omega C_4 = 0,353e^{j45^\circ} \text{ 1/Ом}.$$

Остальные проводимости:

$$Y_{12} = Y_{21} = -Y_{L1} = -(-j0,2) = j0,2 \text{ 1/Ом}, \quad Y_{23} = Y_{32} = 0,$$

$$Y_{13} = Y_{31} = -1/r_2 = -0,25 \text{ 1/Ом}.$$

Правые части: $\dot{J}_{22} = \dot{J}_0 = 4e^{j45^\circ}$ А, $\dot{J}_{33} = -\dot{J}_0 = -4e^{j45^\circ}$ А. Подставив эти значения в уравнения, и решив

$$\begin{cases} 0,358e^{-j63,43^\circ}\dot{U}_{20} = 4e^{j45^\circ} - (j0,2 \cdot (-20e^{-j30^\circ})), \\ 0,353e^{j45^\circ}\dot{U}_{30} = -4e^{j45^\circ} - (-0,25 \cdot (-20e^{-j30^\circ})), \end{cases}$$

получим $\dot{U}_{20} = 22,15e^{j115,43^\circ}$ В и $\dot{U}_{30} = 20,48e^{j137,6^\circ}$ В.

Соответственно токи в ветвях (6.3):

$$\dot{I}_{L1} = \frac{\dot{U}_{10} - \dot{U}_{20}}{jx_{L1}} = \frac{12,69e^{-j128^\circ}}{5e^{j90^\circ}} = 2,54e^{j142^\circ} \text{ А},$$

$$i_{L1} = \sqrt{2} \cdot 2,54 \sin(314t + 142^\circ) \text{ А};$$

$$\dot{I}_{r2} = \frac{\dot{U}_{10} - \dot{U}_{30}}{r_2} = \frac{4,4e^{-j120^\circ}}{4} = 1,1e^{-j120^\circ} \text{ А},$$

$$i_{r2} = \sqrt{2} \cdot 1,1 \sin(314t - 120^\circ) \text{ А};$$

$$\dot{I}_{rL3} = -\frac{\dot{U}_{20}}{Z_3} = -\frac{22,15e^{j115,43^\circ}}{5e^{j36,86^\circ}} = 4,43e^{-j101,43^\circ} \text{ А},$$

$$i_{rL3} = \sqrt{2} \cdot 4,43 \sin(314t - 101,43^\circ) \text{ А};$$

$$\dot{I}_{C4} = -\frac{\dot{U}_{30}}{-jx_{C4}} = -\frac{20,48e^{j137,6^\circ}}{4e^{j90^\circ}} = 5,12e^{j47,6^\circ} \text{ А},$$

$$i_{C4} = \sqrt{2} \cdot 5,12 \sin(314t + 47,6^\circ) \text{ А}.$$

$$\dot{I}_{e5} = \dot{I}_{Lr3} + \dot{I}_{C4} = 4,43e^{-j101,43^\circ} + 5,12e^{j47,6^\circ} = 2,64e^{-j12,3^\circ} \text{ А},$$

$$i_{e5} = \sqrt{2} \cdot 2,64 \sin(314t - 12,3^\circ) \text{ А}.$$

Незначительные отличия полученных результатов от результатов расчёта методом контурных токов связаны с погрешностями округлений при ручном счёте.

3. Методом эквивалентного генератора найти ток i_{Lr3} в цепи, схема которой дана на рис. 6.4.

Для определения этого тока необходимо выделить ветвь с током i_{Lr3} , а остальную часть цепи представить эквивалентным генератором, как это было сделано в РГЗ №3, но в комплексной форме. Схема замещения дана на рис. 6.5.

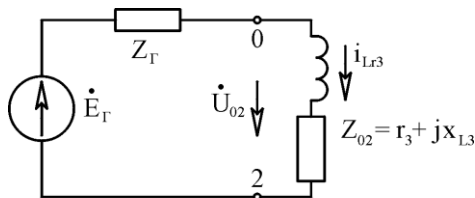


Рис. 6.5.

В соответствии с законом Ома искомый ток $\dot{I}_{rL3} = \dot{E}_G / (Z_G + Z_{a0})$, где ЭДС эквивалентного генератора находится как напряжение на разомкнутых зажимах выделенной ветви. На схеме рис. 6.6 это напряжение между узлами 0 и 2.

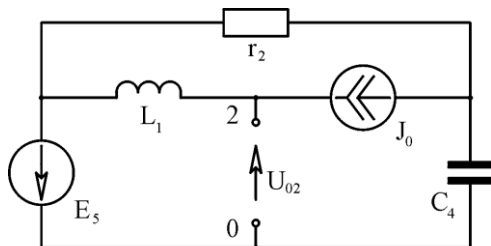


Рис. 6.6.

На основании второго закона Кирхгофа:

$$\dot{U}_{02} + jx_{L1}\dot{J}_0 = \dot{E}_5 ;$$

$$\dot{U}_{02} = \dot{E}_5 - jx_{L1}\dot{J}_0 = 20e^{-j30^\circ} - j5 \cdot 4e^{j45^\circ} = 39,65e^{-j35,5^\circ} \text{ В} .$$

Внутреннее сопротивление генератора Z_r находится как сопротивление между узлами 0 и 2 при замене всех источников внутри цепи их внутренними сопротивлениями. Схема для определения сопротивления Z_r изображена на рис. 6.7а. Это сопротивление равно сопротивлению первой ветви, что становится очевидным, если предыдущую схему (а) изобразить, как это показано на рис. 6.7б: $Z_r = jx_{L1} = j5 \text{ Ом}$.

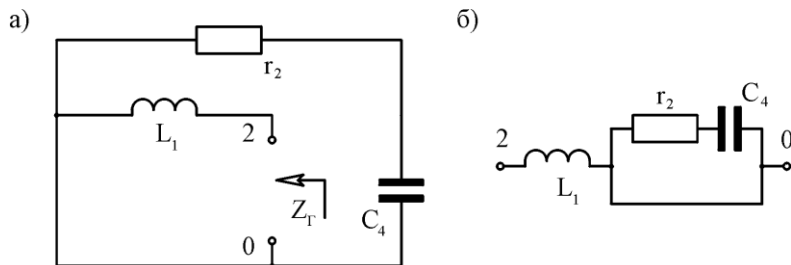


Рис. 6.7.

Окончательно:

$$i_{rL3} = \frac{\dot{U}_{02}}{Z_r + Z_{02}} = \frac{39,65 e^{-j37,5^\circ}}{j5 + 4 + j3} = \frac{39,65 e^{-j37,5^\circ}}{8,94 e^{j63,43^\circ}} = 4,43 e^{-j100,9^\circ} \text{ А} .$$

Этот результат соответствует результату, полученному другими методами (п.1 и 2 примера).

Использование персональных компьютеров в сочетании с современными программными средствами позволяет значительно сократить затраты сил и времени на широкий класс математических вычислений, вообще, и на решение данных заданий, в частности.

Для получения решения может быть рекомендована программа MathCAD (версии от 5.5 до 2001, в зависимости от типа используемого компьютера), которая позволяет оформлять вычисления в виде, близком к общематематической формулировке задачи. Программа может выполнять решение алгебраических линейных и нелинейных уравнений и систем таких уравнений, вычисление производных и интегралов, нахождение пределов, операции с матрицами, решение систем линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, построение графиков функций одной и двух переменных и многое другое. Все эти действия производятся как над действительными так и над комплексными числами. Кроме того MathCAD обладает и функциями текстового редактора, следовательно его можно использовать и для оформления задания.

Программа обладает удобным интерфейсом, её использование подробно описано в многочисленной, легко доступной литературе.

Проверить правильность полученного решения удобно с помощью программы Electronics WorkBench Pro 5 (EWB). Эта программа имитирует «электронный конструктор», то есть для расчета режима и определения характеристик электрической цепи средствами EWB не

требуются составление систем уравнений и их решения. Достаточно «собрать» схему из стандартных электронных компонентов (активных сопротивлений, индуктивностей, емкостей, источников Э.Д.С. и тока и т.д.), «подключить» измерительные приборы и снять их показания.

Если результаты, полученные при использовании столь различных подходов совпадут, то это будет свидетельствовать об отсутствии ошибок в обоих методах, то есть о правильности полученного решения.

На рис. 6.8 приведён пример расчёта (с помощью EWB) токов и напряжений в цепи, режим которой определялся выше при решении задач 1,2 и 3. Отличия результатов от полученных в п. 1,2 и 3, находятся в пределах вычислительных погрешностей и составляют примерно 1%.

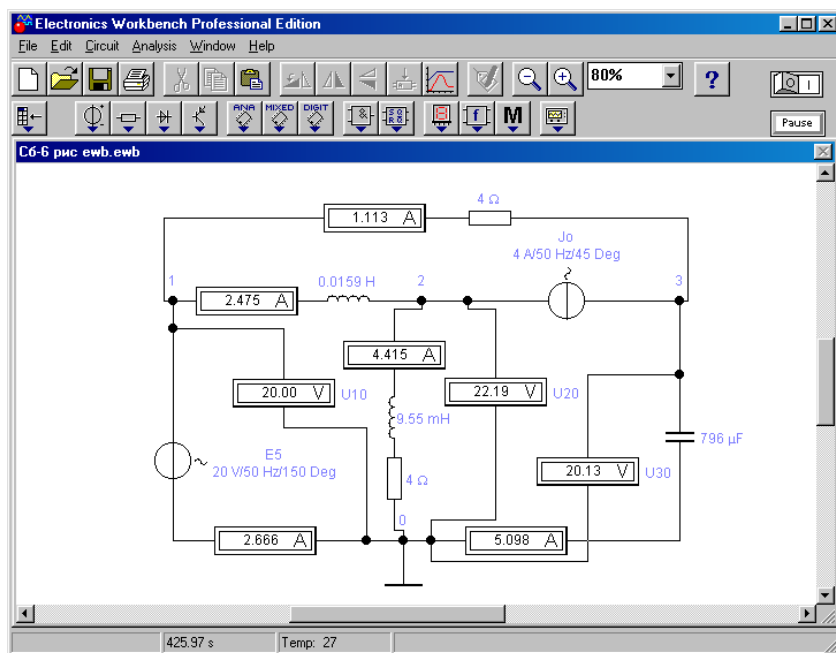


Рис. 6.8

Таблица 6.2

Условия задачи № 1

Вариант	Схема цепи	Вариант	Схема цепи
А		Г	
Б		Д	
В			

Задание №7

Частотные характеристики линейной электрической цепи.

Задание предназначено для закрепления важных понятий теории линейных электрических цепей: комплексных входных и передаточных функций. Все разделы задания посвящены расчёту этих функций для цепей с конфигурациями различной сложности, и построению частотных, амплитудных и фазовых характеристик. Значительное внимание уделено частотному анализу сложных цепей на основе вычислительных средств.

Содержание задания

В соответствие с буквенной literой с помощью табл. 7.1 – 7.2 выбирается расчётный вариант, представляющий собой две различные по сложности электрические цепи.

1. Для цепи из табл. 7.1 рассчитать комплексные входную и передаточную по напряжению функции и построить соответствующие амплитудные и фазовые частотные характеристики. Объяснить особенности этих характеристик, исходя из физических процессов исследуемой цепи.

2. Для цепи из табл. 7.2 найти передаточную по напряжению функцию $H(j\omega)$ и построить её амплитудную характеристику (АЧХ).

3. Часть задания, соответствующая табл. 7.3 является дополнительной. Предлагается определить частотные характеристики цепи (АЧХ и ФЧХ) с помощью рекомендуемых ниже вычислительных средств и приёмов.

Основы теории

Использование комплексных изображений токов и напряжений позволяет устанавливать соотношения между ними в алгебраической форме. Связь между входными величинами $E(j\omega)$, $I_1(j\omega)$, $U_1(j\omega)$ и выходными $I_2(j\omega)$, $U_2(j\omega)$, устанавливается посредством передаточной функции следующим соотношением:

$$F_2(j\omega) = H(j\omega) \cdot F_1(j\omega),$$

где: $H(j\omega)$ – комплексная передаточная функция цепи, является рациональной дробью аргумента $j\omega$. $F_1(j\omega) = \dot{F}_1$ и $F_2(j\omega) = \dot{F}_2$ – комплексные изображения входных и выходных величин. Передаточная функция

$H(j\omega)$ используется при анализе гармонических режимов и определяется отношением

$$H(j\omega) = F_2(j\omega)/F_1(j\omega). \quad (7.1)$$

Это дробь аргумента $j\omega$, где ω – угловая частота воздействия F_1 и реакции F_2 . Передаточная функция

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}, \quad (7.2)$$

является комплексной функцией, модуль которой

$$|H(j\omega)| = F_2 / F_1 = H(\omega)$$

выражает отношение действующих значений (или амплитуд) реакции и воздействия и называется АЧХ – амплитудно-частотной характеристикой цепи. Аргумент $\theta(\omega) = \psi_2 - \psi_1$ определяет фазовый сдвиг между выходной реакцией и воздействием, называется ФЧХ – фазовой частотной характеристикой цепи.

Входными функциями цепи называются комплексное сопротивление

$$Z = Z(j\omega) = \dot{U}(j\omega)/\dot{I}(j\omega) = |Z|e^{j\varphi(\omega)} = r(\omega) + jx(\omega) \quad (7.3)$$

и комплексная проводимость

$$Y = Y(j\omega) = \dot{I}(j\omega)/\dot{U}(j\omega) = 1/Z(j\omega) \quad (7.4)$$

Они выражаются рациональной дробью аргумента $j\omega$. Модулем комплексного входного сопротивления является полное сопротивление цепи $|Z| = z$, а аргументом $\varphi(\omega)$ – фазовый сдвиг между напряжением и током на входе цепи. Последние тоже являются частотными характеристиками, отражающими изменение полного сопротивления цепи и фазового сдвига с изменением частоты воздействия.

Функция $x(\omega) = \text{Im}[Z(j\omega)]$ – мнимая часть функции $Z(j\omega)$, определяет резонансные частоты. Частоты, при которых $x(\omega) = 0$, соответствуют резонансам напряжения. Это частоты, при которых $|Z| = z$ имеет минимум, ток максимум, а ФЧХ – $\varphi(\omega)$ – меняет знак. Аналогичным образом частоты, при которых $y(\omega) = \text{Im}[Y(j\omega)] = 0$, определяют резонансы токов, когда ток цепи имеет минимальное значение.

Пример выполнения задания №7.

Пример выполнения задания №7 проиллюстрируем с помощью расчёта передаточных и входных функций для цепей относительно простой топологии, и построения соответствующих частотных характеристик. Для построения частотных характеристик более сложной цепи ис-

пользуем уже, применявшуюся ранее, программу Electronic WorkBench Pro 5 (EWB).

1. Определим комплексные передаточную по напряжению и входную функции ненагруженного четырёхполюсника, схема которого изображена на рис. 7.1 и построим соответствующие частотные характеристики при следующих значениях параметров цепи: $L_1 = 0,0318$ Гн, $r_1 = r_2 = r_3 = 100$ Ом.

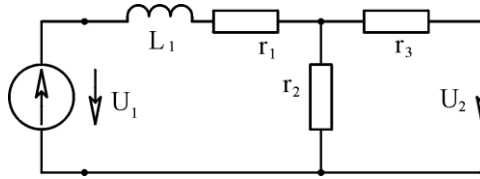


Рис. 7.1

В соответствии с (7.1) $H(j\omega) = H_U(j\omega) = U_2(j\omega) / U_1(j\omega) = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$. Четырёхполюсник ненагруженный, и по резистору r_3 ток не протекает, выходное напряжение U_2 равно напряжению на резисторе r_2 .

$$\dot{U}_2 = r_2 \dot{I} = r_2 \frac{\dot{U}_1}{(r_1 + r_2) + j\omega L_1} \quad \text{и} \quad H(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{r_2}{(r_1 + r_2) + j\omega L_1}.$$

Следует обратить внимание на то, что в окончательном выражении передаточной функции отсутствуют какие либо токи или напряжения. У линейной электрической цепи свойства определяются исключительно параметрами её элементов и топологией и не зависят от режима работы.

Для определения АЧХ и ФЧХ перепишем выражение передаточной функции в показательной (экспоненциальной) форме (7.2). При этом, как было показано ранее, модуль будет соответствовать АЧХ, а аргумент ФЧХ.

$$H(j\omega) = \frac{r_2}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (\omega L_1)^2}} \cdot e^{-j \cdot \text{Arctg}\left(\frac{\omega L_1}{r_1 + r_2}\right)}.$$

Ниже, на рис. 7.2а и б, приведены графики:

$$\text{АЧХ} - |H(j\omega)| = \frac{r_2}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (\omega L_1)^2}} = \frac{100}{\sqrt{4 \cdot 10^4 + 1,01 \cdot 10^{-3} \cdot \omega^2}}$$

$$\text{и ФЧХ} - \theta(\omega) = -\text{Arctg}\left(\frac{\omega L_1}{r_1 + r_2}\right) = -\text{Arctg}(1,59 \cdot 10^{-4} \omega).$$

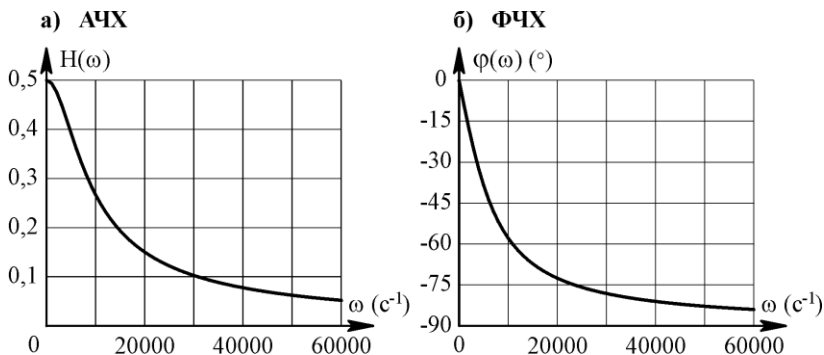


Рис. 7.2

При нулевом значении угловой частоты (на входе цепи постоянное напряжение), сопротивление индуктивности равно нулю. Четырёх-полюсник при этом становится резистивным делителем напряжения, не изменяющим фазу. Так как первый и второй резисторы одинаковые, напряжение на выходе равно половине входного ($H(0) = 0,5$). С ростом частоты, растёт сопротивление индуктивности, уменьшается ток и соответственно выходное напряжение. В пределе оно стремится к нулю. Одновременно ток (и выходное напряжение) с ростом частоты всё более отстают по фазе, так как индуктивное сопротивление становится преобладающим. В пределе это отставание стремится к -90° .

Приведённые характеристики дают исчерпывающую информацию о поведении цепи при гармоническом воздействии любой частоты.

Входная функция четырёхполюсника, его комплексное сопротивление (7.3) :

$$Z_{BX}(j\omega) = Z_{BX} = r_1 + j\omega L_1 + r_2 = 200 + j0,0318 \cdot \omega = \\ = \sqrt{4 \cdot 10^4 + 1,01 \cdot 10^{-3} \cdot \omega^2} \cdot e^{j \cdot \text{Arctg}(1,59 \cdot 10^{-4} \cdot \omega)} \text{ Ом.}$$

Анализ частотных функций: $z_{BX}(\omega) = \sqrt{4 \cdot 10^4 + 1,01 \cdot 10^{-3} \cdot \omega^2}$ и $\theta(\omega) = \varphi(\omega) = \text{Arctg}(1,59 \cdot 10^{-4} \omega)$ показывает, что с ростом частоты от нуля до бесконечности, входное сопротивление изменяется от 200 Ом (при постоянном входном напряжении) до бесконечности (разрыв цепи), а угол фазового сдвига между входным напряжением и током от нуля (резистивный характер) до $+90^\circ$.

2. Определим комплексную передаточную по току функцию нагруженного четырёхполюсника, схема которого изображена на рис. 7.3 и

построим его амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) при следующих значениях параметров: $L = 0,0282$ Гн, $C = 10$ мкФ, $r_1 = r_n = 100$ Ом.

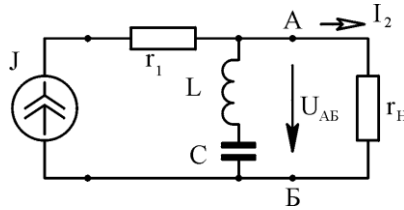


Рис. 7.3

Передаточная функция по току определяется отношением:

$H_I(j\omega) = \frac{\dot{I}_2}{\dot{J}}$. Ток нагрузки $\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{AB}}{r_n}$. В соответствии с законом Ома:

$$\dot{U}_{AB} = j \frac{[j\omega L + 1/(j\omega C)] \cdot r_n}{j\omega L + 1/(j\omega C) + r_n}.$$

Передаточная функция:

$$H_I(j\omega) = j \frac{j\omega L + 1/(j\omega C)}{j\omega L + 1/(j\omega C) + r_n}.$$

Амплитудно – частотная характеристика есть модуль последнего выражения:

$$|H_I(j\omega)| = \sqrt{\frac{(1 - \omega^2 LC)^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega C r_n)^2}} = \sqrt{\frac{(1 - 2.82 \cdot 10^{-7} \omega^2)^2}{(1 - 2.82 \cdot 10^{-7} \omega^2)^2 + 10^{-6} \omega^2}}.$$

На рис. 7.4 приведена эта характеристика. Не трудно заметить, что при значениях угловой частоты $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$, передаточная функция по модулю одинакова и равна единице. Физически это объясняется тем, что при этих частотах сопротивление участка $L - C$ равно бесконечности и весь ток протекает через нагрузку. При частоте $\omega = 1883 \text{ с}^{-1}$ ($f \approx 300$ Гц), АЧХ равна нулю. Это резонансная частота участка $L - C$ ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{10 \cdot 10^{-6} \cdot 0,0282} = 1883,11 \text{ с}^{-1}$). Сопротивление участка $L - C$ равно нулю и он полностью шунтирует нагрузку.

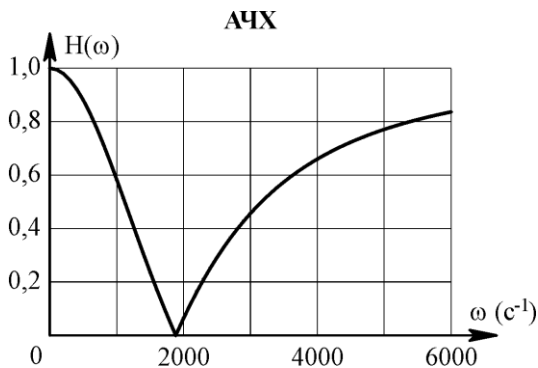


Рис. 7.4

3. Механизм определения частотных характеристик, рассмотренный в приведённых примерах, пригоден и для цепей сложной конфигурации. Однако практическую реализацию затрудняет большое число математических преобразований, что не редко приводит к вычислительным ошибкам. Избежать этого позволяет применение современных вычислительных средств, таких как MathCad, EWB и других. Определим АЧХ (по напряжению) цепи, схема которой изображена на рис. 7.5 посредством программы EWB.

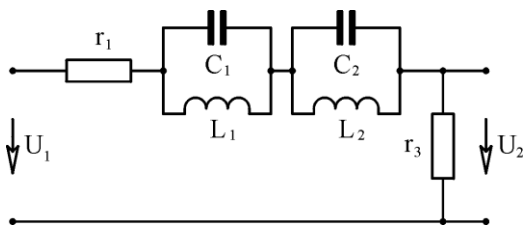


Рис. 7.5

На рис. 7.6 представлено рабочее поле программы EWB со схемой, изображённого выше на рис. 7.5 четырёхполюсника, при следующих численных значениях параметров: $r_1 = 10$ Ом, $r_3 = 100$ Ом, $L_1 = 0,2$ Гн, $L_2 = 0,05$ Гн и $C_1 = C_2 = 1$ мкФ. В том же поле размещён экран Vode Plotter – прибора, предназначенного для определения частотных характеристик (АЧХ и ФЧХ), с изображением амплитудной характеристики цепи рис. 7.5.

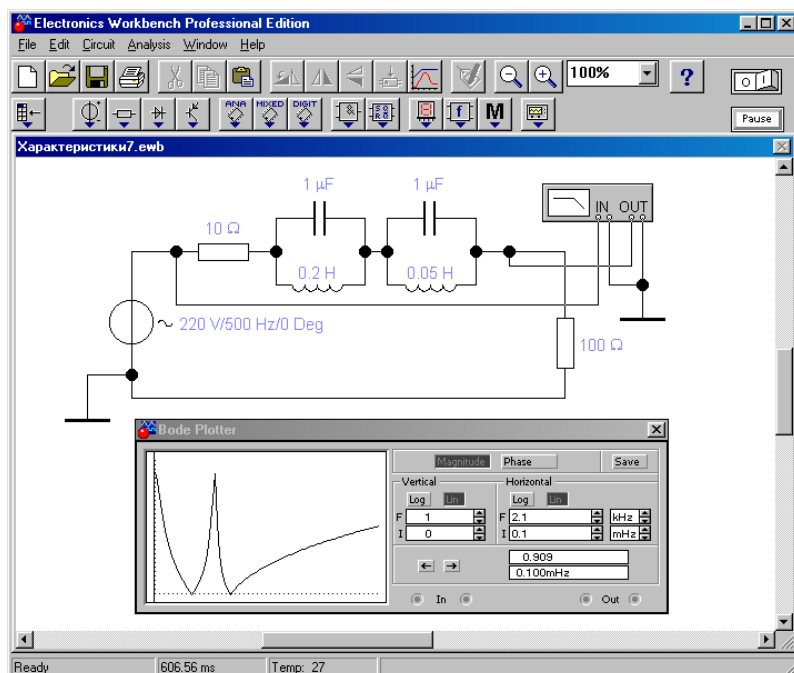


Рис. 7.6

Из графика АЧХ видно, что при значениях частот $f_1 = 355$ Гц и $f_3 = 711$ Гц имеют место полные резонансы токов. Это просто объяснить тем, что резонансы токов первого и второго $L - C$ контуров имеют место на этих частотах.

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 10^{-6} \cdot 0,2}} = 355 \text{ Гц} ;$$

$$f_3 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 10^{-6} \cdot 0,05}} = 711 \text{ Гц} .$$

Соответственно сопротивления $L - C$ контуров при $f = f_1$ или $f = f_3$ равны бесконечности. При частоте $f_2 = 562$ Гц АЧХ имеет максимум. Это объясняется тем, что на участке, представляющим собой последовательное соединение двух $L - C$ контуров имеет место резонанс напряжений. f_2 это частота, при которой $\text{Im}[Z(j\omega)] = 0$. Вычислим значение этой частоты и сравним с данными экрана прибора Bode Plotter.

$$\begin{aligned}
 Z(j\omega) &= r_1 + \frac{\frac{1}{j\omega C_1} \cdot j\omega L_1}{\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1} + \frac{\frac{1}{j\omega C_2} \cdot j\omega L_2}{\frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2} + r_3 = \\
 &= r_1 + j \frac{\omega L_1 - \omega^3 L_1 L_2 C_2 + \omega L_2 - \omega^3 L_1 L_2 C_1}{(1 - \omega^2 L_1 C_1)(1 - \omega^2 L_2 C_2)} + r_3 .
 \end{aligned}$$

Приравнявая мнимую часть Z (достаточно числитель мнимой части), к нулю получим

$$\omega = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2} \cdot \frac{1}{C_1 + C_2}} = \sqrt{\frac{0,25}{0,01} \cdot \frac{10^6}{2}} = 3535,5 \text{ с}^{-1} = \omega_2,$$

и соответственно $f_2 = \omega_2 / (2\pi) = 562,7 \text{ Гц}$.

При нулевой (постоянное воздействие) и бесконечно большой частотах значение АЧХ одинаково. Так как при этих частотах сопротивления индуктивностей или ёмкостей оказываются равными нулю, четырёхполюсник на этих частотах превращается в резистивный делитель напряжения с АЧХ:

$$|H| = \frac{r_3}{r_1 + r_3} = \frac{100}{10 + 100} = 0,9091.$$

Таблица 7.1

Условия задачи №1

Вариант	Схема	Значения параметров
А		$r_1 = 100\text{ мОм},$ $r_2 = 200\text{ мОм},$ $C = 0,25\text{ м} \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$
Б		$r_1 = 200\text{ мОм},$ $r_2 = 100\text{ мОм},$ $L_1 = 0,5\text{ м} \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$
В		$r_1 = 100\text{ мОм},$ $r_2 = 200\text{ мОм},$ $C = 0,125\text{ м} \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$
Г		$r_1 = 100\text{ мОм},$ $r_2 = 100\text{ мОм},$ $L_1 = 0,5\text{ м} \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$
Д		$r_1 = 250\text{ мОм},$ $r_2 = 250\text{ мОм},$ $C = 0,25\text{ м} \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$

Таблица 7.2

Условия задачи №2

Вариант	Схема	Значения параметров
А		$C_1 = 1/m \cdot 10^{-3} \text{ Ф.}$ $L_1 = m \cdot 10^{-3} \text{ Гн,}$ $r_2 = 1 \text{ кОм.}$
Б		$L_1 = 2m \cdot 10^{-3} \text{ Гн,}$ $C_2 = 0,5/m \cdot 10^{-3} \text{ Ф,}$ $r_2 = 1 \text{ кОм.}$
В		$r_1 = 3 \text{ кОм,}$ $L_1 = 3m \cdot 10^{-3} \text{ Гн,}$ $C_2 = 0,33/m \cdot 10^{-3} \text{ Ф.}$
Г		$C_1 = 0,25/m \cdot 10^{-3} \text{ Ф,}$ $L_2 = 4m \cdot 10^{-3} \text{ Гн,}$ $r_2 = 1 \text{ кОм.}$
Д		$r_1 = 3 \text{ кОм,}$ $C_1 = 0,2/m \cdot 10^{-3} \text{ Ф,}$ $L_2 = 5m \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$

Таблица 7.3

Условия задачи №3

Вариант	Схема	Значения параметров
А		$r_1 = 10 \text{ Ом},$ $r_2 = 120 \text{ мОм},$ $C_2 = C_3 = 1 \text{ мкФ},$ $L_3 = 0,05 \text{ Гн},$ $r_4 = 100 \text{ Ом}.$
Б		$r_1 = 10 \text{ Ом},$ $L_2 = 0,12 \text{ мГн},$ $C_2 = C_3 = 1 \text{ мкФ},$ $L_3 = 0,05 \text{ Гн},$ $r_4 = 100 \text{ Ом}.$
В		$r_1 = 10 \text{ Ом},$ $r_2 = 120 \text{ мОм},$ $L_2 = 0,2 \text{ Гн},$ $C_3 = 1 \text{ мкФ},$ $L_3 = 0,05 \text{ Гн},$ $r_4 = 100 \text{ Ом}.$
Г		$r_1 = r_2 = 10 \text{ Ом},$ $C_2 = 0,5 + (m-1) \text{ мкФ},$ $C_3 = 1 \text{ мкФ},$ $L_3 = 0,05 \text{ Гн},$ $r_4 = 100 \text{ Ом}.$
Д		$r_1 = r_2 = 10 \text{ Ом},$ $L_2 = 0,12 \text{ мГн},$ $C_3 = 1 \text{ мкФ},$ $L_3 = 0,05 \text{ Гн},$ $r_4 = 100 \text{ Ом}.$

Задание №8

Несинусоидальные периодические воздействия. Дискретные спектры.

В этом задании рассматривается анализ режима линейных электрических цепей при периодических несинусоидальных (негармонических) воздействиях. Показано представление временных функций такого типа в частотной области. Даны математические преобразования (ряд Фурье в комплексной форме), а также основные приёмы анализа с использованием дискретных частотных спектров токов и напряжений.

