

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
образования  
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»  
(СибГУТИ)

Е.В. Дежина  
Ю.С. Черных

## **ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ**

Методические указания к контрольной работе  
для студентов заочного отделения

Новосибирск, 2020

## ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина "Цифровая обработка сигналов" (ЦОС) является неотъемлемой частью общей теории связи. Ее целью является изучение фундаментальных закономерностей, связанных с получением цифровых сигналов, их передачей по каналам связи, обработкой и преобразованием в радиотехнических цепях и устройствах.

В результате изучения дисциплины слушатель должен:

1. Знать способы описания дискретных сигналов и систем во временной,  $z$ - и частотных областях, включая дискретное преобразование Фурье;

2. Владеть навыками анализа и проектирования цифровых фильтров.

Под проектированием цифровых фильтров в общем случае понимают выбор структурной схемы фильтра, определение коэффициентов фильтра, определение разрядности коэффициентов и разрядностей умножителей и сумматоров, которые обеспечивают выполнение требований, задаваемых на характеристики фильтра (передаточные, импульсные, частотные). Очевидно, что в такой постановке задача проектирования становится чрезвычайно сложной. Поэтому задачу проектирования фильтров разделяют на задачу проектирования нерекурсивных фильтров, имеющих конечную импульсную характеристику (КИХ-фильтры) и задачу проектирования рекурсивных фильтров, имеющих бесконечную импульсную характеристику (БИХ-фильтры). Задача проектирования цифровых фильтров еще более упрощается, если известно, для каких целей создается фильтр: для фильтрации сигналов (избирательные фильтры), для коррекции частотных характеристик (АЧХ и ФЧХ цепи) или для синтеза определенных типов сигналов (например, преобразователь Гильберта). Указать один метод проектирования невозможно. Существует большое количество методов проектирования цифровых фильтров, которые были разработаны в зависимости от требований и которые можно разбить на два класса:

- прямые методы проектирования (применяются при проектировании БИХ и КИХ-фильтров);
- методы проектирования по аналоговому прототипу (применяются при проектировании БИХ-фильтров).

Настоящие методические указания представляют собой задания на контрольную работу и пример решения с необходимыми пояснениями и иллюстрациями, необходимыми для выполнения контрольной работы студентом-заочником.

## **КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ И ПОРЯДОК ЕГО ВЫПОЛНЕНИЯ**

### **Выбор варианта**

Контрольные задания составляют 100 вариантов. Каждый студент выполняет контрольное задание по одному из вариантов согласно номеру своего студенческого билета: номер варианта совпадает с числом, образованным двумя последними цифрами номера студенческого билета. Например, студент, имеющий студенческий билет № 80237, выполняет контрольную работу по варианту 37, а студент со студенческим билетом № 25580 выполняет работу по варианту 80.

### **Требования к оформлению контрольной работы**

1. Контрольная работа выполняется на листах формата А4 шрифтом Times New Roman №14.
2. Все страницы работы должны быть пронумерованы. Нумеруются также все формулы, рисунки и таблицы.
3. Масштабы всех графиков должны быть равномерными с показанными вдоль осей цифровыми метками (например: 0,2; 0,4 и т. д.). В конце осевых линий графика указывают отложенную величину измерения и, использованные для меток, единицы измерения.
4. Решение каждой задачи должно начинаться с выписанных всех численных данных задания для Вашего варианта.
5. Все величины, буквенные обозначения которых применяют в ходе решения, должны быть пояснены.
6. Исходные соотношения должны быть записаны в буквенном виде, расчетные значения лучше не округлять.
7. Готовую работу необходимо конвертировать в формат pdf и загрузить на сайт для проверки преподавателю.

## КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

### Задача 1. Прохождение дискретного непериодического сигнала через нерекурсивную дискретную цепь.

На вход дискретной цепи подается непериодический сигнал  $x(n) = \{x_0; x_1; x_2\}$ .

- 1.1 Построить график дискретного сигнала.
- 1.2 Рассчитать спектр ДС с шагом  $\omega_d/10$ .

Построить амплитудный спектр.

- 1.3 Построить дискретную цепь. Записать ее передаточную функцию, определить импульсную характеристику цепи.
- 1.4 Определить сигнал на выходе цепи по формуле линейной свертки

Построить график выходного сигнала.

- 1.5 Рассчитать спектр выходного ДС с шагом  $\omega_d/10$ . Построить амплитудный спектр.

- 1.6 Определите разрядность коэффициентов  $a_i$ , если допуск на отклонение системных характеристик составляет 1%.

- 1.7 Рассчитайте шумы квантования на выходе цепи, полагая разрядность АЦП равной 8.

- 1.8 Рассчитайте масштабный множитель  $\lambda$  на входе цепи:

- а) по условию ограничения максимума сигнала;
- б) по условию ограничения энергии сигнала.

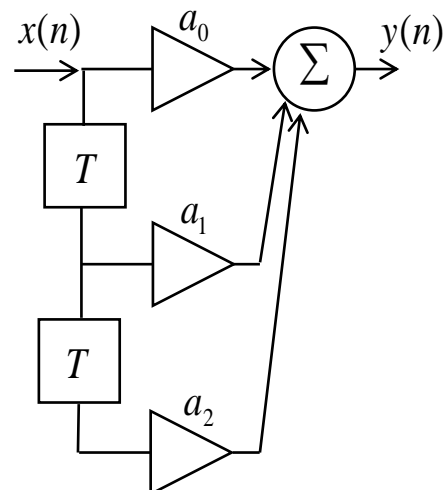


Таблица 1 – Исходные данные для нерекурсивной дискретной цепи

Вариант	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\{x(n)\}$
00	0,9	0	0	1,0; 0,9; 0,8
01	0	0,85	0,1	0,9; 1,0; 0,8
02	0	0,1	-0,8	0,8; 0,9; 1,0
03	0,75	0,9	0	0,9; 0,8; 0,7
04	0	-0,7	0,85	0,8; 0,9; 0,7
05	0,65	0,9	0,07	0,7; 0,8; 0,9
06	0,6	0	0	-0,8; 0,7; 0,6
07	0,7	0,9	0,05	0,7; 0,8; 0,6
08	0	0,55	0	0,6; 0,7; 0,8
09	0,8	0,65	-0,4	0,7; 0,6; 0,5
10	0	0	0,6	0,6; 0,7; 0,5
11	0,4	0,6	-0,8	0,5; 0,6; 0,7
12	0	0,7	0,5	0,6; 0,5; 0,4
13	0,6	-0,3	-0,8	0,5; 0,6; 0,4
14	0,1	0	0	0,4; 0,6; -0,5
15	-0,2	0,9	0,03	0,5; 0,4; 0,2

Вариант	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\{x(n)\}$
16	0	0,55	0	-0,4; 0,5; 0,2
17	0,9	0,3	0	0,2; 0,4; 0,5
18	0	0	0,75	0,4; 0,3; 0,1
19	0,5	0,3	0,01	0,3; 0,4; 0,1
20	0	0	-0,5	0,1; -0,3; 0,4
21	0,9	0,7	-0,45	0,3; 0,2; 0,1
22	0,4	0	0	-0,2; -0,3; 0,1
23	0,2	-0,8	-0,3	0,1; 0,2; 0,3
24	0,75	0	0	0,2; 0,1; 0,3
25	0	0	0,6	0,7; 0,8; 0,9
26	0,4	0,6	-0,8	-0,8; 0,7; 0,6
27	0	-0,7	0,5	0,7; 0,8; 0,6
28	0,75	0,9	0	0,6; 0,7; 0,8
29	0,1	0	0	0,7; -0,6; 0,5
30	0,2	-0,9	-0,3	0,6; 0,7; 0,5
31	0	0,55	0	0,5; 0,6; 0,7
32	0,9	0,3	0	0,6; 0,5; -0,4
33	0	0	0,75	0,5; 0,6; 0,4
34	-0,5	0,3	0,1	0,4; 0,6; 0,5
35	0,3	0	0	0,5; -0,4; 0,2
36	0,9	-0,7	-0,45	0,4; 0,5; 0,2
37	0,4	0	0	0,2; 0,4; 0,5
38	0,2	-0,8	-0,3	0,4; 0,3; -0,1
39	0,75	0	0	0,3; 0,4; 0,1
40	0,92	0	0	0,1; -0,3; 0,4
41	0	0,8	0	0,3; 0,2; 0,1
42	0	0	-0,8	0,2; 0,3; 0,1
43	0,75	0,9	0	0,1; 0,2; 0,3
44	0	0,7	0,85	0,2; 0,1; -0,3
45	-0,6	0,9	0,7	1,0; 0,9; 0,8
46	0,6	0	0	0,9; 1,0; 0,8
47	0,7	-0,9	-0,06	-0,8; 0,9; 1,0
48	0	0,5	0	0,9; 0,8; 0,7
49	0,8	0,6	-0,4	0,8; 0,9; 0,7
50	-0,2	0,9	0,3	-0,6; 0,7; 0,5
51	0	0,55	0	0,5; 0,6; 0,7
52	0,9	0,3	0	0,6; 0,5; 0,4
53	0	0	-0,7	0,5; 0,6; 0,4
54	0,5	0,3	-0,1	0,4; -0,6; 0,5
55	0,3	0	0	0,5; 0,4; 0,2
56	0,9	-0,7	-0,4	0,4; 0,5; 0,2
57	0	0,7	0,25	0,2; 0,4; 0,5

Вариант	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\{x(n)\}$
58	0,2	0,8	-0,3	0,4; 0,3; -0,1
59	-0,75	0	0	0,3; 0,4; 0,1
60	0,9	0	0	-0,1; 0,3; 0,4
61	0	0,85	0	0,3; 0,2; 0,1
62	0	0	0,8	0,2; 0,3; 0,1
63	0,75	0,9	0	0,1; 0,2; 0,3
64	0	-0,7	0,8	0,2; 0,1; 0,3
65	0,6	0,9	-0,7	1,0; 0,9; 0,8
66	0,6	0	0	0,9; 1,0; -0,8
67	0,7	-0,9	-0,6	0,8; 0,9; 0,1
68	0	0,5	0	0,9; 0,8; 0,7
69	0,8	0,6	-0,4	0,8; 0,9; 0,7
70	0	0	-0,6	0,7; 0,8; 0,9
71	0,4	0,6	-0,8	-0,8; 0,7; 0,6
72	0	-0,7	0,5	0,7; 0,8; 0,6
73	0,6	0,3	-0,8	0,6; 0,7; 0,8
74	0,1	0	0,5	0,7; 0,6; 0,5
75	0,3	0	0	-0,5; 0,4; 0,2
76	-0,9	0,7	0,45	0,4; 0,5; 0,2
77	0	0,7	-0,35	0,2; 0,4; 0,5
78	0,2	0,8	-0,3	0,4; 0,3; 0,1
79	0,75	0	0	-0,3; 0,4; 0,1
80	0,9	0	0	0,1; 0,3; 0,4
81	0	0,8	0	0,3; 0,2; 0,1
82	0	0	0,8	0,2; 0,3; 0,1
83	0,7	0,9	0	0,1; 0,2; 0,3
84	0	0,7	0,8	0,2; 0,1; -0,3
85	0,6	-0,9	-0,7	1,0; 0,9; 0,8
86	0,6	0	0	0,9; 1,0; 0,8
87	0,7	0,9	-0,6	0,8; 0,9; 1,0
88	0	-0,45	0	0,9; -0,8; 0,7
89	0,8	0,6	-0,4	0,8; 0,9; 0,7
90	0	0	0,6	0,7; 0,8; 0,9
91	0,4	-0,6	-0,8	0,8; 0,7; 0,6
92	0	0,7	0,5	0,7; 0,8; -0,6
93	0,6	0,3	-0,8	0,6; -0,7; 0,8
94	0,4	0	0,5	0,7; 0,6; 0,5
95	-0,2	0,9	0,3	-0,6; 0,7; 0,5
96	0	0,75	0	0,5; 0,6; 0,7
97	0,9	-0,3	0	0,6; 0,5; 0,4
98	0	0	0,75	0,5; 0,6; -0,4
99	0,5	0,3	-0,1	0,4; 0,6; 0,5

## Задача 2. Анализ БИХ-фильтра второго порядка.

В соответствии с данными своего варианта выполнить анализ БИХ-фильтра.

2.1 Определите разностное уравнение цепи  $y(n)$ .

2.2 Определите с помощью разностного уравнения передаточную функцию  $H(z)$  и проверьте устойчивость цепи.

2.3 Определите импульсную характеристику цепи:

- с помощью передаточной функции  $H(z)$  (для нечетных вариантов)

- с помощью разностного уравнения цепи  $y(n)$  (для четных вариантов)

Построить график импульсной характеристики  $h(n)$ .

2.4 Определение частотных характеристик фильтра

– Рассчитать амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) и фазочастотную характеристику (ФЧХ) цепи и построить их графики.

– Рассчитать ослабление фильтра, построить его график, определить тип фильтра по полосе пропускания и показать на графике границы полосы пропускания, если  $A_{\max} = 3 \text{ дБ}$ .

