РЕШЕНИЯ НАБИРАТЬ НЕОБЯЗАТЕЛЬНО, МОЖНО и ПРИСЫЛАТЬ В НОРМАЛЬНОМ КАЧЕСТВЕ ФОТО НАПИСАННОГО РЕШЕНИЯ. Но в формате PDF!

Если не сказано обратного, вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ считается заданным.

К Лекции 1

Задача 1.1 (Охватить сосну; РЕШЕНА ДВУМЯ СПОСОБАМИ).
На миллиметровку бросают сосновую иголку длиной 1 см. Найдите среднее число пересечений с линиями сетки (да, сосновая иголка прямой быть не обязана).

Задача 1.2 (О круглых кирпичах; РЕШЕНА ДВУМЯ СПОСОБАМИ).
Летит кирпич размером $3 \times 4 \times 5$. И так волшебно вращается, что все его положения относительно своего центра масс равновероятны. Солнце в зените, найдите среднюю площадь тени.

Задача 1.3 (О первородстве; РЕШЕНА).
Пусть $\mathcal{A}$ — абстрактная булева алгебра. Его непустое подмножество $\mathcal{F}$ называют фильтром, если $\varnothing \notin \mathcal{F}$, для всех $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{F}$ из $B \subset A$ следует $A \in \mathcal{F}$, а кроме того для всех $A, B \in \mathcal{F}$ выполнено $A \cap B \in \mathcal{F}$. Фильтр назовем максимальным, если для всех $A \in \mathcal{A}$ или $A \in \mathcal{F}$, или $\overline{A} \in \mathcal{F}$. Показать, что на множестве всех максимальных фильтров можно построить булеву алгебру, изоморфную исходной булевой алгебре $\mathcal{A}$.

Задача 1.4 (Где гуще; РЕШЕНА).
Вы имеете «правильный» кубик и бросаете его до тех пор, пока в сумме не наберете не меньше N очков. Вы выигрываете, если набираете ровно N очков. Для какого натурального N вероятность выиграть наибольшая?

Задача 1.5 (Ответ-то прост; РЕШЕНА).
Бросают кубик 202020 раз. Какая сумма очков наивозможная?

Задача 1.6 (Безынтегральная; РЕШЕНА, НО НАДО СНЯТЬ, ЧТОБЫ НЕПОВАДНО БЫЛО).
Решить следующую задачу без применения интегралов и всего на них, опирающегося.
«Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не больше трех, не превзойдет трех, а их произведение будет не больше $2/7$?»

К Лекции 2

Задача 2.1 (Простая формула; РЕШЕНА).
Доказать, что для любой последовательности событий $A_k \in \mathcal{F}$, для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<l} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_l) + \ldots + (-1)^{k+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_k).$$

Верно ли это для объединения счетного числа событий? А доказать?

Задача 2.2 (О счетном наборе; РЕШЕНА).
Если Ω не более чем счетно, и $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$, то найдется некоторое не более чем счетное разбиение $H_1, \ldots, H_i, \ldots$ $(i \in I_0)$ множества Ω, что

$$\mathcal{F} = \{\cup_{i \in I} H_i | I \subset I_0\} \cong 2^{\{H_1, \ldots, H_i, \ldots\}}.$$

Задача 2.3 (Все умрут; РЕШЕНА).
Пусть дана некоторая последовательность событий $A_n \in \mathcal{F}$, для которых

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < +\infty.$$

Доказать, что вероятность события «из событий A_n произошло лишь конечное число» равна 1.

Задача 2.4 (О пользе символа π; РЕШЕНА).
Пусть $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ — π-система, а на минимальной (содержащей $\mathcal{F}$) σ-алгебре $\sigma(\mathcal{F})$ заданы две меры μ_1, μ_2, причем $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega) < +\infty$. Докажите, что если меры μ_1 и μ_2 совпадают на элементах из $\mathcal{F}$, то они совпадают и на $\sigma(\mathcal{F})$.

Задача 2.5 (Об обещаниях Каратеодори; РЕШЕНА).
Для какой-нибудь алгебры $\mathcal{A}$ над $\mathbb{N}$ приведите пример заданной на $\mathcal{A}$ конечно-аддитивной меры, не имеющей счетно-аддитивного продолжения на σ-алгебру, порожденную $\mathcal{A}$.

Задача 2.6 (О цепях без Каратеодори; 2 балла).
Докажите, что для любой алгебры $\mathcal{A}$, у всякой конечно-аддитивной меры, заданной на $\mathcal{A}$, найдется некоторое конечно-аддитивное продолжение на σ-алгебру, порожденную $\mathcal{A}$.