Содержание задания

Отыскав по буквенной литературе с помощью табл. 8.1 – 8.2 свой вариант, выполнить следующие расчёты:

1. Для цепи из табл. 8.1 рассчитать токи во всех ветвях и напряжения на всех участках при заданном несинусоидальном воздействии. Найти показания приборов.

2. Для цепи из табл. 8.2 найти реакцию на заданное несинусоидальное воздействие. Построить временные диаграммы воздействия и реакции, а так же их амплитудные и фазовые дискретные спектры. Соответствующие графики должны быть размещены рядом (график реакции ниже под графиком воздействия или рядом с ним) с одинаковыми масштабами по временным и частотным осям.

Основы теории

Из курса высшей математики известно, что любая периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть представлена рядом Фурье. В общем виде:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \psi_k).$$

Конкретно для периодического напряжения (тока, э.д.с.) это сумма синусоидальных составляющих кратных частот:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots = \\ &= U_0 + U_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{m2} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots + \\ &\quad + U_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k) + \dots \end{aligned} \quad (8.2)$$

где $A_0/2 = u_0 = U_0$ – постоянная составляющая, которую иногда называют нулевой гармоникой;

$u_1 = U_{m1} \sin(\omega t + \psi_1)$ – первая, или основная гармоника;

$u_2 = U_{m2} \sin(2\omega t + \psi_2)$ – вторая гармоника; и т.д. ... ;

$u_k = U_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k)$ – k-я гармоника.

Хотя верхний предел в выражении (8.1) бесконечность, в расчетах учитывается конечное число гармонических составляющих, т.к. в реальных электроэнергетических устройствах с ростом порядкового номера гармоники уменьшается её амплитудное значение.

Известный из теоретического курса принцип наложения (см. Задание №3) позволяет при расчёте режима в линейной цепи рассматривать каждую гармоническую составляющую в качестве отдельного независимого воздействия. При этом для нахождения частичных токов и напряжений можно использовать все известные методы расчёта в том числе комплексный. Если, например, частичный ток i_0 будет реакцией на воздействие u_0 , i_1 – на воздействие u_1 , а i_k – на воздействие u_k , то результат $i(t) = i_0 + i_1 + \dots + i_k + \dots$. При этом следует помнить, что результат есть сумма мгновенных значений и ни в коем случае не комплексов, т.е. $\dot{I}_m \neq \dot{I}_{m0} + \dot{I}_{m1} + \dots + \dot{I}_{mk} + \dots$.

Действующие значения периодических несинусоидальных напряжений и токов находят через действующие значения гармонических составляющих:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + \dots + U_k^2 + \dots}$$

$$\text{Аналогично} \quad I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + \dots + I_k^2 + \dots} \quad (8.3)$$

$$\text{Активная, или средняя мощность:} \quad P = P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots$$

Путём математических преобразований ряд Фурье (8.1) может быть переписан в комплексной форме. Такое представление даёт ряд преимуществ при анализе установившихся режимов в электрической цепи. Наиболее распространённая комплексная форма записи ряда Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{jk\omega t} \cdot F(jk\omega) \quad (8.4)$$

$$F(jk\omega) = \int_{t=-T/2}^{t=+T/2} f(t) e^{-jk\omega t} dt = F(k\omega) e^{j\alpha(k\omega)}$$

Математический механизм реализации (8.4) излагается в лекционных курсах ТОЭ и Высшей математики. Кроме того, определённый интеграл может быть вычислен посредством стандартных программных продуктов, например MathCad. В лекционном курсе показано, что каж-

дому значению k в (8.4) соответствует комплексное слагаемое:

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\psi_k}, \text{ где } A_k = \frac{2}{T} \cdot F(k\omega), \text{ а } \psi_k = \alpha(k\omega) + \pi/2. \text{ Эти функции уг-}$$

ловой частоты ω представляют собой последовательность амплитуд и фаз для целых значений k , и называются дискретными амплитудными и фазовыми частотными спектрами функции $f(t)$. При анализе цепей частотные функции A_k и ψ_k имеют важное значение, т.к. позволяют представить временную функцию $f(t)$ в частотной области. В качестве примера изобразим графики амплитудного и фазового дискретных спектров временной функции $i(t) = 0,5 + 2 \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) + 1 \cdot \sin(3\omega t - 90^\circ)$ А при частоте основной гармоники $f = 50$ Гц. ($\omega = 314 \text{ с}^{-1}$).

На рис. 8.1 изображены графики тока и его гармонических составляющих во временной области.

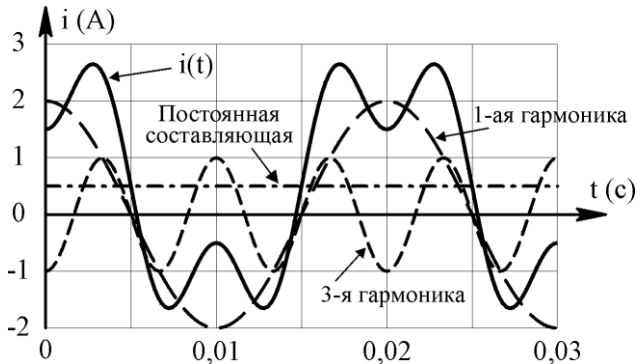


Рис. 8.1

Ниже, на рис. 8.2 а) и б), представлены соответствующие дискретные спектры. Необходимо уяснить, что на рис. 8.1 и 8.2 изображён один и тот же несинусоидальный ток как непрерывная функция времени и дискретная функция частоты.

В том случае, когда требуется анализ по входу и выходу, реакция может быть найдена через комплексную передаточную функцию цепи. Известно (см. Задание №7), что связь между входным воздействием и реакцией, при гармоническом режиме, устанавливается посредством передаточной функции следующим соотношением: $F_2(j\omega) = H(j\omega) F_1(j\omega)$, где $H(j\omega)$ — комплексная передаточная функция цепи, а $F_1(j\omega)$ и $F_2(j\omega)$ комплексы гармонических воздействия $f_1(t)$ и реакции $f_2(t)$. Если воздействие несинусоидальная периодическая функция (8.1):

$$f_1(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \psi_{1k}),$$

то на основе принципа наложения, реакция определится следующим образом:

$$f_2(t) = \frac{A_0}{2} \cdot H(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot H(jk\omega) \sin[k\omega t + \psi_{1k} + \theta(k\omega)], \quad (8.5)$$

здесь $\psi_{1k} + \theta(k\omega) = \psi_{2k}$ – фаза k -ой гармоники реакции $f_2(t)$.

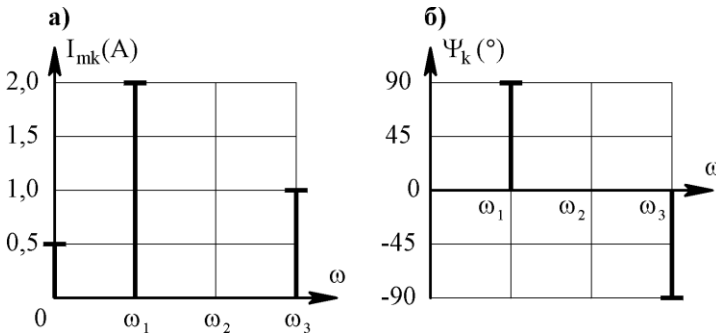


Рис. 8.2

Спектральное представление непериодических функций удобно при анализе режима цепи в силу своей наглядности. Выражение 8.5 позволяет оценить спектральный состав реакции, не прибегая к детальному расчёту. Пусть для примера напряжение

$$u_1(t) = 100 \cdot \sin \omega t + 200 \cdot \sin(3\omega t + 45^\circ) + 100 \cdot \sin 3\omega t + \\ + 200 \cdot \sin(4\omega t + 45^\circ) + 100 \cdot \sin 5\omega t \text{ В ,}$$

дискретный амплитудный спектр, которого изображён на рис. 8.3а, подаётся на вход цепи с комплексной передаточной функцией:

$$H(j\omega) = \frac{170(1 - 1,127 \cdot 10^{-6} \omega^2)}{170(1 - 1,127 \cdot 10^{-6} \omega^2) + j0,1\omega}.$$

Частота первой гармоники 50 Гц ($\omega = 314 \text{ с}^{-1}$). АЧХ передаточной функции изображена на том же рисунке пунктирной линией. Рядом (8.3б) амплитудный спектр выходного напряжения (реакции). Его составляющие получены на основе выражения 8.5 перемножением элемента входного спектра, соответствующего частоте гармоники, на значение АЧХ при этой частоте.

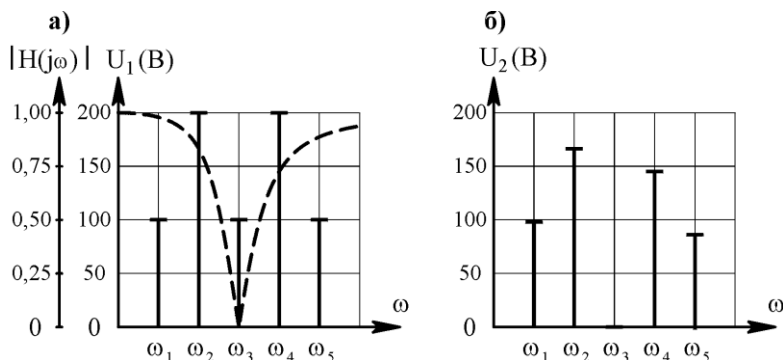


Рис. 8.3

По существу не выполняя вычислений, можно утверждать, что в выходном напряжении $u_2(t)$, будет отсутствовать третья гармоника, амплитуды чётных гармоник незначительно уменьшатся, а амплитуды первой и пятой почти не претерпевают изменений.

Аналогичным образом можно проанализировать и фазовый спектр напряжения $u_2(t)$.

Пример выполнения задания №8.

В качестве примера рассчитаем токи и напряжения, а также найдём показания приборов в цепи, схема которой приведена на рис. 8.4, если ко входу приложено несинусоидальное, периодическое напряжение $u(t) = 20 + 50\sin(314t) + 20\sin(3 \cdot 314t + 45^\circ)$ В. Параметры элементов цепи: $r = 10$ Ом, $L = 0,0318$ Гн, $C = 318 \cdot 10^{-6}$ Ф.

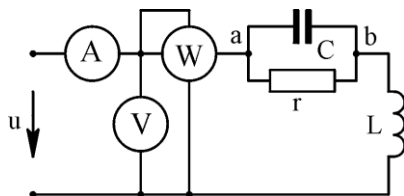


Рис 8.4

Полный ток цепи есть наложение реакций от всех гармоник входного напряжения $i(t) = i_0 + i_1 + i_3$. Для расчёта составляющих применим

комплексный метод, в соответствии с которым, комплексная амплитуда каждой гармоники $\dot{I}_{mk} = \dot{U}_{mk} / Z_k$, где Z_k – полное комплексное сопротивление цепи для k -ой гармоники. Угловая частота первой гармоники $\omega_1 = 314 \text{ с}^{-1}$, третьей – $\omega_3 = 3\omega_1 = 3 \cdot 314 \text{ с}^{-1}$. Постоянную составляющую (нулевую гармонику) можно определять по общим правилам, полагая частоту $\omega_0 = 0$. Полное сопротивление:

$$Z_k = Z_{a\bar{b}(k)} + Z_{L(k)} = \frac{r \cdot \frac{1}{jk\omega_1 C}}{r + \frac{1}{jk\omega_1 C}} + jk\omega_1 L = \frac{r}{1 + jk\omega_1 rC} + jk\omega_1 L.$$

Численные значения:

$k = 0$, $Z_0 = r = 10 \text{ Ом}$. При нулевой частоте (постоянное напряжение) ёмкость C представляет разрыв, а индуктивность L короткое замыкание, т.е. резистор r будет полным сопротивлением цепи.

$$k = 1, \quad Z_1 = \frac{10}{1 + j \cdot 1 \cdot 314 \cdot 10 \cdot 318 \cdot 10^{-6}} + j \cdot 1 \cdot 314 \cdot 0,0318 = \\ = \frac{10}{1 + j} + j10 = 5 - j5 + j10 = 7,07e^{j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$k = 3, \quad Z_3 = \frac{10}{1 + j \cdot 3 \cdot 314 \cdot 10 \cdot 318 \cdot 10^{-6}} + j \cdot 3 \cdot 314 \cdot 0,0318 = \\ = \frac{10}{1 + j3} + j30 = 1 - j3 + j30 = 27,02e^{j87,9^\circ} \text{ Ом}.$$

Нулевая, первая и третья гармоники полного тока: $\dot{I}_{mk} = \dot{U}_{mk} / Z_k$.

$$\dot{I}_{m0} = \dot{U}_{m0} / Z_0 = 20 / 10 = 2 \text{ А}, \quad i_0 = 2 \text{ А}; \\ \dot{I}_{m1} = \frac{\dot{U}_{m1}}{Z_1} = \frac{50e^{j0}}{7,07e^{j45^\circ}} = 7,07e^{-j45^\circ} \text{ А}, \quad i_1 = 7,07 \sin(314t - 45^\circ) \text{ А}; \\ \dot{I}_{m3} = \frac{\dot{U}_{m3}}{Z_3} = \frac{20e^{j45^\circ}}{27,02e^{j87,9^\circ}} = 0,74e^{-j42,9^\circ} \text{ А}, \quad i_3 = 0,74 \sin(3 \cdot 314t - 42,9^\circ) \text{ А}.$$

Полный ток цепи

$$i(t) = 2 + 7,07 \sin(314t - 45^\circ) + 0,74 \sin(3 \cdot 314t - 42,9^\circ) \text{ А}.$$

Гармонические составляющие напряжения на участке $a-b$ на основании закона Ома: $\dot{U}_{a\bar{b}(k)} = Z_{a\bar{b}k} \dot{I}_{mk}$.

$$\begin{aligned}\dot{U}_{ma\bar{b}(0)} &= Z_{a\bar{b}0} \dot{I}_{m0} = 10 \cdot 2 = 20 \text{ В}, & u_{a\bar{b}0} &= 20 \text{ В}; \\ \dot{U}_{ma\bar{b}(1)} &= Z_{a\bar{b}1} \dot{I}_{m1} = (5 - j5) \cdot 7,07 e^{-j45^\circ} = 50 e^{-j90^\circ} \text{ В}, \\ u_{a\bar{b}1} &= 50 \sin(314t - 90^\circ) \text{ В}; \\ \dot{U}_{ma\bar{b}(3)} &= Z_{a\bar{b}3} \dot{I}_{m3} = (1 - j3) \cdot 0,74 e^{-j42,9^\circ} = 2,34 e^{-j114,5^\circ} \text{ В}, \\ u_{a\bar{b}3} &= 2,34 \sin(3 \cdot 314t - 114,5^\circ) \text{ В}.\end{aligned}$$

Соответственно

$$u_{a\bar{b}}(t) = 20 + 50 \sin(314t - 90^\circ) + 2,34 \sin(3 \cdot 314t - 114,5^\circ) \text{ В}.$$

Точно так же напряжение на участке с индуктивностью L :
 $\dot{U}_{mL(k)} = Z_{Lk} \dot{I}_{mk}$. Выполнив аналогичные вычисления, получим:

$$u_L(t) = 70,7 \sin(314t + 45^\circ) + 22,2 \sin(3 \cdot 314t + 47,1^\circ) \text{ В}.$$

Нулевая составляющая в этом напряжении отсутствует, так как сопротивление $Z_{L0} = 0$. Для определения токов через резистор и ёмкость найдём комплексные амплитуды составляющих:

$$\dot{I}_{mr(k)} = \dot{U}_{ma\bar{b}(k)} / r, \quad \dot{I}_{mC(k)} = \dot{U}_{ma\bar{b}(k)} / \left(\frac{1}{jk\omega C} \right). \quad \text{Ток через резистор:}$$

$i_r(t) = 2 + 5 \sin(314t - 90^\circ) + 0,234 \sin(3 \cdot 314t - 114,5^\circ) \text{ А}$, а через ёмкость:
 $i_C(t) = 5 \sin 314t + 0,703 \sin(3 \cdot 314t - 24,5^\circ) \text{ А}$. Нулевая гармоника в ёмкостном токе отсутствует, т.к. сопротивление ёмкости для постоянной составляющей равно бесконечности.

Показания вольтметра и амперметра есть действующие значения приложенного напряжения и полного тока (8.3).

$$\begin{aligned}U &= \sqrt{U_0^2 + \left(\frac{U_{m1}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{U_{m3}}{\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{400 + 1250 + 200} = 43 \text{ В}, \\ I &= \sqrt{I_0^2 + \left(\frac{I_{m1}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{I_{m3}}{\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{4 + 25 + 0,274} = 5,41 \text{ А}.\end{aligned}$$

Ваттметр показывает активную мощность, потребляемую цепью.

$$\begin{aligned}
 P &= P_0 + P_1 + P_3 = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 = \\
 &= 20 \cdot 2 + \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7,07}{\sqrt{2}} \cos(0 - (-45^\circ)) + \frac{20}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0,74}{\sqrt{2}} \cos(45^\circ - (-42,9^\circ)) = \\
 &= 165,24 \text{ Вт.}
 \end{aligned}$$

В следующем примере определим реакцию цепи на несинусоидальное периодическое воздействие:

$$u_2(t) = 100 \sin(314t - 30^\circ) + 50 \sin 3 \cdot 314t + 100 \sin(5 \cdot 314t + 30^\circ) \text{ В.}$$

Построим графики воздействия и реакции и их амплитудные и фазовые дискретные спектры. Схема цепи изображена на рис. 8.5. Параметры элементов цепи: $r = 30 \text{ Ом}$, $L = 1,127 \text{ Гн}$, $C = 1 \text{ мкФ}$.

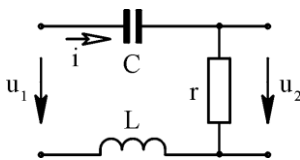


Рис. 8.5

Комплексная по напряжению передаточная функция цепи (рис. 8.5):

$$\begin{aligned}
 H_U(j\omega) &= \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{r \dot{I}}{\dot{U}_1} = \frac{r}{\dot{U}_1} \cdot \frac{\dot{U}_1}{r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \\
 &= \frac{r \cdot e^{j0}}{\sqrt{r^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \cdot e^{j \operatorname{Arctg} \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) / r \right]}}.
 \end{aligned}$$

Соответствующие: АЧХ — $|H_U(j\omega)| = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}},$

и ФЧХ — $\theta(\omega) = -\operatorname{Arctg} \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{r}.$

На основании 8.5:

$$u_2(t) = \sum_{k=1}^5 U_{mk} \cdot |H_U(jk\omega)| \cdot \sin[k\omega t + \psi_{U1k} + \theta(k\omega)].$$

Округляя результаты расчёта до одного процента от максимального напряжения, получим выходное напряжение равное третьей гармонике входного: $u_2(t) = 50 \sin(3 \cdot 314t)$ В. Такой результат можно получить и на основе визуального спектрального анализа. На рис. 8.6, 8.7а и б дискретные спектры и частотные характеристики цепи. При частоте 150 Гц. ($\omega = 942 \text{ с}^{-1}$) имеет место резонанс ($|H(j\omega)| = 1$ и $\theta(j\omega) = 0$). При частотах первой и пятой гармоник значение АЧХ пренебрежимо мало ($|H(j\omega)| = 0,012$ и $|H(j5\omega)| = 0,029$) и в выходном напряжении эти гармоники практически отсутствуют.

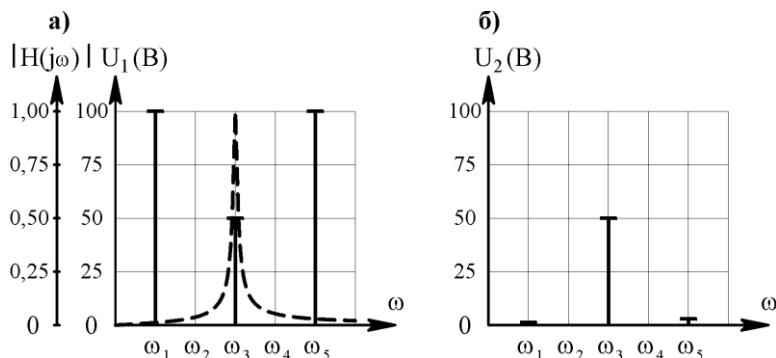


Рис 8.6

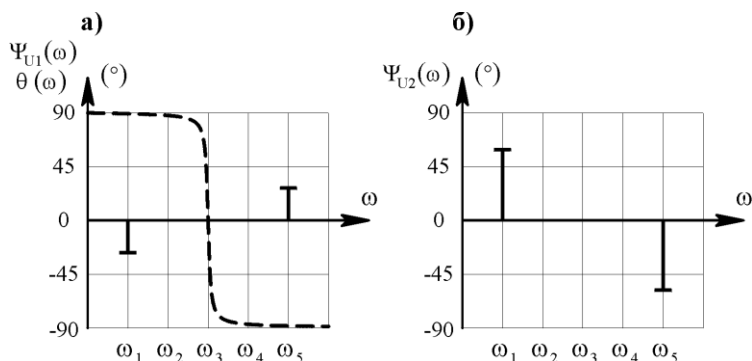


Рис. 8.7

Ниже на рис. 8.8 приведены графики временных функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Не трудно заметить, что выходное напряжение u_2 есть синусоида с частотой третьей гармоники ($f_3 = 150$ Гц.).

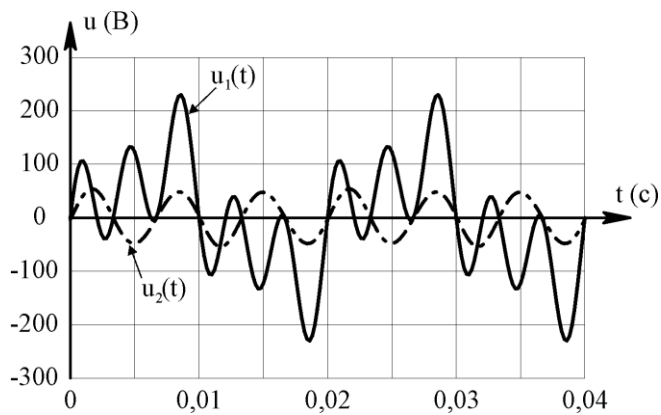


Рис. 8.8

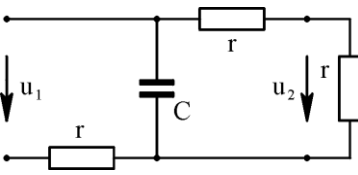
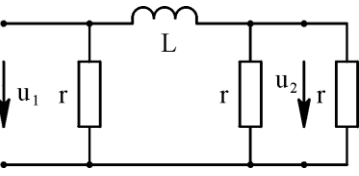
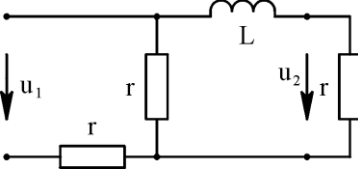
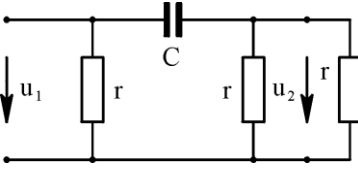
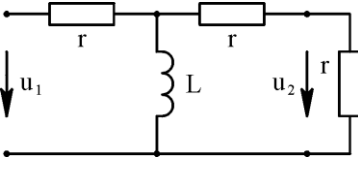
Таблица 8.1

Условия задачи №1

Вариант	Схема	Значения параметров ($\omega = 314 \text{ с}^{-1}$)
А		$r = 1000 \text{ Ом},$ $L = 2,54/m \text{ Гн},$ $C = m \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$ $u = 100 + 100 \sin(2\omega t) + 100 \sin(4\omega t) \text{ В}.$
Б		$r = 500 \text{ Ом},$ $L = 10m/(1 + 40,6m^2) \text{ Гн},$ $C = 1/m \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$ $u = 100 + 100 \sin(\omega t) + 200 \sin(5\omega t) \text{ В}.$
В		$r = 1000 \text{ Ом},$ $L = m \text{ Гн},$ $C = (1 + 0,1m^2)/(314^2 m) \cdot \text{Ф}.$ $u = 100 + 100 \sin(\omega t) + 20 \sin(7\omega t) \text{ В}.$
Г		$r = 500 \text{ Ом},$ $L = 2m \text{ Гн},$ $C = 1,27/m \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$ $u = 50 + 100 \sin(2\omega t) + 50 \sin(4\omega t) \text{ В}.$
Д		$r = 300 \text{ Ом},$ $L = m \text{ Гн},$ $C = 1/m \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$ $u = 200 + 200 \sin(3\omega t) + 100 \sin(7\omega t) \text{ В}.$

Таблица 8.2

Условия задачи №2

Вариант	Схема	Значения параметров ($\omega = 314 \text{ с}^{-1}$)
А		$r = 100 \text{ мОм},$ $C = 1/\text{м} \cdot 10^{-5} \text{ Ф}.$ $u = 30 + 50 \sin(\omega t) + 100 \sin(9\omega t) \text{ В}.$
Б		$r = 120 \text{ мОм},$ $L = 3,5 \text{ мГн},$ $u = 100 + 50 \sin(\omega t) + 25 \sin(7\omega t) \text{ В}.$
В		$r = 75 \text{ мОм},$ $L = 2,5 \text{ мГн},$ $u = 300 + 100 \sin(3\omega t) + 50 \sin(7\omega t) \text{ В}.$
Г		$r = 150 \text{ мОм},$ $C = 0,5/\text{м} \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$ $u = 25 + 50 \sin(\omega t) + 25 \sin(7\omega t) \text{ В}.$
Д		$r = 100 \text{ мОм},$ $L = 3 \text{ мГн},$ $u = 200 + 100 \sin(\omega t) + 25 \sin(9\omega t) \text{ В}.$

Задание № 9

Разложение несимметричных режимов в трёхфазных электрических цепях на симметричные составляющие

Задание является продолжением материала, рассмотренного ранее в задании №5. Предназначено для закрепления знаний по разделу «многофазные электрические цепи». Основной целью задания является отработка методики разложения несимметричных параметров режимов в трёхфазных цепях на симметричные составляющие.

Содержание задания

1. Разложить на симметричные составляющие систему напряжений, действующих между узлами цепи к которым подключены вольтметры: V_1 , V_2 и V_3 , при аварийном состоянии системы электроснабжения. Схема соединения и тип аварии для конкретного варианта даны в табл. 9.1. Там же дана система напряжений, соответствующая нормальному режиму.

2. Построить векторные диаграммы несимметричной системы напряжений и найденной в п. 1 системы симметричных составляющих. Диаграммы построить рядом в одинаковых масштабах.

Основы теории

В задании №5 были рассмотрены различные режимы работы трёхфазных электрических цепей, в том числе несимметричные. В ряде случаев, когда несимметричный режим вызван аварийной ситуацией, эквивалентное сопротивление фаз приёмника электрической энергии (нагрузки) может изменить своё первоначальное значение. При этом новое значение зависит от характера повреждения, и определить его зачастую оказывается сложно. В этом случае при расчёте несимметричного режима предпочтение отдаётся методу симметричных составляющих. Сопротивления симметричных составляющих определить значительно проще, чем сопротивления повреждённых фаз, т.к. сопротивления симметричных составляющих не зависят от характера повреждения и определяется только конструкцией электротехнических устройств. Как правило, эти значения приводятся в технической документации. Несимметричная система э.д.с., напряжений или токов формально может быть представлена наложением трёх симметричных: прямой последовательностью с чередованием фаз $ABC, ABC, AB \dots$; обратной – с чередованием фаз $ACB, ACB, AC \dots$ и нулевой, в которой все фазы совпадают. В соот-

ветствующих разделах теоретического курса показано, что подобное разложение несимметричной системы на составляющие возможно всегда. Находятся симметричные составляющие посредством следующих соотношений:

$$\begin{aligned}\dot{U}_0 &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C); \\ \dot{U}_1 &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C); \\ \dot{U}_2 &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C);\end{aligned}\tag{9.1}$$

где \dot{U}_0, \dot{U}_1 и \dot{U}_2 – нулевая, прямая и обратная последовательности, $a = e^{j2\pi/3} = -1/2 + j\sqrt{3}/2$.

Формулы обратного перехода:

$$\begin{aligned}\dot{U}_A &= \dot{U}_0 + \dot{U}_1 + \dot{U}_2; \\ \dot{U}_B &= \dot{U}_0 + a^2\dot{U}_1 + a\dot{U}_2; \\ \dot{U}_C &= \dot{U}_0 + a\dot{U}_1 + a^2\dot{U}_2.\end{aligned}\tag{9.2}$$

Формулы, аналогичные 9.1 и 9.2, справедливы также для токов и э.д.с.

При повреждениях упомянутого характера вместо расчёта одного несимметричного режима задача сводится к расчёту трёх симметричных по правилам, подробно рассмотренным в задании №5. Параметры несимметричного режима могут быть определены, через найденные симметричные составляющие (9.1), на основе (9.2).

Например, определим несимметричную систему фазных токов, если известна несимметричная система фазных напряжений: $u_A=0$, $u_B = 120\sin(\omega t - 30^\circ)$ В, $u_C = 90 \sin(\omega t + 150^\circ)$ В, а сопротивления нулевой, прямой и обратной последовательностей нагрузки равны: $Z_0 = 10$ Ом и $Z_1 = Z_2 = 50e^{j45^\circ}$ Ом.

На основе формул 9.1 выполним разложение заданного несимметричного режима на составляющие. Комплексные значения исходной системы фазных напряжений:

$$\dot{U}_{mA} = 0, \quad \dot{U}_{mB} = 120e^{-j30^\circ} \text{ В}, \quad \dot{U}_{mC} = 90e^{j150^\circ} \text{ В}. \quad \text{Следовательно:}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{m0} &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C) = \frac{1}{3}(0 + 120e^{-j30^\circ} + 90e^{j150^\circ}) = \\ &= \frac{1}{3}(103,9 - j60 - 77,94 + j50) = \frac{1}{3}(25,96 - j10) = 9,27e^{-j21^\circ} \text{ В};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{U}_{m1} &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C) = \frac{1}{3}(0 + e^{j120^\circ} \cdot 120e^{-j30^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 90e^{j150^\circ}) = \\
&= \frac{1}{3}(j120 + 77,94 - j45) = 36,05e^{j43,9^\circ} \text{ В}; \\
\dot{U}_{m2} &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C) = \frac{1}{3}(0 + e^{-j120^\circ} \cdot 120e^{-j30^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 90e^{j150^\circ}) = \\
&= \frac{1}{3}(-103,9 - j60 - j90) = 45,82e^{-j139,1^\circ} \text{ В}.
\end{aligned}$$

На основе закона Ома, симметричные составляющие для фазных токов:

$$\begin{aligned}
\dot{i}_{m0} &= \dot{U}_{m0} / Z_0 = \frac{9,27e^{-j21^\circ}}{10} = 0,927e^{-j21^\circ} \text{ А}; \\
\dot{i}_{m1} &= \dot{U}_{m1} / Z_1 = \frac{36,05e^{j43,9^\circ}}{50e^{j45^\circ}} = 0,721e^{-j1,1^\circ} \approx 0,72 \text{ А}; \\
\dot{i}_{m2} &= \dot{U}_{m2} / Z_2 = \frac{45,82e^{-j139,1^\circ}}{50e^{j45^\circ}} = 0,916e^{-j184,1^\circ} \text{ А}.
\end{aligned}$$

Теперь несимметричную систему фазных токов нетрудно найти, подставляя найденные значения в формулы обратного преобразования (9.2).

$$\begin{aligned}
\dot{i}_{mA} &= \dot{i}_{m0} + \dot{i}_{m1} + \dot{i}_{m2} = 0,927e^{-j21^\circ} + 0,72 + 0,916e^{-j184,1^\circ} = \\
&= 0,865 - j0,332 + 0,72 - 0,913 + j0,06 = 0,672 - j0,272 = 0,725e^{-j23,45^\circ} \text{ А}; \\
\dot{i}_{mB} &= \dot{i}_{m0} + a^2\dot{i}_{m1} + a\dot{i}_{m2} = 0,927e^{-j21^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 0,72 + e^{j120^\circ} \cdot 0,916e^{-j184,1^\circ} = \\
&= 0,865 - j0,332 - 0,36 - j0,624 + 0,4 - j0,82 = 0,905 - j1,776 = 2e^{-j63^\circ} \text{ А}; \\
\dot{i}_{mC} &= \dot{i}_{m0} + a\dot{i}_{m1} + a^2\dot{i}_{m2} = 0,927e^{-j21^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 0,72 + e^{-j120^\circ} \cdot 0,916e^{-j184,1^\circ} = \\
&= 0,865 - j0,332 - 0,36 + j0,624 + 0,4 + j0,82 = 0,905 - j1,11 = 1,43e^{j51^\circ} \text{ А}.
\end{aligned}$$

Соответствующие мгновенные значения:

$$\begin{aligned}
i_A &= 0,725 \sin(\omega t - 23,45^\circ) \text{ А}, \quad i_B = 2 \sin(\omega t - 63^\circ) \text{ А}, \\
i_C &= 1,43 \sin(\omega t + 51^\circ) \text{ А}.
\end{aligned}$$

Пример выполнения задания № 9

В качестве примера выполнения задания №9, разложим на симметричные составляющие систему напряжений, измеряемых тремя вольтметрами, включёнными со стороны нагрузки, как изображено на рис. 9.1, при коротком замыкании фазы «С».