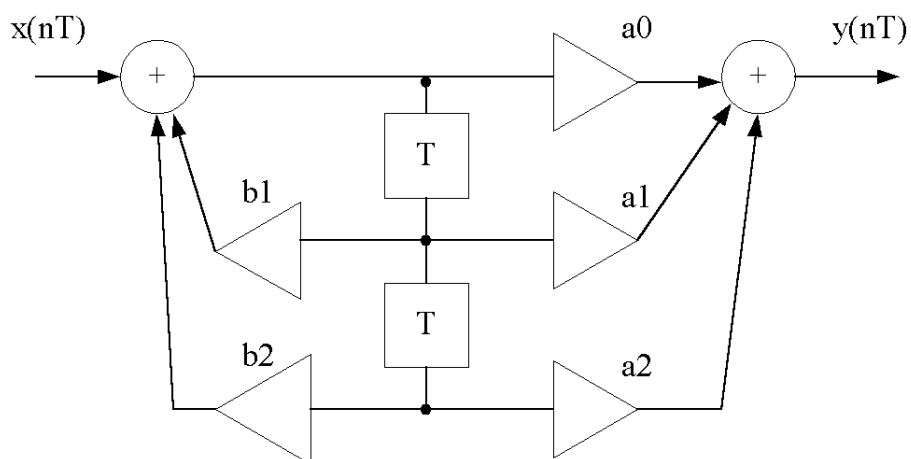
Таблица 2 – Исходные данные для БИХ-фильтра

Вариант	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$
01	0,24	-0,05	-0,23	0,93	-0,51
02	0,12	-0,2	0,1	-0,9	-0,32
03	0,17	0,35	0,19	0,51	-0,22
04	0,33	0,28	0,32	-0,27	0,36
05	-0,27	0,04	0,26	0,88	-0,47
06	0,15	-0,29	0,14	-0,67	-0,25
07	0,2	0,42	0,19	0,37	-0,18
08	0,34	0,23	0,33	-0,22	0,32
09	-0,28	0,02	0,29	0,83	-0,43
10	0,19	-0,38	0,2	-0,44	-0,21
11	0,25	0,48	0,23	0,22	-0,18
12	0,35	0,18	0,36	-0,19	0,29
13	0,3	0	-0,32	0,77	-0,4
14	0,22	-0,45	0,23	-0,3	-0,19
15	0,3	0,59	0,29	0	-0,18
16	0,37	0,13	0,38	-0,14	0,26
17	0,33	0,02	-0,36	0,68	-0,32
18	0,24	-0,48	0,23	-0,22	-0,18
19	0,13	0,19	0,11	0,9	-0,33
20	0,38	0,09	0,39	-0,1	0,22
21	0,34	0,03	-0,32	0,72	-0,36
22	0,26	-0,51	0,25	-0,15	-0,18
23	0,14	0,29	0,15	0,68	-0,26
24	0,4	0,04	0,41	-0,05	0,19

Вариант	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$
25	-0,37	0	0,4	0,58	-0,26
26	0,21	-0,41	0,2	-0,37	-0,19
27	0,32	0,63	0,31	-0,08	-0,17
28	0,43	-0,04	0,44	0,05	0,13
29	0,42	0,03	-0,41	0,49	-0,19
30	0,16	-0,32	0,17	-0,6	-0,24
31	0,2	0,38	0,19	0,45	-0,21
32	0,45	-0,08	0,46	0,09	0,1
33	-0,44	-0,04	0,45	0,4	-0,13
34	0,12	-0,24	0,13	-0,83	-0,3
35	0,24	0,44	0,21	0,29	-0,18
36	0,46	-0,13	0,47	0,14	0,06
37	0,47	0,05	-0,48	0,31	-0,06
38	0,31	-0,62	0,3	0,07	-0,17
39	0,2	0,3	0	0,5	0,04
40	0,48	-0,17	0,49	0,18	0,03
41	-0,36	0,05	0,37	0,62	-0,29
42	0,28	-0,55	0,27	-0,07	-0,17
43	0,35	0,28	-0,18	0,42	0,15
44	0,51	-0,26	0,52	0,27	-0,03
45	0,45	0	-0,46	0,35	-0,09
46	0,39	-0,78	0,4	0,37	-0,19
47	0,49	0,97	0,48	-0,68	-0,26
48	0,53	-0,3	0,54	0,31	-0,06
49	0,48	0,05	-0,49	0,27	-0,03
50	0,41	-0,82	0,42	0,44	-0,2
51	0,17	0,31	0,16	0,59	-0,23
52	0,54	-0,35	0,55	0,36	-0,1
53	0,52	-0,04	-0,53	0,18	0,03
54	0,37	-0,74	0,36	0,29	-0,18
55	0,12	0,23	0,13	0,82	-0,3
56	0,56	-0,39	0,57	0,4	-0,13
57	-0,54	0,04	0,53	0,13	0,06
58	0,48	-0,96	0,49	0,67	-0,25
59	0,38	0,75	0,37	-0,3	-0,19
60	0,57	-0,44	0,58	0,45	-0,16
61	-0,39	0,03	0,41	0,53	-0,22
62	0,29	-0,58	0,3	0	-0,17
63	0,4	0,79	0,39	-0,37	-0,2
64	0,59	-0,48	0,6	0,49	-0,19
65	-0,55	0,05	0,56	0,09	0,1
66	0,14	-0,26	0,13	-0,75	-0,27



Вариант	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$
67	0,42	0,83	0,41	-0,45	-0,21
68	0,61	-0,53	0,62	0,54	-0,22
69	0,56	0	-0,57	0,04	0,13
70	0,35	-0,7	0,36	0,22	-0,18
71	0,46	0,92	0,47	-0,6	-0,24
72	0,62	-0,58	0,63	0,58	-0,26
73	0,6	-0,06	-0,59	-0,04	0,19
74	0	0	0,1	-0,92	-0,02
75	0,44	0,87	0,43	-0,52	-0,22
76	0,64	-0,62	0,65	0,63	-0,29
77	0,61	0,02	-0,62	-0,09	0,22
78	0,28	0,4	-0,68	-0,1	0,12
79	0,36	0,71	0,34	-0,23	-0,18
80	0,66	-0,67	0,67	0,68	-0,33
81	-0,43	-0,04	0,42	0,44	-0,16
82	0,45	-0,91	0,46	0,59	-0,23
83	0,35	-0,4	-0,05	0,26	0,04
84	0,68	-0,72	0,69	0,73	-0,36
85	-0,63	0,02	0,64	-0,13	0,26
86	0	-0,7	0,72	0,48	0,06
87	0,27	0,54	0,28	0,08	-0,17
88	0,69	-0,77	0,7	0,78	-0,4
89	-0,65	0	0,64	-0,19	0,29
90	0,43	-0,86	0,42	0,51	-0,2
91	0,34	0,67	0,33	-0,15	-0,18
92	0,71	-0,82	0,72	0,83	-0,43
93	0,66	0	-0,67	-0,23	0,33
94	0,18	-0,35	0,17	-0,52	-0,22
95	0,25	0,52	0,26	0,15	-0,18
96	0,73	-0,87	0,74	0,88	-0,47
97	0,68	0,03	-0,69	-0,28	0,36
98	0,33	-0,66	0,32	0,14	-0,17
99	0,13	0,26	0,15	0,74	-0,32
100	0,75	-0,93	0,76	0,94	-0,51



### Задача 3. Проектирование КИХ-фильтра.

В соответствии с исходными данными рассчитать нерекурсивный фильтр с линейной фазой методом взвешивания. Построить график АЧХ фильтра без взвешивания и со взвешиванием. Привести схему фильтра в канонической форме.

Таблица 3а – Требования к КИХ-фильтру

Вариант	Требования к фильтру			Вид окна для взвешивания	Число отсчетов $N$
	$D\left(e^{j2\pi fT}\right)=\begin{cases} 1, & 0 \leq f \leq f_c \\ 0, & f_3 \leq f \leq f_B \end{cases}$				
	$f_c, \text{кГц}$	$f_3, \text{кГц}$	$f_B, \text{кГц}$		
1	205	290	510	Хана	10
5	210	300	527	Хемминга	12
9	215	310	544	Блэкмана	10
13	220	320	561	Хана	12
17	225	330	578	Хемминга	10
21	205	340	595	Блэкмана	12
25	210	350	612	Хана	10
29	215	360	629	Хемминга	12
33	220	370	646	Блэкмана	10
37	225	380	663	Хана	12
41	205	390	680	Хемминга	10
45	210	400	697	Блэкмана	12
49	215	410	714	Хана	10
53	220	330	527	Хемминга	12
57	225	340	544	Блэкмана	10
61	205	350	561	Хана	12
65	210	360	578	Хемминга	10
69	215	370	595	Блэкмана	12
73	220	380	612	Хана	10
77	225	390	629	Хемминга	12
81	205	400	646	Блэкмана	10
85	210	410	663	Хана	12
89	215	330	680	Хемминга	10
93	220	340	697	Блэкмана	12
97	225	350	714	Хана	10

Таблица 3б – Требования к КИХ-фильтру

Вар.	Требования к фильтру					Вид окна для взвешивания	Число отсчетов $N$
	$D\left(e^{j2\pi fT}\right)=\begin{cases} 0, & 0 \leq f \leq f_{31} \\ 1, & f_{п1} \leq f \leq f_{п2} \\ 0, & f_{32} \leq f \leq f_{в} \end{cases}$						
	$f_{31}, \text{кГц}$	$f_{п1}, \text{кГц}$	$f_{п2}, \text{кГц}$	$f_{32}, \text{кГц}$	$f_{в}, \text{кГц}$		
2	80	150	320	450	520	Хемминга	11
6	85	158	331	461	541	Блэкмана	12
10	90	166	342	472	562	Хана	11
14	95	174	353	483	583	Хемминга	12
18	100	182	364	494	604	Блэкмана	11
22	105	190	375	505	625	Хана	12
26	110	198	386	516	646	Хемминга	11
30	115	206	397	527	667	Блэкмана	12
34	120	214	408	538	688	Хана	11
38	125	222	419	549	709	Хемминга	12
42	130	230	430	560	730	Блэкмана	11
46	135	238	441	571	751	Хана	12
50	140	246	452	582	772	Хемминга	11
54	145	254	463	593	793	Блэкмана	12
58	150	262	474	604	814	Хана	11
62	155	270	485	615	835	Хемминга	12
66	160	278	496	626	856	Блэкмана	11
70	165	286	507	637	877	Хана	12
74	170	294	518	648	898	Хемминга	11
78	175	302	529	659	919	Блэкмана	12
82	180	310	540	670	940	Хана	11
86	185	318	551	681	961	Хемминга	12
90	190	326	562	692	982	Блэкмана	11
94	195	334	573	703	1003	Хана	12
98	200	342	584	714	1024	Хемминга	11

Таблица 3в – Требования к КИХ-фильтру

Вариант	Требования к фильтру					Вид окна для взвешивания	Число отсчетов $N$
	$D(e^{j2\pi fT})=\begin{cases} 1, & 0 \leq f \leq f_{\Pi 1} \\ 0, & f_{31} \leq f \leq f_{32} \\ 1, & f_{\Pi 2} \leq f \leq f_{\text{В}} \end{cases}$						
	$f_{\Pi 1}, \text{кГц}$	$f_{31}, \text{кГц}$	$f_{32}, \text{кГц}$	$f_{\Pi 2}, \text{кГц}$	$f_{\text{В}}, \text{кГц}$		
3	80	150	305	390	440	Блэкмана	13
7	85	157	314	399	451	Хана	11
11	90	164	323	408	462	Хемминга	13
15	95	171	332	417	473	Блэкмана	11
19	100	178	341	426	484	Хана	13
23	105	185	350	435	495	Хемминга	11
27	110	192	359	444	506	Блэкмана	13
31	115	199	368	453	517	Хана	11
35	120	206	377	462	528	Хемминга	13
39	125	213	386	471	539	Блэкмана	11
43	130	220	395	480	550	Хана	13
47	135	227	404	489	561	Хемминга	11
51	140	234	413	498	572	Блэкмана	13
55	145	241	422	507	583	Хана	11
59	150	248	431	516	594	Хемминга	13
63	155	255	440	525	605	Блэкмана	11
67	160	262	449	534	616	Хана	13
71	165	269	458	543	627	Хемминга	11
75	170	276	467	552	638	Блэкмана	13
79	175	283	476	561	649	Хана	11
83	180	290	485	570	660	Хемминга	13
87	185	297	494	579	671	Блэкмана	11
91	190	304	503	588	682	Хана	13
95	195	311	512	597	693	Хемминга	11
99	200	318	521	606	704	Блэкмана	13

Таблица 3г – Требования к КИХ-фильтру

Вариант	Требования к фильтру			Вид окна для взвешивания	Число отсчетов $N$
	$D(e^{j2\pi fT})=\begin{cases} 0, & 0 \leq f \leq f_3 \\ 1, & f_c \leq f \leq f_B \end{cases}$				
	$f_3$ ,кГц	$f_c$ ,кГц	$f_B$ ,кГц		
4	200	306	500	Хана	11
8	208	317	513	Хемминга	12
12	216	328	526	Блэкмана	11
16	224	339	539	Хана	12
20	232	350	552	Хемминга	11
24	240	361	565	Блэкмана	12
28	248	372	578	Хана	11
32	256	383	591	Хемминга	12
36	264	394	604	Блэкмана	11
40	272	405	617	Хана	12
44	280	416	630	Хемминга	11
48	288	427	643	Блэкмана	12
52	296	438	656	Хана	11
56	304	449	669	Хемминга	12
60	312	460	682	Блэкмана	11
64	320	471	695	Хана	12
68	328	482	708	Хемминга	11
72	336	493	721	Блэкмана	12
76	344	504	734	Хана	11
80	352	515	747	Хемминга	12
84	360	526	760	Блэкмана	11
88	368	537	773	Хана	12
92	376	548	786	Хемминга	11
96	384	559	799	Блэкмана	12
100	392	570	812	Хана	11

## Методические рекомендации по расчету

### Задача 1. Прохождение дискретного непериодического сигнала через нерекурсивную дискретную цепь.

Дискретный сигнал  $x(n) = \{3; 4; 6\}$  проходит через дискретную нерекурсивную цепь с параметрами  $a_0 = 0,7$   $a_1 = 0,3$   $a_2 = -0,1$ .