Задача 2.7 (Равномерно к натуральным; РЕШЕНА).
Можно ли для какой-нибудь алгебры $\mathcal{A}$ над $\mathbb{N}$ и заданной на ней конечно-аддитивной меры μ со свойством $\mu(\mathbb{N})=1$, найти для μ счетно-аддитивное продолжение на σ-алгебру, порожденную этой алгеброй, причем при сдвиге любого множества $A \in \mathcal{F}$ на натуральное число n, для так полученного множества $A+n$ было выполнено: $A+n \in \mathcal{A},\ \ \mu(A+n)=\mu(A)$.

Задача 2.8 (Об индуктивном переходе; 2 балла).
Пусть $\mathcal{F}_1$ — некоторая подалгебра, определим для всех n множество $\mathcal{F}_{n+1}$ как класс всех множеств, представимых в виде счетного пересечения и счетного объединения множеств из $\mathcal{F}_n$. Докажите, что $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$ не обязано быть даже σ-алгеброй.

К Лекции 3

Задача 3.1 (О маяках; РЕШЕНА).
Пусть $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутый единичный круг с центром в начале координат. Замкнутое подмножество множества B_1 назовем рациональным кругом, если это круг, у которого координаты центра и (положительный) радиус рациональны. Маяковский перенумеровал в каком-то порядке все рациональные круги, после чего специальным фонариком стал последовательно освещать каждый из этих кругов. Укажите множество всех тех точек из B_1, которые, начиная с некоторого момента, будут затемнены навсегда.

Задача 3.2 (Не без Римана... ; РЕШЕНА).
Пусть $\mathcal{P}$ — множество простых чисел, $s>1$. Докажите формулу Эйлера

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)^{-1},$$

с помощью вероятности над $\mathbb{N}$, введенной по правилу:

$$\mathbb{P}(A) \triangleq \frac{\sum_{n\in A} n^{-s}}{\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s}} \qquad \forall A\subset\mathbb{N}.$$

Задача 3.3 (Иначе это бы не было геометрической вероятностью... ; 2 балла).
Покажите, что мера Лебега над $\mathbb{R}^m$ является мерой Хаара относительно группы движений: при любом отображении, сохраняющем расстояние, борелевское множество переходит в борелевское, а его мера не меняется.

Задача 3.4 (Иначе это бы не было геометрической вероятностью-2... ; 1 балл).
Покажите, что если некоторая вероятность $\mathbb{P}$, заданная на всех борелевских подмножествах $[0,1]^m$, инвариантна относительно движений (не меняется при любом отображении, сохраняющем расстояние); а кроме того, $\mathbb{P}\{\alpha z \,|\, z\in B\} = \alpha^m \mathbb{P}(B)$ для любых $B\in\mathfrak{B}$, $\alpha\in[0,1]$, то $\mathbb{P}$ совпадает с мерой Лебега.

К Лекции 4

Задача 4.1 (Жизнь вечна; РЕШЕНА).
Пусть дана некоторая последовательность независимых событий $A_n\in\mathcal{F}$, для которых

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty.$$

Тогда вероятность события «из событий A_n произошло лишь конечное число» равна 0.

Задача 4.2 (О распространении независимости-1; 0,8 баллов).
Верно ли, что если A, B_i независимы для любого натурального i, более того, события $A\cap B_1$, $A\cap B_2$, ..., $A\cap B_k$, ... независимы в совокупности, то для любого множества $B\in\sigma\{B_1,\dots,B_k,\dots\}$ события A и B также независимы?

Задача 4.3 (О распространении независимости-2; РЕШЕНА).
Докажите, что если две π-системы G_1, G_2 независимы, то и $\sigma(G_1)$, и $\sigma(G_2)$ также независимы.

Задача 4.4 (О распространении независимости-3; 2 балла).
Докажите, что если σ-алгебры $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\dots,\mathcal{F}_n,\dots$ независимы, то и $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\dots,\mathcal{F}_{2020},\sigma(\cup_{n>2020}\mathcal{F}_n)$ также независимы. А если σ-алгебр будет континуум?