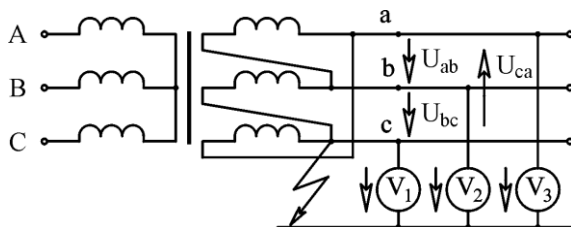


Рис. 9.1.

Система линейных напряжений симметрична: $\dot{U}_{ab} = 380\text{В}$, $\dot{U}_{bc} = 380e^{-j120^\circ}\text{В}$, $\dot{U}_{ca} = 380e^{j120^\circ}\text{В}$. В нормальном режиме напряжения, фиксируемые приборами V_1, V_2 и V_3 , представляет симметричную систему фазных напряжений относительно искусственной нулевой точки с действующим значением $U_\phi = 220\text{В}$. После короткого замыкания потенциал этой точки станет равным потенциалу точки «С» и напряжение вольтметра V_1 станет равным $\dot{U}_{V1} = 0$. Вольтметр V_2 зафиксирует линейное напряжение \dot{U}_{bc} , а V_3 – напряжение $\dot{U}_{ac} = -\dot{U}_{ca}$.

Иными словами, приборы фиксируют несимметричную систему $\dot{U}_{V1} = 0$, $\dot{U}_{V2} = \dot{U}_{bc} = 380e^{-j120^\circ}\text{В}$, $\dot{U}_{V3} = -\dot{U}_{ca} = -380e^{j120^\circ} = 380e^{-j60^\circ}\text{В}$. На основании формул 9.1 найдём симметричные составляющие несимметричной системы, соответствующей показаниям вольтметров после короткого замыкания.

$$\dot{U}_0 = \frac{1}{3}(\dot{U}_{V3} + \dot{U}_{V2} + \dot{U}_{V1}) = \frac{380}{3}(e^{-j60^\circ} + e^{-j120^\circ} + 0) = 220e^{-j90^\circ}\text{В},$$

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{3}(\dot{U}_{V3} + a\dot{U}_{V2} + a^2\dot{U}_{V1}) = \frac{380}{3}(e^{-j60^\circ} + e^{j120^\circ}e^{-j120^\circ} + 0) = 220e^{-j30^\circ}\text{В},$$

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{3}(\dot{U}_{V3} + a^2\dot{U}_{V2} + a\dot{U}_{V1}) = \frac{380}{3}(e^{-j60^\circ} + e^{-j120^\circ}e^{-j120^\circ} + 0) = 0\text{В}.$$

Ниже, на рис. 9.2 приведена топографическая диаграмма напряжений до и после короткого замыкания.

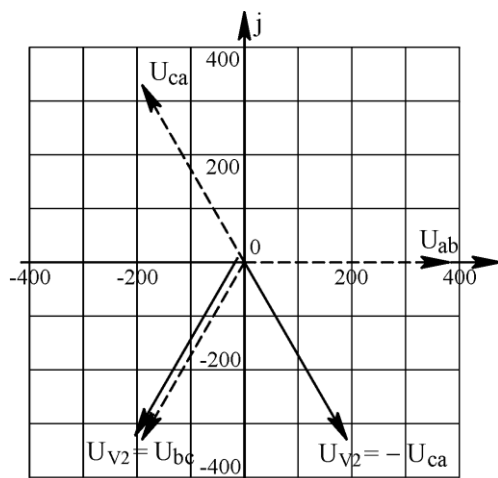


Рис. 9.2

На рис. 9.3 изображены отдельно симметричные составляющие напряжений несимметричного режима а) – нулевая и б) – прямая последовательности. Поскольку все диаграммы имеют одинаковые масштабы, правильность решения может быть проверена с помощью графических построений.

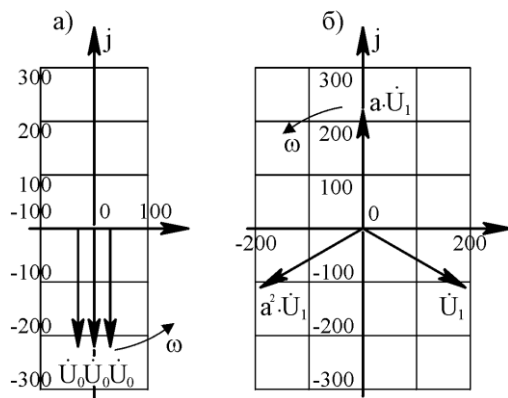
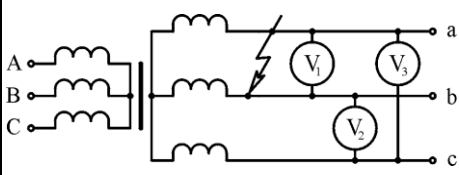
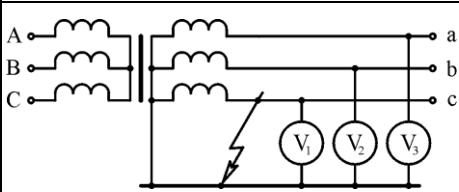
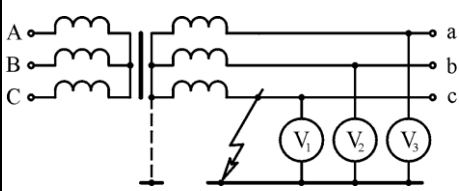
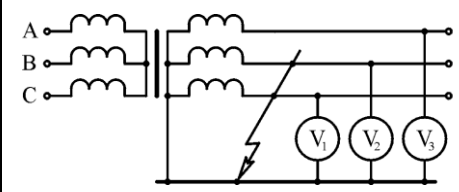
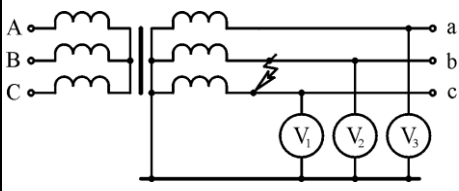


Рис. 9.3

Таблица 9.1

Условия задачи

Вариант	Схема и тип К.З.	Напряжения в нормальном режиме
А		$\begin{aligned}\dot{U}_{ab} &= 220 e^{j(m-1) \cdot 30^\circ} \text{ В}, \\ \dot{U}_{bc} &= \dot{U}_{ab} e^{-j120^\circ} \text{ В}, \\ \dot{U}_{ca} &= \dot{U}_{ab} e^{j120^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$
Б		$\begin{aligned}\dot{U}_a &= 380 e^{j(m-0,5) \cdot 30^\circ} \text{ В}, \\ \dot{U}_b &= \dot{U}_a e^{-j120^\circ} \text{ В}, \\ \dot{U}_c &= \dot{U}_a e^{j120^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$
В		$\begin{aligned}\dot{U}_{ab} &= 220 e^{j(m+1) \cdot 15^\circ} \text{ В}, \\ \dot{U}_{bc} &= \dot{U}_{ab} e^{-j120^\circ} \text{ В}, \\ \dot{U}_{ca} &= \dot{U}_{ab} e^{j120^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$
Г		$\begin{aligned}\dot{U}_a &= 380 e^{j(m/2-1) \cdot 20^\circ} \text{ В}, \\ \dot{U}_b &= \dot{U}_a e^{-j120^\circ} \text{ В}, \\ \dot{U}_c &= \dot{U}_a e^{j120^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$
Д		$\begin{aligned}\dot{U}_a &= 380 e^{j(m/2-1) \cdot 20^\circ} \text{ В}, \\ \dot{U}_b &= \dot{U}_a e^{-j120^\circ} \text{ В}, \\ \dot{U}_c &= \dot{U}_a e^{j120^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$

Задание № 10

Расчёт переходных процессов в простейших линейных электрических цепях

Целью задания является развитие и закрепление навыков расчёта переходных процессов в линейных цепях первого и второго порядка. Даны общие положения расчёта на основе законов коммутации и соответствующих разделов курса высшей математики. Заданием предусмотрена отработка техники расчёта, равно как и оценка физической стороны процесса.

Содержание задания

Задание заключается в определении токов ветвей, возникающих вследствие коммутации. Варианты выбирается в соответствии с буквенной литерой с помощью табл. 10.1 и 10.2, где кроме схемы и параметров, задан тип воздействий и конкретная коммутация.

1. Для цепи из табл. 10.1 найти токи всех ветвей и напряжение на реактивном элементе. Построить графики $i(t)$ и $u(t)$ во временном интервале от начала коммутации до установившегося режима.

2. Для цепи из табл. 10.2 рассчитать переходный процесс. Найти ток и напряжение на ёмкости (при чётных m) и на индуктивности (при нечётных). Построить графики в интервале времени от $t = -0,02$ с (до коммутации) до момента завершения или до момента, когда характер переходного процесса становится ясным.

3. Дать объяснение физическим процессам, имеющим место в цепях в результате коммутации.

Основы теории

1. Из теоретического курса известно, что в линейной электрической цепи, спустя некоторое время после включения под действие напряжения (э.д.с.), возникает установившийся режим с характеристиками, определяемыми свойствами воздействия. Процесс, имеющий место непосредственно после включения и до установившегося режима называется *переходным*. Переходный процесс возникает в результате коммутации, под которой понимается: включение, отключение, переключение, короткое замыкание, обрыв и другие действия, следствием которых и является переходный процесс. Это переход от одного энергетического состояния цепи к другому. Он не может произойти мгновенно, т.к. запас

энергии электрического поля на ёмкости и магнитного поля на индуктивности, как известно из курса физики и раздела ФОЭ настоящего курса, не может измениться мгновенно. Из этого фундаментального положения следуют два ключевых закона, составляющих основу расчёта переходных процессов – **законов коммутации**. В соответствии с этими законами, если время коммутации $\Delta t = 0$, а токи и напряжения имеют конечные значения, то ток на индуктивности и напряжение на ёмкости за время Δt не изменяются:

$$i_L(+0) = i_L(-0), \quad u_C(+0) = u_C(-0); \quad (10.1)$$

здесь время $t = +0$ и $t = -0$ соответствует моментам непосредственно после и до коммутации.

2. Математическая задача расчёта переходного процесса сводится к решению системы дифференциальных уравнений, составленных для цепи после коммутации, на основе законов Кирхгофа (структурных и компонентных уравнений). При формировании системы уравнений их необходимо составлять и преобразовывать, таким образом, чтобы решение базировалось на определении напряжений на ёмкостях – u_C и токов на индуктивностях – i_L . Эти величины, играющие ключевую роль при расчёте переходных процессов, носят название **переменных состояния**. Переменные состояния u_C и i_L однозначно определяют запас электромагнитной энергии цепи в любой момент времени и позволяют просто определить все остальные токи и напряжения.

В общем случае наиболее рациональным путём реализации системы уравнений переменных состояния является запись системы в нормальной форме Коши. Однако для цепей несложной конфигурации, содержащих не более двух реактивных элементов и описываемых уравнениями первого или второго порядка, можно использовать простейшие приёмы расчёта, известные из курса высшей математики. Расчёт сводится к выполнению последовательности следующих действий:

а). Записывается необходимое число уравнений по первому и второму законам Кирхгофа для цепи **после** коммутации;

б). Система разрешается в общем виде относительно искомого тока или напряжения. При этом целесообразно, независимо от того, какая величина является искомой, разрешить систему относительно переменной состояния, т.к. через неё просто находятся все остальные токи и напряжения. В итоге получается дифференциальное уравнение n – го порядка, где n равно числу индуктивностей и ёмкостей. При выполнении этого пункта используются компонентные уравнения.

в). Общий вид решения уравнения, полученного в предыдущем пункте:

$$f(t) = f'(t) + f''(t), \quad (10.2)$$

– где первое слагаемое есть частное решение уравнения, а второе – решение соответствующего однородного уравнения

$$f''(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}.$$

Здесь p – корни характеристического уравнения, A – постоянные интегрирования. Так как корни p в случае линейной цепи не могут быть положительными, $f'' \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Это означает, что f' можно найти как ток или напряжение установившегося режима.

г). Постоянные интегрирования A находятся из алгебраической системы уравнений, представляющей запись решения и его производных, при $t = 0$. Значение токов и напряжений при $t = 0$ находятся на основе законов коммутации, а производных из исходной системы уравнений.

Пусть, для примера, уравнение второго порядка записано для тока, протекающего через индуктивность

$$a_2 \frac{d^2 i_L}{dt^2} + a_1 \frac{di_L}{dt} + a_0 i_L = f(t).$$

Общий вид решения:

$$i_L(t) = i'_L(t) + i''_L(t) = i'_L(t) + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (10.3)$$

Здесь i'_L – частное решение уравнения, определяемое правой частью. Физически это ток установившегося режима; i''_L – это общее решение соответствующего однородного уравнения; p_1 и p_2 – корни характеристического уравнения: $a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$. A_1 и A_2 – постоянные интегрирования. Для их нахождения необходима система уравнений, включающая решение (10.3) в общем виде и его производную. Подставив в (10.3) и его производную, слева и справа $t = 0$, получим алгебраическую систему, решение которой определяет коэффициенты A .

$$\begin{aligned} i_L(0) &= i'_L(0) + A_1 + A_2 \\ \frac{di_L}{dt}(0) &= \frac{di'_L}{dt}(0) + p_1 A_1 + p_2 A_2. \end{aligned}$$

Ток и его производная при $t = 0$ находятся с помощью законов коммутации и из исходных уравнений цепи.

Пример выполнения задания № 10

1. В качестве первого примера выполнения задания, рассчитаем переходный процесс, возникающий в цепи, изображённой на рис. 10.1, в результате замыкания ключа.

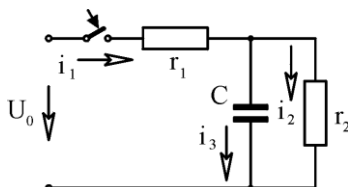


Рис. 10.1

Напряжение U_0 постоянное и равно 100 Вольт. Сопротивления r_1 и r_2 равны 100 Ом, а ёмкость $C = 0,1 \cdot 10^{-6}$ Фарад. Требуется найти токи во всех ветвях цепи после коммутации.

В соответствии с пунктом 2.а, запишем необходимое число структурных уравнений по первому и второму законам Кирхгофа для цепи после коммутации, т.е. при замкнутом ключе. Получим систему:

$$\begin{aligned} -i_1 + i_2 + i_3 &= 0, \\ u_{r_1} + u_{r_2} &= U_0, \\ u_C - u_{r_2} &= 0. \end{aligned}$$

Независимо от того, какой ток или напряжение подлежат определению, разрешим систему относительно переменной состояния, которой в конкретной цепи будет напряжение на ёмкости. С помощью несложных преобразований и компонентных уравнений, приведём исходную систему к одному уравнению первого порядка с одной переменной u_C .

$$u_{r_1} = r_1 i_1 = r_1 (i_2 + i_3); \quad r_1 i_2 + r_1 i_3 + u_{r_2} = U_0; \quad i_3 = C \frac{du_C}{dt};$$

$$i_2 = \frac{u_{r_2}}{r_2} = \frac{u_C}{r_2}; \quad \frac{r_1}{r_2} u_C + r_1 C \frac{du_C}{dt} + u_C = U_0;$$

или: $\frac{du_C}{dt} + \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \cdot \frac{1}{C} u_C = \frac{1}{r_1 C} U_0$. Подставив численные значения, полу-

чим окончательно: $\frac{du_C}{dt} + 2 \cdot 10^5 u_C = 10^7$. В соответствии с 10.3

$u_C(t) = u'_C + u''_C$. Как уже упоминалось, первое слагаемое это напряжение на конденсаторе спустя достаточное время после замыкания ключа. Постоянный ток через конденсатор при этом равен нулю. Напряжение u_C будет равно падению напряжения на резисторе r_2 : $u'_C = r_2 i_2 = r_2 \cdot U_0 / (r_1 + r_2) = 100 \cdot 100 / 200 = 50$ В. Этот же результат можно получить из записанного выше решения, положив в нём производную равной нулю, т.к. по наступлении установившегося режима токи и напряжения достигают постоянного значения: $u'_C = 10^7 / 2 \cdot 10^5 = 50$ В.

Второе слагаемое $u''_C = Ae^{pt}$, где p – корень характеристического уравнения $p + 2 \cdot 10^5 = 0$, $p = -2 \cdot 10^5$. Тогда $u_C = 50 + Ae^{-2 \cdot 10^5 t}$. Подставив слева и справа $t = 0$, получим уравнение, из которого найдём постоянную интегрирования A $u_C(0) = 50 + A = 0$ и $A = -50$. Равенство нулю соответствует закону коммутации, по которому напряжение на ёмкости не может измениться мгновенно. Подставляя найденное значение A в решение, окончательно получим:

$$u_C(t) = 50(1 - e^{-2 \cdot 10^5 t}) \text{ В.}$$

Токи в ветвях цепи:

$$i_3 = i_C = C \cdot du_C / dt = 0,1 \cdot 10^{-6} (-50)(-2 \cdot 10^5) e^{-2 \cdot 10^5 t} = e^{-2 \cdot 10^5 t} \text{ А;}$$

$$i_2 = u_{r_2} / r_2 = u_C / r_2 = 0,5(1 - e^{-2 \cdot 10^5 t}) \text{ А; } i_1 = i_2 + i_3 = 0,5(1 + e^{-2 \cdot 10^5 t}) \text{ А.}$$

Из решений видно, что установившийся ток конденсатора стремится к нулю, что физически легко объяснимо, т.к. источник постоянный. Токи через резисторы стремятся к одинаковому значению 0,5 А, поскольку в установившемся режиме это один общий ток. Ниже на рис. 10.2 приведены графики всех трёх токов.

2. Рассмотрим следующий пример, где переходный процесс есть следствие отключения цепи, схема которой изображена на рис. 10.3, от источника синусоидального напряжения. Параметры элементов цепи имеют следующие значения: $L = 2,55$ Гн, $r_1 = 250$ Ом, $r_2 = 50$ Ом, $C = 1$ мкФ. Напряжение на зажимах цепи $u = 1410 \sin(314t - 60^\circ)$ В. Найти напряжение на сопротивлении r_2 после коммутации, которая имеет место в момент времени $t = 0$. Построить график тока в интервале времени от $-0,3$ с (до коммутации) до $+0,3$ с (после коммутации).

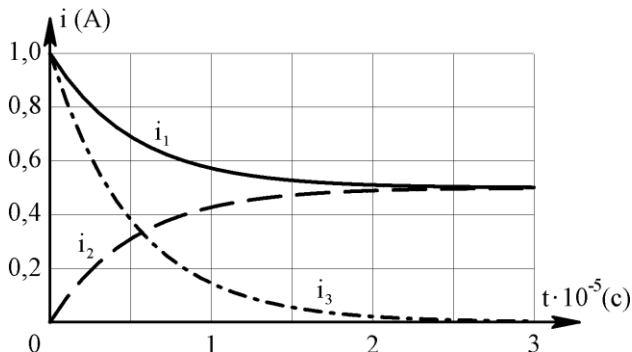


Рис. 10.2

Использование для решения задачи законов коммутации потребует знание значений $i_L(0) = i(0)$ и $u_C(0)$, обусловленных установившимся режимом до размыкания ключа. Следовательно, необходимо предварительно рассчитать этот режим.

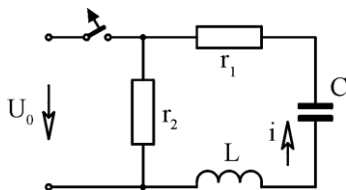


Рис. 10.3

Комплексное сопротивление участка с последовательным соединением $r_1 - C - L$ равно

$$Z = r_1 + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 250 + j (800,7 - 3184) = 2396,4 e^{-j84^\circ} \text{ Ом.}$$

$$\text{Ток } \dot{I} = \dot{U} / Z = \frac{1000 e^{-j60^\circ}}{2396,4 e^{-j84^\circ}} = 0,417 e^{j24^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенное значение: $i = \sqrt{2} \cdot 0,417 \sin(314 t + 24^\circ)$ А. В момент времени $t = 0$ $i(0) = i_L(0) = \sqrt{2} \cdot 0,417 \sin(24^\circ) = 0,24$ А. Напряжение на ёмкости $\dot{U}_C = Z_C \dot{I} = 3184 e^{-j90^\circ} \cdot 0,417 e^{j24^\circ} = 1328,7 e^{-j66^\circ}$ В. Мгновенное зна-

чение: $u_C = \sqrt{2} \cdot 1328,7 \sin(314t - 66^\circ)$ В. В момент времени $t = 0$ $u_C(0) = \sqrt{2} \cdot 1328,7 \sin(-66^\circ) = -1711,5$ В.

Теперь составим необходимое число уравнений по законам Кирхгофа. Это будет одно уравнение для единственного контура, образовавшегося после размыкания ключа: $u_r + u_L + u_C = 0$, или

$$(r_1 + r_2) i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = 0. \quad (*)$$

Продифференцировав (*) и разделив на L , получим уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{(r_1 + r_2)}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0,$$

которое после подстановки численных значений, примет окончательный вид:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 117,64 \cdot \frac{di}{dt} + 3,92 \cdot 10^5 i = 0.$$

$$\text{Общее решение } i(t) = i' + i'' = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (**)$$

т.к. установившийся ток равен нулю $i' = 0$. Решение характеристического уравнения $p^2 + 117,64 p + 3,92 \cdot 10^5 = 0$, даёт два комплексных корня:

$$p_1 = 626 e^{j95,5^\circ} = -58,8 + j 623,3 \quad \text{и} \quad p_2 = 626 e^{-j95,5^\circ} = -58,8 - j 623,3.$$

Для нахождения постоянных интегрирования A_1 и A_2 недостаточно одного уравнения (**). В качестве второго используем производную от уравнения (**).

$$\frac{di}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}, \quad (***)$$

т.к. di'/dt тоже равно нулю. Постоянные интегрирования теперь можно найти из системы уравнений (**) и (***), записанных в нулевой момент времени. Значение $\frac{di'}{dt}(0)$ найдём из (*), подставив в него $t = 0$

$$(r_1 + r_2) \cdot i(0) + L \frac{di}{dt}(0) + u_C(0) = 300 \cdot 0,24 + 2,55 \frac{di}{dt}(0) - 1711,5 = 0,$$

$$\text{откуда } \frac{di'}{dt}(0) = \frac{1711,5 - 300 \cdot 0,24}{2,55} = 623.$$

Система для определения постоянных интегрирования будет иметь следующий вид:

$$A_1 + A_2 = 0,24 \quad ,$$

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 = 623.$$

Её решение: $A_1 = 0,525 e^{-j76,8^\circ}$ и $A_2 = 0,525 e^{j76,8^\circ}$.

Подставляя найденные значения в уравнение (**):

$$\begin{aligned} i(t) &= 0,525 e^{-j76,8^\circ} \cdot e^{-58,8t} \cdot e^{j623,3t} + 0,525 e^{j76,8^\circ} \cdot e^{-58,8t} \cdot e^{-j623,3t} = \\ &= 0,525 \cdot e^{-58,8t} \left[e^{j(623,3t-76,8^\circ)} + e^{-j(623,3t-76,8^\circ)} \right], \end{aligned}$$

и используя известное соотношение $e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha$, перепишем

$$\begin{aligned} i(t) &= 0,525 \cdot e^{-58,8t} [\cos(623,3t - 76,8^\circ) + j \sin(623,3t - 76,8^\circ) + \\ &+ \cos(623,3t - 76,8^\circ) - j \sin(623,3t - 76,8^\circ)] = 1,05 \cdot e^{-58,8t} \cos(623,3t - 76,8^\circ) A, \end{aligned}$$

или $i(t) = 1,05 \cdot e^{-58,8t} \sin(623,3t + 13,2^\circ) A$. Напряжение на втором резисторе: $u_{r_2}(t) = r_2 i = 52,5 \cdot e^{-58,8t} \sin(623,3t + 13,2^\circ) B$.

На рис. 10.4 приведены графики изменения напряжения и тока в зависимости от времени до и после коммутации. После коммутации напряжение равно нулю, а ток представляет собой затухающие колебания с декрементом затухания Δ и собственной частотой ω' , обусловленными соотношением параметров r , L и C после коммутации: $\Delta = \exp(\delta \cdot T')$ и $\omega' = \sqrt{1/LC - r^2/4L^2}$, где $\delta = r/2L$, а $T' = 2\pi/\omega'$. Из графика видно, что в момент коммутации напряжение на входе цепи меняется скачком, в то время как кривая тока непрерывна.

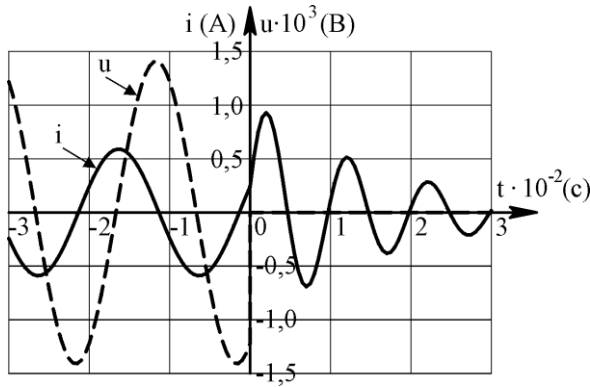


Рис. 10.4

Таблица 10.1

Условия задачи № 1

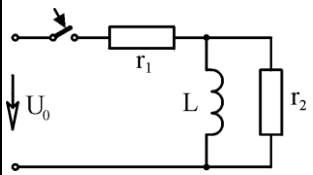
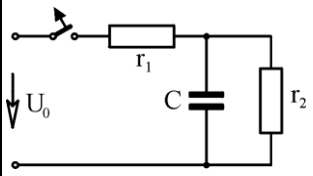
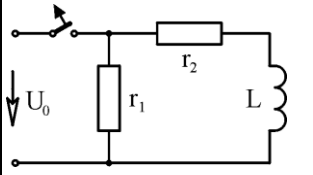
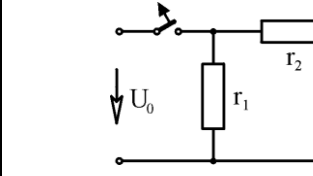
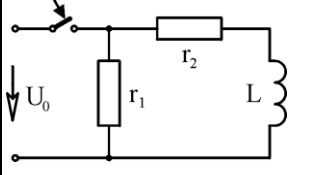
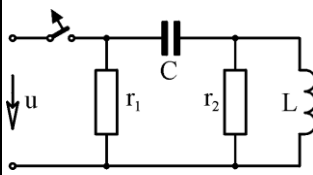
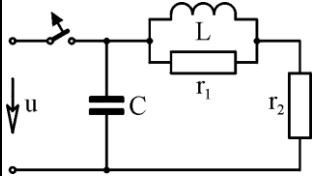
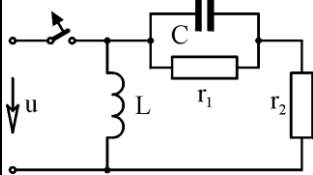
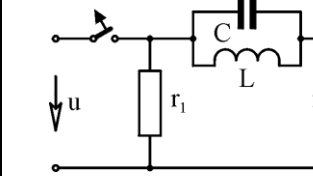
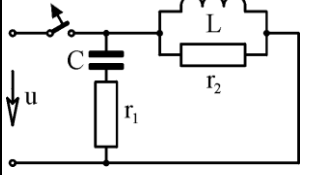
Вариант	Схема и тип К.З.	Напряжения в нормальном режиме
А		$U_0 = 10 \cdot n \text{ В} = \text{Const},$ $r_1 = 10 \cdot m \text{ Ом},$ $r_2 = 10(m + 2) \text{ Ом},$ $L = n \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$
Б		$U_0 = 10 \cdot n \text{ В} = \text{Const},$ $r_1 = 5 \cdot m \text{ Ом},$ $r_2 = 10 \cdot m \text{ Ом},$ $C = n \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$
В		$U_0 = 10 \cdot n \text{ В} = \text{Const},$ $r_1 = 50 \cdot m \text{ Ом},$ $r_2 = 10 \cdot m \text{ Ом},$ $L = (n + 1) 10^{-3} \text{ Гн}.$
Г		$U_0 = 10 \cdot n \text{ В} = \text{Const},$ $r_1 = 10 \cdot m \text{ Ом},$ $r_2 = 10(m + 2) \text{ Ом},$ $C = 0,5 \cdot n 10^{-6} \text{ Ф}.$
Д		$U_0 = 10 \cdot n \text{ В} = \text{Const},$ $r_1 = 100 \text{ Ом},$ $r_2 = 50(m + 1) \text{ Ом},$ $L = n \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$

Таблица 10.2

Условия задачи № 2

Вариант	Схема и тип К.З.	Значения параметров
А		$u(t) = 100 \sin(314t + m \cdot 30^\circ) \text{ В},$ $r_1 = r_2 = 100 \text{ Ом},$ $L = (1 + 0,1m) \cdot 0,318 \text{ Гн},$ $C = m \cdot 10^{-5} \text{ Ф}.$
Б		$u(t) = 100 \sin(314t + m \cdot 30^\circ) \text{ В},$ $r_1 = r_2 = 100 \text{ Ом},$ $L = (1 + 0,2m) \cdot 0,318 \text{ Гн},$ $C = 0,5(m + 1) \cdot 10^{-5} \text{ Ф}.$
В		$u(t) = 100 \sin(314t + m \cdot 30^\circ) \text{ В},$ $r_1 = r_2 = 100 \text{ Ом},$ $L = (1 + 0,3m) \cdot 0,318 \text{ Гн},$ $C = 0,75(m + 1) \cdot 10^{-5} \text{ Ф}.$
Г		$u(t) = 100 \sin(314t + m \cdot 30^\circ) \text{ В},$ $r_1 = r_2 = 100 \text{ Ом},$ $L = (0,5 + 0,4m) \cdot 0,318 \text{ Гн},$ $C = 0,5m \cdot 10^{-5} \text{ Ф}.$
Д		$u(t) = 100 \sin(314t + m \cdot 30^\circ) \text{ В},$ $r_1 = r_2 = 100 \text{ Ом},$ $L = (0,6 + 0,3m) \cdot 0,318 \text{ Гн},$ $C = 1,25m \cdot 10^{-5} \text{ Ф}.$

Задание № 11

Расчёт переходных процессов в линейных электрических цепях методом переменных состояния.