1.1 Построим график  $x(n)$ .

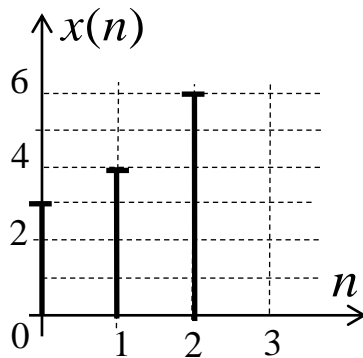


Рисунок 1.1 – Входной дискретный сигнал

1.2 Определим спектр непериодического дискретного сигнала  $x(n)$  с помощью прямого преобразования Фурье для дискретных сигналов.

$$X(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-j\omega nT}, \quad (1.1)$$

Спектр дискретного сигнала  $X(j\omega)$  - периодический, поэтому достаточно рассчитать его в диапазоне частот  $0 \div \omega_{\delta}$ .

Для определения частотных характеристик цепи и сигнала часто применяют нормирование по частоте:

$$\Omega = \omega / \omega_{\delta} \Rightarrow \omega T = 2\pi\Omega \quad (1.2)$$

Запишем выражение для спектра сигнала через нормированную частоту

$$X(j\Omega) = x(0) + x(1) \cdot e^{-j2\pi\Omega} + x(2) \cdot e^{-j4\pi\Omega}, \quad (1.3)$$

Подставив значения, получим:

$$\begin{aligned} X(j\Omega) &= 3 + 4e^{-j2\pi\Omega} + 6e^{-j4\pi\Omega} \\ X(j\Omega) &= 3 + 4\cos(2\pi\Omega) + 6\cos(4\pi\Omega) - j4\sin(2\pi\Omega) - j6\sin(4\pi\Omega) \end{aligned}$$

Амплитудный спектр дискретного сигнала:

$$X(\Omega) = |X(j\Omega)| \quad (1.4)$$

Фазовый спектр дискретного сигнала:

$$\varphi_x(\Omega) = \arg(X(j\Omega)) \quad (1.5)$$

Таблица 1.1 – Спектр входного дискретного сигнала  $x(n)$

$\Omega$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$X(\Omega)$	13	11,418	7,357	3,102	3,725	5	3,725	3,102	7,357	11,418	13
$\varphi_x(\Omega)$	0	-44,9	-94,8	-174,9	64,3	0	-64,3	174,9	94,8	44,9	0

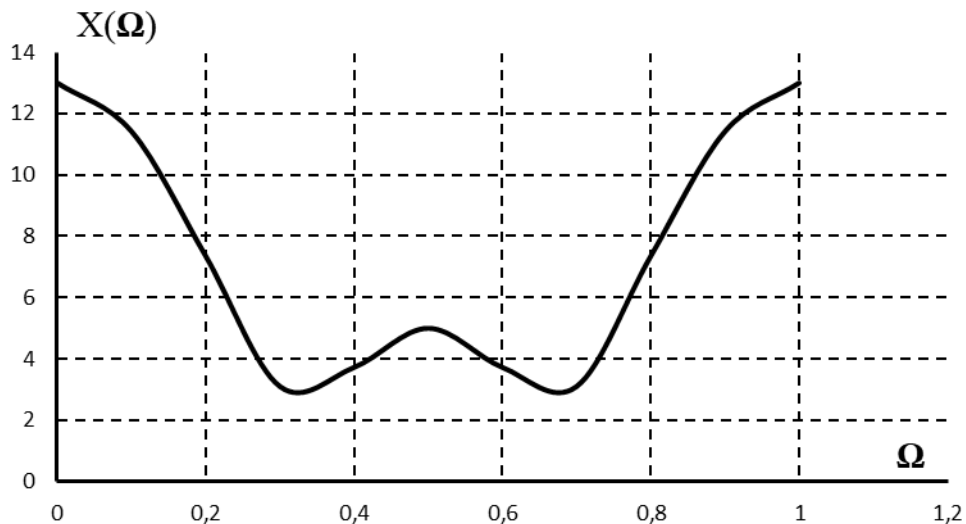


Рисунок 1.2 – Амплитудный спектр входного сигнала

1.3 Известно, что дискретной цепью называют любую систему (цепь), преобразующую одну последовательность  $x(n)$  в другую последовательность  $y(n)$ . Будем считать, что дискретная цепь обладает свойством линейности (выходная реакция на сумму дискретных сигналов равна сумме реакций на эти сигналы) и свойством стационарности (задержка входного дискретного сигнала приводит лишь к такой же задержке выходного дискретного сигнала).

Важно помнить, что:

- в схеме не указывают умножители, коэффициенты которых равны 0;
- умножители, коэффициенты которых равны 1, в схеме представляют собой короткозамкнутый проводник.

Изобразим дискретную цепь с заданными коэффициентами (см. рис. 1.3):

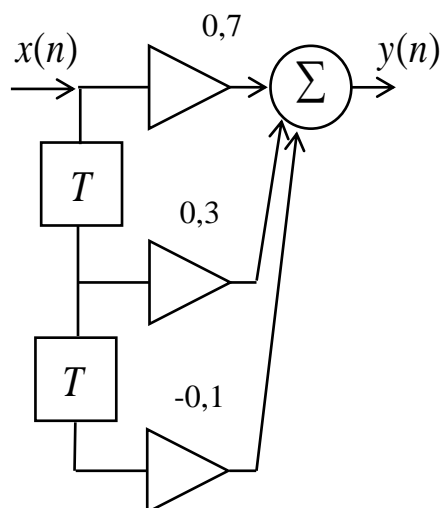


Рисунок 1.3 – Дискретная нерекурсивная цепь второго порядка

Передаточная функция нерекурсивной дискретной цепи имеет вид

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot z^{-n} \quad (1.6)$$

Тогда для заданной цепи

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = 0,7 + 0,3z^{-1} - 0,1z^{-2} \quad (1.7)$$

*Импульсная характеристика нерекурсивной цепи имеет конечную длительность, значения отсчетов которой равны значениям умножителей.*

$$h(n) = \{0,7; 0,3; -0,1\} \quad (1.8)$$

1.4. На вход дискретной цепи, изображенной на рис.1.3, действует дискретный непериодический сигнал  $x(n)$ . Для определения сигнала на выходе дискретной цепи  $y(n)$  воспользуемся формулой линейной свертки.

*Важно помнить, что число отсчетов дискретного сигнала на выходе ДЦ определяется, как:*

$$N_y = N_x + N_h - 1 \quad (1.9)$$

где

$N_y$  – число отсчетов выходного сигнала  $y(n)$ ;

$N_x$  – число отсчетов входного сигнала  $x(n)$ ;

$N_h$  – число отсчетов импульсной характеристики.

В нашем случае

$N_x = 3$ ,  $N_h = 3$  поэтому  $N_y = 3 + 3 - 1 = 5$  отсчетов.



Найдем сигнал на выходе дискретной цепи, воспользовавшись формулой линейной свертки:

$$y(m) = \sum_{n=0}^m x(n) \cdot h(m-n), \quad m = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (1.10)$$

где  $x(n) = \{3; 4; 6\}$ ,  $h(n) = \{0,7; 0,3; -0,1\}$

$$m = 0 \quad y(0) = x(0) \cdot h(0) = 3 \cdot 0,7 = 2,1$$

$$m = 1 \quad y(1) = x(0) \cdot h(1) + x(1) \cdot h(0) = 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,7 = 3,7$$

$$m = 2 \quad y(2) = x(0) \cdot h(2) + x(1) \cdot h(1) + x(2) \cdot h(0) = 3 \cdot (-0,1) + 4 \cdot 0,3 + 6 \cdot 0,7 = 5,1$$

$$m = 3 \quad y(3) = x(0) \cdot h(3) + x(1) \cdot h(2) + x(2) \cdot h(1) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-0,1) + 6 \cdot 0,3 = 1,4$$

$$m = 4 \quad y(4) = x(0) \cdot h(4) + x(1) \cdot h(3) + x(2) \cdot h(2) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot (-0,1) = -0,6$$

Все последующие отсчеты выходного сигнала равны нулю.

Построим график выходного сигнала  $y(n)$ .

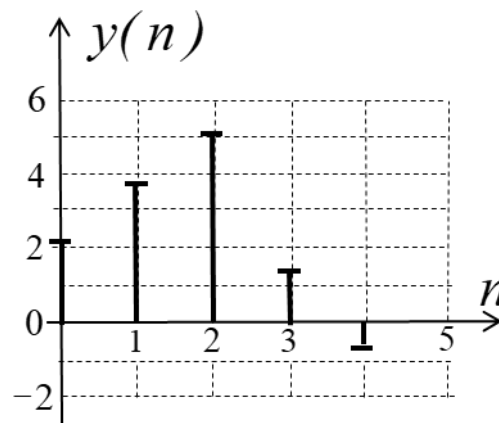


Рисунок 1.4 – График выходного сигнала  $y(n)$

1.5 Определим спектр непериодического дискретного сигнала на выходе цепи  $y(n)$  с помощью формулы (1.1).

$$Y(j\Omega) = y(0) + y(1)e^{-j2\pi\Omega} + y(2)e^{-j4\pi\Omega} + y(3)e^{-j6\pi\Omega} + y(4)e^{-j8\pi\Omega} \quad (1.11)$$

Подставив значения, получим:

$$Y(j\Omega) = 2,1 + 3,7e^{-j2\pi\Omega} + 5,1e^{-j4\pi\Omega} + 1,4e^{-j6\pi\Omega} - 0,6e^{-j8\pi\Omega}$$

Амплитудный спектр дискретного сигнала:

$$Y(\Omega) = |Y(j\Omega)| \quad (1.12)$$

Фазовый спектр дискретного сигнала:

$$\varphi_y(\Omega) = \arg(Y(j\Omega)) \quad (1.13)$$

Таблица 1.2 – Спектр выходного дискретного сигнала  $y(n)$

$\Omega$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$Y(\Omega)$	11,7	10,45	6,64	2,39	1,88	1,5	1,88	2,39	6,64	10,45	11,7
$\varphi_y(\Omega)$	0	-50	-109	159	32	0	-32	-159	109	50	0

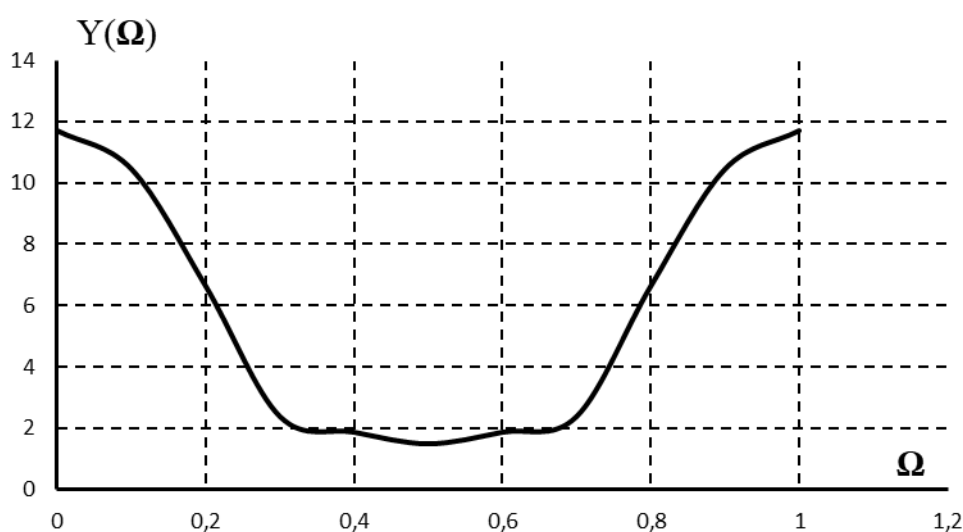


Рисунок 1.5 – Амплитудный спектр выходного сигнала

1.6 Определим разрядность коэффициентов  $a_i$ , если допуск на отклонение системных характеристик составляет 1%.

*Важно помнить, что при выборе разрядности умножителей первоначально необходимо задавать ее не меньше чем разрядность АЦП.*

*Разрядная сетка содержит один знаковый разряд и  $b$  числовых. Запятая зафиксирована между знаковым и числовыми разрядами. Значение знакового разряда равно нулю, если коэффициент положителен, и единице в противном случае. Для перевода правильной дроби из десятичной системы счисления в двоичную необходимо последовательно умножать данную дробь на 2 (перемножая только дробные части), и выписывать последовательно все целые части полученных произведений, начиная с первого.*

*При квантовании чисел различают два вида ошибок:*

*1. Усечение до  $b$  разрядов - это отбрасывание младших разрядов.*

2. Округление до  $b$  разрядов - сохранение значения этого разряда или увеличение его на 1 в зависимости от того, больше чем  $\frac{1}{2}2^b$  или меньше его отбрасываемая часть. В дальнейшем будем считать, что при квантовании используется процедура округления.

Примем разрядность коэффициентов равной 9 (при дальнейших расчетах разрядность коэффициентов может быть изменена в зависимости от полученных результатов).

Представим коэффициенты в виде 9-разрядного двоичного кода.

При расчете необходимо получить девять числовых разрядов плюс один дополнительный для выполнения операции округления.