Задача 4.5 (Об единственности на произведении двух; 1,5 баллов).
Даны Ω', Ω'', их σ-алгебры $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$ и вероятности $\mathbb{P}_1 : \mathcal{F}' \to [0,1]$, $\mathbb{P}_2 : \mathcal{F}'' \to [0,1]$. Докажите, что над $\Omega' \times \Omega''$, на σ-алгебре
$$\sigma\{A \times B \,|\, A \in \mathcal{F}', B \in \mathcal{F}''\}.$$
существует единственная вероятность $\mathbb{P}$, удовлетворяющая условиям: 1) $\mathbb{P}(A \times \Omega'') = \mathbb{P}_1(A)$ для каждого $A \in \mathcal{F}'$, 2) $\mathbb{P}(\Omega' \times B) = \mathbb{P}_2(B)$ для каждого $B \in \mathcal{F}''$, 3) σ-алгебры $\mathcal{F}' \otimes \{\varnothing, \Omega''\}$ и $\{\varnothing, \Omega'\} \otimes \mathcal{F}''$ независимы.

Задача 4.6 (Об единственности на произведении $\aleph_0$; 2,5 баллов).
Дано счетное число вероятностных пространств $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mathbb{P}_k)$. Рассмотрим над $\widetilde{\Omega} \triangleq \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_k \times \dots$ σ-алгебру $\widetilde{\mathcal{F}} \triangleq \sigma\Big(\cup_{k \in \mathbb{N}} \widetilde{\mathcal{F}}_k \Big)$, где
$$\widetilde{\mathcal{F}}_k \triangleq \{\Omega_1 \times \dots \times \Omega_{k-1} \times A \times \Omega_{k+1} \times \Omega_{k+2} \times \dots \,|\, A \in \mathcal{F}_k\} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$
Докажите, что для однозначного задания вероятности $\mathbb{P} : \bar{\mathcal{F}} \to [0,1]$ достаточно определить вероятность на σ-алгебрах $\widetilde{\mathcal{F}}_k$ правилами
$$\mathbb{P}(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_{k-1} \times A \times \Omega_{k+1} \times \Omega_{k+2} \times \dots) = \mathbb{P}_k(A) \quad \forall k \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{F}_k$$
и потребовать независимость этих σ-алгебр.

Задача 4.7 (Это на de fine; 4 балла).
Пусть Ω — множество всевозможных последовательностей $\omega = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из нулей и единиц; для каждого $n \in \mathbb{N}$ $X_n(\omega)$ — n-я координата у ω, $\mathcal{F}_n$ — σ-алгебра, порожденная первыми n координатами, то есть $\sigma(X_1, \dots, X_n)$; $\mathcal{G}_n$ — σ-алгебра, порожденная координатами, начиная с n, то есть $\sigma(X_n, \dots, X_{n+k}, \dots)$. Введем $\mathcal{F} = \sigma(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n)$ и остаточную алгебру $\mathcal{G} = \cap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$. Пусть мера $\mathbb{P}$ на $\mathcal{F}$ перестановочна, то есть для всякой перестановки s, меняющей местами конечное число координат, имеет место $\mathbb{P}(s(A)) = \mathbb{P}(A)$. Пусть также $\mathbb{P}$ на $\mathcal{G}$ тривиальна (принимает лишь значения 0 и 1). Докажите, что X_n независимы в совокупности.

К Лекции 5

Задача 5.1 (Хороших приближений мало; РЕШЕНА).
Покажите, что множество
$$\mathcal{A}_x \triangleq \{(m,n) \in \mathbb{N} \,|\, |m/n - x| < 1/n^e\}$$
конечно с вероятностью 1, если x взято наудачу с отрезка [0,1].

Задача 5.2 (Вероятность приблизить; 2,5 баллов).
Верно ли что если Ω — полное метрическое пространство, $\mathcal{F}$ — его борелевская σ-алгебра, то для всякого положительного ε найдется такой компакт K, что $\mathbb{P}(K) > 1 - \varepsilon$?

Задача 5.3 (Точно клубная задача; 6 баллов).
Пусть A_n – открытый круг радиуса $1/n$ с центром в $(\sin n, \cos n)$. Верно ли, что взятая наудачу точка единичной окружности лежит в верхнем пределе A_n с вероятностью 1?