Задание является продолжением и развитием материала, рассмотренного в задании №10, где примеры расчётов переходных процессов ограничивались цепями второго порядка. Практика изучения и проектирования электротехнических устройств зачастую связана с анализом цепей более высокого порядка. Это диктует необходимость стандартизации вычислительного процесса и максимального использования вычислительных средств.

Содержание задания

Задание заключается в расчёте переходных процессов в сложной электрической цепи методом переменных состояния. Цель задания – формирование системы уравнений цепи для переменных состояния в виде, пригодном к реализации по стандартной программе MathCAD. Предполагается проверка правильности расчёта с помощью другого, упоминавшегося в предыдущих заданиях, программного продукта Electronics Workbench Professional 5.0 (далее EWB). Варианты выбирается в соответствие с буквенной литерой с помощью табл. 11.1.

1. Для цепи, соответствующей варианту, составить систему дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме Коши и решить её посредством программы Mathcad при нулевых начальных условиях. Вывести графики входного напряжения и тока через источник напряжения для интервала времени от начала коммутации до установившегося режима.

Дополнительное задание. Сравнить результаты, полученные в п. 1 с решением той же задачи с помощью программы EWB.

Основы теории

Наиболее рациональным способом записи системы уравнений переменных состояния, является запись системы в нормальной форме Коши:

$$\frac{dx_j}{dt} = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n + f_j(t), \quad (11.1)$$

где x – переменные состояния u_C и i_L ; $f_j(t)$ – функции, определяемые источниками энергии, $j = 1, 2, \dots, n$ (n – порядок системы). Для получения нормальной формы уравнений состояния необходимо, чтобы в каждое из них входил только один член с производной от переменной состояния. Это означает, что контуры должны содержать не более одной индуктивности, а сечения только одну ёмкость. Такой подход наиболее удобен при использовании вычислительных средств. Рассмотрим формирование системы на примере относительно несложной цепи, схема которой изображена на рис. 11.1.

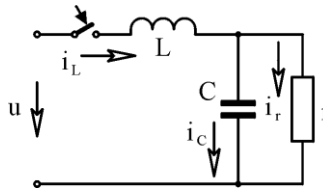


Рис. 11.1

Цепь содержит два реактивных элемента, следовательно, система будет состоять из двух уравнений для переменных состояния u_C и i_L . Основой для формирования являются три структурных уравнения:

$$-i_L + i_C + i_r = 0,$$

$$u_L + u_C = u(t),$$

$$u_C - u_r = 0;$$

и два компонентных: $i_C = C \cdot du_C / dt$ и $u_L = L \cdot di_L / dt$.

Преобразуя эти уравнения, $L \cdot di_L / dt + u_C = u(t)$, $C \cdot du_C / dt - i_L + u_r / r = 0$, с учетом $u_r = u_C$ получим:

$$\frac{di_L}{dt} = 0 \cdot i_L - \frac{1}{L} \cdot u_C + \frac{1}{L} \cdot u(t),$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_L - \frac{1}{rC} \cdot u_C + 0 \cdot u(t).$$

Коэффициенты системы 11.1 $a_{11} = 0$, $a_{12} = -1/L$, $a_{21} = 1/C$, $a_{22} = -1/rC$, а свободные члены $f_1(t) = 1/L \cdot u(t)$ и $f_2(t) = 0$. Необходимые для решения начальные условия определяются на основе законов коммутации. При таком подходе отсутствует необходимость в определении производных переменных состояния в момент $t = +0$, что, как видно из предыдущего задания, является задачей нестандартной.

При формировании системы для цепей сложной конфигурации, могут возникнуть математические трудности в определении правых частей (11.1). Чтобы избежать этого следует использовать топологические свойства цепи. Коэффициенты и свободные члены проще выразить, если структурные уравнения цепи составлены для главных сечений и главных контуров так называемого **нормального** дерева графа цепи. Нормальное дерево выбирается таким образом, чтобы оно включало все ёмкости и источники с э.д.с. и не содержало индуктивностей и источников тока. Выбор нормального дерева всегда возможен, если в цепи нет CE – контуров и LJ – сечений.

Пример выполнения задания № 11

В качестве примера расчёта переходного процесса методом переменных состояния с использованием стандартных вычислительных средств, решим задачу нахождения полного тока в цепи, изображённой на схеме рис. 11.2, после включения под действие синусоидального напряжения $u = e = 100\sin(314t + 60^\circ)$ В в момент времени $t = 0$, при следующих значениях параметров: $r_1 = 1,5$ Ом, $r_4 = r_5 = 80$ Ом, $L_2 = 3,18$ Гн, $L_3 = 0,00618$ Гн, $C_2 = C_4 = 63,6 \cdot 10^{-6}$ Ф.

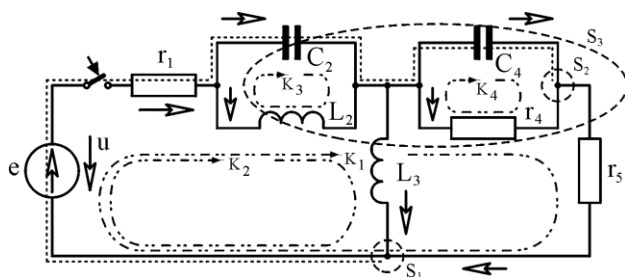


Рис. 11.2

Всего в цепи две ёмкости и две индуктивности. Система должна состоять из четырёх уравнений для переменных состояния. Цепь содержит семь ветвей и четыре узла. Для определённости решения необходимо семь структурных уравнений, причём три по первому закону Кирхгофа, остальные четыре по второму. Нормальное дерево обозначено на схеме точечной линией, проходящей через источник э.д.с. и обе ёмкости. Оно не содержит ни одной индуктивности. Три главных сечения S_1 , S_2 и S_3 дают три уравнения по первому закону Кирхгофа. Складывая со зна-

ком «плюс» токи, УПН которых совпадают с направлением внешней нормали сечений, получим:

$$S_1 : \quad -i_{L3} - i_{r5} + i_{r1} = 0, \quad (1)$$

$$S_2 : \quad -i_{r4} - i_{C4} + i_{r5} = 0, \quad (2)$$

$$S_3 : \quad -i_{C2} - i_{L2} + i_{L3} + i_{r5} = 0. \quad (3)$$

Четыре главных контура K_1, K_2, K_3 , и K_4 дают четыре уравнения по второму закону Кирхгофа. Первый контур замыкается по резистору r_5 , источнику, резистору r_1 и ёмкостям C_2 и C_4 . Соответствующее уравнение:

$$K_1 : \quad u_{r5} + u_{r1} + u_{C2} + u_{C4} = e. \quad (4)$$

Второй контур проходит по резистору r_1 , ёмкости C_2 , индуктивности L_3 и источнику. Уравнение:

$$K_2 : \quad u_{r1} + u_{C2} + u_{L3} = e. \quad (5)$$

Последние два уравнения записаны для контуров K_3 и K_4 .

$$u_{L2} = u_{C2}, \quad (6)$$

$$u_{r4} = u_{C4}. \quad (7)$$

Для приведения, полученных уравнений к нормальной форме, необходимы следующие преобразования с использованием компонентных уравнений. Уравнение (3) перепишем:

$$C_2 \frac{du_{C2}}{dt} = -i_{L2} + i_{L3} + i_{r5}, \quad (3')$$

т.к. соответствующее компонентное уравнение $i_C = C \cdot du_C / dt$. По аналогии, следующие три уравнения можно записать:

$$C_4 \frac{du_{C4}}{dt} = -i_{r4} + i_{L3}, \quad (2')$$

$$L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = u_{C2}, \quad (6')$$

$$L_3 \frac{di_{L3}}{dt} = -u_{C2} - u_{r1} + e, \quad (5')$$

т.к. для индуктивностей $u_L = L \cdot di_L / dt$. Из этих уравнений должны быть исключены переменные: i_{r4}, i_{r5}, u_{r1} , т.к. они не являются переменными состояниями. Уравнение (7) позволяет сделать замену $u_{r4} = u_{C4}$. Следовательно, $i_{r4} = u_{C4} / r_4$. Неиспользованные уравнения (1) и (4) позволяют посредством обычных алгебраических преобразований выразить оставшиеся i_{r5}, u_{r1} , через переменные состояния.

$$i_{r1} = -\frac{u_{C2}}{r_1 + r_5} - \frac{u_{C4}}{r_1 + r_5} + \frac{r_5 \cdot i_{L3}}{r_1 + r_5} + \frac{e}{r_1 + r_5}, \quad (*)$$

$$u_{r1} = r_1 \cdot i_{r1} = -\frac{r_1 \cdot u_{C2}}{r_1 + r_5} - \frac{r_1 \cdot u_{C4}}{r_1 + r_5} + \frac{r_1 \cdot r_5 \cdot i_{L3}}{r_1 + r_5} + \frac{r_1 \cdot e}{r_1 + r_5},$$

$$i_{r5} = i_{r1} - i_{L3} = -\frac{u_{C2}}{r_1 + r_5} - \frac{u_{C4}}{r_1 + r_5} - \frac{r_1 \cdot i_{L3}}{r_1 + r_5} + \frac{e}{r_1 + r_5}.$$

После подстановки этих значений в уравнения (2'), (3') и (5'), система (11.1) приобретёт окончательный вид:

$$\frac{du_{C2}}{dt} = a_{11} \cdot u_{C2} + a_{12} \cdot u_{C4} + a_{13} \cdot i_{L2} + a_{14} \cdot i_{L3} + f_1,$$

$$\frac{du_{C4}}{dt} = a_{21} \cdot u_{C2} + a_{22} \cdot u_{C4} + a_{23} \cdot i_{L2} + a_{24} \cdot i_{L3} + f_2,$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = a_{31} \cdot u_{C2} + a_{32} \cdot u_{C4} + a_{33} \cdot i_{L2} + a_{34} \cdot i_{L3} + f_3,$$

$$\frac{di_{L3}}{dt} = a_{41} \cdot u_{C2} + a_{42} \cdot u_{C4} + a_{43} \cdot i_{L2} + a_{44} \cdot i_{L3} + f_4;$$

где:

$$a_{11} = -\frac{1}{C_2(r_1 + r_5)}, \quad a_{12} = a_{11}, \quad a_{13} = -\frac{1}{C_2}, \quad a_{14} = \frac{r_5}{C_2(r_1 + r_5)},$$

$$a_{21} = -\frac{1}{C_4(r_1 + r_5)}, \quad a_{22} = -\frac{r_1 + r_4 + r_5}{C_4 r_4 (r_1 + r_5)}, \quad a_{23} = 0, \quad a_{24} = -\frac{r_1}{C_4(r_1 + r_5)},$$

$$a_{31} = \frac{1}{L_2}, \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = 0, \quad a_{34} = 0,$$

$$a_{41} = -\frac{r_5}{L_3(r_1 + r_5)}, \quad a_{42} = \frac{r_1}{L_3(r_1 + r_5)}, \quad a_{43} = 0, \quad a_{44} = -\frac{r_1 r_5}{L_3(r_1 + r_5)};$$

а функции f будут равны:

$$f_1 = \frac{1}{C_2(r_1 + r_5)} \cdot e, \quad f_2 = \frac{1}{C_4(r_1 + r_5)} \cdot e, \quad f_3 = 0, \quad f_4 = \frac{r_5}{L_3(r_1 + r_5)} \cdot e.$$

Напомним, что э.д.с. – e задана и равна $e = 100 \sin(314t + 60^\circ)$ В.

Для решения системы используем одну из стандартных процедур программы MathCAD, конкретно rkfixed. На рис. 11.3 показано применение программы MathCAD для решения данной задачи.

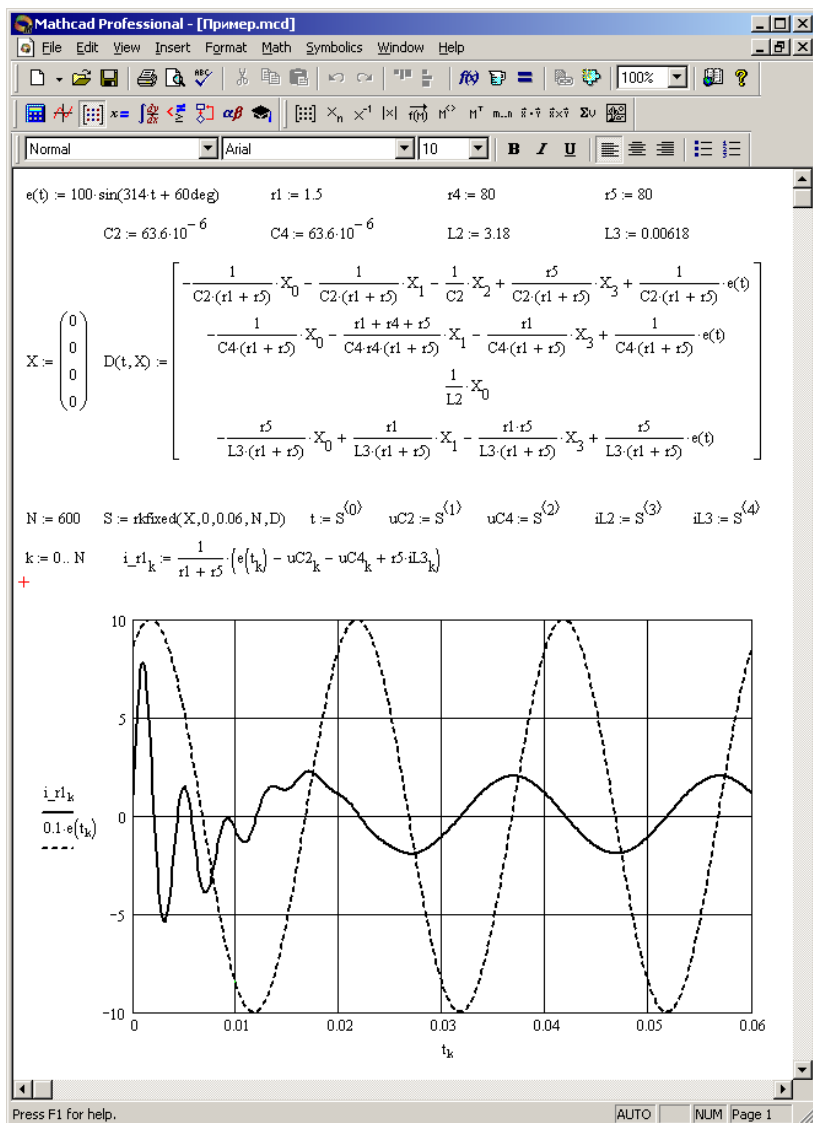


Рис. 11.3

В форме графиков выведены полный ток i_{r1} , выраженный через переменные состояния (*) и э.д.с. источника в масштабе 1 : 10. По горизонтальной оси отложено время от момента коммутации $t = 0$ до границы практического завершения переходного процесса $t = 0,06$ с, т.е. до установившегося периодического синусоидального режима.

Другим, не менее эффективным, техническим средством расчёта переходного процесса, является уже упоминавшаяся программа EWB. На рис. 11.4 показано как выглядит окно этой программы с решением задачи. На экран двухлучевого осциллографа выведены те же э.д.с. и ток.

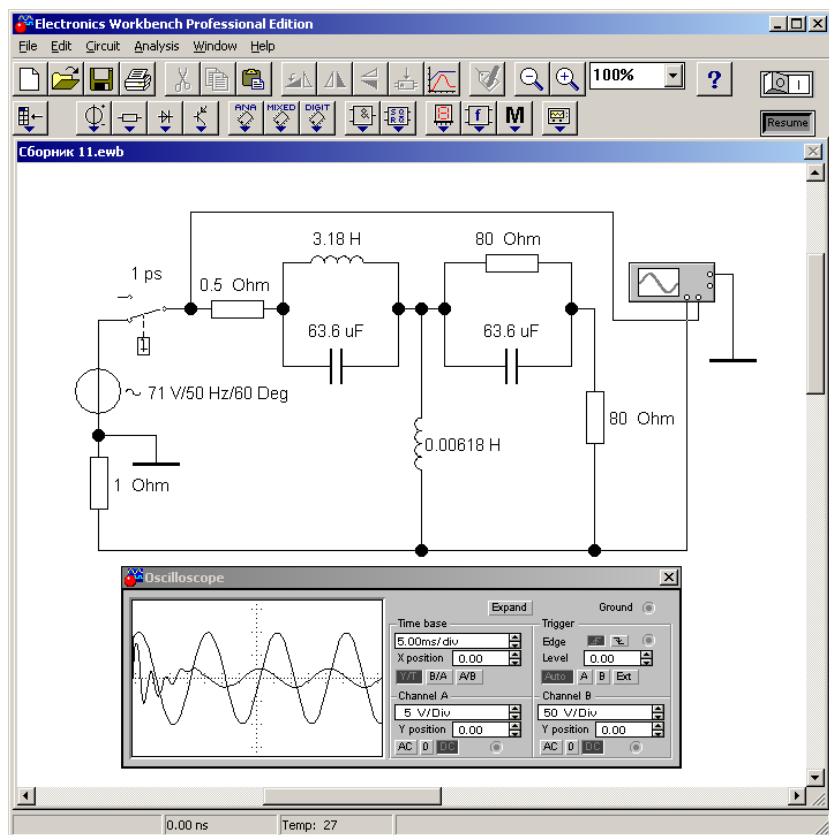


Рис. 11.4

Таблица 11.1

Условия задачи

Вариант	Схема и коммутация	Значения параметров и воздействие
А		$r_1 = 1,5 \text{ Ом}, r_H = m \text{ Ом},$ $C_1 = C_2 = 31,8 \cdot 10^{-6} \text{ Ф},$ $L_2 = 3,18 \text{ Гн},$ $L_3 = 0,0159 \text{ Гн},$ $e = 20 n \sin(\omega t + \psi_e) \text{ В},$ $f = 45 + 5 m \text{ Гц},$ $\psi_e = 20 + 10 m (^{\circ}).$
Б		$r_1 = 1,5 \text{ Ом}, r_H = 10 \text{ Ом},$ $C_2 = 63,6 \cdot 10^{-6} \text{ Ф},$ $C_3 = (20 + 10 m) \cdot 10^{-6} \text{ Ф},$ $L_2 = 3,18 \text{ Гн}, L_3 = 0,0159 \text{ Гн},$ $e = 10 n \cdot \sin(\omega t + \psi_e) \text{ В},$ $f = 20 + 10 m \text{ Гц},$ $\psi_e = 30 + 10 m (^{\circ}).$
В		$r_1 = 1,5 \text{ Ом}, r_H = 10 \text{ Ом},$ $C_2 = 63,6 \cdot 10^{-6} \text{ Ф},$ $C_3 = (20 + 4 m) \cdot 10^{-6} \text{ Ф},$ $L_2 = 3,18 \text{ Гн}, L_3 = 0,0159 \text{ Гн},$ $e = 5 n \sin(\omega t + \psi_e) \text{ В},$ $f = 20 + 5 m \text{ Гц},$ $\psi_e = 30 + 10 m (^{\circ}).$
Г		$r_1 = 1,5 \text{ Ом}, r_H = 50 \text{ Ом},$ $C_1 = 12 \text{ мкФ}, C_2 = 31,8 \text{ мкФ},$ $L_2 = 3,18 \text{ Гн},$ $L_3 = (0,625 + 0,14 m) \text{ Гн},$ $e = 5 n \sin(\omega t + \psi_e) \text{ В},$ $f = 35 + 4 m \text{ Гц},$ $\psi_e = 25 m (^{\circ}).$
Д		$r_1 = 1,5 \text{ Ом}, r_H = 50 \text{ Ом},$ $C_1 = 12 \text{ мкФ}, C_3 = 0,0318 \text{ мкФ},$ $L_2 = (0,625 + 0,14 m) \text{ Гн},$ $L_3 = 0,418 \text{ Гн},$ $e = 5 n \sin(\omega t + \psi_e) \text{ В},$ $f = 80 + 8 m \text{ Гц},$ $\psi_e = 20 + 12 m (^{\circ}).$

Задание № 12

Расчёт переходных процессов в линейных электрических цепях операторным методом

Заданием предусмотрено закрепление теоретического материала, относящегося к применению операторного метода расчёта и анализа переходных процессов для линейных цепей относительно несложной конфигурации. Основной целью задания полагается отработка расчётной методики на основе использования стандартных таблиц преобразования Лапласа и теоремы разложения.

Содержание задания

Подобно заданию № 10, задание № 12 заключается в определении токов ветвей, возникающих вследствие коммутации. Варианты выбирается в соответствии с буквенной литерой с помощью табл. 10.1 и 10.2, где кроме схемы и параметров дан тип воздействия и конкретная коммутация.

1. Для цепи из табл. 10.1 найти токи всех ветвей и напряжение на реактивном элементе.

2. Для цепи из табл. 10.2 рассчитать переходный процесс. Найти ток и напряжение на ёмкости при чётных m и на индуктивности при нечётных.

Основы теории

1. При использовании операторного метода функции времени $e(t)$, $u(t)$, $i(t)$ называемые **оригиналами** заменяются соответствующими функциями комплексного переменного $E(p)$, $U(p)$ и $I(p)$, называемыми **операторными изображениями**. Здесь $p = \sigma + j\omega$ – есть комплексная переменная. По существу это формальное изображение функций времени на комплексной плоскости. Связь между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ устанавливается посредством преобразования Лапласа, т.е. вычислением определённого интеграла

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt, \quad (12.1)$$

который является функцией комплексного переменного и не зависит от времени. Существует также обратное преобразование. Сокращённо прямое и обратное преобразования можно записать: $F(p) = L[f(t)]$ и

$L^{-1}[F(p)] = f(t)$. Соответствие между оригиналом и изображением устанавливается условной записью $F(p) \doteq f(t)$. Существенно, что применение операторного метода практически не сопряжено с процедурой интегрирования (12.1), т.к. имеются таблицы таких интегралов для широкого класса функций. Ниже, в табл. 12.1 приведены оригиналы и изображения функций, которые могут встретиться при выполнении настоящего задания.

Таблица 12.1

Таблица преобразований

Оригинал	Изображение
$A \text{ (Const)}$	A / p
$A \cdot e^{-\alpha t}$	$A / (p + \alpha)$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\alpha / [p \cdot (p + \alpha)]$
$\sin(\omega t)$	$\omega / (p^2 + \omega^2)$
$\cos(\omega t)$	$p / (p^2 + \omega^2)$
$e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega t)$	$\omega / [(p + \alpha)^2 + \omega^2]$
$e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega t)$	$(p + \alpha) / [(p + \alpha)^2 + \omega^2]$
$t \cdot e^{-\alpha t}$	$1 / (p + \alpha)^2$
t	$1 / p^2$
$f(t - x)$	$F(p) \cdot e^{-px}$
$f(t) \cdot e^{-\alpha t}$	$F(p + \alpha)$

В специальной литературе имеются более подробные таблицы преобразования Лапласа.

Использование операторных изображений токов и напряжений позволяет устанавливать соотношения между ними в алгебраической форме. Дифференцированию оригинала по времени, на комплексной плоскости соответствует умножение изображения на оператор p , т.е. $f'(t) \doteq p \cdot F(p) - f(0)$, а интегрированию – деление на p :

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

Если к источнику напряжения $u(t)$ присоединена нагрузка, представляющая последовательное соединение резистора r , индуктивности L

и ёмкости C , то уравнение по второму закону Кирхгофа будет иметь вид:

$$r i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt + u_C(0) = u(t).$$

Заменив временные функции $u(t)$ и $i(t)$ их операторными изображениями $U(p)$ и $I(p)$, перепишем уравнение в операторной форме:

$$r I(p) + L p I(p) - Li(0) + \frac{1}{C p} I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = U(p).$$

Выразив ток, получим выражение закона Ома в операторной форме

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0) - u_C(0)/p}{r + Lp + 1/Cp} = \frac{U(p) + Li(0) - u_C(0)/p}{Z(p)}. \quad (12.2)$$

Знаменатель $Z(p) = Z_r(p) + Z_L(p) + Z_C(p)$ – называется операторным сопротивлением цепи. Величины $Z_r(p) = r$, $Z_L(p) = Lp$ и $Z_C(p) = 1/Cp$ называются соответственно операторными сопротивлениями: резистора, индуктивности и ёмкости.

Числитель (12.2) кроме операторного изображения, приложенного к цепи напряжения, содержит дополнительные слагаемые $Li(0)$ и $u_C(0)/p$. Это, как бы, дополнительные источники, обусловленные начальным запасом энергии, а именно, током индуктивности и напряжением конденсатора в момент коммутации. При составлении уравнений по законам Кирхгофа для цепи в операторной форме, схема замещения должна включать эти источники.

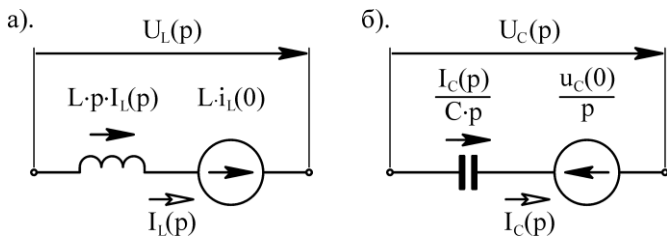


Рис. 12.1

На рис. 12.1 показано, как индуктивность и ёмкость следует представлять в операторной схеме замещения. При наличии индуктивности (рис. 12.1а), уравнение по второму закону Кирхгофа: $U_L(p) - Lp \cdot I_L(p) = -L \cdot i_L(0)$, следовательно $U_L(p) = Lp \cdot I_L(p) - L \cdot i_L(0)$. При наличии ёмкости (рис. 12.1б), $U_C(p) - I_C(p)/Cp = u_C(0)/p$, тогда

$U_c(p) = I_c(p)/Cp + u_c(0)/p$. Физически, разные знаки источников в случаях а) и б), означают, что ток на индуктивности после коммутации пытается сохранить своё направление (закон коммутации для индуктивности), тогда как разрядный ток ёмкости имеет направление противоположное зарядному. Следует обратить внимание, что при отсутствии запаса энергии в нулевой момент времени, выражение (12.2) принимает вид обычного закона Ома: $I(p) = U(p)/Z(p)$. Запись законов Кирхгофа в операторной форме не отличаются от записи для мгновенных значений.

$$\sum_{k=1}^n I(p) = 0, \quad \sum_{k=1}^n E(p) = \sum_{k=1}^n U(p) = \sum_{k=1}^n Z(p)I(p).$$

Расчёт переходного процесса операторным методом выполняется в следующей последовательности.

а). По методике, изложенной ранее (в заданиях № 10 и № 11), определяются начальные условия, т.е. токи на индуктивностях $i_L(0)$ и напряжения на ёмкостях $u_C(0)$.

б). Составляется операторная схема замещения, представляющая собой схему исходной цепи после коммутации с дополнительными источниками, если начальные условия не нулевые.

в). Для операторной схемы замещения составляется необходимое количество уравнений по первому и второму законам Кирхгофа. Система получится алгебраической.

г). Посредством алгебраических преобразований из системы уравнений находятся изображения токов и напряжений, подлежащих определению.

д). Находятся оригиналы, соответствующие полученным изображениям.

2. Последний пункт, переход от изображения к оригиналу, может быть реализован различными способами. Наиболее простой способ заключается в использовании таблиц преобразования Лапласа. Это удобно, если изображение соответствует табличной функции, либо легко к ней приводится. Можно использовать интеграл обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\omega}^{\sigma_0 + j\omega} F(p)e^{pt} dp,$$

хотя в расчётной практике этот способ применяется редко. Наиболее удобным средством перехода от изображения к оригиналу является теорема разложения, позволяющая просто получить оригинал, если изобра-

жение представляет собой рациональную дробь. В расчётной практике это наиболее частый случай, т.к. изображение результата чаще всего обычная реализация закона Ома в операторной форме. Пусть изображение результата есть следующая дробь:

$$F(p) = \frac{a_m p^m + a_{m+1} p^{m+1} + \dots + a_1 p + a_0}{p^n + b_{n+1} p^{n+1} + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{G(p)}{H(p)}. \quad (12.3)$$

В соответствующей части лекционного курса было доказано, что оригиналом такого изображения будет:

$$f(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad (12.4)$$

где p_1, p_2, \dots, p_n – корни полинома знаменателя (полюса функции $F(p)$), а коэффициенты A_k вычисляются по одной из приведённых ниже формул:

$$A_k = \lim_{p \rightarrow p_k} F(p) \cdot (p - p_k) = G(p_k) / H'(p_k). \quad (12.5)$$

Пример выполнения задания № 12

1. Для примера выполнения задания, рассчитаем операторным методом переходный процесс, возникающий в цепи, изображённой на рис. 10.1, в результате замыкания ключа. Решение этой задачи было подробно рассмотрено ранее в задании № 10 и результат известен. Решим задачу при тех же исходных данных, т.е. напряжение U_0 постоянное и равно 100 Вольт. Сопротивления r_1 и r_2 равны 100 Ом, ёмкость $C = 0,1 \cdot 10^{-6}$ Фарад. Напомним, что требуется найти токи во всех ветвях цепи после коммутации.

В соответствии с пунктом (а) определим начальные условия. До включения цепи под напряжение U_0 конденсатор был разряжен, $u_C(0) = 0$. Следовательно, операторная схема замещения (пункт б) будет иметь следующий вид (рис. 12.2).

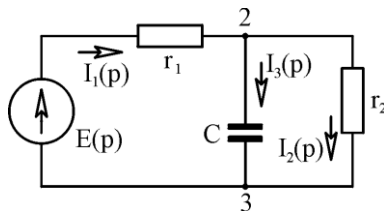


Рис. 12.2

Схема замещения представляет собой смешанное соединение. Для такой цепи нет необходимости составлять полную систему структурных уравнений по законам Кирхгофа. Проще найти операторное входное сопротивление в общем виде

$$Z(p) = Z_1(p) + \frac{Z_2(p) \cdot Z_3(p)}{Z_2(p) + Z_3(p)},$$

и затем подставить значения сопротивлений участков

$$Z(p) = r_1 + \frac{r_2 \cdot \frac{1}{Cp}}{r_2 + \frac{1}{Cp}} = \frac{p + 2 \cdot 10^5}{0,01p + 10^3}.$$

Постоянный источник $E(p) = U_0 / p$. Применив закон Ома, в операторной форме, найдём операторное изображение полного тока,

$$I_1(p) = \frac{E(p)}{Z(p)} = \frac{100}{p} \cdot \frac{0,01p + 10^3}{p + 2 \cdot 10^5} = \frac{p + 10^5}{p(p + 2 \cdot 10^5)},$$

и напряжения на параллельном участке

$$U_{23}(p) = Z_{23}(p) \cdot I_1(p) = \frac{100}{10^{-5}p + 1} \cdot \frac{p + 10^5}{p(p + 2 \cdot 10^5)} = \frac{10^7}{p(p + 2 \cdot 10^5)}.$$

Соответственно изображения токов на втором и третьем участках:

$$I_2(p) = \frac{U_{23}(p)}{r_2} = \frac{10^5}{p(p + 2 \cdot 10^5)},$$

$$I_3(p) = \frac{U_{23}(p)}{1/Cp} = \frac{100 \cdot 10^5}{p(p + 2 \cdot 10^5)} \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} p = \frac{1}{p + 2 \cdot 10^5}.$$

Для перехода от изображений к оригиналам первого и второго токов воспользуемся теоремой разложения. Знаменатель этих изображений $H(p) = p(p + 2 \cdot 10^5)$ имеет два корня $p_1 = 0$ и $p_2 = -2 \cdot 10^5$. В соответствии с 12.4 оригиналом тока i_1 будет сумма: $i_1(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$, где коэффициенты A вычисляются по одной из формул (12.5).