Итак, коэффициенты исходной ДЦ:

$$a_0 = 0,7 \quad a_1 = 0,3 \quad a_2 = -0,1$$

Представим каждый из коэффициентов в двоичной системе счисления:

$$a_0 = 0,7$$

	$2^{-1}$	$2^{-2}$	$2^{-3}$	$2^{-4}$	$2^{-5}$	$2^{-6}$	$2^{-7}$	$2^{-8}$	$2^{-9}$	$2^{-10}$
0,7	1,4	0,8	1,6	1,2	0,4	0,8	1,6	1,2	0,4	0,8
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0

$$a_0 = 0.101100110$$

Восстановление этого коэффициента в десятичной системе:

$$a_0 = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-7} + 2^{-8} = 0,69921875$$

$$a_1 = 0,3$$

	$2^{-1}$	$2^{-2}$	$2^{-3}$	$2^{-4}$	$2^{-5}$	$2^{-6}$	$2^{-7}$	$2^{-8}$	$2^{-9}$	$2^{-10}$
0,3	0,6	1,2	0,4	0,8	1,6	1,2	0,4	0,8	1,6	1,2
0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1

Так как дополнительный разряд содержит единицу, произведем процедуру округления:

$$0.010011001$$

$$\underline{1}$$

$$0.010011010$$

В десятичной системе:

$$a_1 = 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-8} = 0,30078125$$

$$a_2 = -0,1$$

	$2^{-1}$	$2^{-2}$	$2^{-3}$	$2^{-4}$	$2^{-5}$	$2^{-6}$	$2^{-7}$	$2^{-8}$	$2^{-9}$	$2^{-10}$
- 0,1	0,2	0,4	0,8	1,6	1,2	0,4	0,8	1,6	1,2	0,4
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0

$$a_2 = 1.000110011 ; \quad a_2 = 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-8} + 2^{-9} = -0,099609375$$

Определим относительную погрешность при записи коэффициентов умножителей в 9-и разрядном двоичном коде:

$$\begin{aligned} \delta a_0 &= \left| \frac{0,7 - 0,69921875}{0,7} \right| \cdot 100\% = 0,112\% \\ \delta a_1 &= \left| \frac{0,3 - 0,30078125}{0,3} \right| \cdot 100\% = 0,26\% \\ \delta a_2 &= \left| \frac{0,1 - 0,099609375}{0,1} \right| \cdot 100\% = 0,39\% \end{aligned} \quad (1.14)$$

#### Оценка влияния ошибки квантования на импульсную характеристику цепи

Так как значения отсчетов импульсной характеристики для нерекурсивной цепи совпадают с значениями умножителей, то:

– импульсная характеристика цепи с коэффициентами, реализованными 9-разрядным двоичным кодом

$$h'(n) = \{0,69921875; 0,30078125; -0,099609375\}$$

– относительная погрешность для каждого из отсчетов  $h(n)$ :

$$\delta_h(n) = \{0,112; 0,26; 0,39\}\%$$

Среднеквадратическая ошибка импульсной характеристики составляет:

$$\delta_h = \sqrt{\frac{0,112^2 + 0,26^2 + 0,39^2}{3}} = 0,271\%$$

Очевидно, что  $\delta_h(n) < 1\%$ .

При невыполнении данного условия следует увеличить на 1-2 разряда длину двоичного кода и выполнить все вычисления заново.

#### Оценка влияния ошибки квантования на АЧХ цепи

Относительная величина чувствительности  $H(z)$  к каждому из коэффициентов определяется по формуле

$$S_{a_k}^{H(z)} = \frac{d \ln H(z)}{d \ln a} = \frac{dH(z)/H(z)}{da_k / a_k} = \frac{a_k}{H(z)} \cdot \frac{\partial H(z)}{\partial a_k} \quad (1.15)$$

и показывает во сколько раз относительное уменьшение передаточной функции цепи больше относительного изменения параметра (коэффициента).

$$\begin{aligned} S_{a_0}^{H(z)} &= \left| \frac{a_0 z^2}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2} \right| \\ S_{a_1}^{H(z)} &= \left| \frac{a_1 z}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2} \right| \\ S_{a_2}^{H(z)} &= \left| \frac{a_2}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2} \right| \end{aligned} \quad (1.16)$$

Наибольшее влияние на АЧХ цепи коэффициент оказывает на частоте, равной собственной частоте нуля или полюса передаточной функции  $H(z)$ .

Найдем нули передаточной функции:

$$\begin{aligned} 0,7 + 0,3z^{-1} - 0,1z^{-2} &= 0 \\ 0,7z^2 + 0,3z - 0,1 &= 0 \\ z_{01} = 0,22; \quad z_{02} &= -0,65 \end{aligned}$$

Для определения собственной частоты нуля (полюса) воспользуемся соотношениями:

$$\begin{aligned} -\text{если } z_X(z_0) &= A = A \cdot e^{j0}, \text{ то } z = e^{j\omega T} = e^{j0} = 1 \\ -\text{если } z_X(z_0) &= -A = A \cdot e^{j180}, \text{ то } z = e^{j\omega T} = e^{j180} = -1 \\ -\text{если } z_X(z_0) &= A \cdot e^{j\varphi}, \text{ то } z = e^{j\omega T} = e^{j\varphi} \end{aligned}$$

Определим чувствительности на каждой из частот:

$$z_{01} = 0,22 \Rightarrow z = e^{j0} = 1:$$

$$S_{a_0}^{H(z)} = \left| \frac{0,7 \cdot z^2}{0,7 \cdot z^2 + 0,3 \cdot z - 0,1} \right| = \left| \frac{0,7 \cdot 1}{0,7 \cdot 1 + 0,3 \cdot 1 - 0,1} \right| = 0,778$$

$$S_{a1}^{H(z)} = \left| \frac{0,3 \cdot z}{0,7 \cdot z^2 + 0,3 \cdot z - 0,1} \right| = \left| \frac{0,3 \cdot 1}{0,7 \cdot 1 + 0,3 \cdot 1 - 0,1} \right| = 0,333$$

$$S_{a2}^{H(z)} = \left| \frac{-0,1}{0,7 \cdot z^2 + 0,3 \cdot z - 0,1} \right| = \left| \frac{-0,1}{0,7 \cdot 1 + 0,3 \cdot 1 - 0,1} \right| = 0,111$$

Погрешности коэффициентов были получены ранее:

$$\delta_{a0} = 0,112\%, \quad \delta_{a1} = 0,26\%, \quad \delta_{a2} = 0,39\%,$$

Погрешность АЧХ от неточного задания каждого из коэффициентов составит:

$$S_{a0} \cdot \delta_{a0} = 0,778 \cdot 0,112 = 0,0872\%$$

$$S_{a1} \cdot \delta_{a1} = 0,333 \cdot 0,26 = 0,08658\%$$

$$S_{a2} \cdot \delta_{a2} = 0,111 \cdot 0,39 = 0,04329\%$$

Среднеквадратическая погрешность АЧХ цепи составит:

$$\delta_{ACH} = \sqrt{0,0872^2 + 0,08658^2 + 0,04329^2} = 0,13 < 1\%$$

Аналогичным образом определяем среднеквадратическую погрешность АЧХ на частоте, соответствующей  $z_{02} = -0,65 \Rightarrow z = e^{j180} = -1$ :

$$S_{a0}^{H(z)} = \left| \frac{0,7 \cdot z^2}{0,7 \cdot z^2 + 0,3 \cdot z - 0,1} \right| = \left| \frac{0,7 \cdot 1}{0,7 \cdot 1 + 0,3 \cdot (-1) - 0,1} \right| = 2,333$$

$$S_{a1}^{H(z)} = \left| \frac{0,3 \cdot z}{0,7 \cdot z^2 + 0,3 \cdot z - 0,1} \right| = \left| \frac{0,3 \cdot (-1)}{0,7 \cdot 1 + 0,3 \cdot (-1) - 0,1} \right| = 1$$

$$S_{a2}^{H(z)} = \left| \frac{-0,1}{0,7 \cdot z^2 + 0,3 \cdot z - 0,1} \right| = \left| \frac{-0,1}{0,7 \cdot 1 + 0,3 \cdot (-1) - 0,1} \right| = 0,333$$

$$S_{a0} \cdot \delta_{a0} = 2,333 \cdot 0,112 = 0,2613\%$$

$$S_{a1} \cdot \delta_{a1} = 1 \cdot 0,26 = 0,26\%$$

$$S_{a2} \cdot \delta_{a2} = 0,333 \cdot 0,39 = 0,12987\%$$

Среднеквадратическая погрешность АЧХ цепи составит:

$$\delta_{ACH} = \sqrt{0,2613^2 + 0,26^2 + 0,12987^2} = 0,391 < 1\%$$

Итак, исходя из допуска на отклонение АЧХ (не более 1%), определили разрядность коэффициентов дискретной цепи равной 9.

Если допуск превышен, необходимо увеличить разрядность коэффициентов ДЦ на 1-2 разряда и повторить расчеты.

1.7 Сигнал, поступающий в дискретную цепь, проходит через умножители, на выходе которых результат получается в виде кода (двоичного), разрядная сетка которого больше разрядной сетки и сигнала и умножителя.

Для дальнейшей его обработки длина кодового слова должна быть уменьшена до принятого в дискретной цепи размера разрядной сетки с помощью процедуры округления.

Поэтому сигнал на выходе умножителя можно представить как сумму  $b$ -разрядного кодового слова и некоторого слабого сигнала (отбрасываемого в процессе округления), который можно назвать шумом округления. Будем считать, что шумы округления на выходе разных умножителей некоррелированные.

Шум каждого из умножителей некоррелирован и со входной последовательностью.

Ошибки округления  $e(nT)$  является стационарным случайным процессом с равномерным законом распределения.

Рассчитаем шумы квантования на выходе дискретной цепи, полагая разрядность АЦП равной 8. Разрядность коэффициентов дискретной цепи равна 9 (была определена в п. 1.6).

Изобразим ДЦ со всеми источниками шума. Источниками шума в данной цепи являются АЦП и умножители:

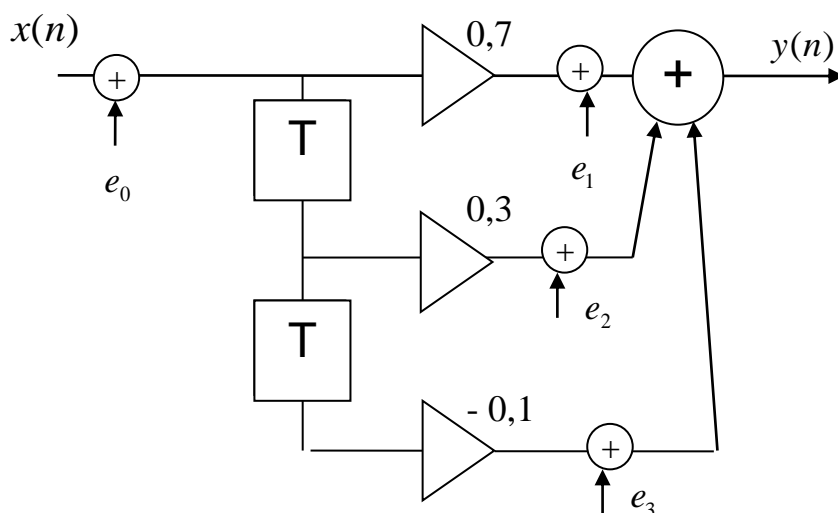


Рисунок 1.6 – Шумовая модель дискретной цепи

где  $e_0$  – шум от АЦП;

$e_1...e_3$  – шумы от умножителей.

Определим квадрат дисперсии ошибок округления:

$$\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{(2^{-b})^2}{12} \quad (1.17)$$

где  $b$  – длина разрядной сетки двоичного кода

дисперсия шума АЦП ( $b = 8$ ):

$$\sigma^2 = \frac{(2^{-8})^2}{12} = 1,271 \cdot 10^{-6}$$

дисперсия шума коэффициентов ( $b = 9$ ):

$$\sigma_i^2 = \frac{(2^{-9})^2}{12} = 0,317 \cdot 10^{-6}$$

*В фильтрах с фиксированной запятой дисперсия шума округления на выходе от каждого из источников определяется по формуле:*

$$\sigma_{\text{вых},i}^2 = \sigma_i^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_i^2(n) = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h_i^2(n), \quad (1.18)$$

где  $h_i(n)$  – импульсная характеристика части дискретной цепи от выхода  $i$ -го умножителя до выхода цепи.

*Дисперсия результирующего шума на выходе от всех  $L$  умножителей:*

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{i=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} h_i^2(n) \quad (1.19)$$

Шум от АЦП  $e_0$  проходит до выхода через всю дискретную цепь, поэтому импульсная характеристика  $h_i(n)$  соответствует импульсной характеристике цепи, которая уже была найдена в пункте 1.3. Шумы  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  проходят непосредственно через сумматор на выход ДЦ, передаточная функция которого  $H(z) = 1$ .

$$e_0: \quad h_1^2(n) = 0,7^2 + 0,3^2 + (-0,1)^2 = 0,59$$

$$e_1, e_2, e_3: \quad h_2^2(n) = 1$$

Составим «шумовое уравнение» (выражение, описывающее алгоритм формирования шума на выходе). Согласно рис. 3.1:



$$\sigma_{\text{вых.}}^2 = \sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) + 3 \cdot \sigma_i^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2(n) \quad (1.20)$$

Подставив в «шумовое уравнение» рассчитанные значения, получим дисперсию шума на выходе ДЦ:

$$\sigma_{\text{вых.}}^2 = 1,271 \cdot 10^{-6} \cdot 0,59 + 3 \cdot 0,317 \cdot 10^{-6} \cdot 1 = 1,70089 \cdot 10^{-6}$$

В данном результате  $0,7499 \cdot 10^{-6}$  - шум от АЦП, а  $0,951 \cdot 10^{-6}$  - шумы от коэффициентов ДЦ.

1.8 При сложении в сумматоре с фиксированной запятой ошибок округления не возникает, но возможно переполнение регистров и выходной сигнал будет существенно искажен. Для предотвращения этого сигнал на входе с помощью масштабного множителя ослабляют, но так, чтобы не слишком ухудшить соотношение сигнал/шум на выходе цепи.