Задача 5.4 (Это на пять; 5 баллов).
Давным-давно в одной далекой галактике студент пытался сдать зачет по терверу. За семестр он старательно ходил на пары, делал домашки и решал гробы, и своими стараниями заработал 3 балла. Для того, чтобы получить зачет, ему нужно набрать ровно 8. Но раз уж это тервер, то без вероятности и азарта тут совсем никак. Чтобы добрать себе дополнительные баллы, студент ставит на кон n баллов ($n > 0$ — действительное число, не большее чем у него есть) и получает задачу. Если он ее решает, он получает n баллов вдобавок к имеющимся. Если же нет, эти n баллов сгорают. Если у студента остается 0 баллов, он отправляется на пересдачу (которая будет через 9001 год!). Задачи довольно сложные, но студент уверен, что сможет решить любую с вероятностью $0,4$. Можете считать, что задачи он решает мгновенно, проверяются задачи мгновенно, а значит и зачет получит/не получит заведомо до пересдачи. Найдите каковы шансы студента, а значит и найдите его наилучшую стратегию.

К Лекции 6

Задача 6.1 (О нестареющих эльфах; РЕШЕНА).
Каким может быть заданное на множестве всех натуральных чисел распределение случайной величины ξ, если $\mathbb{P}(\xi > a + b \,|\, \xi > a) = \mathbb{P}(\xi > b)$ для всех натуральных a, b?

Задача 6.2 (Медиана — логистам; РЕШЕНА). Показать, что для любой дискретной случайной величины ξ и любой её медианы μ выполнено

$$\inf_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}|\xi - a| = \mathbb{E}|\xi - \mu|.$$

Задача 6.3 (Матожидание — физикам; РЕШЕНА).
Показать, что для любой дискретной случайной величины ξ, для которой существует $\mathbb{E}(\xi^2)$, выполнено

$$\inf_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}|\xi - a|^2 = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2.$$

Задача 6.4 (Все вместе — statistam; РЕШЕНА).
Показать, что для любой дискретной случайной величины ξ, для которой существует $\mathbb{E}(\xi^2)$, и любой её медианы μ выполнено

$$|\mathbb{E}\xi - \mu|^2 \le \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2.$$

Задача 6.5 (Энтропией по отрезку; 1,5 баллов. РЕШЕНА КРАСИВО, НО РЕШЕНИЕ ЧЕРЕЗ ПРОИЗВОДНЫЕ И ФУНКЦИЮ ЛАГРАНЖА ПРИНИМАЕТСЯ).
Рассмотрим всевозможные дискретные случайные величины ξ, распределенные на целых числах от 1 до 2022

1	2	3	...	2022
p_1	p_2	p_3	...	p_{2022}

Число $H(\xi) \stackrel{\triangle}{=} -\sum_i p_i \log p_i$ назовем энтропией этого распределения (считая $0\log 0 \stackrel{\triangle}{=} 0$). Найдите у таких ξ распределение с максимальной энтропией.

Задача 6.6 (Энтропией по оси; 2,5 баллов).
Рассмотрим всевозможные дискретные случайные величины ξ с $\mathbb{E}\xi = 2$, распределенные на всевозможных натуральных числах

1	2	3	4	...
p_1	p_2	p_3	p_4	...

Число $H(\xi) \stackrel{\triangle}{=} -\sum_i p_i \log p_i$ назовем энтропией этого распределения (считая $0\log 0 \stackrel{\triangle}{=} 0$). Найдите среди таких ξ распределение с максимальной энтропией.

К Лекции 7

Задача 7.1 (Главное — функционально; 2 балла).
Пусть X, Y — случайные величины. Докажите, что X — $\sigma(Y)$-измерима тогда и только тогда, когда $X = f(Y)$ для некоторой борелевской функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Задача 7.2 (Умножение дает измеримость; 2,5 баллов).
Пусть $\mathfrak{U}$ — векторное пространство ограниченных скалярных функций, содержащее единицу. Пусть всякий равномерный предел какой-либо ограниченной монотонной последовательности из $\mathfrak{U}$ также принадлежит $\mathfrak{U}$. Пусть $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{U}$ замкнуто относительно умножения. Докажите, что всякая ограниченная $\sigma(\mathfrak{C})$-измеримая функция лежит в $\mathfrak{U}$.

Задача 7.3 (От перемены мест слагаемых; 2,5 балла).
Пусть борелевская функция f от координат $x_1, \dots, x_n, \dots$ такова, что для всех $i \in \mathbb{N}$ $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \dots)$. Пусть $X_1, \dots, X_n, \dots$ — независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины. Докажите, что случайная величина $f(X_1, \dots, X_n, \dots)$ с вероятностью 1 — константа.

Задача 7.4 (Производя случайное количество; 1,5 баллов).
Для попарно независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ и независимой от них случайной величины η, принимающей натуральные значения, выполнено $\phi_{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_\eta} = \phi_\eta(\phi_{\xi_1})$.