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{p + 10^5}{p(p + 2 \cdot 10^5)} \cdot (p - p_1) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p + 10^5}{p(p + 2 \cdot 10^5)} \cdot (p - 0) = \\ &= \frac{10^5}{2 \cdot 10^5} = 0,5, \end{aligned}$$

$$A_2 = \lim_{p \rightarrow p_2} \frac{p + 10^5}{p(p + 2 \cdot 10^5)} \cdot (p - p_2) = \lim_{p \rightarrow -2 \cdot 10^5} \frac{p + 10^5}{p(p + 2 \cdot 10^5)} \cdot (p + 2 \cdot 10^5) =$$

$$= \frac{-10^5}{-2 \cdot 10^5} = 0,5.$$

Окончательно ток i_1 равен: $i_1(t) = 0,5e^0 + 0,5e^{-2 \cdot 10^5 t} = 0,5(1 + e^{-2 \cdot 10^5 t})$ А. Изображение тока i_2 имеет такой же знаменатель и, следовательно, такие же корни. Прделав аналогичные вычисления, получим оригинал: $i_2(t) = 0,5(1 - e^{-2 \cdot 10^5 t})$ А. Изображение тока i_3 соответствует функции, содержащейся в таблице преобразований Лапласа, и оригинал может быть получен непосредственно из неё: $i_3(t) = 1 \cdot e^{-2 \cdot 10^5 t}$ А.

Нетрудно убедиться, что результаты полностью соответствуют полученным ранее при расчёте переходного процесса посредством обычного интегрирования дифференциального уравнения цепи (задание № 10).

2. В качестве другого примера рассмотрим расчёт переходного процесса, рассчитанного ранее в том же задании (№ 10). Схема цепи изображена на рис. 10.3. В момент времени $t = 0$ цепь отключается от источника переменного напряжения $u = 1410 \sin(314t - 60^\circ)$ В. Параметры цепи: $r_1 = 250$ Ом, $r_2 = 50$ Ом, $L = 2,55$ Гн, $C = 1$ мкФ. Требуется найти напряжение на сопротивлении r_2 после коммутации.

Начальные условия, т.е. напряжение на ёмкости и ток на индуктивности в момент коммутации, обусловленные предыдущим синусоидальным режимом, были найдены ранее (см. задание № 10) и равны: $u_C(0) = -1711,5$ В, $i(0) = i_L(0) = 0,24$ А.

Операторная схема замещения, с учётом дополнительных источников, изображена на рис. 12.3.

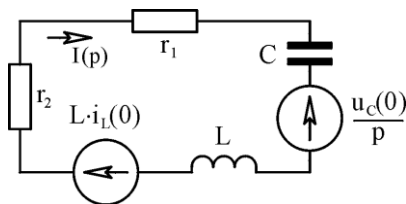


Рис. 12.3

Для расчёта переходного процесса достаточно одного уравнения по второму закону Кирхгофа

$$(r_1 + r_2)I(p) + \frac{1}{Cp}I(p) + LpI(p) = Li(0) - \frac{u_c(0)}{p},$$

откуда

$$I(p) = \frac{Li(0) - \frac{u_c(0)}{p}}{(r_1 + r_2) + \frac{1}{Cp} + Lp} = \frac{2,25 \cdot 0,24 + \frac{1711,5}{p}}{300 + \frac{1}{10^{-6}p}} = \frac{0,24p + 671,2}{p^2 + 117,64p + 0,392 \cdot 10^6} = \frac{G(p)}{H(p)}.$$

Знаменатель $H(p)$ имеет два комплексных корня $p_1 = -58,8 + j 623,3$ и $p_2 = -58,8 - j 623,3$. Нетрудно заметить, что они соответствуют корням характеристического уравнения, найденным ранее во втором примере задания №10.

Полное решение для тока: $i(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$. Коэффициенты A найдём по второй формуле (12.5), т.е. $A_k = G(p_k) / H'(p_k)$. Производная знаменателя $H'(p) = 2p + 117,64$.

$$A_1 = \frac{0,24 \cdot p_1 + 671,18}{2 \cdot p_1 + 117,64} = 0,541 e^{-j77^0}.$$

Аналогично получим $A_2 = 0,541 e^{j77^0}$.

Подставив найденные значения коэффициентов в решение, получим

$$i(t) = 0,541 e^{-j77^0} \cdot e^{-58,8t} \cdot e^{j623,3t} + 0,541 e^{j77^0} \cdot e^{-58,8t} \cdot e^{-j623,3t} = 0,541 \cdot e^{-58,8t} \left[e^{j(623,3t-77^0)} + e^{-j(623,3t-77^0)} \right],$$

или окончательно: $i(t) = 1,082 \cdot e^{-58,8t} \sin(623,3t + 13^0)$ А. Напряжение на втором резисторе: $u_{r_2}(t) = r_2 i = 54,1 \cdot e^{-58,8t} \sin(623,3t + 13^0)$ В. Сравнив этот результат, с полученным в задании № 10, легко убедиться в их идентичности. Незначительное расхождение – результат погрешностей округления при ручном счёте.

Задание №13

Расчёт переходных процессов в линейных электрических цепях временными методами.

Интеграл Дюамеля

Целью задания является закрепление теоретического материала излагаемого в разделе «временные методы расчёта переходных процессов линейных электрических цепей». Хотя под термином «временные методы» понимается целый класс расчётных приёмов, упор сделан на практику применения интеграла Дюамеля при расчёте переходных процессов при воздействиях произвольной формы. В задании используется ряд понятий из теоретического курса соответствующих разделов ТОЭ, таких как: а) операторная передаточная функция $H(p)$; б) импульсное воздействие $\delta(t)$, – (функция, называемая единичной импульсной функцией или функцией Дирака); в) единичная функция $1(t)$; г) импульсная характеристика цепи $g(t)$, – реакция цепи на $\delta(t)$; д) переходная характеристика цепи $h(t)$ – реакция цепи на $1(t)$.

Перед выполнением задания необходимо проработать разделы теоретического курса, касающиеся перечисленных понятий.

Содержание задания

Рассчитать реакцию на заданное воздействие в соответствии с вариантом буквенной литеры. Схемы вариантов и тип воздействия даны в табл. 13.1. Построить графики следующих функций времени:

1. Воздействия и реакции. Графики должны быть в одном масштабе времени и изображены друг под другом или вместе на одной диаграмме. Интервал времени не менее $2T$ (см. табл. 13.1).

2. Если воздействие представлено комбинацией отдельных непрерывных составляющих, график каждой из них должен быть построен отдельно и снабжён соответствующими пояснениями.

Основы теории

1. Теоретической основой временных методов является выражение реакции линейной цепи на воздействие $f_1(t)$:

$$f_2(t) \doteq H(p) \cdot F_1(p),$$

где $H(p)$ – операторная передаточная функция цепи, $F_1(p) \doteq f_1(t)$.

На основании теоремы свёртки (курс высшей математики), получается

интеграл:

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(x) \cdot g(t-x) dx = \int_0^t f_1(t-x) \cdot g(x) dx, \quad (13.1)$$

который называют интегралом свёртки или интегралом наложения. Здесь $g(t) \doteq H(p)$ импульсная характеристика электрической цепи. Интегралы (13.1) позволяют определить реакцию цепи на воздействие произвольной формы $f_1(t)$, если в начальный момент времени в цепи отсутствует запас энергии на индуктивностях и ёмкостях (нулевые начальные условия). Особенно удобен данный приём, когда воздействия имеют импульсный или скачкообразный характер.

Следует иметь, однако, в виду, что под нижним пределом интегралов понимается момент непосредственно предшествующий коммутации, т.е. $t = -0$. Это обстоятельство требует особого внимания при вычислении импульсной характеристики, когда она имеет скачок (разрыв производной) при $t = 0$, то есть когда $g(-0) \neq g(+0)$. Например, импульсная характеристика цепи, схема которой изображена на рис. 13.1 имеет следующую передаточную функцию:

$$H(p) = \frac{Lp}{r + Lp} = \frac{p}{p + r/L}.$$

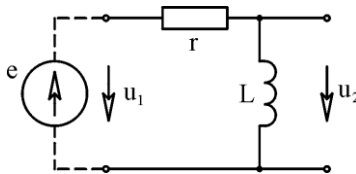


Рис.13.1

Если воспользоваться соотношением $g(t) \doteq H(p)$, то импульсная характеристика будет $g(t) = -(r/L) \cdot e^{-(r/L)t}$. Однако, это значение неверно, т.к. преобразование Лапласа (прямое и обратное), посредством которого оно получено, справедливо только при $t \geq 0$. Характеристика $g(t)$, изображённая на рис. 13.1 цепи имеет скачок при $t = 0$ и соответственно $g(-0) \neq g(+0)$. Для того, чтобы не терять информацию о поведении импульсной характеристики при переходе от $t = -0$ к $t = +0$, передаточную функцию следует преобразовать в правильную дробь (степень p в числителе должна быть меньше, чем в знаменателе):

$$H(p) = 1 + \frac{-r/L}{p + r/L}.$$

Теперь обратное преобразование Лапласа позволит получить верное (без потери информации) значение импульсной характеристики $g(t) = \delta(t) - (r/L) \cdot e^{-(r/L)t}$. К какой ошибке может привести неучёт, появившегося дополнительно δ – слагаемого, можно видеть из следующего примера.

Пусть при нулевых начальных условиях на вход цепи (рис. 13.1) в нулевой момент времени поступает импульс $u_1 = 100 \delta(t)$. В соответствии с выражением 13.1 реакцией будет напряжение на выходных зажимах:

$$u_2(t) = 100 \int_0^t \delta(x) \cdot g(t-x) dx = 100 \cdot g(t) \int_0^t \delta(0) dx,$$

т.к. произведение под интегралом не равно нулю только когда $x=0$ (свойство δ – функции). Окончательно

$$u_2(t) = 100 \cdot g(t) \cdot 1(t) = 100 \left[\delta(t) - \frac{r}{L} e^{-(r/L)t} \right] \cdot 1(t).$$

График этого напряжения изображён на рис. 13.2а.

Скачок напряжения в нулевой момент времени физически объясняется тем, что при бесконечно большом напряжении на входе закон коммутации не применим, и ток на индуктивности изменяется скачком. Соответственно $u_L = L \cdot di/dt \rightarrow \infty$. По окончании действия входного импульса, энергия магнитного поля индуктивности, запасённая в начальный момент, рассеивается на резисторе по цепи: индуктивность, резистор, идеальный источник с нулевым сопротивлением.

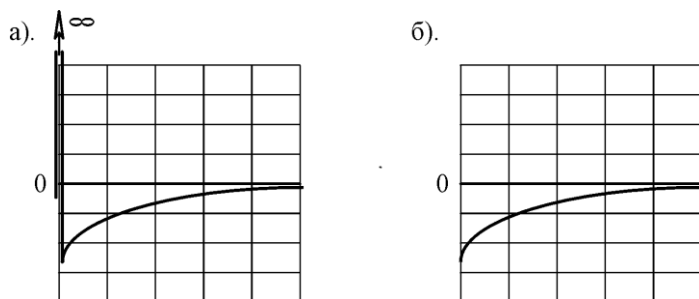


Рис. 13.2

Без учёта δ – слагаемого в импульсной характеристике, решение имело бы вид (рис. 13.2б), т.е. отсутствовала бы первая часть решения.

Такое решение было бы не верным и не способным объяснить процессы, имеющие место в реальных электрических цепях.

2. Если в, рассмотренной выше цепи, поменять местами резистор и индуктивность, скачка импульсной характеристики при $t = 0$ не будет. Проблемы потери информации о поведении импульсной характеристики при переходе от $t = -0$ к $t = +0$ в этом случае не существует. Передаточная функция такой цепи была бы:

$$H(p) = \frac{r/L}{p + r/L}.$$

то есть представляла бы собой правильную дробь.

3. Проблемы можно избежать и другим способом, если представить интеграл (13.1) в виде двух слагаемых:

$$f_2(t) = \int_{-0}^t f_1(x) \cdot g(t-x) dx = \int_{-0}^t f_1(t-x) \cdot g(x) dx + \int_{+0}^t f_1(t-x) \cdot g(x) dx.$$

При таком представлении возможный скачок импульсной характеристики целиком относится к первому интегралу, который можно вычислить в общем виде. Такое представление называется интегралом Дюамеля. Существует несколько форм записи интеграла Дюамеля. Наиболее удобная форма предполагает замену импульсной характеристики цепи переходной характеристикой.

$$f_2(t) = f_1(0) \cdot h(t) + \int_0^t h(t-x) \cdot f_1'(x) dx. \quad (13.2)$$

В этом выражении $f_1'(x) = [df_1/dt]_{t=x}$, $h(t) = \int_0^t g(t) \cdot dt$, или

$h(t) \doteq H(p)/p$. Интеграл Дюамеля, записанный в такой форме, удобен при расчёте реакции цепи с любой характеристикой, на воздействие произвольной формы (кроме импульсного) при отсутствии запаса энергии в цепи в момент приложения воздействия.

Пример выполнения задания №13

Для примера выполнения задания, найдём реакцию цепи, схема которой изображена на рис. 13.3а, в результате подачи на вход цепи напряжения, форма коорого приведена на рис. 13.3б:

$$u_1(t) = \begin{cases} kt & \text{при } 0 \leq t \leq 10^{-3}, \\ 100 e^{-0,5 \cdot 10^3 (t - 10^{-3})} & \text{при } t \leq 10^{-3}. \end{cases}$$

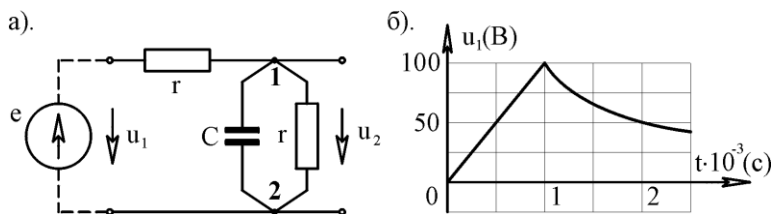


Рис. 13.3

Сопротивления обоих резисторов $r = 100$ Ом, ёмкость конденсатора $C = 1$ мкФ. Передаточная по напряжению функция:

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_{12}(p)I_1(p)}{U_1(p)} = Z_{12}(p) \frac{U_1(p)}{r + Z_{12}(p)} \cdot \frac{1}{U_1(p)} = \\ &= \frac{r \frac{1}{Cp}}{r + \frac{1}{Cp}} \cdot \frac{1}{r \frac{1}{Cp} + \frac{1}{r + \frac{1}{Cp}}} = \frac{10^3}{p + 2 \cdot 10^3}. \end{aligned}$$

Соответственно, переходная характеристика цепи определится из соотношения:

$$h(t) \doteq \frac{H(p)}{p} = \frac{10^3}{p(p + 2 \cdot 10^3)}.$$

Для её нахождения воспользуемся теоремой разложения (см. задание №12).

$$h(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

где $p_1 = 0$, $p_2 = -2 \cdot 10^3$ корни знаменателя, а коэффициенты:

$$A_1 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{10^3}{p(p + 2 \cdot 10^3)} \cdot (p - 0) = \frac{1}{2},$$

$$A_2 = \lim_{p \rightarrow -2 \cdot 10^3} \frac{10^3}{p(p + 2 \cdot 10^3)} \cdot [p - (-2 \cdot 10^3)] = -\frac{1}{2}.$$

Окончательно $h(t) = 0,5(1 - e^{-2 \cdot 10^3 t})$.

В соответствии с (13.2) реакция цепи:

$$u_2(t) = u_1(0) \cdot h(t) + \int_0^t h(t-x) \cdot u_1'(x) dx. \quad (13.3)$$

Непосредственное интегрирование сопряжено с трудностью вычислительного характера, т.к. подынтегральное выражение в данном случае не является непрерывной функцией. Обойти эту трудность можно, представив входное воздействие (напряжение u_1), наложением комбинации непрерывных функций, сумма которых равнялась бы заданному воздействию. Тогда, взяв интегралы от отдельных составляющих, на основе принципа наложения полная реакция цепи определится суммой отдельных реакций (отдельных интегралов).

Ниже, на рис. 13.4 показано, как воздействие $u_1(t)$ (рис 13.3б, оно же 13.4а) можно представить в виде отдельных составляющих (13.4б,в,г,д).

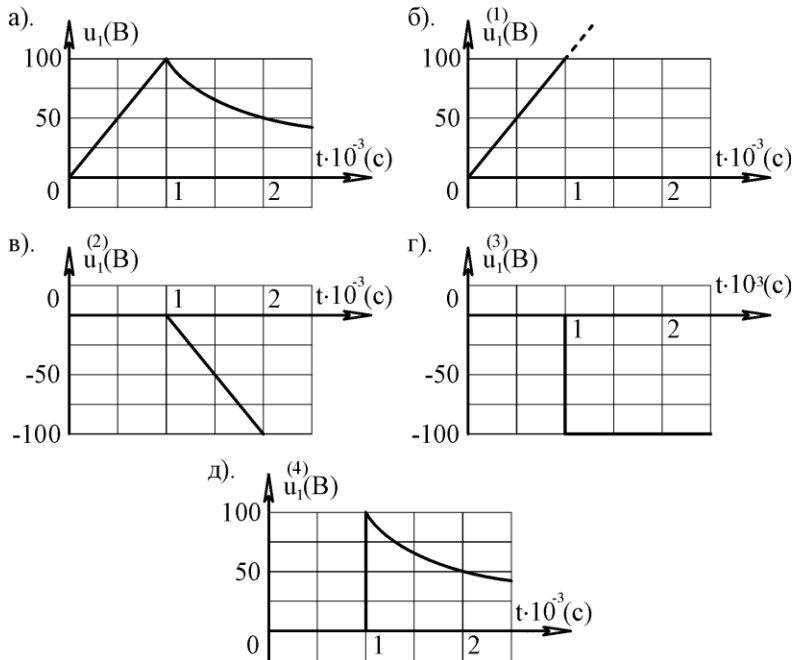


Рис. 13.4

Прямая $u_1^{(1)} = k t$ (рис. 13.4б) соответствует исходной функции (рис. 13.4а) до момента времени $t = 10^{-3}$ с. Коэффициент k определяется как тангенс угла наклона прямой и равен $100/10^{-3} = 10^5$.

Прямая $u_1^{(2)} = -k(t - 10^{-3}) \cdot 1(t - 10^{-3})$ (13.4 в) в сумме с прямой $u_1^{(1)}$ соответствует исходной (а) при $t \leq 10^{-3}$ с, и имеет постоянное значение (+ 100 Вольт) при t большем 10^{-3} с.

Добавление скачка напряжения $u_1^{(3)} = -100 \cdot 1(t - 10^{-3})$ в момент времени $t = 10^{-3}$ с (13.4 г), оставляет неизменной полученную ранее сумму при $t \leq 10^{-3}$ с, и делает её равной нулю при t , большем 10^{-3} с.

Последняя кривая (13.4 д), экспонента

$$u_1^{(4)} = 100 \cdot e^{-0,5 \cdot 10^3(t - 10^{-3})} \cdot 1(t - 10^{-3}),$$

сдвинутая по времени на $t = 10^{-3}$ с. В сумме с предыдущими (б,в,г), она даёт:

$$u_1(t) = \begin{cases} k t & \text{при } 0 \leq t \leq 10^{-3}, \\ 100 e^{-0,5 \cdot 10^3(t - 10^{-3})} & \text{при } t \leq 10^{-3}. \end{cases}$$

т.е. воздействие, соответствующее условию задачи.

Интеграл (13.3) от первой составляющей, прямой $u_1^{(1)}$:

$$u_2^{(1)} = 0,5 \cdot 10^5 \int_0^t (1 - e^{-2 \cdot 10^3(t-x)}) dx,$$

т.к. $u_1^{(1)}(-0) = 0$, а производная $u_1^{(1)}(x)' = [d/dt(u_1^{(1)})]_{t=x} = 10^5$. (При вычислении интегралов, необходимо иметь в виду, что переменная интегрирования x , и поэтому множители, содержащие t , выносятся за знак интеграла как постоянные).

$$u_2^{(1)} = 0,5 \cdot 10^5 t - 25(1 - e^{-2 \cdot 10^3 t}).$$

Прямая (в) отличается от прямой (б) знаком и сдвигом по временной оси на 10^{-3} с. Соответственно и реакция отличается только знаком и сдвигом.

$$u_2^{(2)} = -[0,5 \cdot 10^5(t - 10^{-3}) - 25(1 - e^{-2 \cdot 10^3(t - 10^{-3})})] \cdot 1(t - 10^{-3}).$$

Интеграл от скачка (г) состоит из одного первого слагаемого, т.к. $u_1^{(3)}(-0) = -100$, а производная $u_1^{(3)}(x)'$ в интервале от $t = +0$ до ∞ равна нулю.

$$u_2^{(3)} = [-50(1 - e^{-2 \cdot 10^3(t - 10^{-3})})] \cdot 1(t - 10^{-3}).$$

Последний интеграл от $u_1^{(4)}$ (кривая д):

$$u_2^{(4)} = 100 \cdot 0,5(1 - e^{-2 \cdot 10^3 t}) - 25 \cdot 10^3 \int_0^t (1 - e^{-2 \cdot 10^3(t-x)}) e^{-0,5 \cdot 10^3 x} dx,$$

так как $u_1^{(4)}(-0) = 100$, а производная $u_1^{(4)}(x)' = [d/dt(u_1^{(4)})]_{t=x} = -50 \cdot 10^3 e^{-0,5 \cdot 10^3 x}$.

(При вычислении производных от функций, сдвинутых по времени, аргумент которых $(t - a)$, следует помнить, что отсчёт берётся от $t = a$, то есть как бы от нуля. Это означает, что в данном случае, производная берётся от функции $u_1^{(4)} = 100 \cdot e^{-0,5 \cdot 10^3 t}$, а не от $100 \cdot e^{-0,5 \cdot 10^3 (t - 10^{-3})}$).

Окончательно

$$u_2^{(4)} = 66,67 \cdot [e^{-0,5 \cdot 10^3 (t - 10^{-3})} - e^{-2 \cdot 10^3 (t - 10^{-3})}] \cdot 1(t - 10^{-3}).$$

На рис. 13.5 изображены графики входного воздействия $u_1(t)$ и реакции $u_2(t) = u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + u_2^{(3)} + u_2^{(4)}$.

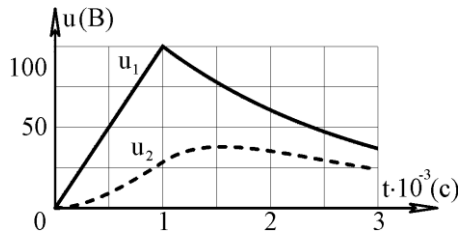
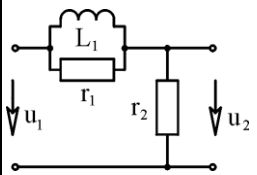
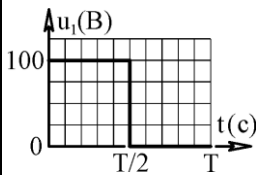
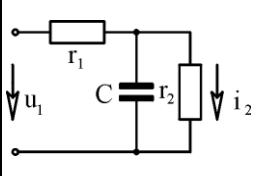
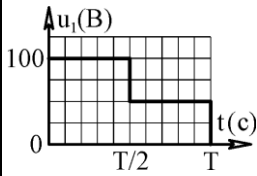
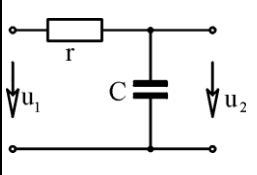
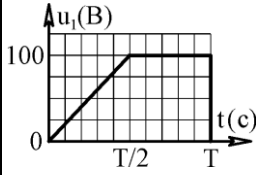
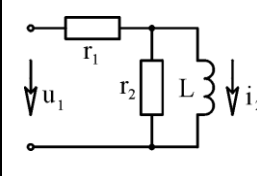
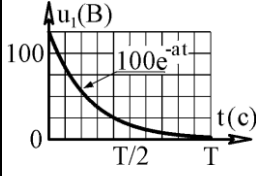
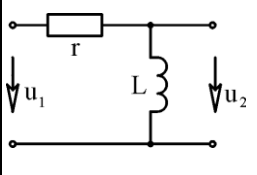
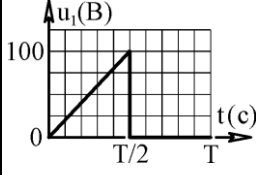


Рис. 13.5

Таблица 13.1

Условия задачи

Вариант	Схема	Воздействие	Значения параметров
А			$T = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ с},$ $r = 10 \cdot n \text{ Ом},$ $L = 0,5 \cdot n \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$
Б			$T = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ с},$ $r = 10 \cdot n \text{ Ом},$ $C = 2/n \cdot 10^{-5} \text{ Ф}.$
В			$T = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ с},$ $r = 10 \cdot n \text{ Ом},$ $C = 1/n \cdot 10^{-5} \text{ Ф}.$
Г			$T = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ с},$ $r = 10 \cdot n \text{ Ом},$ $L = 0,5 \cdot n \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$ $a = (m/4) \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$
Д			$T = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ с},$ $r = 10 \cdot n \text{ Ом},$ $L = n \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$

Задание №14

Расчёт нелинейных электрических и цепей в режиме постоянного тока.

В задание входит материал по расчёту нелинейных резистивных цепей в режиме постоянного тока. Даны общие положения расчёта на базе основных законов цепей и понятиях о параметрах и характеристиках нелинейных цепей.

Содержание задания

Для цепи из табл. 14.1 выбрать вариант в соответствии с буквенной литерой. Одно из резистивных сопротивлений r_k заменить нелинейным резистором с характеристикой $i = f(u)$. Значение k определяется в зависимости от числа m следующим образом:

$k = 1$ для $m = 1$ и 2 , $k = 2$ для $m = 3$ и 4 , $k = 3$ для $m = 5$ и 6 , $k = 4$ для $m = 7$ и 8 , $k = 5$ для $m = 9$ и 10 .

Рассчитать:

1. Положение рабочей точки на характеристике нелинейного элемента.
2. Численное значение статического и динамического сопротивления (при чётных m) или статической и динамической проводимости (при нечётных m) нелинейного резистора в рабочей точке.
3. Показать графическую интерпретацию решения с обозначением рабочей точки на характеристике.

Кроме исходной схемы в отчете должны быть изображены схемы замещения в режиме постоянного тока с выделением линейной части (эквивалентного генератора) и ветви с нелинейным резистором, а также схема для определения внутреннего сопротивления генератора.

Основы теории

1. Нелинейными называются электрические цепи, параметры которых зависят от режима цепи, т.е. являются функциями напряжения и тока. Теоретическая основа расчёта – системы уравнений, на базе законов Кирхгофа. Эти системы алгебраических или дифференциальных уравнений нелинейны, т.к. их коэффициенты зависят от параметров режима. При расчёте режимов в таких цепях нельзя использовать принцип

наложения (принцип суперпозиции) и базирующиеся на нём расчётные приёмы.

Зависимости тока от напряжения (напряжения от тока) на элементе цепи – есть функции $i = f_1(u)$ и $u = f_2(i)$ – называемые характеристиками нелинейного элемента. В ранее рассмотренных линейных цепях эта зависимость изображалась прямой, например прямые 1' и 2' на рис. 14.1а и б есть графическое отображение закона Ома на линейном резистивном элементе $u = r \cdot i$ и $i = g \cdot u$.

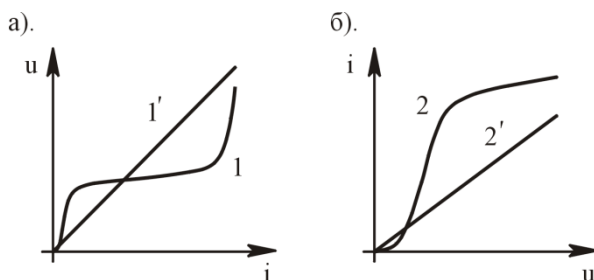


Рис. 14.1

Характеристики нелинейных резистивных элементов, кривые 1 и 2 на том же рисунке, представляют собой сложные нелинейные зависимости $u = f_1(i)$ и $i = f_2(u)$.

2. Параметры нелинейных резисторов определяются соотношением токов и напряжений. Эти соотношения различны на разных участках характеристик, иными словами, тоже зависят от токов и напряжений. Различают статические параметры, определяемые при постоянных (или медленно меняющихся) значениях токов и напряжений, и динамические, определяемые при достаточно быстро меняющихся параметрах режима. Статические сопротивление и проводимость нелинейного резистора:

$$r_{cm} = \frac{u}{i} = \varphi_1(i); \quad g_{cm} = \frac{i}{u} = \psi_1(u). \quad (14.1)$$

Геометрически обе функции представляют собой тангенсы угла наклона прямой, проведённой из начала координат до точки на характеристике.

Динамические сопротивление и проводимость:

$$r_o = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di} = \varphi_2(i); \quad g_o = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{di}{du} = \psi_2(u). \quad (14.2)$$

Эти функции определяются, как тангенс угла наклона касательной к точке на характеристике. Статические и динамические параметры могут существенно отличаться, в частности, динамические сопротивления и проводимости могут иметь отрицательные значения, что тоже является особенностью нелинейных элементов.

3. В случае простых (последовательное, параллельное, смешанное) соединений, электрическая цепь, как и линейная, достаточно просто приводится к одному эквивалентному сопротивлению (проводимости). Это эквивалентное сопротивление будет нелинейной характеристикой всей цепи. Отсюда следует, что вся цепь будет нелинейной, если она содержит, по крайней мере, один нелинейный элемент.

Приведём электрическую цепь, состоящую из двух последовательно соединённых нелинейных элементов (НЭ) – резисторов с характеристиками $u_1 = F_1(i_1)$ и $u_2 = F_2(i_2)$ (рис. 14.2а) к одному, эквивалентному элементу с характеристикой $u = F(i)$.

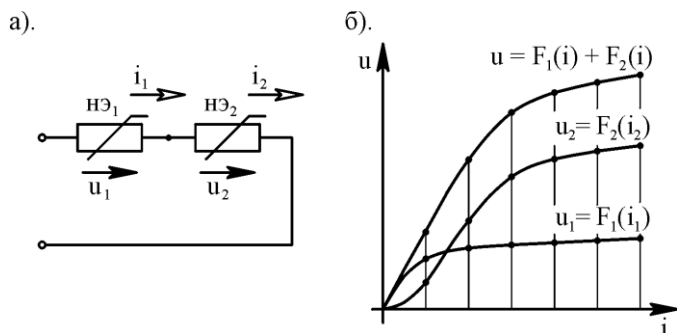


Рис. 14.2

На основании второго закона Кирхгофа напряжение на входе цепи $u = u_1 + u_2 = F_1(i) + F_2(i) = F(i)$, т.к. $i_1 = i_2 = i$. Следовательно, для получения характеристики цепи необходимо сложить ординаты характеристик первого и второго резисторов (рис. 14.2б). Аналогично поступают в случае большего количества элементов.

При параллельном соединении (рис. 14.3а), на основании первого закона Кирхгофа $i = i_1 + i_2$, а $u = u_1 = u_2$. Следовательно, для получения полной характеристики цепи необходимо сложить абсциссы характеристик первого и второго резисторов (рис. 14.3б).

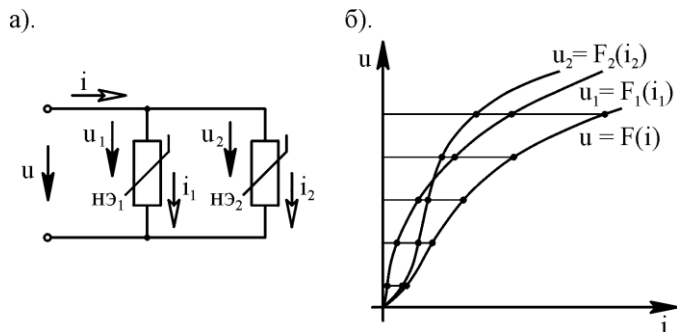


Рис. 14.3

В случае смешанного соединения, когда в цепи нет источников энергии, приведение к элементу с эквивалентной характеристикой осуществляется аналогично. Участки с последовательным соединением и участки с параллельным соединением приводятся по отдельности, как показано выше. Пример такого приведения иллюстрируется на рис. 14.4.