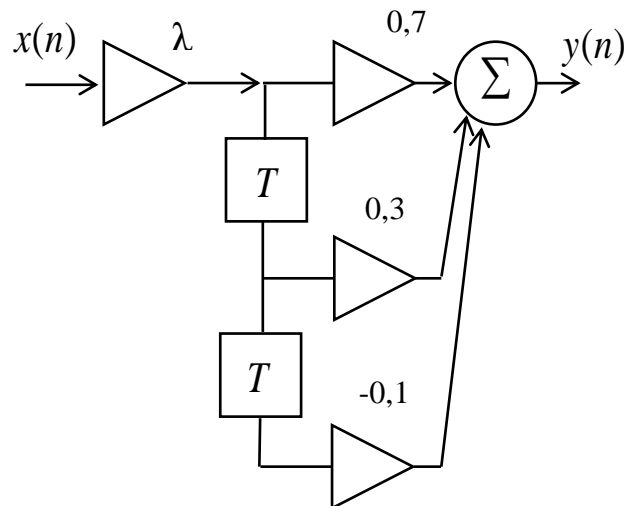


Рисунок 1.7 - Дискретная цепь с масштабным множителем  $\lambda$

Расчет масштабного множителя  $\lambda$  на входе цепи производится по двум условиям:

- а) по условию ограничения максимума сигнала;
- б) по условию ограничения энергии сигнала.

а) Условие ограничения максимума сигнала

При расчете масштабного множителя по условию ограничения максимума сигнала перегрузки сумматора исключены, т.к.  $y_{\max}(n) = 1$

В этом случае

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} |h_i(n)|} \quad (1.21)$$

где  $h_i(n)$  - импульсная характеристика участка ДЦ от входа до выхода  $i$ -го сумматора

Для сумматора (рис.1.7) импульсная характеристика соответствует всей ДЦ (определена в 1.3):

$$h(n) = \{0,7; 0,3; -0,1\}$$

тогда

$$\lambda = \frac{1}{|0,7| + |0,3| + |-0,1|} = 0,909$$

*б) Условие ограничения энергии сигнала*

При расчете  $\lambda$ , по условию ограничения энергии сигнала перегрузки сумматоров не исключены, но маловероятны. Масштабный множитель рассчитывается из условия  $W_X = W_Y$ .

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} h_i^2(n)}} \quad (1.22)$$

Тогда

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{0,7^2 + 0,3^2 + (-0,1)^2}} = 1,302$$

В данном случае масштабный множитель больше 1, следовательно, перегрузки по условию ограничения энергии сигнала не происходит.

Для схемы выбираем наименьшее значение  $\lambda = 0,909$ .

## Задача 2 Анализ БИХ-фильтра второго порядка.

Исследуем БИХ-фильтр, удовлетворяющий следующим данным:

$$a_0 = 0,23 \quad a_1 = 0,1 \quad a_2 = -0,03 \quad b_1 = 0,5 \quad b_2 = 0,2$$

Изобразим дискретную цепь с заданными коэффициентами (см. рис. 2.1):

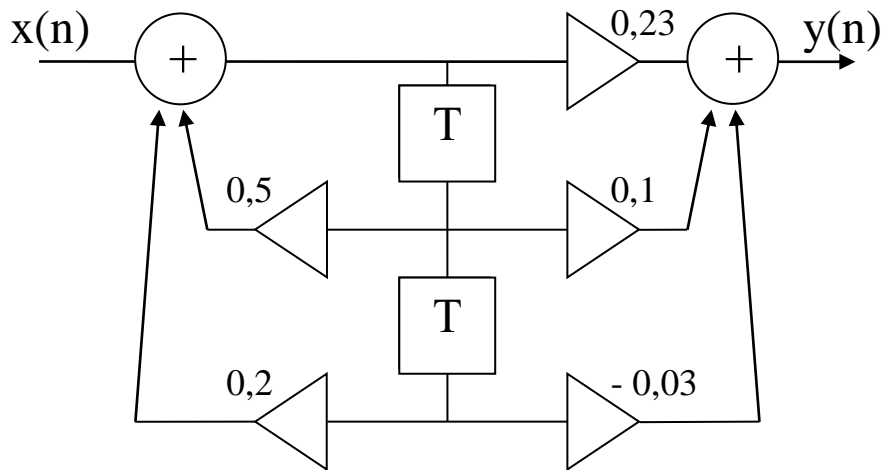


Рисунок 2.1 – Дискретная рекурсивная цепь второго порядка

2.1 Если известны параметры линейной дискретной системы, то взаимосвязь между входным воздействием  $x(n)$  и реакцией  $y(n)$  описывается разностным уравнением вида:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x(n-i) + \sum_{\ell=1}^L b_\ell y(n-\ell), \quad (2.1)$$

где  $a_i, b_\ell$  – коэффициенты уравнения (вещественные константы);

$x(n), y(n)$  – воздействие и реакция (вещественные или комплексные сигналы);

$N$  – число прямых связей;

$L$  – число обратных связей;

$x(n-i), y(n-\ell)$  – воздействие и реакция, задержанные на  $i$  и  $\ell$  периодов дискретизации соответственно.

Важно помнить, что:

– разностное уравнение должно отображать все пути прохождения входного сигнала через цепь.

Запишем разностное уравнение дискретной цепи, изображенной на рис.2.1:

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) \quad (2.2)$$

$$y(n) = 0,23x(n) + 0,1x(n-1) - 0,03x(n-2) + 0,5y(n-1) + 0,2y(n-2)$$

2.2 Известно, что передаточной функцией  $H(z)$  называют отношение  $z$ -изображения реакции к  $z$ -изображению воздействия при нулевых начальных условиях.

Применив  $z$ -преобразования к разностному уравнению, получим:

$$Y(z) = a_0 X(z) + a_1 z^{-1} X(z) + a_2 z^{-2} X(z) + b_1 z^{-1} Y(z) + b_2 z^{-2} Y(z)$$

$$Y(z) \cdot (1 - (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})) = X(z) \cdot (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$$

Тогда передаточная характеристика цепи:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} \quad (2.3)$$

Запишем передаточную функцию дискретной цепи, изображенной на рис.2.1:

$$H(z) = \frac{0,23 + 0,1z^{-1} - 0,03z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1} - 0,2z^{-2}} \quad (2.4)$$

Дискретная цепь является устойчивой, если полюсы ее передаточной функции лежат внутри единичной окружности  $z$ -плоскости, т.е.

$$|z_k| < 1 \quad (2.5)$$

Чтобы определить, устойчива ли дискретная цепь, показанная на рис.1.1, найдем ее полюсы. Для этого приравняем знаменатель передаточной функции к нулю:

$$1 - 0,5z^{-1} - 0,2z^{-2} = 0$$

$$z^2 - 0,5z - 0,2 = 0$$

$$z_1 = 0,762 \quad z_2 = -0,262$$

По полученным результатам видно, что условие (2.5) выполняется, т.е. дискретная цепь является устойчивой.

2.3 Импульсной характеристикой  $h(n)$  линейной дискретной цепи называется ее реакция на дискретную дельта-функцию  $\delta(n)$  при нулевых начальных условиях.

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, n = 0, \\ 0, n \neq 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Признаком нулевых начальных условий является отсутствие реакции при отсутствии воздействия.

Важно помнить, что:

– как и разностное уравнение, импульсная характеристика описывает дискретную цепь во временной области;

– определить импульсную характеристику дискретной системы можно двумя способами:

1. по разностному уравнению, решая его методом прямой подстановки;

2. выполнив обратное Z-преобразование передаточной функции  $H(z)$

– импульсная характеристика рекурсивной цепи имеет бесконечную длительность;

– для достижения необходимой точности при вычислении импульсной характеристики надо учесть все отсчеты, значения которых превышают 10% от максимального значения  $h(n)$ .

1 способ: (для четных вариантов)

Допустим, что на вход дискретной цепи действует дельта-функция вида  $\delta(n) = \{1; 0; 0...\}$ . Тогда, согласно разностному уравнению цепи:

$$h(n) = 0,23\delta(n) + 0,1\delta(n-1) - 0,03\delta(n-2) + 0,5h(n-1) + 0,2h(n-2) \quad (2.7)$$

$$n = 0$$

$$h(0) = 0,23\delta(0) + 0,1\delta(0-1) - 0,03\delta(0-2) + 0,5h(0-1) + 0,2h(0-2) = 0,23 \cdot 1 = 0,23$$

$$n = 1$$

$$h(1) = 0,23\delta(1) + 0,1\delta(0) - 0,03\delta(-1) + 0,5h(0) + 0,2h(-1) = 0,1 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,23 = 0,215$$

$$n = 2$$

$$h(2) = 0,23\delta(2) + 0,1\delta(1) - 0,03\delta(0) + 0,5h(1) + 0,2h(0) = -0,03 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,215 + 0,2 \cdot 0,23 = 0,1235$$

$$n = 3$$

$$h(3) = 0,23\delta(3) + 0,1\delta(2) - 0,03\delta(1) + 0,5h(2) + 0,2h(1) = 0,5 \cdot 0,1235 + 0,2 \cdot 0,215 = 0,10475$$

$$n = 4$$

$$h(4) = 0,23\delta(4) + 0,1\delta(3) - 0,03\delta(2) + 0,5h(3) + 0,2h(2) = 0,5 \cdot 0,10475 + 0,2 \cdot 0,1235 = 0,077075$$

$$n = 5 \quad h(5) = 0,5h(4) + 0,2h(3) = 0,5 \cdot 0,077075 + 0,2 \cdot 0,10475 = 0,059488$$

$$n = 6 \quad h(6) = 0,5h(5) + 0,2h(4) = 0,5 \cdot 0,059488 + 0,2 \cdot 0,077075 = 0,045159$$

$$n = 7 \quad h(7) = 0,5h(6) + 0,2h(5) = 0,5 \cdot 0,045159 + 0,2 \cdot 0,059488 = 0,034477$$

$$n = 8 \quad h(8) = 0,5h(7) + 0,2h(6) = 0,5 \cdot 0,034477 + 0,2 \cdot 0,045159 = 0,02627$$

$$n=9 \quad h(9) = 0,5h(8) + 0,2h(7) = 0,5 \cdot 0,02627 + 0,2 \cdot 0,034477 = 0,02003$$

Так как  $h(9)$  составляет  $\approx 8,7\%$  от  $h_{\max}(n) = h(0)$ , т.е. не превышает 10%, дальнейшие отчеты импульсной характеристики цепи считать не имеет смысла.

2 способ: (для нечетных вариантов)

Импульсную характеристику дискретной цепи можно найти по передаточной функции, выполнив ее обратное  $z$ -преобразование. Обратное  $z$ -преобразование передаточной функции можно осуществить

- а) с помощью теоремы вычетов;
- б) путем разложения дроби в непрерывную сумму.

Рассмотрим второй вариант. Разложить дробь в непрерывную сумму можно путем последовательного деления полинома числителя  $H(z)$  на знаменатель с поочередным выделением слагаемых вида  $h_n z^{-n}$ .

$$\text{Выполним деление передаточной функции } H(z): H(z) = \frac{0,23 + 0,1z^{-1} - 0,03z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1} - 0,2z^{-2}}$$

$$\begin{array}{r} 0,23 + 0,1z^{-1} - 0,03z^{-2} \\ \hline 0,7 - 0,115z^{-1} - 0,046z^{-2} \\ \hline 0,215z^{-1} + 0,016z^{-2} \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 - 0,5z^{-1} - 0,2z^{-2} \\ 0,23 \rightarrow h(0) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 0,215z^{-1} + 0,016z^{-2} \\ \hline 0,215z^{-1} - 0,1075z^{-2} - 0,043z^{-3} \\ \hline 0,1235z^{-2} + 0,043z^{-3} \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 - 0,5z^{-1} - 0,2z^{-2} \\ 0,215z^{-1} \rightarrow h(1) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 0,1235z^{-2} + 0,043z^{-3} \\ \hline 0,1235z^{-2} - 0,06175z^{-3} - 0,0247z^{-4} \\ \hline 0,10475z^{-3} + 0,0247z^{-4} \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 - 0,5z^{-1} - 0,2z^{-2} \\ 0,1235z^{-2} \rightarrow h(2) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 0,10475z^{-3} + 0,0247z^{-4} \\ \hline 0,3125z^{-3} - 0,052375z^{-4} - 0,02095z^{-5} \\ \hline 0,077075z^{-4} + 0,02095z^{-5} \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 - 0,5z^{-1} - 0,2z^{-2} \\ 0,10475z^{-3} \rightarrow h(3) \end{array} \right.$$

$$H(z) = \frac{0,23 + 0,1z^{-1} - 0,03z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1} - 0,2z^{-2}} = 0,23 + 0,215z^{-1} + 0,1235z^{-2} + 0,10475z^{-3} + 0,077075z^{-4} \dots$$

Деление осуществляем до тех пор, пока не достигнем 10% от  $h_{\max}(n)$ .

Также операцию разложения дроби в непрерывную сумму можно выполнить с применением специальных программ.