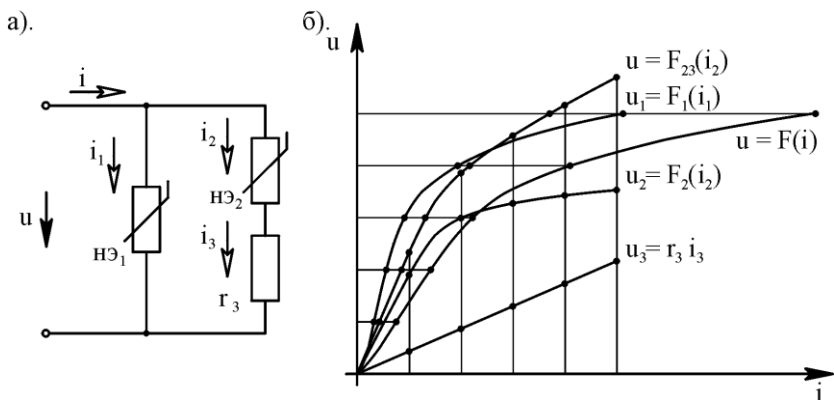


Рис. 14.4

Сопротивление r_3 – линейный резистор и его характеристика есть закон Ома $u_3 = r_3 \cdot i_3$, (прямая на рис. 14.4б). Резистор r_3 и нелинейный элемент $NЭ_2$ соединены последовательно. Складывая ординаты прямой и характеристики $NЭ_2$ – $u_2 = F_2(i_2)$, получим результирующую характеристику второй ветви $u = F_{23}(i_2)$. Нелинейный элемент $NЭ_1$ и вторая ветвь соединены параллельно. Складывая абсциссы характеристики $u_1 = F_1(i_1)$

и характеристики второй ветви – $u = F_{23}(i_2)$ получим результирующую нелинейную характеристику всей цепи $u = F(i)$.

Если ветвь с нелинейным элементом содержит идеальный источник электромагнитной энергии, она может быть приведена к ветви без источника с эквивалентной характеристикой. Приведение рассмотрим на примере ветви, схема которой представлена на рис. 14.5а.

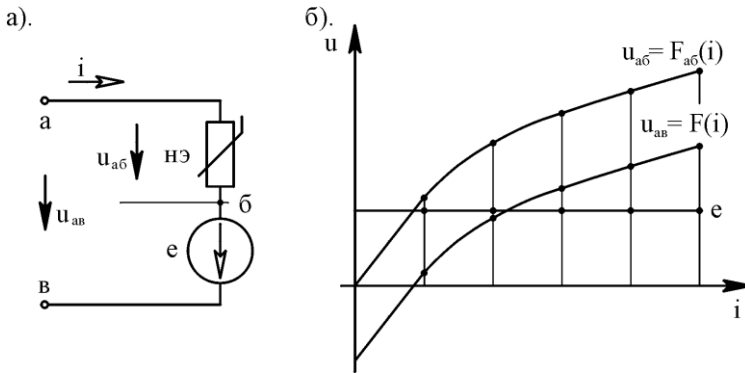


Рис. 14.5

Характеристика нелинейного элемента $u_{aб} = F_{aб}(i)$ изображена на рис. 14.5б. Напряжение на входе $u_{ав}$. Составим уравнение по второму закону Кирхгофа, включающее напряжения $u_{aб}$, $u_{ав}$ и эдс источника e . $u_{ав} - u_{aб} = -e$ или $u_{ав} - F_{aб}(i) = -e$, откуда $u_{ав} = F_{aб}(i) - e = F_{ав}(i)$. Это есть результирующая нелинейная характеристика ветви (рис. 14.5б).

4. При расчёте сложных нелинейных цепей, для которых отсутствует возможность выделения последовательных и параллельных участков, используются другие приёмы. Одним из них является метод эквивалентного генератора, использование которого при расчёте линейных цепей подробно рассмотрено в задании № 3. Если цепь содержит только один нелинейный элемент $i = f(u)$, его выделяют относительно цепи, как показано на рис. 14.6. Остальная часть цепи заменяется эквивалентным генератором, параметры которого e_0 и r_z определяются по правилам, подробно описанным в задании №3. Определить ток по формуле $i_{r(ab)} = e_0 / (r_\Gamma + r_{ab})$, как это делалось в случае линейной цепи, не пред-

ставляется возможным, т. к. сопротивление $r_{аб}$ зависит от тока и, следовательно не известно.

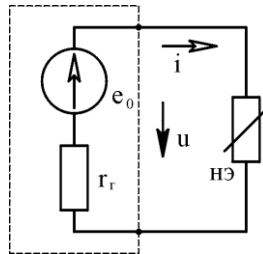


Рис. 14.6

Ток можно найти из системы двух уравнений, первое из которых – нелинейная характеристика, а второе получается на основе второго закона Кирхгофа: $u + r_r \cdot i = e_0$. Окончательно имеем систему

$$\begin{cases} i = \frac{e_0}{r_r} - \frac{1}{r_r} \cdot u, \\ i = f(u) \end{cases} \quad (14.3)$$

которая позволяет найти ток, протекающий по нелинейному резистору. На рис. 14.7 графическое решение системы (14.3), – точка пересечения прямой $e_0/r_r - u/r_r$ (в системе 14.3) с характеристикой $i = f(u)$. Это точка с координатами u_p и i_p .

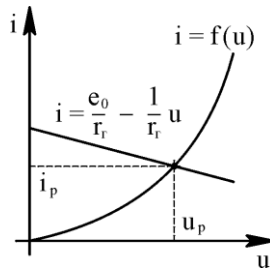


Рис. 14.7

Особо следует обратить внимание на выбор условно положительного направления на нелинейном элементе. Если характеристика линейного резистора прямая, симметричная относительно начала координат (закон Ома), то характеристики нелинейных элементов могут не иметь такой симметрии.

Пример выполнения задания №14

В качестве примера рассчитаем динамическое сопротивление в рабочей точке нелинейного резистора в цепи, схема которой изображена на рис. 14.8.

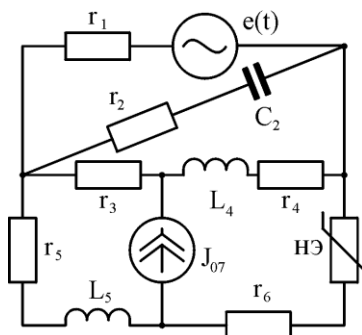


Рис. 14.8

Сопротивление всех резисторов $r = 10$ Ом. Источник постоянного тока $J_{07} = 3$ А. Характеристика нелинейного резистора в рабочем диапазоне $u = 0 \div 45$ В $i = f(u) = 0,0416u - 1,025 \cdot 10^{-5} u^3$ А.

Под рабочей точкой понимается точка на характеристике нелинейного элемента, при отсутствии напряжения на переменном источнике. Схема, соответствующая такому состоянию, изображена на рис. 14.9. Для приведения её к виду соединения, изображённому на рис. 14.6, необходимо найти напряжение u_{ab} на разомкнутых зажимах «а» и «б» и сопротивление между этими зажимами, при разорванной ветви с источником тока (подробно в основах теории к заданию № 3).

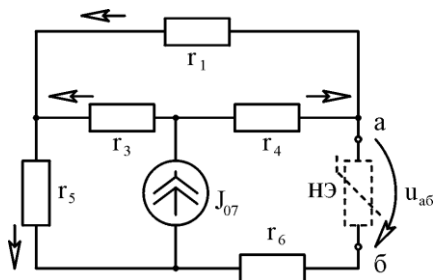


Рис. 14.9

Составив уравнение по второму закону Кирхгофа для любого контура, включающего $u_{a\bar{b}}$, например $u_{a\bar{b}} - r_5 i'_5 - r_1 i'_1 = 0$, найдём э.д.с. эквивалентного генератора $u_{a\bar{b}} = r_5 i'_5 + r_1 i'_1 = e_0$. Ток $i'_5 = J_{07} = 3 \text{ A}$, а ток

$$i'_1 = \frac{(r_1 + r_4)r_3}{r_1 + r_4 + r_3} \cdot J_{07} \cdot \frac{1}{r_1 + r_4} = 1 \text{ A}.$$

Тогда э.д.с. эквивалентного генератора $e_0 = 40 \text{ В}$. Сопротивление эквивалентного генератора:

$$r_r = \frac{(r_3 + r_4)r_1}{r_1 + r_4 + r_3} + r_5 + r_6 = 26,67 \text{ Ом}.$$

Система 14.3 приобретёт следующий вид:

$$\begin{cases} i = \frac{e_0}{r_r} - \frac{1}{r_r} \cdot u = 1,5 - 0,0375 u, \\ i = f(u) = 0,0416 u - 1,025 \cdot 10^{-5} u^3. \end{cases} \quad (14.4)$$

Приравняв первое и второе, получим одно уравнение третьего порядка $1,5 - 0,0791u - 1,025 \cdot 10^{-5} u^3 = 0$, корни которого: $-96,122$; 20 ; $76,122$ (решение получено с помощью программы MathCAD). Один из корней, $u_p = 20 \text{ В}$ принадлежит рабочему диапазону. Вторая координата рабочей точки: $i_p = 1,5 - 0,0375 \cdot 20 = 0,75 \text{ А}$. На рис. 14.10 показано графическое решение системы уравнений (14.4).

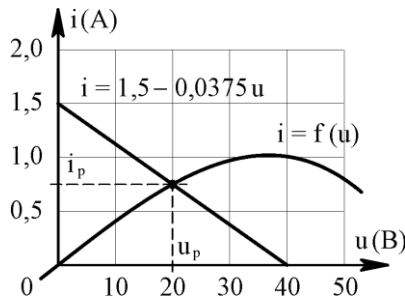


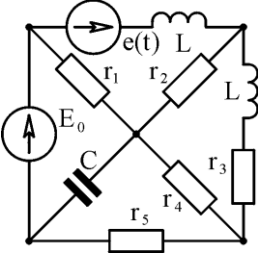
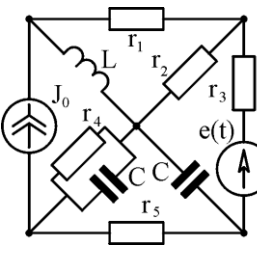
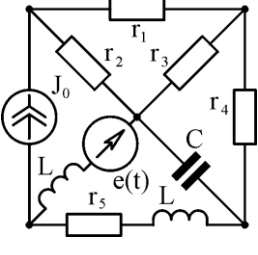
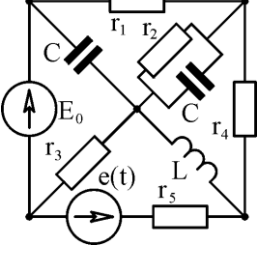
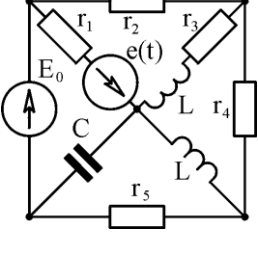
Рис. 14.10

Динамическое сопротивление в рабочей точке в соответствии с (14.2)

$$r_o = \left(\frac{du}{di} \right)_{i=0,75} = \frac{1}{g_o} = \frac{1}{\left(\frac{di}{du} \right)_{u=20}} = \frac{1}{0,0416 - 3 \cdot 1,025 \cdot 10^{-5} \cdot u_p^2} = 34,13 \text{ Ом}.$$

Таблица 14.1

Условия задачи

Вариант	Схема цепи	Вариант	Схема цепи
А		Г	
Б		Д	
В		<p>Примечание:</p> <p>Для всех вариантов $r = 2n$.</p> <p>Для вариантов А, В, и Д $E_0 = 2n$, $i = f(u) = 0,12(u/n)^2$.</p> <p>Для вариантов Б и Г $J_0 = 2/n$, $i = f(u) = (0,02/n)u^2$.</p> <p>Параметры заданы: r – в омах; u, E_0 – в вольтах; i, J_0 – в амперах.</p>	

Задание №15

Расчёт магнитных цепей в режиме постоянного тока.

В отличие от задания №2, где рассматривался линейный вариант магнитной цепи, т.е. не учитывалась зависимость магнитной проницаемости среды (ферромагнитного материала) от напряжённости магнитного поля, в настоящем задании предусмотрен учёт нелинейных свойств магнитопровода. Теоретическая часть расчётов базируется на известных понятиях магнитной цепи: магнитном потоке, магнитном напряжении, магнитодвижущей силе (м.д.с.) и других, подробно описанных в задании № 2.

Содержание задания

Для устройства, состоящего из ферромагнитного сердечника с воздушным зазором и двух катушек, по обмоткам которых протекают постоянные токи рассчитать:

1. магнитные потоки в каждом стержне;
2. напряжённость магнитного поля в воздушном зазоре для чётных n , или энергию магнитного поля в зазоре для нечётных n ;
3. статическую индуктивность первой обмотки при наличии тока во второй для чётных n , или статическую индуктивность второй обмотки при наличии тока в первой для нечётных n .

Обозначения размеров магнитопровода и требования по оформлению графической части даны в табл. 15.1. Магнитопровод выполнен из электротехнической стали, кривая намагничивания которой задана для всех вариантов одинаковой табл. 15.2. В табл. 15.3 задана конфигурация магнитопровода конкретного варианта, размеры и направления токов. Число витков в катушках: $w_1 = 200$ т, $w_2 = 100$ т. Токи в обмотках катушек: $i_1 = 25/(m + 1)$ А и $i_2 = 20/(m + 1)$ А. Выполняя расчёты, потоками рассеяния пренебречь и реальную картину магнитного поля в воздушном зазоре не учитывать.

Основы теории

Магнитные цепи обладают ярко выраженными нелинейными свойствами в случаях, когда магнитный поток полностью или частично замыкается через конструкции, выполненные из ферромагнитного материала. Последний характеризуется не только большими абсолютными значениями магнитной проницаемости, но и нелинейной связью между напряжённостью внешнего магнитного поля и магнитной индукцией. Другими словами, это материал, магнитная проницаемость которого мо-

жет меняться в большом диапазоне и зависит от напряжённости внешнего поля.

Если при расчёте не учитываются потоки, частично или полностью замыкающиеся в воздухе, (их называют потоками рассеяния), то расчёт магнитной цепи аналогичен расчёту соответствующей электрической нелинейной резистивной цепи (см. основы теории предыдущего задания). Эта аналогия базируется на идентичности выражений первого и второго законов Кирхгофа для электрической цепи:

$$\sum i_k = 0 \quad \text{и} \quad \sum u_k = \sum e_k$$

и основных расчётных соотношений для магнитной цепи:

$$\sum \Phi_k = 0 \quad \text{и} \quad \sum U_{Mk} = \sum w_k i_k.$$

(подробно в основах теории задания № 2 и в соответствующих разделах лекционного курса).

В качестве примера рассмотрим расчёт магнитных потоков на участках магнитопровода в конструкции, изображённой на рис. 15.1а. На рис. 15.1б, электрическая аналогия конструкции. Расчёт похожей цепи рассмотрен в предыдущем задании. Если в приведённых в предыдущем задании расчётных выражениях формально заменить: ток i на магнитный поток Φ ; электрическое напряжение u на магнитное напряжение U_M ; эдс e на магнитодвижущую силу $w \cdot i$, а функции $i = f(u)$ на $\Phi = f(U_M)$, то приведение цепи к нелинейному элементу с эквивалентной характеристикой потребует действий аналогичных примеру (рис. 14.4в предыдущем задании).

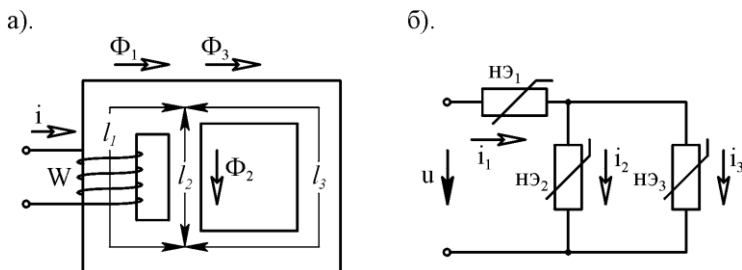


Рис. 15.1

На рис. 15.2 представлены нелинейные характеристики $\Phi = f(U_M)$ участков магнитопровода. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют характеристикам первого, второго и третьего участков магнитопровода.

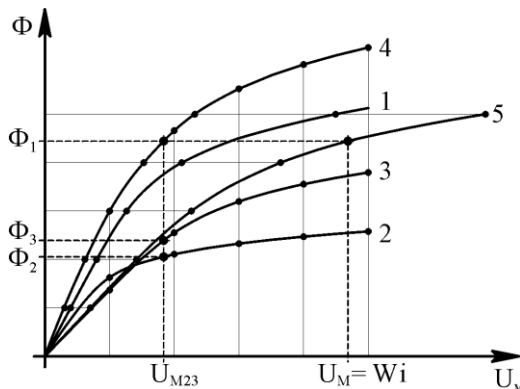


Рис. 15.2

Суммарный поток $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 = f_2(U_{M2}) + f_3(U_{M3}) = f_{23}(U_{M23})$, а магнитные напряжения на втором и третьем параллельных участках равны $U_{M2} = U_{M3} = U_{M23}$. Складывая ординаты кривых 2 и 3, получим эквивалентную характеристику параллельного участка $\Phi_1 = f_{23}(U_{M23})$ (кривая 4). Параллельный участок 2 – 3 последовательно соединён с участком 1, и следовательно $U_{M1} + U_{M2} = U_{M1} + U_{M3} = U_{M1} + U_{M23} = w \cdot i$. Складывая абсциссы кривых 1 и 4, получим кривую 5 – результирующую характеристику всей магнитной цепи $\Phi_1 = f_5(U_{M1} + U_{M23}) = f_5(w \cdot i)$. Отложив по оси абсцисс значение м.д.с. – $w \cdot i$, на пересечении с кривой 5 получим ординату, соответствующую суммарному магнитному потоку Φ_1 (пунктирная линия). Абсцисса пересечения этой линии с кривой 4 соответствует магнитному напряжению параллельного участка $U_{M23} = U_{M2} = U_{M3}$. Отметив это значение на кривых 2 и 3, найдём (ординаты точек на кривых 2 и 3) потоки на втором и третьем участках Φ_2 и Φ_3 .

Пример выполнения задания №15

Для примера рассчитаем значение магнитной индукции в стержнях магнитопровода конструкции, изображённой на рис. 15.3, где все размеры указаны в миллиметрах. Количество витков в катушках и токи, протекающие в них: $w_1=500$; $i_1=5\text{A}$; $w_2=200$; $i_2=10\text{A}$.

Определим энергию магнитного поля в воздушном зазоре и динамическую индуктивность первой катушки с учётом тока второй катушки.

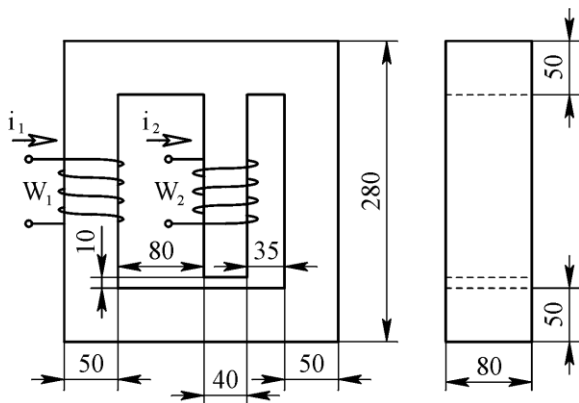


Рис. 15.3

Кривая намагничивания электротехнической стали, из которой изготовлен магнитопровод, дана на рис. 15.4. При расчёте не будем учитывать потоки рассеяния и истинную картину поля в зазоре.

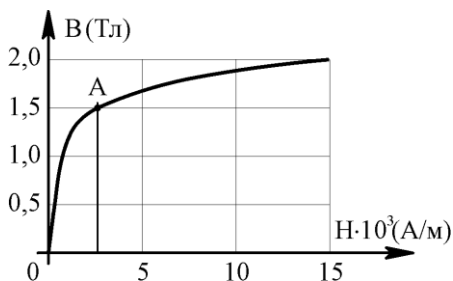


Рис. 15.4

Схема электрической цепи, эквивалентной заданной магнитной, с указанием условно положительных направлений потоков, изображена на рис. 15.5. На этой схеме R_M – линейный элемент. Это магнитное сопротивление воздушного зазора:

$$R_M = \frac{l_{\text{зз}}}{\mu_0 \cdot S},$$

где S площадь сечения воздушного зазора. Без учёта реальной картины поля в зазоре, площадь зазора полагается равной площади поперечного сечения стержня. Для построения нелинейных характеристик $\Phi = f(U_M)$ участков магнитопровода, изначально необходимо опреде-

лить сами участки, т.е. выделить элементы магнитопровода с одинаковым сечением и указать их длину.

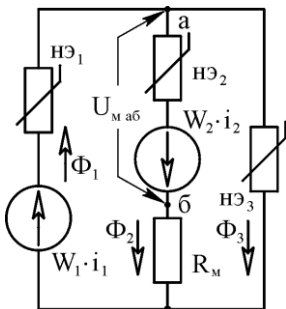


Рис. 15.5

Разделение магнитопровода на три участка показано на рис. 15.6. Отдельным участком выделяется воздушный зазор. Длина первого участка, в соответствии с размерами, обозначенными на рис. 15.3 $l_1 = 2(25 + 80 + 20) + 25 + 180 + 25 = 480 \text{ мм} = 0,48 \text{ м}$. Площадь сечения: $S_1 = 50 \cdot 60 = 3000 \text{ мм}^2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$. Для второго и третьего участков, соответственно: $l_2 = 0,22 \text{ м}$; $S_2 = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$; $l_3 = 0,39 \text{ м}$, $S_3 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$. Длина воздушного зазора $l_{\text{зз}} = 0,01 \text{ м}$.

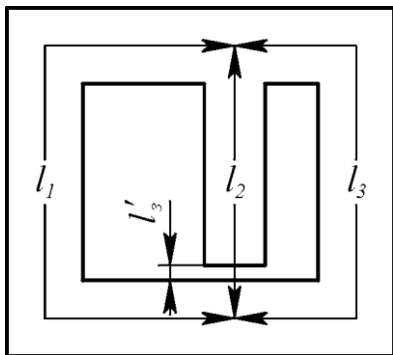


Рис 15.6

Характеристики $\Phi = f(U_M)$ построим следующим образом. Выберем на кривой намагничивания (рис. 15.4) произвольную точку «А» с координатами $H_A = 2,75 \cdot 10^3$ А/м и $B_A = 1,5$ Тл. При построении харак-

теристики первого участка, абсциссу H_A умножим на длину первого участка l_1 . Произведение $H_A \cdot l_1 = 2,75 \cdot 10^3 \cdot 0,48 = 1,32 \cdot 10^3$ А есть абсцисса точки A_1 на характеристике $\Phi_1 = f_1(U_{M1})$.

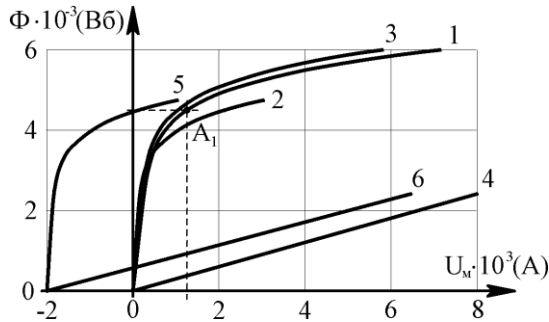


Рис. 15.7

Ординату точки A_1 получим умножением B_A на площадь поперечного сечения первого участка S_1 . Произведение $B_A \cdot S_1 = 1,5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 4,5 \cdot 10^{-3}$ Вб – есть значение магнитного потока в точке A_1 на характеристике $\Phi_1 = f_1(U_{M1})$ (кривая 1 на рис. 15.7). Аналогичным образом определяются координаты любого числа точек на характеристиках первого, второго и третьего участков (кривые 1, 2 и 3 на рис. 15.7). На этом же рисунке прямая 4 есть линейная характеристика воздушного зазора $\Phi = (1/R_M) \cdot U_M$, где

$$R_M = \frac{l_{\text{воз}}}{\mu_0 S_2} = \frac{0,01}{1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 2,4 \cdot 10^{-3}} = 3,31 \cdot 10^6 \text{ Гн}^{-1}.$$

Характеристика второго участка с учётом м.д.с. $w_2 i_2$ находится, подобно тому, как в предыдущем задании находилась характеристика нелинейного резистора с последовательным источником э.д.с. По аналогии со вторым законом Кирхгофа: $U_{M\text{аб}} - U_{M\text{нз2}} = -w_2 i_2$ или $U_{M\text{аб}} = U_{M\text{нз2}} - w_2 i_2$. Вычитая из абсциссы кривой 2 постоянную составляющую $w_2 i_2 = 2 \cdot 10^3$ А, получим кривую 5, соответствующую второму участку с м.д.с. Участок с воздушным зазором на (схеме рис. 15.5) соединён последовательно с участком 2. Складывая абсциссы кривой 5 и прямой 4, получим полную характеристику второго участка (кривая 6 на рис. 15.7).

Так как $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$ и $U_{M2} = U_{M3} = U_{M23}$, то складывая ординаты характеристики $\Phi_3 = f_3(U_{M3})$ (кривая 3) и $\Phi_2 = f_2(U_{M2}, w_2 i_2, R_M)$ (кри-

вая 6), получим результирующую характеристику параллельных участков 2 и 3 : $\Phi_1 = f_{23}(U_{M23})$ (кривая 7 на рис. 15.8).

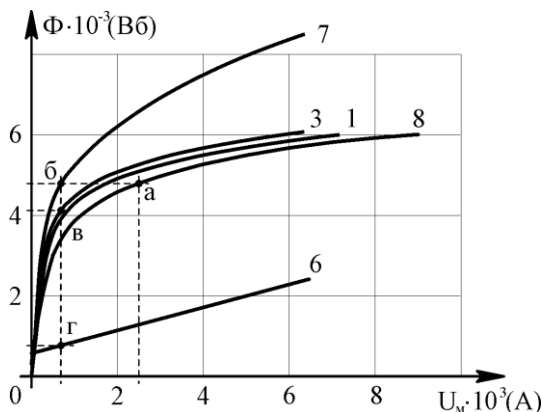


Рис. 15.8

Магнитодвижущая сила $w_1 i_1$ равна сумме магнитных напряжений U_{M1} и U_{M23} , необходимых для создания магнитного потока Φ_1 через первый и параллельно соединённые второй и третий участки: $w_1 i_1 = U_{M1} + U_{M23}$. Складывая абсциссы кривых 1 и 7, соответствующих характеристикам $\Phi_1 = f_1(U_{M1})$ и $\Phi_1 = f_{23}(U_{M23})$, найдём полную характеристику всей магнитной цепи: $\Phi_1 = f(w_1 i_1)$ (кривая 8).

Отложив по оси абсцисс значение м.д.с. первой катушки $w_1 i_1 = 2,5 \cdot 10^3 \text{ А}$, проведём вертикальную прямую. Её пересечение с кривой 8 (точка а) определяет магнитный поток на первом участке $\Phi_1 \approx 4,79 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}$. Такое же значение имеет суммарный поток параллельных второго и третьего участков, и следовательно, абсцисса точки б на кривой 7 есть магнитное напряжение параллельного участка $U_{M23} = U_{M2} = U_{M3}$. Соответственно ординаты пересечения вертикальной прямой, опущенной из точки б с кривыми 3 и 6 (точки в и г), есть магнитные потоки третьего и второго участков: $\Phi_3 \approx 4,08 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}$ и $\Phi_2 \approx 0,78 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}$.

Точность расчёта проверим выполнением условия $\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0$. Подставив найденные значения:

$$4,79 \cdot 10^{-3} - 0,78 \cdot 10^{-3} - 4,08 \cdot 10^{-3} = -0,07 \cdot 10^{-3},$$

найдем, что небаланс составляет менее двух процентов, что объясняется погрешностью графических построений.

Магнитная индукция на первом участке магнитопровода: $B_1 = \Phi_1 / S_1 = 4,79 \cdot 10^{-3} / 3 \cdot 10^{-3} = 1,6$ Тл., на втором (включая зазор) $B_2 = \Phi_2 / S_2 = 0,325$ Тл., и на третьем $B_3 = \Phi_3 / S_3 = 1,36$ Тл.

Энергию магнитного поля в воздушном зазоре определим, исходя из принятого ранее допущения, об однородности поля в зазоре, т.е. без учёта его реальной конфигурации. При таком допущении, объёмная плотность энергии (см. задание №2) постоянна и равна $W'_M = BH / 2 = B_2^2 / 2 \cdot \mu_0 = 0,325^2 / 2 \cdot 1,257 \cdot 10^{-6} = 42,015 \cdot 10^3$ Дж/м³. Энергия магнитного поля в зазоре: $W_M = W'_M \cdot V_{\text{заз}} = W'_M \cdot S_2 \cdot l_{\text{заз}} = 42,015 \cdot 10^3 \cdot 2,4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,01 = 1,008$ Дж.

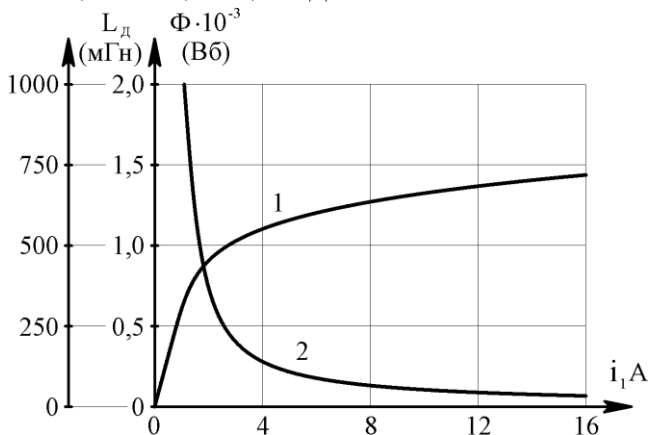


Рис. 15.9

Динамическая индуктивность первой катушки, с учётом постоянного тока $i_2 = 10$ А, протекающего по обмотке второй катушки, есть нелинейная характеристика $L_\theta = d\Psi_1 / di_1 = w_1 [d\Phi_1(w_1 i_1) / di_1]$. Кривая 8 на рис. 15.8 изображает характеристику $\Phi_1 = f(w_1 i_1)$ в координатах потока и магнитного напряжения U_M . Рассматривая эту характеристику в качестве характеристики эквивалентной катушки, для которой $w_1 i_1 = H \cdot l_{\text{ЭКВ}} = U_M$, приведём координату магнитного напряжения на рис. 15.8 к координате тока $i_1 = U_M / w_1$ (кривая 1 на рис. 15.9). Динамическая индуктивность $L_\theta(i_1)$ показана на этом же рисунке (кривая 2).

Последняя получена графическим дифференцированием кривой 1 по току i_1 и умножением на количество витков первой катушки $w_1 = 500$.