Таблица 2.1 Импульсная характеристика дискретной цепи

$n$	$h(n)$
0	0,23
1	0,215
2	0,1235
3	0,10475
4	0,077075
5	0,059488
6	0,045159
7	0,034477
8	0,026270
9	0,020030

Построим график импульсной характеристики цепи:

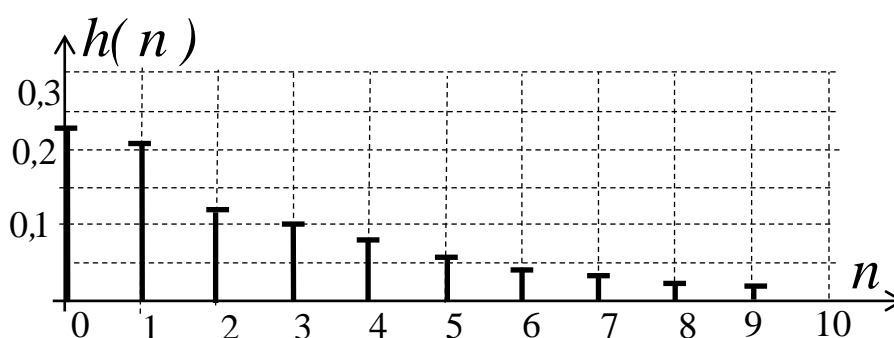


Рисунок 2.2 - Импульсная характеристика цепи

2.4 Частотная характеристика линейной дискретной цепи  $H(j\omega)$  – Фурье-изображение импульсной характеристики  $h(n)$ . Также выражение  $H(j\omega)$  можно получить из передаточной функции цепи  $H(z)$ , выполнив замену  $z^n \rightarrow e^{j\omega nT}$ .

$$H(j\omega) = \frac{0,23 + 0,1e^{-j\omega T} - 0,03e^{-j2\omega T}}{1 - 0,5e^{-j\omega T} - 0,2e^{-j2\omega T}} \quad (2.8)$$

Как и всякую комплексную функцию,  $H(j\omega)$  можно представить через модуль и аргумент

$$H(j\omega) = H(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.9)$$

где  $H(\omega)$  – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) цепи,  
 $\varphi(\omega)$  – фазо-частотная характеристика (ФЧХ) цепи.

Расчеты будем производить также с помощью нормированной частоты  $\Omega$ .

Запишем передаточную функцию исходной цепи  $H(j\Omega)$ . Согласно выражению (2.8), получим:

$$H(j\Omega) = \frac{0,23 + 0,1 \cdot e^{-j2\pi\Omega} - 0,03e^{-j4\pi\Omega}}{1 - 0,5e^{-j2\pi\Omega} - 0,2e^{-j4\pi\Omega}} \quad (2.9)$$

$$H(j\Omega) = \frac{0,23 + 0,1\cos(2\pi\Omega) - j0,1\sin(2\pi\Omega) - 0,03\cos(4\pi\Omega) + j0,03\sin(4\pi\Omega)}{1 - 0,5\cos(2\pi\Omega) + j0,5\sin(2\pi\Omega) - 0,2\cos(4\pi\Omega) + j0,2\sin(4\pi\Omega)} \quad (2.10)$$

Амплитудно-частотная характеристика дискретной цепи:

$$H(\Omega) = \frac{\sqrt{(0,23 + 0,1\cos(2\pi\Omega) - 0,03\cos(4\pi\Omega))^2 + (-0,1\sin(2\pi\Omega) + 0,03\sin(4\pi\Omega))^2}}{\sqrt{(1 - 0,5\cos(2\pi\Omega) - 0,2\cos(4\pi\Omega))^2 + (0,5\sin(2\pi\Omega) + 0,2\sin(4\pi\Omega))^2}} \quad (2.11)$$

Фазочастотная характеристика дискретной цепи:

$$\varphi(\Omega) = \arctg \frac{-0,1\sin(2\pi\Omega) + 0,03\sin(4\pi\Omega)}{0,23 + 0,1\cos(2\pi\Omega) - 0,03\cos(4\pi\Omega)} - \arctg \frac{0,5\sin(2\pi\Omega) + 0,2\sin(4\pi\Omega)}{1 - 0,5\cos(2\pi\Omega) - 0,2\cos(4\pi\Omega)} \quad (2.12)$$

или

$$H(\Omega) = |H(j\Omega)|, \quad \varphi(\Omega) = \arg(H(j\Omega)) \quad (2.13)$$

Ослабление фильтра

$$A(\Omega) = 20 \lg \left( \frac{1}{H(\Omega)} \right) \quad (2.15)$$

Шаг изменения  $\Omega$  принять равным 0,05. Рассчитывать значения АЧХ и ФЧХ цепи достаточно лишь до величины  $\Omega = 0,5$ . Учитывая свойство четности АЧХ и нечетности ФЧХ, можно доопределить значения до величины  $\Omega = 1$ , т.к.

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= H(1 - \Omega) \\ \varphi(\Omega) &= -\varphi(1 - \Omega) \end{aligned}$$

Таблица 2.2 – Частотные характеристики цепи

$\Omega$	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$H(\Omega)$	1	0,664	0,421	0,312	0,253	0,214	0,183	0,154	0,122	0,092	0,077
$A(\Omega)$	0	3,55	7,51	10,12	11,94	13,39	14,75	16,25	18,27	20,72	22,27
$\varphi(\Omega)$	0	-39,4	-47,9	-47,7	-45,7	-43,7	-42	-40,2	-36,4	-25,3	0

Так как частотные характеристики дискретных цепей (сигналов) являются непрерывными периодически повторяющимися функциями, достаточно



построить частотные характеристики только для одного периода, соответствующего  $\omega_0$ .

тогда

$$\Omega = \omega_0 / \omega_0 = 1$$

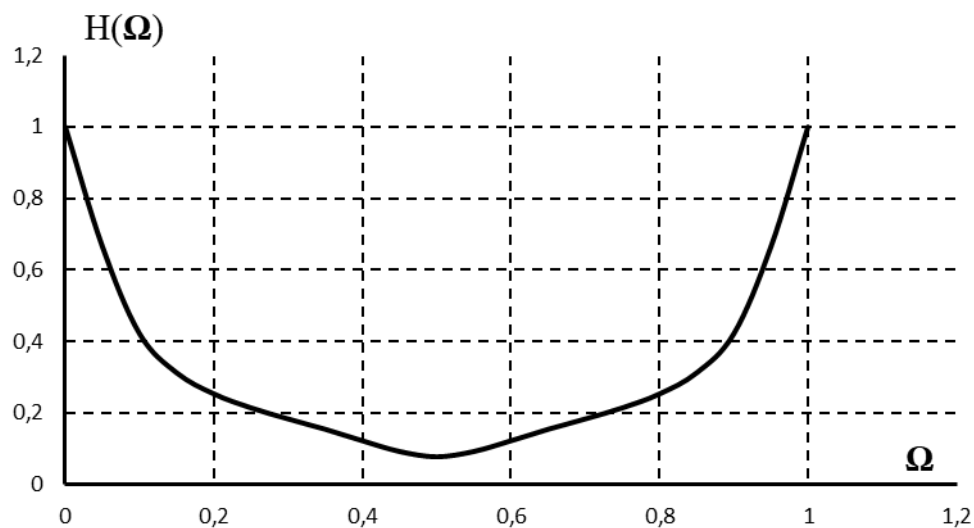


Рисунок 2.3 - АЧХ дискретной цепи

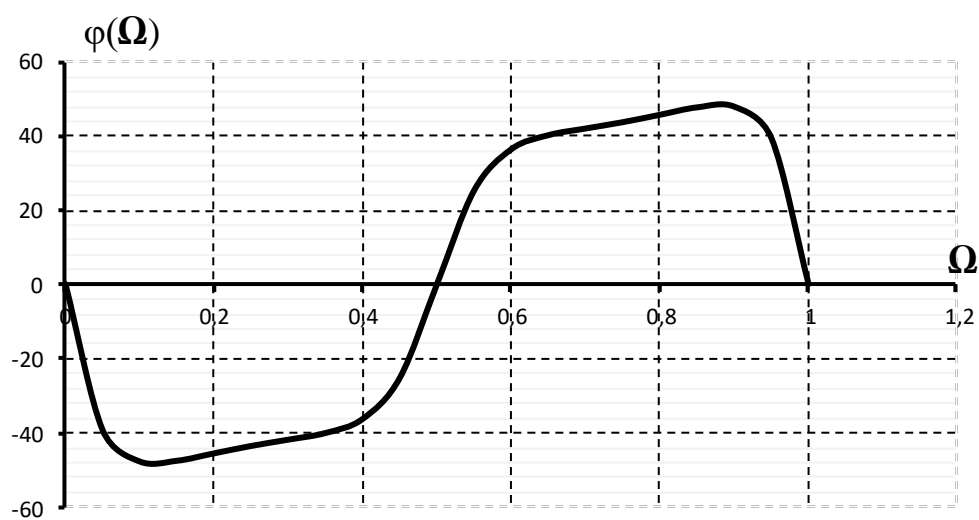


Рисунок 2.4 – ФЧХ дискретной цепи

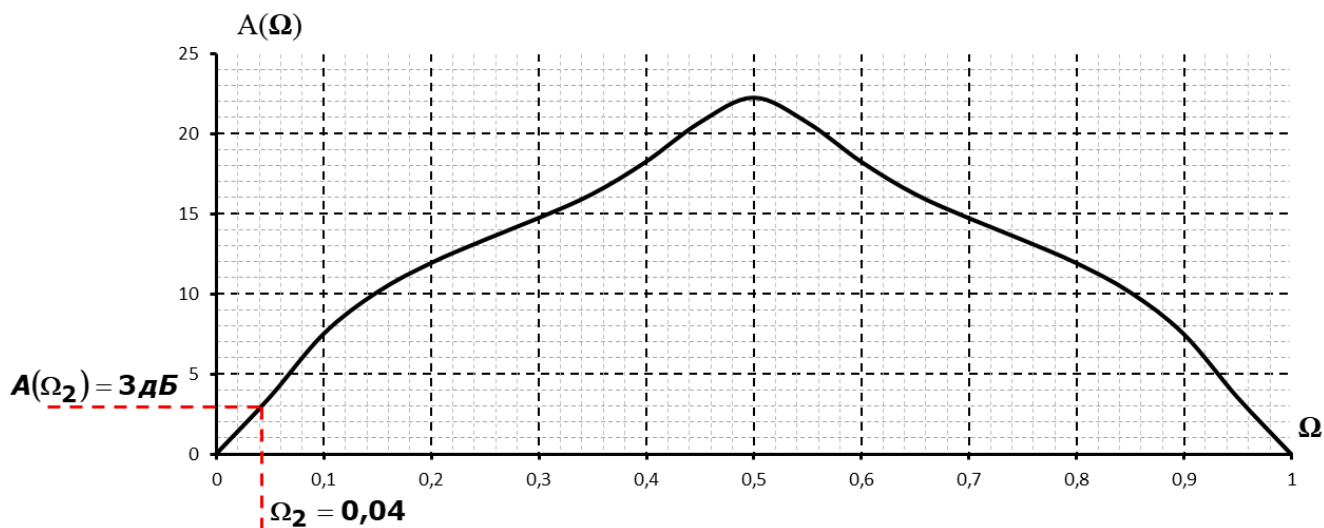


Рисунок 2.5 – График ослабления дискретной цепи

Как видно из рисунков 2.3, 2.4 и 2.5 АЧХ и ослабление являются непрерывной периодически повторяющимися четными функциями, а ФЧХ – непрерывной периодически повторяющейся нечетной функцией.

Определим по зависимости  $A(\Omega)$  (рис. 2.5) тип фильтра. Для дискретного фильтра весь диапазон частот расположен в диапазоне  $0 \leq \Omega \leq 0,5$ . В области низких частот ослабление фильтра мало, а в области высоких частот велико, поэтому исследуемый БИХ-фильтр является фильтром нижних частот.

Определим нормированное значение границы полосы пропускания из условия  $A(\Omega_2) = 3 \text{ дБ}$ .

Тогда по графику граница полосы пропускания  $\Omega_2 = 0,04$ .

### Задача 3. Проектирование КИХ-фильтра.

Проектированию КИХ-фильтров уделяют большое внимание, потому что они обладают рядом положительных свойств:

- легко создать фильтр с линейной фазой (линейной ФЧХ);
- КИХ-фильтры, реализуемые по нерекурсивной схеме, всегда устойчивы

Однако, наряду с достоинствами, КИХ-фильтры обладают и недостатками, из которых наиболее существенными являются следующие:

- для аппроксимации частотных характеристик с острыми срезами (мала переходная область) требуется импульсная характеристика с большим числом отчетов  $N$ ;
- задержка в КИХ-фильтрах с линейной фазой не всегда равна целому числу интервалов дискретизации

Идея проектирования КИХ-фильтров методом взвешивания очень проста и состоит в следующем:

Задаются желаемым комплексным коэффициентом передачи фильтра в виде непрерывной функции, определенной в диапазоне частот от нуля до частоты дискретизации. Обратное преобразование Фурье этой характеристики даст бесконечную последовательность импульсной характеристики. Для получения, проектируемого КИХ-фильтра эта последовательность усекается. Из-за усечения заданная частотная характеристика искажается. Чтобы достичь хорошей аппроксимации надо изменить значения коэффициентов импульсной характеристики с помощью конечной весовой последовательности  $w(nT)$ , которая называется окном, так, чтобы полученная импульсная характеристика  $h_D(nT)$ , обеспечила бы заданные требования на АЧХ. При этом  $h_D(nT)$  равна

$$h_D(nT) = h(nT) \cdot w(nT) \quad (3.1)$$

где  $w(nT)$  - последовательность конечной длины

Были разработаны различные виды окон для взвешивания значений коэффициентов импульсной характеристики.