Таблица 15.1

Размеры магнитопровода и правила оформления графической части

Требования к оформлению графической части	<p>Изобразите рисунок магнитопровода, соответствующий вашему варианту в соответствии с таблицей 15.3. Проставьте конкретные размеры в мм. Пунктирными линиями обозначьте длины участков с постоянным сечением. Начертите схему замещения магнитной цепи с указанием направлений магнитных потоков и м.д.с. Решение уравнений цепи выполняется графически. Кривые на всех графиках должны быть пронумерованы, а в тексте указать функциональную зависимость кривой с данным номером.</p>
Элементы магнитопровода и обозначения основных размеров	

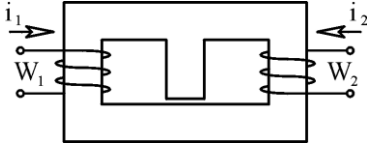
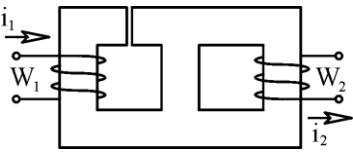
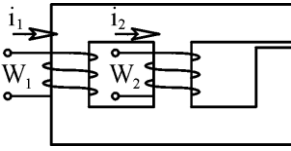
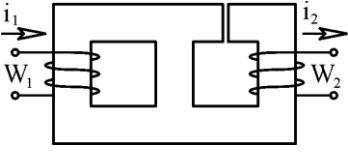
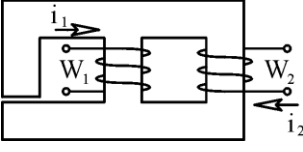
Таблица 15.2

Кривая намагничивания электротехнической стали магнитопровода

В, Тл	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$H \cdot 10^3$, А/м	0,00	0,20	0,40	0,65	0,95	1,35	1,87	2,62	3,70	5,30	14,0

Таблица 15.3

Условия задачи

Вариант	Конфигурация магнитопровода и направления токов	Размеры в мм.
А		$a = 40$ $b = 50$ $c = 40$ $d = 50$ $e = 40$ $f = 240$ $g = 50$ $h = 40$ $l = 40$ $p = 5$
Б		$a = 50$ $b = 60$ $c = 50$ $d = 60$ $e = 50$ $f = 300$ $g = 50$ $h = 50$ $l = 50$ $p = 8$
В		$a = 40$ $b = 80$ $c = 40$ $d = 40$ $e = 40$ $f = 280$ $g = 50$ $h = 40$ $l = 40$ $p = 5$
Г		$a = 60$ $b = 40$ $c = 60$ $d = 40$ $e = 60$ $f = 300$ $g = 50$ $h = 60$ $l = 60$ $p = 6$
Д		$a = 50$ $b = 80$ $c = 50$ $d = 80$ $e = 50$ $f = 280$ $g = 50$ $h = 50$ $l = 50$ $p = 5$

Задание № 16

Расчёт периодических процессов в нелинейных цепях.

Цель настоящего задания – изучение особенностей периодических режимов в цепях, содержащих нелинейные элементы. Особый акцент при этом делается на различие спектральных составов воздействия и реакции. Обращается внимание на способы представления нелинейных характеристик элементов цепи. Даются рекомендации по аппроксимации нелинейных функций, в том числе с использованием стандартных программных продуктов. Основы теории, предвещающие расчётную часть задания, включают положения, рассмотренные ранее в предыдущих заданиях по расчёту линейных цепей переменного тока, а также линейных (задание № 2) и нелинейных (задание № 15) магнитных цепей.

Содержание задания

Рассчитать режим нелинейной электрической цепи, содержащей катушку с ферромагнитным сердечником. Закон изменения магнитной индукции внутри сердечника известен $B = 2,2 \cos(\omega t)$ Тл. Схема цепи, размеры сердечника и частота магнитной индукции заданы табл. 16.3. Найти токи и напряжения на всех элементах цепи и определить показания приборов.

Кривая намагничивания материала сердечника задана табл. 16.1. Параметры линейных элементов цепи: $w = 100 \cdot m/2$; $r = 1,5 (m + n)$; $x_L = 5 (m + n/2)$; $x_C = 7,5 (m + n/3)$ (r , x_L , x_C заданы в омах).

Таблица 16.1

Кривая намагничивания электротехнической стали магнитопровода.

B (Тл)	0	0,7	0,86	1,0	1,15	1,28	1,55	1,86	2,28	2,50
$H \cdot 10^3/0,25m$ (А/м)	0,00	0,10	0,12	0,14	0,16	0,20	0,35	0,70	1,80	3,00

Аппроксимировать нелинейную зависимость $B = f(H)$ рекомендуется полином следующего вида: $H = a_1 B + a_2 B^3$. В качестве критерия точности аппроксимации необходимо обеспечить условие: максимальное отклонение не должно превышать 0,20 Тл. в пределах пологого (приблизительно в интервале $400 \div 3000$ А/м²) участка характеристики. Кривую, соответствующую аналитическому выражению построить на одном графике с кривой, соответствующей конкретному варианту (числу

т). Сравнить их для проверки выполнения заданного критерия. Рассеянием и потерями в сердечнике пренебречь.

Основы теории

1. Основная особенность периодических процессов в нелинейных электрических и магнитных цепях – это различие спектральных составов воздействия и реакции на это воздействие. Спустя достаточно большое время после включения такой цепи под действие источника синусоидального напряжения, в цепи не обязательно возникнет периодический режим с тем же периодом, что и у воздействия, как это имело место в линейных цепях. Например, в кривой тока цепи, находящейся под действием синусоидального напряжения, кроме основной гармоники могут возникнуть гармонические составляющие более высоких порядков, может присутствовать постоянная составляющая. Возможно и отсутствие основной гармоники (примером может служить выпрямительное устройство, содержащее нелинейные элементы – диоды).

Пусть на входе электрической цепи с нелинейной характеристикой $i = f(u) = 0,5 - 0,125u + 1,33 \cdot 10^{-3} u^3$, действует напряжение $u = 10 \sin(\omega_1 t)$. Ток цепи:

$$\begin{aligned} i &= 0,5 - 1,25 \cdot 10 \sin(\omega_1 t) + 1,33 \cdot 10^{-3} (10 \sin(\omega_1 t))^3 = \\ &= 0,5 - 1,25 \cdot 10 \sin(\omega_1 t) + 1,33 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{3}{4} \sin(\omega_1 t) - \frac{1}{4} \sin(3\omega_1 t) \right) = \\ &= 0,5 - 0,253 \sin(\omega_1 t) - 0,333 \sin(3\omega_1 t), \end{aligned}$$

кроме основной гармоники содержит третью гармонику и постоянную составляющую. Ниже на рис. 16.1а и б представлены кривые воздействия (входного напряжения) и реакции (тока), а также их амплитудные спектры. При расчёте таких цепей не применим метод наложения и все, основанные на нём расчётные приёмы.

2. Анализ цепей с нелинейными характеристиками нередко связан с необходимостью аналитического представления этих характеристик. Существуют многочисленные приёмы аппроксимации, от простейшей кусочно – линейной, где характеристика заменяется совокупностью отрезков прямой, до сложной интерполяции, обеспечивающей равенство в узлах не только исходной функции, но и её производных. Чаще других находят применение:

а) полином типа $i = f(u) = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_2 u^2 + a_1 u + a_0$,

- б) степенные функции $i = f(u) = Au^\alpha$,
 в) экспоненциальные $i = f(u) = ae^{\alpha u} + b$.

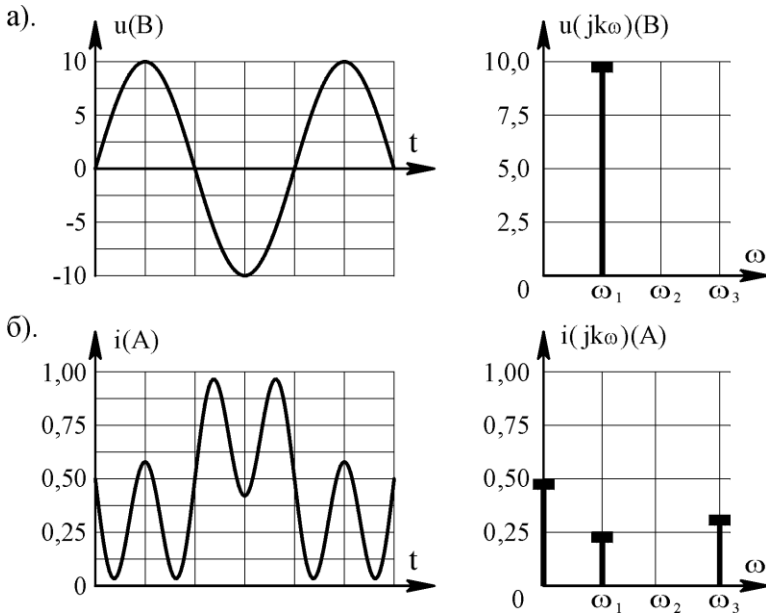


Рис. 16.1

Точность аппроксимации оценивается по критерию, наиболее подходящему для конкретной задачи, т.е. наиболее верно отражающему физическую сущность электромагнитного процесса. Это может быть максимально допустимое по абсолютной величине отклонение:

$$|F(u) - f(u)| \leq \varepsilon,$$

где $F(u)$ – исходная нелинейная характеристика, а ε – допустимая погрешность. Иногда в качестве критерия принимается среднеинтегральное отклонение или наименьшая сумма квадратов отклонений, если характеристика задана таблицей.

Нередко с этой же целью прибегают к условной линейризации, когда коэффициент уравнения цепи, включающий нелинейную зависимость, заменяется постоянным коэффициентом. В случаях, когда такая замена неоднозначна, замена на постоянный коэффициент осуществля-

ется при члене, который меньше всего влияет на характер электромагнитного процесса.

Рассмотрим пример. Пусть нелинейная характеристика $u = f(i)$ задана табл. 16.2 значений токов и напряжений. Самым простым способом представления функции $u = f(i)$ было бы соединение заданных точек отрезками прямых (кусочно – линейная аппроксимация). При относительно большом числе отрезков, такое представление может достаточно точно изображать саму характеристику, но её производная при переходе с одного линейного участка на другой будет меняться скачком. Это вносит погрешность в решение, если уравнения цепи содержат члены с производной du/di (или di/du). Погрешность станет ещё больше при наличии в решении вторых, или более высокого порядка, производных.

Таблица 16.2

Ток i (А)	0	1	2	3	4	5	6,5	8	10
Напряжение u (В)	0	15,0	40,5	54,0	60,75	66,0	70,5	73,5	75,0

Исключить эту погрешность можно, аппроксимировав заданную зависимость непрерывным полиномом. Для полинома второго порядка достаточно взять всего две точки из заданной таблицы, но при этом следует иметь в виду, что погрешность аппроксимации зависит от их удачного выбора. Правильный выбор требует определённого опыта или вариаций различными комбинациями. Например, заданную таблицей зависимость $u = f(i)$ проще представить квадратичной параболой. $i = F(u) = a_2 u^2 + a_1 u$. Выбрав из таблицы две точки характеристики (например: $i_1 = 2$ А, $u_1 = 40,5$ В и $i_2 = 8$ А, $u_2 = 73,5$ В), составим систему:

$$\begin{cases} i_1 = a_2 u_1^2 + a_1 u_1, \\ i_2 = a_2 u_2^2 + a_1 u_2. \end{cases} \quad (16.1)$$

Подставив выбранные значения и решив, получим: $a_2 = 1,802 \cdot 10^{-3}$ и $a_1 = -0,024$. Искомая зависимость $i = F(u) = 1,802 \cdot 10^{-3} u^2 - 0,024 u$ изображена на рис. 16.2 (кривая 1). Там же представлен результат аппроксимации посредством кубической параболы (кривая 2):

$$i = F(u) = 5,796 \cdot 10^{-5} u^3 - 4,408 \cdot 10^{-3} u^2 + 0,12u,$$

определённой аналогичным образом по трём точкам исходной таблицы: $i_1 = 1$ А, $u_1 = 15$ В; $i_2 = 4$ А, $u_2 = 60,75$ В и $i_3 = 8$ А, $u_3 = 73,5$ В. Наилучший вариант аппроксимации (кривая 3), получен с помощью про-

граммы **MathCAD**. Подпрограммы **cspline** и **interp** реализуют кубическую сплайновую интерполяцию, учитывающую всю исходную информацию (все данные таблицы) и обеспечивающую непрерывность аппроксимирующей функции и её производных во всей зоне аппроксимации.

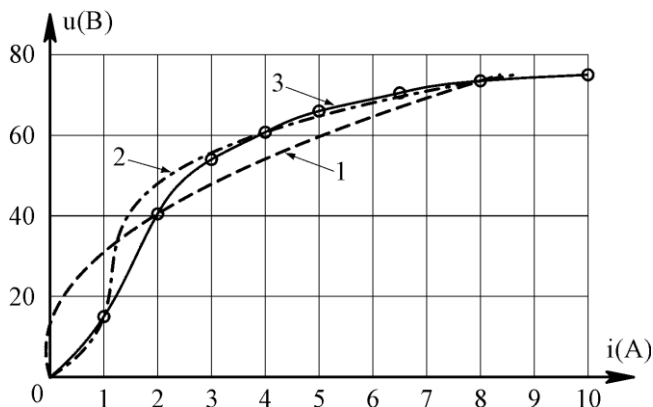


Рис. 16.2

Пример выполнения задания №16

В качестве примера рассчитаем показания приборов в цепи, схема которой изображена на рис. 16.3. Цепь содержит нелинейный элемент – катушку со стальным сердечником. Характеристика катушки $B = f(H)$ задана графиком на рис. 16.4 (кривая 1). Известно, что магнитная индукция в сердечнике катушки изменяется по синусоидальному закону $B = 1,8 \sin(100 t)$. Число витков катушки $w = 100$, средняя длина магнитопровода $l = 0,25$ м, площадь поперечного сечения $S = 5,55 \cdot 10^{-4}$ м². Параметры линейных элементов цепи: $L = 0,1$ Гн, $r = 10$ Ом, $C = 1000$ мкФ.

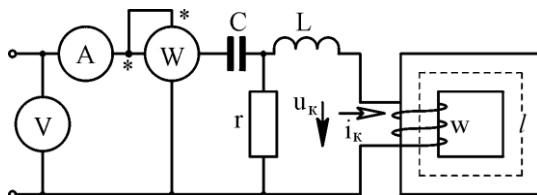


Рис. 16.3

Найдём аналитическое выражение для характеристики катушки, кривой намагничивания $B = f(H)$ (кривая 1). В качестве аппроксимирующей функции возьмём полином вида $H = a_1 B + a_2 B^3$. Для этого выберем на кривой 1 две произвольные точки.

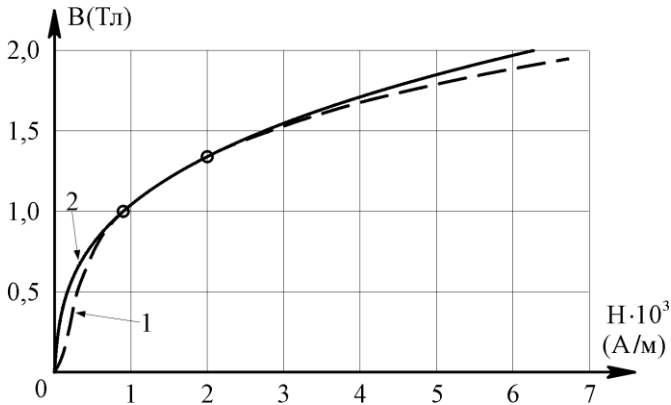


Рис. 16.4

Это точки с координатами $B_1 = 1$ Тл, $H_1 = 900$ А/м и $B_2 = 1,34$ Тл, $H_2 = 2000$ А/м. Подставив в аппроксимирующий полином, получим систему вида (16.1):

$$\begin{cases} 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 = 900, \\ 1,34 \cdot a_1 + (1,34)^3 \cdot a_2 = 2000, \end{cases}$$

решение которой определяет коэффициенты полинома. $H = 155,232 B + 744,768 B^3$. Из графика (кривая 2) видно, что такой полином достаточно точно отображает заданную нелинейную зависимость. Пользуясь этим результатом, найдём ток, протекающий по обмотке катушки. Закон полного тока в записи для магнитной цепи (см. основы теории заданий № 2 и № 15), $w i_k = H l$ позволяет выразить ток:

$$\begin{aligned} i_k &= \frac{l}{w} \cdot H = \frac{0,25}{100} (155,2 B + 744,8 B^3) = \\ &= 0,388 \cdot 1,8 \sin(100t) + 1,862 (1,8 \sin(100t))^3 = \\ &= 0,699 \sin(100t) + 10,86 (0,75 \sin(100t) - 0,25 \sin(3 \cdot 100t)) = \\ &= 8,843 \sin(100t) + 2,715 \sin(300t - 180^\circ) \text{ А.} \end{aligned}$$

Здесь использована известная формула $\sin^3 \alpha = 0,75 \sin \alpha - 0,25 \sin(3\alpha)$.
 Напряжение на катушке $u_k = d\Psi / dt$, где потокоцепление $\Psi = w\Phi = wSB$.

$$u_k = wS \frac{dB}{dt} = wS \frac{d(1,8 \sin(100t))}{dt} = 100 \cdot 5,55 \cdot 10^{-4} \cdot 100 \cdot 1,8 \cdot \cos(100t) = \\ = 10 \sin(100t + 90^\circ) \text{ В.}$$

Токи и напряжения на линейных элементах цепи найдём по правилам, изложенным в теоретической части курса и в основах теории предыдущих заданий. При этом при расчёте отдельных гармонических составляющих будем использовать комплексный метод расчёта. Рассчитаем напряжение на индуктивности. Ток через индуктивность равен току катушки.

Для первой гармоники:

$$\dot{U}_{L1} = jx_{L1} \cdot \dot{I}_{k1} = j\omega L \dot{I}_{k1} = j10 \cdot 8,843 / \sqrt{2} = 62,72 e^{j90^\circ} \text{ В;}$$

соответственно мгновенное значение $u_{L1} = \sqrt{2} \cdot 62,72 \sin(100t + 90^\circ) \text{ В.}$

Для третьей гармоники:

$$\dot{U}_{L3} = jx_{L3} \cdot \dot{I}_{k3} = j3\omega L \dot{I}_{k3} = j30 \frac{2,715}{\sqrt{2}} e^{-j180^\circ} = 57,76 e^{-j90^\circ} \text{ В;}$$

и $u_{L3} = \sqrt{2} \cdot 57,76 \sin(3 \cdot 100t - 90^\circ) \text{ В.}$ Тогда мгновенное значение напряжения на индуктивности L :

$$u_L = \sqrt{2} \cdot 62,72 \sin(100t + 90^\circ) + \sqrt{2} \cdot 57,76 \sin(3 \cdot 100t - 90^\circ) \text{ В.}$$

Напряжение на резисторе: $u_r = u_k + u_L$. Для первой гармоники:

$$\dot{U}_{r1} = \dot{U}_{k1} + \dot{U}_{L1} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j90^\circ} + 62,72 e^{j90^\circ} = 69,79 e^{j90^\circ} \text{ В.}$$

Поскольку в напряжении катушки третья гармоника отсутствует, третья гармоника на резисторе равна третьей гармонике напряжения на индуктивности. Мгновенное значение напряжения на резисторе:

$$u_r = \sqrt{2} \cdot 69,79 \sin(100t + 90^\circ) + \sqrt{2} \cdot 57,76 \sin(3 \cdot 100t - 90^\circ) \text{ В.}$$

Ток на резисторе:

$$i_r = u_r / r = \sqrt{2} \cdot 6,98 \sin(100t + 90^\circ) + \sqrt{2} \cdot 5,78 \sin(3 \cdot 100t - 90^\circ) \text{ В.}$$

Ток через ёмкость равен общему току цепи, то есть $i = i_C = i_r + i_L$, при этом следует помнить, что $i_L = i_k$.

Для первой гармоники:

$$\dot{I}_{C1} = \dot{I}_{r1} + \dot{I}_{L1} = 6,98e^{j90^\circ} + 8,84 = 11,26e^{j38,3^\circ} \text{ A};$$
$$i_{C1} = \sqrt{2} \cdot 11,26 \sin(100t + 38,3^\circ) \text{ A}.$$

Для третьей гармоники:

$$\dot{I}_{C3} = \dot{I}_{r3} + \dot{I}_{L3} = 5,78e^{-j90^\circ} + 2,715e^{-j180^\circ} = 6,39e^{-j115^\circ} \text{ A};$$
$$i_{C3} = \sqrt{2} \cdot 6,39 \sin(3 \cdot 100t - 115^\circ) \text{ A}.$$

Полный ток:

$$i = i_C = \sqrt{2} \cdot 11,26 \sin(100t + 38,3^\circ) + \sqrt{2} \cdot 6,39 \sin(3 \cdot 100t - 115^\circ) \text{ A}.$$

Напряжение на ёмкости

Для первой гармоники:

$$\dot{U}_{C1} = -j x_{C1} \cdot \dot{I}_{C1} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_{C1} = -j 10 \cdot 11,26 e^{j38,3^\circ} = 112,6 e^{-j51,7^\circ} \text{ В};$$
$$u_{C1} = \sqrt{2} \cdot 112,6 \sin(100t - 51,7^\circ) \text{ В}.$$

Для третьей гармоники:

$$\dot{U}_{C3} = -j x_{C3} \cdot \dot{I}_{C3} = -j \frac{1}{3\omega C} \dot{I}_{C3} = -j 3,33 \cdot 6,39 e^{-j115^\circ} = 21,3 e^{j155^\circ} \text{ В};$$
$$u_{C3} = \sqrt{2} \cdot 21,3 \sin(3 \cdot 100t + 155^\circ) \text{ В}.$$

$$u_C = u_{C1} + u_{C3} = \sqrt{2} \cdot 112,6 \sin(100t - 51,7^\circ) + \sqrt{2} \cdot 21,3 \sin(3 \cdot 100t + 155^\circ) \text{ В}.$$

Полное напряжение, приложенное к цепи: $u = u_r + u_C$.

Для первой гармоники:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{r1} + \dot{U}_{C1} = 69,79e^{j90^\circ} + 112,6e^{-j51,7^\circ} = 72,2e^{-j14,9^\circ} \text{ В}.$$
$$u_1 = \sqrt{2} \cdot 72,2 \sin(100t - 14,9^\circ) \text{ В}.$$

Для третьей гармоники:

$$\dot{U}_3 = \dot{U}_{r3} + \dot{U}_{C3} = 57,76e^{-j90^\circ} + 21,3e^{j155^\circ} = 52,44e^{-j111,6^\circ} \text{ В}.$$
$$u_3 = \sqrt{2} \cdot 52,44 \sin(3 \cdot 100t - 111,6^\circ) \text{ В}.$$

$$u = u_1 + u_3 = \sqrt{2} \cdot 72,2 \sin(100t - 14,9^\circ) + \sqrt{2} \cdot 52,44 \sin(3 \cdot 100t - 111,6^\circ) \text{ В}.$$

Показания амперметра и вольтметра есть действующие значения несинусоидальных периодических тока и напряжения на входе цепи. Как известно из теории, действующее значение есть величина

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}.$$

В случае несинусоидальной периодической функции этот интеграл определяется через действующие значения синусоидальных составляющих так-же, как это делалось ранее в случае линейной цепи (формула 8.3 в заднии 8).

$$I = \sqrt{\left(\frac{I_{m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{11,26^2 + 6,39^2} = 12,95 \text{ A.}$$

$$U = \sqrt{\left(\frac{U_{m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{72,2^2 + 52,4^2} = 89,23 \text{ В.}$$

Показание ваттметра есть активная мощность всей цепи, и как показано в основах теории задания №8, равна сумме активных мощностей каждой гармоники в отдельности

$$P = P_1 + P_3 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 = 72,2 \cdot 11,26 \cos(-14,9^\circ - 38,3^\circ) + 52,4 \cdot 6,39 \cos(-111,6^\circ + 115^\circ) = 487,0 + 334,25 = 821,25 \text{ Вт.}$$

Таблица 16.3

Условия задачи

Вариант	Схема	Частота и размеры
А		$f = 50 \text{ Гц},$ $S = 5 \text{ см}^2,$ $l = 60 \text{ см}.$
Б		$f = 60 \text{ Гц},$ $S = 6 \text{ см}^2,$ $l = 70 \text{ см}.$
В		$f = 70 \text{ Гц},$ $S = 5 \text{ см}^2,$ $l = 50 \text{ см}.$
Г		$f = 80 \text{ Гц},$ $S = 6 \text{ см}^2,$ $l = 60 \text{ см}.$
Д		$f = 80 \text{ Гц},$ $S = 6 \text{ см}^2,$ $l = 60 \text{ см}.$

Задание № 17

Расчёт переходных процессов в нелинейных электрических цепях

В задании рассмотрены методы расчёта переходных процессов в нелинейных электрических цепях. Общие положения анализа переходных процессов на основе законов коммутации и соответствующих разделов курса высшей математики для линейных цепей, ранее были изложены в основах теории к заданиям №10 и №11. Основное внимание уделено отличию реализации нелинейных уравнений состояния от линейных. При аппроксимации характеристик нелинейных элементов, используется материал, подробно изложенный в предыдущем задании.

Содержание задания

Задание заключается в расчёте переходных процессов в нелинейной электрической цепи методом сопряжения интервалов, а также численным методом последовательных интервалов (явным методом Эйлера) и в сравнении последнего решения с более точным (по методу Рунге-Кутты четвертого порядка). Варианты выбирается в соответствии с буквенной литерой с помощью табл. 17.1, 3 и 4, где кроме схемы, параметров и вида коммутации, даны источники напряжения.

1. Для цепи из табл. 17.3, соответствующей варианту, рассчитать переходный процесс методом сопряжения интервалов. Построить кривые тока катушки со стальным сердечником $i_L(t)$ и потокосцепления $\Psi(t)$ в одном масштабе времени на одном графике. Нелинейная характеристика катушки $\Psi = f(i_L)$ задана табл. 17.1.

2. Для цепи из табл. 17.4, соответствующей варианту, рассчитать переходный процесс методом последовательных интервалов. Построить кривые тока катушки $i_L(t)$ при чётном m или напряжения на ёмкости $u_C(t)$ при нечётном m . Нелинейная характеристика катушки $\Psi = f(i_L)$ задана табл. 17.1.

3. Дополнительное задание. Повторить решение предыдущего пункта, применив метод Рунге-Кутты четвертого порядка, используя программу **rkfixed** интегрированной среды **MathCAD**. Для аппроксимации характеристики $\Psi = f(i_L)$ или $i_L = F(\Psi)$ рекомендуется использовать функции **cspline** и **interp**. Сравнить результаты с результатами п. 2.

Таблица 17.1

$\Psi \cdot 10^{-4}$ (Вб)	0	2,0	4,0	6,0	7,0	7,8	8,4	8,7	9,2	9,5	9,6	9,7	9,8	10
$i_L \cdot 0,1\text{м}$ (А)	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	1,0

Указания к выполнению задания: Для линеаризации характеристики при выполнении пункта 1 задания построить кривую, соответствующую табл. 17.1 и конкретному значению m . На кривой выбрать 3÷4 узловых точки и соединить их прямыми отрезками.

При расчёте переходного процесса временной интервал задавать от нуля до практического завершения переходного процесса.

Основы теории

1. Как было изложено ранее в заданиях №10 и №11, общий путь расчёта переходных процессов заключается в реализации системы уравнений переменных состояния (11.1), записанных в нормальной форме Коши:

$$\frac{dx_j}{dt} = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n + \varphi_j(t). \quad (17.1)$$

Существенно, что в нелинейных цепях переменными состояниями x могут быть не только i_L и u_C , но и потокосцепление Ψ_L или заряд на ёмкости q_C . Выбор переменной не имеет принципиального значения и диктуется только соображениями удобства записи уравнений. Система (17.1) нелинейна, т.к. коэффициенты (по меньшей мере, один из них) определяются нелинейными зависимостями типа: $\Psi_L = \phi_L(i)$; $q = \phi_C(u_C)$. Индуктивности и ёмкости тоже нелинейные функции токов и напряжений. Причём, при относительно быстром изменении последних учитываются динамические параметры:

$$u_L = \frac{d\Psi_L}{dt} = \frac{d\Psi_L}{di} \cdot \frac{di}{dt} = L_d \frac{di}{dt}; \quad i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du_C} \cdot \frac{du_C}{dt} = C_d \frac{du_C}{dt}.$$

Функции $\varphi_j(t)$, как это было отмечено ранее, определяются источниками энергии, $j = 1, 2, \dots, n$ (n – порядок системы).

Формирование системы осуществляется на той же основе, что и для линейной цепи. Уравнения по первому и второму законам Кирхгофа

составляются таким образом, чтобы они содержали не более одной производной от переменных состояния. Для цепей сложной конфигурации это достигается выделением главных контуров и сечений нормального дерева. Приёмы такого выбора подробно рассмотрены в задании №11.

2. Возможности аналитического решения нелинейных задач весьма ограничены. Поэтому в подавляющем большинстве случаев единственным средством реализации системы (17.1) оказывается численное решение. Это численное интегрирование по методу Эйлера, Рунге-Кутты и др.

Представим (17.1) в более общем виде:

$$dx_j / dt = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = f_j(x, t). \quad (17.2)$$

Основой для расчётных формул различного вида может быть выражение

$$\Delta x_j = \int_t^{t+\Delta t} f_j(x, t) dt, \quad (17.3)$$

позволяющее найти приращение рассчитываемой переменной состояния x за конечный интервал времени Δt . Вид расчётной формулы зависит от способа аппроксимации подынтегральной функции. Простейший вариант – замена функции постоянным значением, в качестве которого можно принять значение функции в начале интервала (явный метод Эйлера), или в конце интервала (неявный метод). Для начала интервала получим

$$\Delta x_j = f_{j(k-1)} \cdot \Delta t. \quad (17.4)$$

Не трудно заметить, что полученная расчётная формула, по существу, есть замена непрерывной производной отношением конечных приращений. Точность, которую она способна обеспечить прямо зависит от того, насколько мало меняется производная на интервале $\Delta t = t_k - t_{k-1}$, т.е. насколько мало решение на интервале Δt отличается от прямой.

Выбирая в качестве аппроксимирующего выражения значение функции в конце интервала f_k , среднее значение $(f_k + f_{k-1})/2$, квадратичный полином или др., можно получить более точные расчётные формулы. Примечательно, что техника реализации этих формул для нелинейных систем ничем не отличается от реализации для линейных.

В качестве примера получим формулы численной реализации системы уравнений переменных состояния, соответствующих цепи, схема которой изображена на рис. 17.1. В задании №11 рассмотрена аналогичная цепь. Отличие в том, что на рис. 11.1 задана линейная цепь с известной индуктивностью. Здесь она заменена катушкой с сердечником, ха-

рактеристика которой определяется заданной (аналитически, таблично или графически) функцией $\Psi = f(i_L)$.

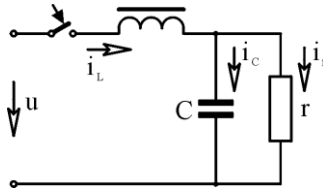


Рис. 17.1

Как и в задании №11 основой для формирования являются три структурных уравнения:

$$\begin{cases} -i_L + i_C + i_r = 0, \\ u_L + u_C = u(t), \\ u_C - u_r = 0; \end{cases}$$

и два компонентных, первое из которых остаётся неизменным $i_C = C \cdot du_C / dt$, а второе $u_L = d\Psi / dt$.

Преобразуя эти уравнения, $\frac{d\Psi}{dt} + u_C = u(t)$, $C \cdot \frac{du_C}{dt} - i_L + u_r / r = 0$, получим:

$$\begin{cases} d\Psi / dt = -u_C + u(t), \\ du_C / dt = \frac{1}{C} \cdot i_L - \frac{1}{rC} \cdot u_C, \\ \Psi = f(i_L), \end{cases} \quad (17.5)$$

т.к. $u_r = u_C$.

Выбор шага интегрирования $\Delta t = h$ связан с обеспечением точности и устойчивости численного решения. Последнее условие является предметом численной математики и рассматривается при изучении соответствующей дисциплины. С точки зрения точности, выбор шага может быть сделан из ориентировочной оценки длительности переходного процесса. Для этого нелинейную характеристику $\Psi(i)$ заменяют прямой, т.е. выполняется линеаризация, при которой реальная катушка заменяется линейной с индуктивностью L_{cp} . Значение L_{cp} определяется как тангенс угла наклона прямой. Решив линейную задачу (задание №11),

можно приблизительно оценить время переходного процесса в цепи с реальной катушкой и выбрать приемлемый шаг интегрирования.

Другой подход заключается в абсолютно произвольном выборе h и повторном пересчёте с шагом в два раза меньше исходного. Этот процесс повторяется, пока два смежных решения не станут отличаться на величину, не превосходящую допустимых погрешностей. Многие программные средства реализации численных методов решения дифференциальных уравнений предусматривают автоматическое деление шага до достижения заданной точности.

Перепишем систему (17.5), заменив производные конечными приращениями.

$$\begin{cases} \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = -u_C + u(t), \\ \frac{\Delta u_C}{\Delta t} = \frac{1}{C} \cdot i_L - \frac{1}{rC} \cdot u_C, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \Delta \Psi = \Psi_k - \Psi_{k-1} = [-u_{C(k-1)} + u(t_{k-1})] \cdot h, \\ \Delta u_C = u_{C(k)} - u_{C(k-1)} = \left[\frac{1}{C} \cdot i_{L(k-1)} - \frac{1}{rC} \cdot u_{C(k-1)} \right] \cdot h. \end{cases}$$

Окончательный вид расчётных формул:

$$\begin{cases} \Psi_k = [-u_{C(k-1)} + u(t_{k-1})] \cdot h + \Psi_{k-1}, \\ u_{C(k)} = \left[\frac{1}{C} \cdot i_{L(k-1)} - \frac{1}{rC} \cdot u_{C(k-1)} \right] \cdot h + u_{C(k-1)}, \\ \Psi_{k-1} = f[i_{L(k-1)}]. \end{cases}$$

Особенность явного метода в том, что всякое последующее (k -ое) значение переменной состояния можно получить последовательной подстановкой в расчётные формулы предыдущего ($k-1$ -го) значения, т.е. решение можно организовать с помощью циклического процесса. Исходные значения переменных состояния, как и в случае линейной цепи, находятся по законам коммутации. Если нелинейная функция $\Psi = f(i_L)$ или $i_L = F(\Psi)$ задана не аналитическим выражением, следует применить один из приёмов аппроксимации, например из тех, которые использовались в предыдущем задании. В различной специальной литературе, описанный метод называют ещё методом **последовательных интервалов**.

3. Другим приёмом расчёта переходных процессов в нелинейных цепях, является метод **сопряжения интервалов**. Метод позволяет све-

сти решение нелинейной системы к совокупности линейных задач. Он основан на замене реальной характеристики нелинейного элемента совокупностью прямых линий (кусочно-линейная аппроксимация). Тогда в пределах одного отрезка нелинейный элемент можно рассматривать как линейный с постоянным параметром и описывать процесс в этих пределах посредством линейного дифференциального уравнения, техника решения которого, достаточно стандартна. При переходе с одного линейного участка на другой, постоянная интегрирования в линейном решении должна определяться, таким образом, чтоб не нарушались законы коммутации, иными словами не должны изменяться скачком ток на индуктивности и напряжение на ёмкости.

Нелинейный элемент (нелинейный резистор) на рис. 17.2 имеет характеристику $u_r = f(i)$, график которой изображён на рис. 17.3.

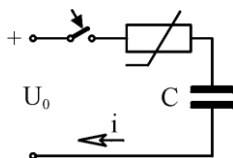


Рис. 17.2

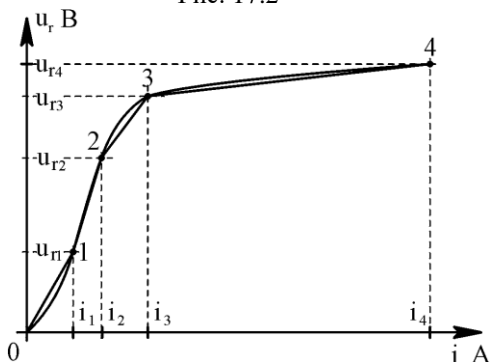


Рис. 17.3

Рассмотрим на примере такой цепи реализацию изложенного метода. Прежде всего, определим диапазон возможных значений тока и напряжения на нелинейном резисторе при переходном процессе. Переходный процесс возникает как следствие включения цепи под действие постоянного напряжения U_0 . В момент включения конденсатор не был заряжен, т.е. в момент коммутации $u_C(0) = 0$, а напряжение на резисторе $u_r = U_0$. Это максимально возможное значение и поэтому крайней точ-

кой характеристики следует взять точку 4, где напряжение $u_{r4} = U_0$. Соответствующее значение тока i_4 . Весь рабочий диапазон характеристики $u_r = f(i)$ разобьём на линейные участки, как это показано на рис. 17.3.

В пределах каждого участка переходный процесс может быть описан линейным дифференциальным уравнением. Определим значение динамических сопротивлений резистора для выбранных участков:

$$r_1 = \frac{u_{r1}}{i_1} \text{ Ом} \quad - \text{ для участка } 0 \div 1 ;$$

$$r_2 = \frac{u_{r2} - u_{r1}}{i_2 - i_1} \text{ Ом} \quad - \text{ для участка } 1 \div 2 ;$$

$$r_3 = \frac{u_{r3} - u_{r2}}{i_3 - i_2} \text{ Ом} \quad - \text{ для участка } 2 \div 3 ; \text{ и}$$

$$r_4 = \frac{u_{r4} - u_{r3}}{i_4 - i_3} \text{ Ом} \quad - \text{ для участка } 3 \div 4 .$$

Линейное дифференциальное уравнение для k -го участка:

$$r_k C \frac{du_c}{dt} + u_c = U_0 ,$$

а его решение $u_c = u'_c + u''_c = U_0 + A_k e^{p_k t}$.

Корни характеристических уравнений $p_k = -1/r_k C = -1/\tau_k$; $\tau_k = r_k C$. В соответствии с законом коммутации $u_c(0) = 0$ и, следовательно, всё напряжение в начальный момент будет на резисторе. Такое состояние соответствует точке 4 на характеристике резистора и решение на начальном этапе определяется наклоном участка $3 \div 4$ (динамическим сопротивлением r_4). При $t = 0$ $u_c(0) = U_0 + A_4 e^{-t/\tau_4} = 0$. Отсюда $A_4 = -U_0$ и окончательный вид решения для участка $3 \div 4$:

$$u_c(t) = U_0 - U_0 e^{-t/\tau_4} . \quad (*)$$

Решение (*) будет верным, пока переходный процесс определяется наклоном участка $3 \div 4$. Оно носит монотонно убывающий характер, т.е. со временем неизбежен переход на следующий участок ($2 \div 3$), где процесс станет определяться другим уравнением. Найдём момент времени t_1 перехода на участок $2 \div 3$. Для этого запишем решение (*) в момент t_1 , когда напряжение на резисторе станет равным u_{r3} .

$$u_c(t_1) = U_0 - U_0 e^{-t_1/\tau_4} = u_{c3} = U_0 - u_{r3} .$$

Отсюда просто найти t_1 : $e^{t_1/\tau_4} = U_0 / u_{r3}$, и $t_1 = \tau_4 \cdot \ln(U_0 / u_{r3})$.
Итак, найдено решение (*) и временной интервал $0 \div t_1$ в пределах, которого оно справедливо. Общий вид решения на следующем линейном участке ($2 \div 3$) $u_C = U_0 + A_3 e^{-(t-t_1)/\tau_3}$. Смещение во времени $(t - t_1)$ предполагает, что начало отсчёта по шкале t берётся от начала перехода на участок $2 \div 3$, т.е. от момента t_1 . Определим постоянную интегрирования A_3 , записав решение в момент t_1 . $u_C(t_1) = U_0 + A_3 e^{-(t_1-t_1)/\tau_3} = u_{C3} = U_0 - u_{r3}$. Отсюда $A_3 = -u_{r3}$ и окончательный вид решения для участка $3 \div 4$:

$$u_C(t) = U_0 - u_{r3} e^{-(t-t_1)/\tau_3}. \quad (**)$$

Решение (**) будет верным, пока переходный процесс определяется наклоном участка $2 \div 3$ и, следовательно, момент времени t_2 – момент перехода на следующий участок ($1 \div 2$) определим аналогично тому, как ранее определили t_1 :

$$u_C(t_2) = U_0 - u_{r3} e^{-(t_1-t_2)/\tau_3} = u_{C2} = U_0 - u_{r2},$$

откуда $t_2 = \tau_3 \cdot \ln(u_{r3} / u_{r2}) + t_1$.

Не трудно видеть, что решения для последующих участков, и временные интервалы для этих решений, могут быть найдены так же, как и для предыдущих. Сопоставляя решения (*) и (**), и формулы для границ временных интервалов можно записать:

$$\text{для участка } 1 \div 2 \quad u_C(t) = U_0 - u_{r2} e^{-(t-t_2)/\tau_2}, \text{ и } t_3 = \tau_2 \cdot \ln(u_{r2} / u_{r1}) + t_2;$$

$$\text{для участка } 0 \div 1 \quad u_C(t) = U_0 - u_{r1} e^{-(t-t_3)/\tau_1}, \text{ и } t_4 = \tau_1 \cdot \ln(u_{r1} / 0) + t_3.$$

Последняя формула (для t_4), не требует численной реализации (деления на ноль), т.к. стремление к бесконечности отношения напряжений и его натурального логарифма означает, что теоретически время завершения переходного процесса стремиться к бесконечности.

4. Для расчёта переходных процессов в нелинейных электрических цепях можно использовать программные продукты, рекомендованные в ряде предыдущих заданий. Поскольку техника реализации системы линейных дифференциальных уравнений может быть использована и для нелинейных систем, рекомендуется интегрированная среда **Mathcad**, например функция **rkfixed**, ранее применявшаяся при расчёте задания №11. Функции нелинейных характеристик, которые окажутся в правых частях системы, можно реализовать в программе **Mathcad** посредством функций типа **cspline** и **interp**, использовавшиеся ранее в задании №16.

Пример выполнения задания № 17

1. В качестве примера рассчитаем переходный процесс в цепи, схема которой изображена на рис. 17.4, методом сопряжения интервалов. Переходный процесс возникает после включения цепи под действие постоянного напряжения $U_0 = 250$ В в нулевой момент времени при следующих значениях параметров: $r_1 = 25$ Ом, $r_2 = 75$ Ом. Нелинейная характеристика катушки с сердечником $\Psi = f(i_L)$ задана графиком на рис. 17.5. (При выполнении конкретного варианта этот график надо построить по данным табл. 17.1 для конкретного значения m).

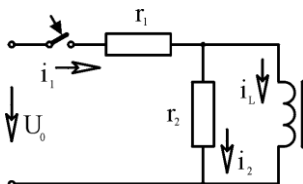


Рис.17.4

Определим ток $i_L(t)$ и построим его график после замыкания ключа. Сначала найдём интервал возможных значений тока. В момент коммутации ток в катушке равен нулю. В установившемся режиме $i_L = i'_L = U_0 / r_1 = 250 / 25 = 10$ А. Интервал $0 \div 10$ А разобьём на четыре линейных участка, как это показано на рис. 17.5.

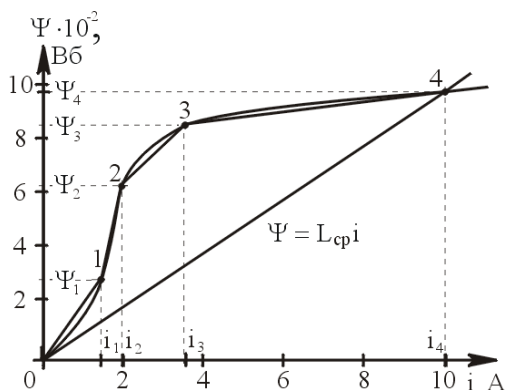


Рис.17.5

Координаты узловых точек выбраны следующим образом:

$$\begin{array}{ll} \text{точка 1} - i_1 = 1,53 \text{ A} ; & \Psi_1 = 2,94 \cdot 10^{-2} \text{ Вб}; \\ \text{точка 2} - i_2 = 2,04 \text{ A} ; & \Psi_2 = 6,28 \cdot 10^{-2} \text{ Вб}; \\ \text{точка 3} - i_3 = 3,61 \text{ A} ; & \Psi_3 = 8,42 \cdot 10^{-2} \text{ Вб}; \\ \text{точка 4} - i_4 = 10,0 \text{ A} ; & \Psi_4 = 9,63 \cdot 10^{-2} \text{ Вб}. \end{array}$$

Соответственно динамические индуктивности участков:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\Delta \Psi_1}{\Delta i_1} = \frac{\Psi_1 - 0}{i_1 - 0} = \frac{2,94 \cdot 10^{-2}}{1,53} = 1,92 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}; \\ L_2 &= \frac{\Delta \Psi_2}{\Delta i_2} = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{i_2 - i_1} = \frac{(6,28 - 2,94) \cdot 10^{-2}}{2,04 - 1,53} = 6,55 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}; \\ L_3 &= \frac{\Delta \Psi_3}{\Delta i_3} = \frac{\Psi_3 - \Psi_2}{i_3 - i_2} = \frac{(8,42 - 6,28) \cdot 10^{-2}}{3,61 - 2,04} = 1,36 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}; \\ L_4 &= \frac{\Delta \Psi_4}{\Delta i_4} = \frac{\Psi_4 - \Psi_3}{i_4 - i_3} = \frac{(9,63 - 8,42) \cdot 10^{-2}}{10 - 3,61} = 0,189 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}. \end{aligned}$$

Используя методику формирования уравнений состояния линейных цепей, применявшуюся ранее в заданиях №10 и №11, получим дифференциальное уравнение для k -го линейного участка

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{L_k} \cdot \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) i_L = \frac{1}{L_k} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1 + r_2} \right) U_0,$$

с решением: $i_L = i'_L + i''_L = U_0 / r_1 + A_k e^{p_k t} = 10 + A_k e^{-18,75 \frac{1}{L_k} t}$, т.к. корень характеристического уравнения $p_k = -\frac{1}{L_k} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$.

Постоянную интегрирования для первого участка A_1 найдём из уравнения $i_L(0) = 10 + A_1 = 0$, откуда $A_1 = -10$, и решение для временно-

го интервала $0 \div t_1$ $i_{L(1)}(t) = 10 - 10e^{-18,75 \frac{1}{L_1} t} = 10 - 10e^{-0,977 \cdot 10^3 t}$ А. Момент времени t_1 определим, подставив в это решение значение тока в момент перехода с первого линейного участка на второй $i_{L(1)}(t_1) = 10 - 10e^{-0,977 \cdot 10^3 t_1} = 1,53$. Откуда $e^{0,977 \cdot 10^3 t_1} = 10 / (10 - 1,53) = 1,18$ и $t_1 = \frac{1}{0,977 \cdot 10^3} \ln(1,18) = 0,169 \cdot 10^{-3}$ с.

Для второго участка: $i_L = 10 + A_2 e^{-18,75 \frac{1}{L_2} (t - t_1)}$. В начале второго

участка $i_{L(2)}(t_1) = 10 + A_2 e^{-18,75 \frac{1}{L_2}(t_1 - t_1)} = 1,53$, т.е. $A_2 = 1,53 - 10 = -8,47$ и окончательный вид решения для второго участка: $i_{L(2)}(t) = 10 - 8,47 e^{-0,286 \cdot 10^3 (t - t_1)}$ А. Время перехода на третий участок t_2 найдём, записав решение для этого момента:

$$i_{L(2)}(t_2) = 10 - 8,47 e^{-0,286 \cdot 10^3 (t_2 - t_1)} = 2,04 .$$

Отсюда, аналогично предыдущему

$$t_2 = \frac{1}{0,286 \cdot 10^3} \ln \left(\frac{8,47}{10 - 2,04} \right) + t_1 = 0,386 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Нетрудно видеть, что решение для k -го участка и формула для момента перехода с участка на участок имеют общий вид:

$$i_{L(k)}(t) = i'_L + (i_{L(k-1)} - i'_L) e^{-\frac{1}{\tau_k}(t - t_{k-1})} \text{ и } t_k = \tau_k \ln \left(\frac{i' - i_{k-1}}{i' - i_k} \right) + t_{k-1} , \text{ где}$$

$$\tau_k = -\frac{1}{p_k} , \text{ а } t_0 = 0 .$$

Соответственно, расчётные формулы для третьего и четвёртого участков:

$$i_{L(3)}(t) = i'_L + (i_{L(2)} - i'_L) e^{-\frac{1}{\tau_3}(t - t_2)} = 10 + (2,04 - 10) e^{-1,379 \cdot 10^3 (t - t_2)} = \\ = 10 - 7,96 e^{-1,379 \cdot 10^3 (t - t_2)} \text{ А,}$$

$$i_{L(4)}(t) = i'_L + (i_{L(3)} - i'_L) e^{-\frac{1}{\tau_4}(t - t_3)} = 10 + (3,61 - 10) e^{-9,92 \cdot 10^3 (t - t_3)} = \\ = 10 - 6,39 e^{-9,92 \cdot 10^3 (t - t_3)} \text{ А,}$$

момент перехода на последний, четвёртый, участок

$$t_3 = \tau_3 \ln \left(\frac{i' - i_2}{i' - i_3} \right) + t_2 = \frac{1}{1,379 \cdot 10^3} \ln \left(\frac{10 - 2,04}{10 - 3,61} \right) + 0,386 \cdot 10^{-3} = 0,545 \cdot 10^{-3} \text{ с,}$$

а момент

$$t_4 = \tau_4 \ln \left(\frac{i' - i_3}{i' - i_4} \right) + t_3 = \infty \text{ т.к. } (i_4 = i') , \text{ т.е. время завершения переходного}$$

процесса стремиться к бесконечности.

На рис. 17.6 изображены графики решений $i_L(t)$. Кривая (1) построена на основе, полученных выше формул для четырёх линейных участков. Для сравнения кривая (2) представляет точное решение по ме-

тоду Рунге – Кутта, а кривая (3) решение линейного уравнения, полученного заменой реальной характеристики постоянной индуктивностью $L_{cp} = \Psi_4 / i_4 = 9,63 \text{ мГн.}$ (см. рис. 17.5).

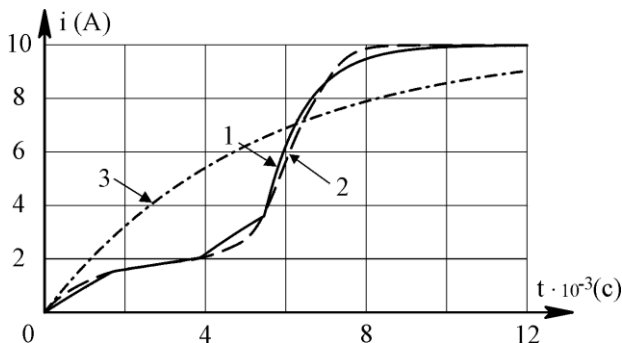


Рис 17.6

2. Методом последовательных интервалов рассчитаем напряжение на ёмкости $u_C(t)$ в цепи, схема которой изображена на рис. 17.7. Переходный процесс есть следствие отключения цепи в нулевой момент времени от источника постоянного напряжения $U_0 = 100 \text{ В.}$ Характеристика катушки с сердечником та же, что и в предыдущей задаче. Параметры линейных элементов цепи: $r_1 = 6 \text{ Ом, } r_2 = 4 \text{ Ом, } C = 750 \text{ мкФ.}$

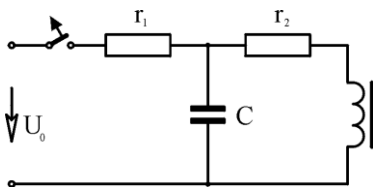


Рис. 17.7

Составим необходимое количество структурных и компонентных уравнений. После коммутации:

$$u_{r_2} + u_C + u_L = 0; \quad u_L = d\Psi / dt; \quad i_{r_2} = i_C = i_L = i = C \cdot du_C / dt.$$

К этим уравнениям необходимо добавить уравнение связи – характеристику нелинейного элемента $\Psi = f(i_L) = f(i)$. Система для переменных состояния:

$$\begin{cases} d\Psi / dt = -u_C - r_2 i, \\ du_C / dt = (1/C) \cdot i; \end{cases}$$

или через конечные отношения:

$$\begin{cases} \Delta\Psi / \Delta t = -u_C - r_2 i, \\ \Delta u_C / \Delta t = (1/C) \cdot i. \end{cases}$$

Окончательная форма записи разностных уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \Psi_k = (-u_{C(k-1)} - r_2 i_{(k-1)}) \cdot h + \Psi_{k-1}, \\ u_{C(k)} = \frac{1}{C} i_{(k-1)} \cdot h + u_{C(k-1)}; \end{cases} \quad (17.6)$$

где $h = \Delta t$. Решая систему, совместно с уравнением связи $\Psi_k = f(i_k)$, найдём искомое решение $u_C(t)$ на границах временных интервалов. Начальные значения переменных состояния находятся на основе законов коммутации: $i(0) = i_L(0) = i_0 = U_0 / (r_1 + r_2) = 10 \text{ А}$. Из графика (рис. 17.5) найдём $\Psi_0 = f(i_0) = f(10) = 9,63 \cdot 10^{-2} \text{ Вб}$.

Напряжение $u_C(0) = u_{C(0)} = -r_2 \cdot i(0) = -40 \text{ В}$, т.к. в установившемся режиме до коммутации $u_L(0) = 0$ потому, что зажимы катушки в режиме постоянного тока можно считать замкнутыми накоротко. Знак «минус» получился потому, что направление тока разряда конденсатора имеет направление обратное зарядному.

Для выбора шага h необходима приблизительная оценка длительности переходного процесса. Такую оценку можно сделать на основе решения линейной задачи, где реальная катушка с сердечником заменяется линейной со средним значением индуктивности $L_{Cp} = 9,63 \text{ мГн}$ (см. прямую на рис. 17.5). Общий вид решения линейной задачи: $i(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$, где корни характеристического уравнения $p_{1,2} = -r_2 / 2L \pm \sqrt{(r_2 / (2L))^2 - 1/(LC)} = -207,7 \pm j 308,5$. Приблизительное время завершения переходного процесса $t_{III} \approx (3 \div 5) \cdot |1/\text{Re}_{\min}(p)| \approx (3 \div 5) \cdot |1/\text{Re}_{\min}(p)| \approx 0,024 \text{ с}$. (см. теоретический материал по расчёту переходных процессов в линейных электрических цепях). В качестве первого приближения найдём решение с временным интервалом $h = \Delta t = t_{III} / 12 \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}$. Для удобства реализации вычислений по формулам (17.6) данные расчёта сведём в таблицу следующей формы.

Таблица 17.2

$t \cdot 10^{-3} \text{ с}$	$\Psi_{k-1} \cdot 10^{-2} \text{ Вб}$	$i_{k-1} \text{ А}$	$U_{C(k-1)} \text{ В}$	$(1/C) \cdot i_{k-1} \cdot h$	$U_{C(k)} \text{ В}$
0	9,630	10,0	-40,0	26,667	-13,33
2	9,630	10,0	-13,33	26,667	13,33
4	4,300	1,74	13,33	4,652	17,99
6	0,234	0,218	17,99	0,580	18,56
8	-3,537	-1,637	18,56	-4,364	14,20
10	-5,940	-1,967	14,20	-5,264	8,94
12	-7,203	-2,358	8,94	-6,287	2,65
14	-7,105	-2,315	2,65	-6,173	-3,52
16	-5,783	-1,948	-3,52	-5,195	-8,71
18	-3,521	-1,634	-8,71	-4,358	-13,07
20	-0,471	-0,407	-13,07	-1,086	-14,16
22	2,470	1,396	-14,16	3,723	-10,44

На рис. 17.8 этому решению соответствует кривая (1). Уточнить решение можно удвоением числа интервалов. Кривые (2, 3) соответствуют повторным расчётам с $h = t_{\text{инт}} / 24 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$. и $h = t_{\text{инт}} / 48 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$. Уточнение можно продолжать и далее до, практически, полного совпадения двух смежных решений, однако, по уже близкому совпадению кривых (2 и 3) можно судить о том, что и на данном этапе расчёта результат в достаточной степени отражает характер процесса. Кривая (4) соответствует решению, полученному с помощью метода Рунге – Кутты.

Вычисления по формулам (17.6) образуют несложный, циклический алгоритм (рис. 17.9), который может быть реализован, как вручную, в случае расчётных формул простого вида, так и посредством любых других вычислительных приёмов при более сложных зависимостях.

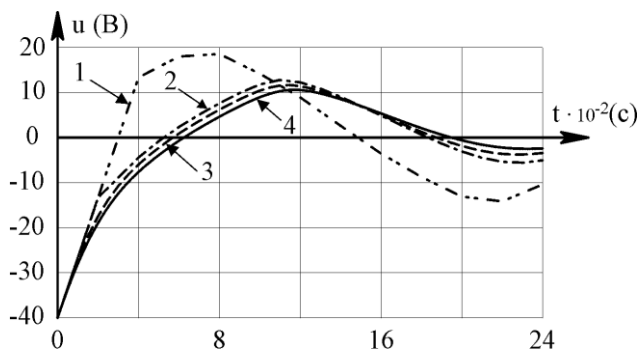


Рис. 17.8

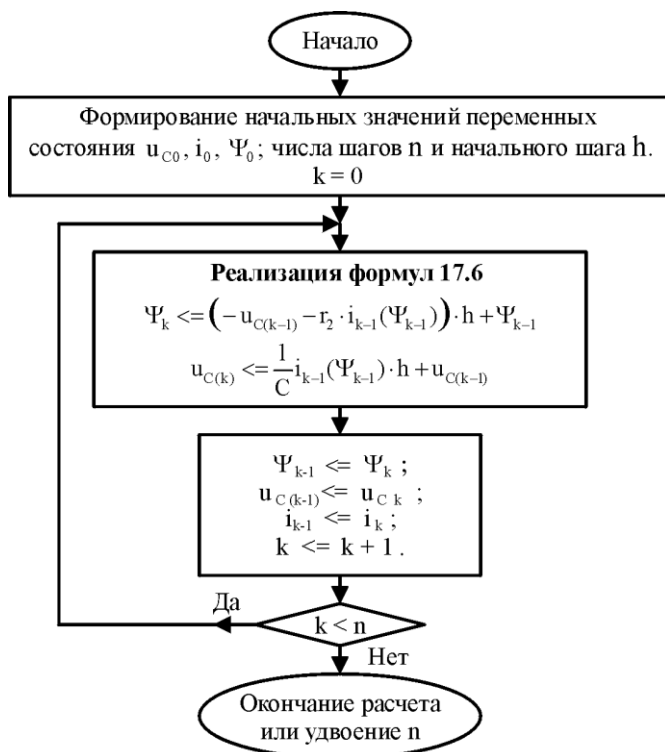


Рис. 17.9

Условия задачи №1

Вариант	Схема	Источник и параметры
А		$U_0 = 10(m+1) \text{ В},$ $r = (m/3)(m+1) \text{ Ом}.$
Б		$U_0 = 10m + 5 \text{ В},$ $r = m(m+0,5) \text{ Ом}.$
В		$U_0 = 10(2m-1) \text{ В},$ $r = m(m-0,5) \text{ Ом}.$
Г		$U_0 = 5m + 10 \text{ В},$ $r = 0,6m + 1 \text{ Ом}.$
Д		$U_0 = 30m - 12 \text{ В},$ $r = m(3m+1) \text{ Ом}.$

Таблица 17.4

Условия задачи №2

Вариант	Схема	Источник и параметры
А		$U_0 = 10(10m + 1) \text{ В},$ $r = 5m(m + 0,125) \text{ Ом},$ $C = 1000 \text{ мкФ}.$
Б		$U_0 = 10(m + 100) \text{ В},$ $r = m(m/2 + 50) \text{ Ом},$ $C = 10 \text{ мкФ}.$
В		$U_0 = 100m + 200 \text{ В},$ $r = 10m(m + 2) \text{ Ом},$ $C = 1000 \text{ мкФ}.$
Г		$U_0 = 100m + 50 \text{ В},$ $r = 10m(m + 0,6) \text{ Ом},$ $C = 50 \text{ мкФ}.$
Д		$U_0 = 100m \text{ В},$ $r = 1,5m^2 + 15 \text{ Ом},$ $C = 50 \text{ мкФ}.$

Библиографический список

1. Новгородцев А.Б. ТОЭ₁: 30 лекций по теории цепей. Учебник для высших учебных заведений. – СПб.: Политехника, 1995 г., 519 с.
2. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т. 1; т 2. Учебник для электротехнических специальностей вузов. – Л.: Энергоиздат, 1981 г., 533 с., 415 с.
3. Бокалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.И. Основы теории цепей Учебник для высших учебных заведений. – М.: Радио и связь, 2000 г, 589 с.
4. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. Учебник для высших учебных заведений. – М.: Радио и связь, 1986 г, 543 с.
5. Воробийенко П.П. Теория линейных электрических цепей. Сборник задач и упражнений. Учебное пособие для высших учебных заведений. – М.: Радио и связь, 1989 г, 328 с.
6. Апанасов В.В., Баланцев А.Р. Методические указания по выполнению курсовой работы по ТОЭ для специальности ЭПП. Архангельск: Издательство АГТУ, 2002 г. – 32 с.

Оглавление:

Предисловие	3
Порядок выполнения и требования к оформлению заданий	3
Задание №1. Расчёт электрического поля, усилий, энергии и электрических параметров простейших конструкций	5
Задание №2. Расчёт магнитной цепи с магнитопроводом постоянной магнитной проницаемости	17
Задание №3. Законы Кирхгофа и расчёт резистивных электрических цепей	26
Задание №4. Расчёт линейных электрических цепей при гармоническом (синусоидальном) воздействии	45
Задание №5. Расчёт трёхфазных электрических цепей	56
Задание №6. Формирование уравнений сложных r, L, C - цепей и расчёт установившегося гармонического (синусоидального) режима	67
Задание №7. Частотные характеристики линейной электрической цепи	82
Задание №8. Несинусоидальные периодические воздействия. Дискретные спектры	93
Задание № 9. Разложение несимметричных режимов в трёхфазных электрических цепях на симметричные составляющие	105
Задание № 10. Расчёт переходных процессов в простейших линейных электрических цепях	111
Задание № 11. Расчёт переходных процессов в линейных электрических цепях методом переменных состояния	121
Задание № 12. Расчёт переходных процессов в линейных электрических цепях операторным методом	129
Задание № 13. Расчёт переходных процессов в линейных электрических цепях временными методами. Интеграл Дюамеля	137
Задание № 14. Расчёт нелинейных электрических и цепей в режиме постоянного тока	146
Задание № 15. Расчёт магнитных цепей в режиме постоянного тока	155
Задание № 16. Расчёт периодических процессов в нелинейных цепях	165
Задание № 17. Расчёт переходных процессов в нелинейных электрических цепях	175
Библиографический список	192

Владимир Вильямович Апанасов
Андрей Робертович Баланцев
Владимир Михайлович Волков

Теоретические основы электротехники

Сборник заданий

Сдано в произв. 04.10.2005. Подписано в печать 26.10.2005.
Формат 60×84/16 Бумага писчая. Гарнитура Таймс. Усл.печ.л. 12,25.
Уч.- изд.л. 12,37. Заказ № 236. Тираж 180 экз.

Отпечатано с предоставленного оригинал-иакета
в типографии Архангельского государственного
технического университета.

163002, г. Архангельск, наб. Северной Двины, 17