Таблица 3.1 – Окна, применяемые при синтезе фильтров

Окно Бартлетта	$w(nT) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-2}{2} \leq n \leq N-1, \quad \text{где } N\text{-четное} \\ 0, & n < 0, \quad n > N-1 \end{cases}$
----------------	--

Окно Хана	$w(nT) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0, \quad n > N-1 \end{cases}$
Окно Хемминга	$w(nT) = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0, \quad n > N-1 \end{cases}$
Окно Блэкмана	$w(nT) = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0, \quad n > N-1 \end{cases}$

Рассчитаем нерекурсивный фильтр нижних частот с линейной фазой методом взвешивания. Вид окна для взвешивания – окно Бартлетта.  $N=8$

Действительная (аппроксимируемая) частотная характеристики имеет вид:

$$D(e^{j2\pi f \cdot T}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq f \leq 200 \text{ кГц} \\ 0, & 300 \text{ кГц} \leq f \leq 500 \text{ кГц} \end{cases} \quad (3.2)$$

Выбираем частоту дискретизации

$$f_d = 2f_B = 1000 \text{ кГц}. \quad (3.3)$$

Частотная характеристика фильтра нижних частот с нормированными частотами:

$$D(e^{j2\pi\Omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \Omega \leq 0,2 \\ 0, & 0,3 \leq \Omega \leq 0,5 \end{cases} \quad (3.4)$$

Поскольку АЧХ цифрового фильтра на частоте  $\omega=0$  не равна нулю ( $|H(e^{j\omega T})| \neq 0$ ), а на частоте  $\omega = \frac{\omega_d}{2}$  равна нулю ( $|H(e^{j\omega T})| = 0$ ), то для аппроксимации заданной характеристики используем КИХ - фильтр вида 2 – симметричный фильтр с четным  $N$ , с нечетной характеристикой  $H_2^1(e^{j\omega T})$  (смотри приложение А).

Определяем действительную (аппроксимируемую) частотную характеристику с учетом частоты дискретизации:

$$D(e^{j2\pi\Omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq f \leq 200 \text{ кГц} \\ 0, & 300 \text{ кГц} \leq f \leq 500 \text{ кГц} \\ 0, & 500 \text{ кГц} \leq f \leq 700 \text{ кГц} \\ -1, & 800 \text{ кГц} \leq f \leq 1000 \text{ кГц} \end{cases} \quad (3.5)$$

для нормированных частот:

$$D(e^{j2\pi\Omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \Omega \leq 0,2 \\ 0, & 0,3 \leq \Omega \leq 0,5 \\ 0, & 0,5 \leq \Omega \leq 0,7 \\ -1, & 0,8 \leq \Omega \leq 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

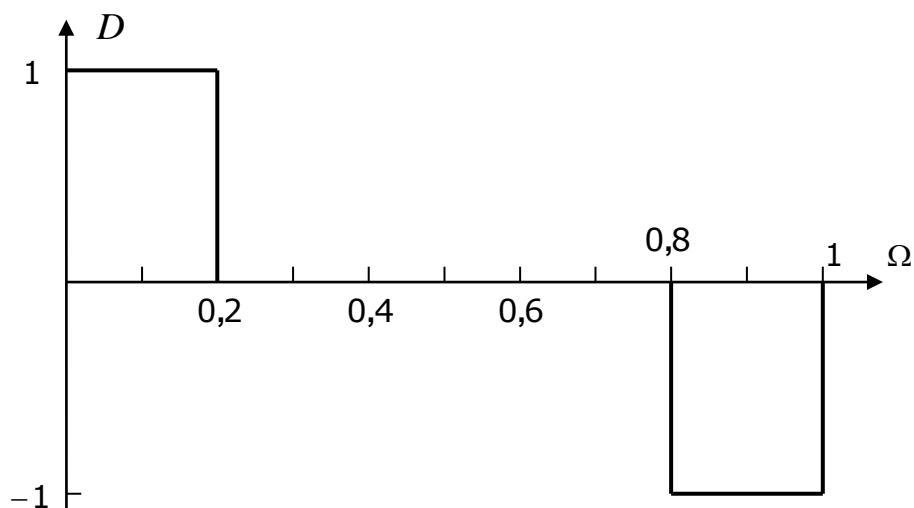


Рисунок 3.1 – Аппроксимируемая частотная характеристика цифрового фильтра

Так как  $N=8$ , определим частоты выборки и обозначим эти частоты на графике требуемого АЧХ в виде точек:

$$f_k = k \frac{f_d}{N}, \quad \Omega_k = k \frac{1}{N}, \quad \text{где } k=0, 1, 2..N \quad (3.7)$$

Таблица 3.2 – значения частот выборки

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_k$ , кГц	0	125	250	375	500	625	750	875
$\Omega_k$	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875

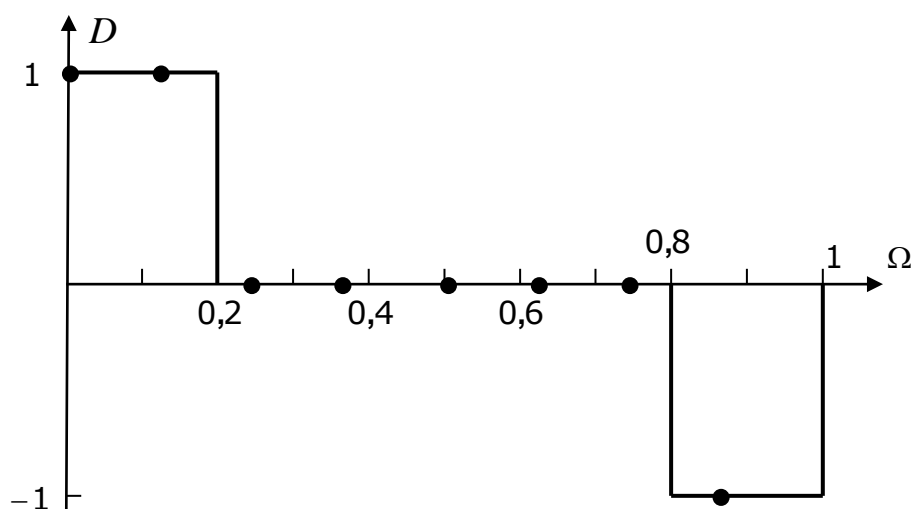


Рисунок 3.2 – Частотная характеристика цифрового фильтра

Определим ФЧХ КИХ-фильтра нижних частот вида 2 для  $N=8$  и запишем комплексные значения отчетов выборки в таблицу 3.3.

$$\arg H_2'(e^{j2\pi\Omega}) = -(N-1)\pi k\Omega_1, \text{ где } k=0, 1, \dots, 7 \quad (3.8)$$

Таблица 3.3 – Комплексные значения отчетов выборки  $H_2(k)$

$\Omega$	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875
$\arg H_2'(e^{j2\pi\Omega})$	0	$-0,875\pi$	$-1,75\pi$	$-2,625\pi$	$-3,5\pi$	$-4,375\pi$	$-5,25\pi$	$-6,125\pi$
$H_2(e^{j2\pi\Omega})$	1	$1e^{-j0,875\pi}$	0	0	0	0	0	$-1e^{-j6,125\pi}$

Определим отчеты импульсной характеристики, воспользовавшись формулой ОДПФ:

$$h(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_2(k) e^{j\frac{2\pi nk}{N}} = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 H_2(k) e^{j\frac{2\pi nk}{8}} \quad (3.9)$$

$$n=0 \quad h(0) = \frac{(1 + 1e^{-j0,875\pi} - 1e^{-j6,125\pi})}{8} = \frac{1 - 0,9239 - j0,3827 - 0,9239 + j0,3827}{8} = -0,10597$$

$$n=1 \quad h(1) = \frac{\left(1 + 1e^{-j0,875\pi} e^{j\frac{2\pi}{8}} - 1e^{-j6,125\pi} e^{j\frac{2\pi \cdot 7}{8}}\right)}{8} = \frac{(1 + 1e^{-j0,625\pi} - 1e^{-j4,375\pi})}{8} = 0,029329$$

$$n=2 \quad h(2) = \frac{\left(1 + 1e^{-j0,875\pi} e^{j\frac{2\pi \cdot 2}{8}} - 1e^{-j6,125\pi} e^{j\frac{2\pi \cdot 2 \cdot 7}{8}}\right)}{8} = \frac{(1 + 1e^{-j0,375\pi} - 1e^{-j2,625\pi})}{8} = 0,22067$$

$$n=3 \quad h(3) = \frac{\left(1 + 1e^{-j0,875\pi} e^{j\frac{2\pi \cdot 3}{8}} - 1e^{-j6,125\pi} e^{j\frac{2\pi \cdot 3 \cdot 7}{8}}\right)}{8} = \frac{(1 + 1e^{-j0,125\pi} - 1e^{-j0,875\pi})}{8} = 0,35597$$

$$n=4 \quad h(4) = \frac{\left(1 + 1e^{-j0,875\pi} e^{j\frac{2\pi \cdot 4}{8}} - 1e^{-j6,125\pi} e^{j\frac{2\pi \cdot 4 \cdot 7}{8}}\right)}{8} = \frac{(1 + 1e^{j0,125\pi} - 1e^{j0,875\pi})}{8} = 0,35597$$

$$n=5 \quad h(5) = \frac{\left(1 + 1e^{-j0,875\pi} e^{j\frac{2\pi \cdot 5}{8}} - 1^{-j6,125\pi} e^{j\frac{2\pi \cdot 5 \cdot 7}{8}}\right)}{8} = \frac{\left(1 + 1e^{j0,375\pi} - 1^{j2,625\pi}\right)}{8} = 0,22067$$

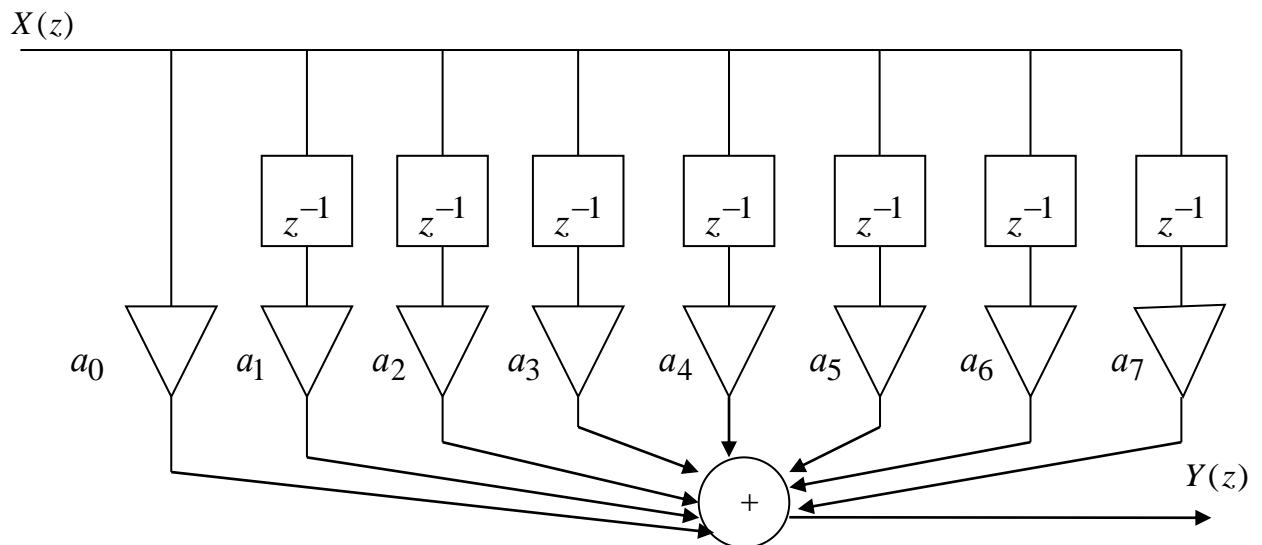
$$n=6 \quad h(6) = \frac{\left(1 + 1e^{-j0,875\pi} e^{j\frac{2\pi \cdot 6}{8}} - 1^{-j6,125\pi} e^{j\frac{2\pi \cdot 6 \cdot 7}{8}}\right)}{8} = \frac{\left(1 + 1e^{j0,625\pi} - 1^{j4,375\pi}\right)}{8} = 0,029329$$

$$n=7 \quad h(7) = \frac{\left(1 + 1e^{-j0,875\pi} e^{j\frac{2\pi \cdot 7}{8}} - 1^{-j6,125\pi} e^{j\frac{2\pi \cdot 7 \cdot 7}{8}}\right)}{8} = \frac{\left(1 + 1e^{j0,125\pi} - 1^{j0,875\pi}\right)}{8} = -0,10597$$

Импульсная характеристика цифрового фильтра:

$$h(nT) = \{-0,10597; 0,029239; 0,22067; 0,35597; 0,35597; 0,22067; 0,029239; -0,10597\}$$

Построим схему полученного нерекурсивного фильтра, зная его импульсную характеристику (коэффициенты нерекурсивного фильтра полностью соответствуют отчетам импульсной характеристики цепи):



где

$$a_0 = a_7 = -0,10597, \quad a_1 = a_6 = 0,029329, \quad a_2 = a_5 = 0,22067, \quad a_3 = a_4 = 0,35597$$

Рисунок 3.3 – Схема цифрового нерекурсивного фильтра вида 2

Передаточная функция такого фильтра:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(nT) \cdot z^{-n} = -0,10597 + 0,029329 z^{-1} + 0,22067 z^{-2} + 0,35597 z^{-3} + \\ + 0,35597 z^{-4} + 0,22067 z^{-5} + 0,029329 z^{-6} - 0,10597 z^{-7} \quad (3.10)$$

Определим частотную характеристику цифрового фильтра:

$$H(j2\pi\Omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi\Omega}} = -0,10597 + 0,029329 e^{-j2\pi\Omega} + 0,22067 e^{-j4\pi\Omega} + 0,35597 e^{-j6\pi\Omega} + \\ + 0,35597 e^{-j8\pi\Omega} + 0,22067 e^{-j10\pi\Omega} + 0,029329 e^{-j12\pi\Omega} - 0,10597 e^{-j14\pi\Omega} \quad (3.11)$$

Рассчитаем частотные характеристики, изменяя нормированную частоту с шагом  $\Omega_k = \frac{1}{2N} = \frac{1}{2 \cdot 8} = 0,0625$ . Результаты расчета приведены в таблице 3.4:

Таблица 3.4 – Частотная характеристика цифрового фильтра

$\Omega$	0	0,0625	0,125	0,1875	0,25	0,3125	0,375	0,4375	0,5
$H(\Omega)$	1	1,056	1	0,566	0	0,202	0	0,150	0
$\Omega$	0,5625	0,625	0,6875	0,75	0,8125	0,875	0,9375	1	
$H(\Omega)$	0,150	0	0,202	0	0,566	1	1,056	1	

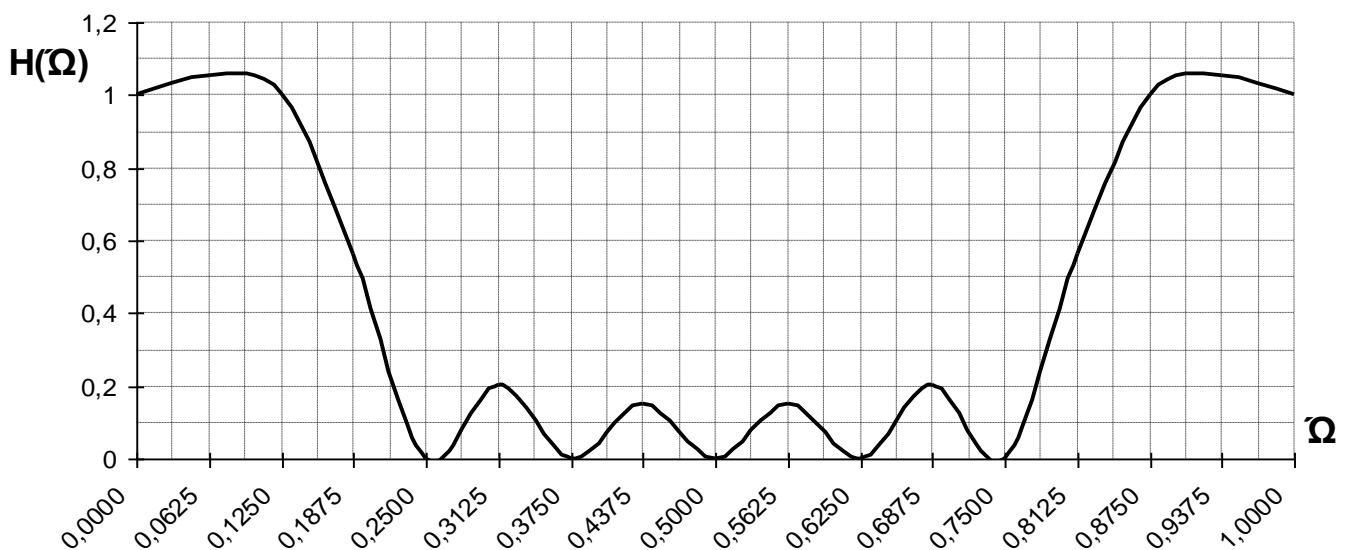


Рисунок 3.4 – АЧХ цифрового фильтра

Отклонения АЧХ реализованного цифрового фильтра от заданной АЧХ как в полосе пропускания, так и в полосе непропускания обусловлены разрывами АЧХ идеализированного фильтра на частоте среза полосы пропускания. С увеличением длительности импульсной характеристики (с увеличением  $N$ ) пульсации становятся более частыми, амплитуды пульсаций на верхних и нижних частотах (по сравнению с частотой среза) уменьшаются, но амплитуды первых пульсаций справа и слева от частоты среза остаются неизменными.



В качестве сглаживающего окна используем окно Бартлетта.

$$w(nT) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} < n \leq N-1 \\ 0, & n < 0, \quad n > N-1 \end{cases} \quad (3.12)$$

Для  $N=8$  отчеты весовой функции будут равны:

$$w(nT) = \{0; 0,2857; 0,5714; 0,8571; 0,8571; 0,5714; 0,2857; 0\} \quad (3.13)$$

С учетом полученной весовой функции определим взвешенную импульсную характеристику  $h_D(nT)$ :

$$h_D(nT) = h(nT) \cdot w(nT) \quad (3.14)$$

$$h_D(nT) = \{0; 0,00838; 0,126097; 0,305117; 0,305117; 0,126097; 0,00838; 0\} \quad (3.15)$$

Передающая функция цифрового фильтра со взвешенными коэффициентами:

$$H_D(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_D(nT) \cdot z^{-n} = 0,00838 z^{-1} + 0,126097 z^{-2} + 0,305117 z^{-3} + 0,305117 z^{-4} + 0,126097 z^{-5} + 0,00838 z^{-6} \quad (3.16)$$

Определим частотную характеристику цифрового фильтра со взвешенными коэффициентами:

$$H_D(j2\pi\Omega) = H_D(z)|_{z=e^{j2\pi\Omega}} = 0,00838 e^{-j2\pi\Omega} + 0,126097 e^{-j4\pi\Omega} + 0,305117 e^{-j6\pi\Omega} + 0,305117 e^{-j8\pi\Omega} + 0,126097 e^{-j10\pi\Omega} + 0,00838 e^{-j12\pi\Omega} \quad (3.17)$$

Рассчитаем частотную характеристику, изменяя нормированную частоту с шагом 0.0625. Результаты расчета приведены в таблице 3.5:

Таблица 3.5 – Частотная характеристика цифрового фильтра со взвешенной импульсной характеристикой

$\Omega$	0	0,0625	0,125	0,1875	0,25	0,3125	0,375	0,4375	0,5
$H_D(\Omega)$	0,879	0,818	0,654	0,442	0,241	0,095	0,016	0,0071	0
$\Omega$	0,5625	0,625	0,6875	0,75	0,8125	0,875	0,9375	1	
$H_D(\Omega)$	0,0071	0,016	0,095	0,241	0,442	0,654	0,818	0,879	

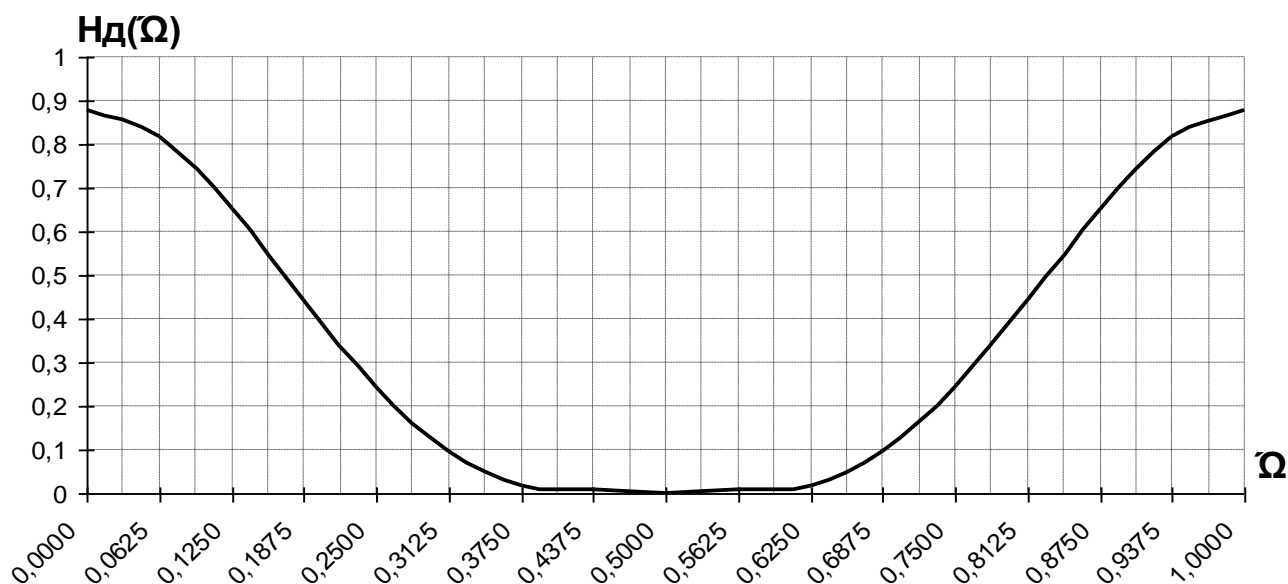


Рисунок 3.5 – Частотная характеристика цифрового фильтра со взвешенной  $h_D(nT)$

Как видно из полученных графиков, умножение отчетов импульсной характеристики цифрового фильтра на весовую функцию  $w(nT)$  приводит к сглаживанию выбросов частотной характеристики фильтра. На практике при проектировании фильтров сравнивают полученную частотную характеристику цифрового фильтра с заданной АЧХ ( $D$ ). И если требования находятся в допустимых пределах, то расчет ФНЧ считается законченным, если нет, то необходимо увеличить  $N$  и повторить расчет.

## Приложение А

### КИХ-фильтры с линейной фазой

#### Вид 1

1.  $H_1^1(e^{j\omega T})$  – четная функция
2. Импульсная характеристика симметрична.  $N$  – нечетное.
3. АЧХ  $|H_1(e^{j\omega T})|$  – четная функция
4.  $\text{Arg } H_1(e^{j\omega T}) = \frac{-\omega T(N-1)}{2} \pm \arg H_1^1(e^{j\omega T})$ .
5.  $|H_1(e^{j\omega T})|_{\omega=0, 5\omega_d} \neq 0$
6.  $|H_1(e^{j\omega T})|_{\omega=0, \omega_d} = 0$  или  $\neq 0$  - АЧХ на нулевой частоте и частоте  $\omega_d$  может

быть равной нулю, а может быть и не равной нулю

7. Фильтр вида 1 используется при проектировании режекторного или высокочастотного фильтра

#### Вид 2

1.  $H_2^1(e^{j\omega T})$  – нечетная функция
2. Импульсная характеристика симметрична.  $N$  – четное.
3. АЧХ  $|H_2(e^{j\omega T})|$  – четная функция
4.  $\text{Arg } H_2(e^{j\omega T}) = \frac{-\omega T(N-1)}{2} \pm \arg H_2^1(e^{j\omega T})$ .
5.  $|H_2(e^{j\omega T})|_{\omega=0, 5\omega_d} = 0$
6.  $|H_2(e^{j\omega T})|_{\omega=0, \omega_d} = 0$  или  $\neq 0$  - АЧХ на нулевой частоте и частоте  $\omega_d$  может

быть равной нулю, а может быть и не равной нулю.

7. Фильтр вида 2 используется при проектировании низкочастотного или полосового фильтра.

### Вид 3

1.  $H_3^1(e^{j\omega T})$  – нечетная функция
2. Импульсная характеристика антисимметрична.  $N$  – нечетное,  $h(T(N-1)/2) = 0$
3. АЧХ  $|H_3(e^{j\omega T})|$  – четная функция
4.  $\text{Arg } H_3(e^{j\omega T}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega T(N-1)}{2} \pm \arg H_3^1(e^{j\omega T})$ .
5.  $|H_3(e^{j\omega T})|_{\omega=0, 0.5\omega_d} = 0$
6.  $|H_3(e^{j\omega T})|_{\omega=0, \omega_d} = 0$  - АЧХ на нулевой частоте и частоте  $\omega_d$  равна нулю
7. Фильтр вида 3 используется при проектировании полосового фильтра.

### Вид 4

1.  $H_4^1(e^{j\omega T})$  – четная функция
2. Импульсная характеристика антисимметрична.  $N$  – четное,  $h(T(N-1)/2) = 0$
3. АЧХ  $|H_4(e^{j\omega T})|$  – четная функция
4.  $\text{Arg } H_4(e^{j\omega T}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega T(N-1)}{2} \pm \arg H_4^1(e^{j\omega T})$ .
5.  $|H_4(e^{j\omega T})|_{\omega=0, 0.5\omega_d} \neq 0$
6.  $|H_4(e^{j\omega T})|_{\omega=0, \omega_d} = 0$  - АЧХ на нулевой частоте и частоте  $\omega_d$  равна нулю.
7. Фильтр вида 4 используется при проектировании высокочастотного фильтра.

## Рекомендуемая литература:

1. Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.И. Основы теории цепей: Учебник для вузов/ под ред. В.П. Бакалова - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Горячая линия-Телеком, 2009. - 596с.
2. Рясный Ю. В. Математические основы цифровой обработки сигналов. Ч. 1. Дискретные сигналы и дискретные цепи [Текст]: учеб. пособие / Ю.В. Рясный, В.Г. Тихобаев, В.И. Панарин; Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. - Новосибирск: [б. и.], 2007. - 178с.
3. Рясный Ю. В. Математические основы цифровой обработки сигналов. Ч.2. Цифровые фильтры и методы их проектирования [Текст]: учеб. пособие / Ю.В. Рясный, В.Г. Тихобаев, В.И. Панарин; Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. - Новосибирск: [б. и.], 2009. - 242с.
4. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб для вузов. – М.: Радио и связь, 1994.
5. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов: Справочник. – М.: Радио и связь, 1985.
6. Карташев В.Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров. – М.: Высшая школа, 1982.
7. Солонина А.И., Улахович Д.А., Арбузов С.М., Соловьева Е.Б., Гук И.И. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003.
8. Бакалов В.П. Субботин Е.А. Синтез электрических цепей. Часть 2: учебное пособие/ СибГУТИ. – Новосибирск, 2012 г. – 188с.