Тест «Комплексные числа (лекция)»

Комплексным числом называется упорядоченная пара $(x, y) = z$, при этом $x = \operatorname{Re} z$ – действительная часть комплексного числа, $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа.

Множество таких пар с введенными операциями сложения и умножения образуют множество комплексных чисел, при этом ***суммой*** чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется число вида

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

произведением чисел z_1 и z_2 называется число вида

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Множество комплексных чисел обозначают $\mathbf{C}$.

Число $(0, 0)$ называется ***нулем*** и обозначается 0.

Пару (x, y) можно представить следующим образом:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y).$$

Вводя обозначения $(x, 0) = x$ и $(0, y) = iy$, получим ***алгебраическую форму*** записи комплексного числа

$$z = (x, y) = x + iy.$$

Умножим число $i = (0, 1)$ само на себя:

$$i \cdot i = (0, 1)\,(0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1.$$

Число i называют ***мнимой единицей***, для него, как показали, верно равенство $i^2 = -1$.

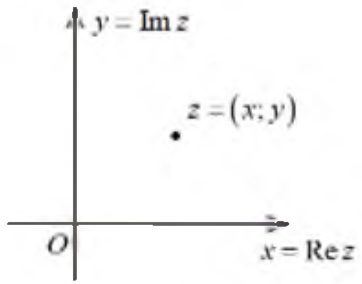
Запишите алгебраическую форму комплексного числа, если $\operatorname{Re} z = 2$, $\operatorname{Im} z = -3$

Ответ:

введите ответ

Тест «Комплексные числа (лекция)»

Комплексному числу можно поставить в соответствие точку на декартовой плоскости.



Множество этих точек назовем ***комплексной плоскостью***, ось координат Ox назовем ***действительной осью***, обозначим $\mathrm{Re}\, z$ Oy – ***мнимой осью***, обозначим $\mathrm{Im}\, z$

Модуль радиус-вектора этой точки равен

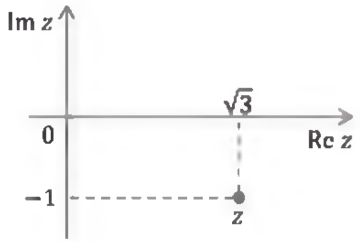
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

– называется ***модулем*** комплексного числа.

Угол, который образует радиус-вектор точки (x, y) с положительным направлением оси $\mathrm{Re}\, z$ называется ***главным значением аргумента*** числа

$$\arg z = \mathrm{arctg}\, \frac{y}{x}.$$

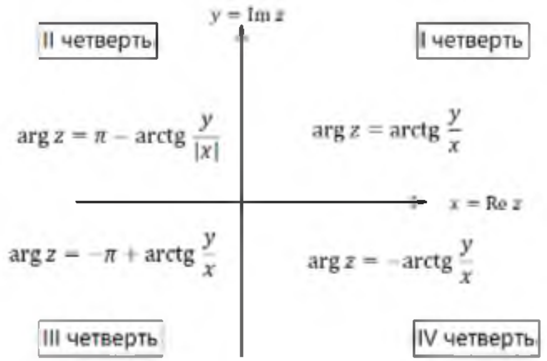
Определите модуль комплексного числа, изображенного на рисунке



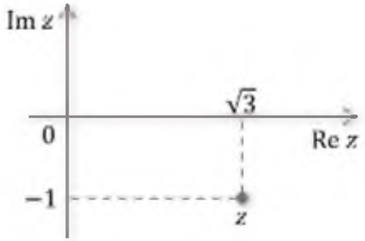
Ответ:

введите ответ

В зависимости от знаков действительной и мнимой частей числа, главное значение его аргумента определяется следующим образом



Определите главное значение аргумента комплексного числа, изображенного на рисунке



- $\varphi = -\frac{\pi}{6}$
- $\varphi = \frac{11\pi}{6}$
- $\varphi = -\frac{13\pi}{6}$
- $\varphi = \frac{\pi}{6}$

(один вариант)

Тест «Комплексные числа (лекция)»

Воспользуемся формулами, выражающими связь декартовых координат с полярными

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \text{ здесь } r = |z|, \text{ а } \varphi = \arg z.$$

Тогда

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

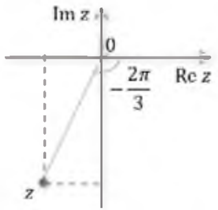
Такая форма записи комплексного числа называется ***тригонометрической.***

Заметим, что в силу 2π-периодичности функций $\cos$ и $\sin$, комплексное число можно записать в следующем виде

$$z = x + iy = r\,(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)).$$

При этом $\varphi + 2\pi k = \arg z + 2\pi k = \operatorname{Arg} z$ называется ***аргументом*** числа z.

Запишите алгебраическую форму числа, изображенного на рисунке



- $z = -1 + \sqrt{3}i$
- $z = \sqrt{3} - i$
- $z = -1 - \sqrt{3}i$
- $z = -\sqrt{3} - i$

(один вариант)

Тест «Комплексные числа (лекция)»

Воспользовавшись формулой Эйлера

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi},$$

перепишем комплексное число следующим образом

$$z = re^{i\varphi}$$

– ***показательная форма*** записи, причем верно и

$$z = re^{i(\varphi+2\pi k)}.$$

Определите показательную форму комплексного числа $z = -2$

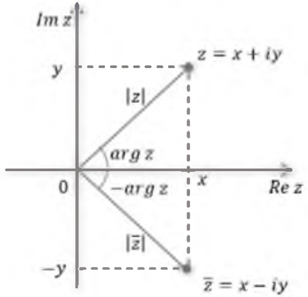
- $z = 2e^{\pi i}$
- $z = e^{-2i}$
- $z = -2e^{\pi i}$
- $z = -2e^{-\pi i}$
- $z = 2e^{-\pi i}$

(один вариант)

Тест «Комплексные числа (лекция)»

Число $\bar{z} = x - iy$ называется к***омплексно-сопряженным числа*** $z = x + iy$.
Модуль комплексно-сопряженного числа равен

$$|\bar{z}| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$



Аргумент комплексно-сопряженного числа равен

$$\arg \bar{z} = \arg(x - iy) = \operatorname{arctg} \frac{(-y)}{x} = -\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = -\arg z.$$

Запишите число $\bar{z}$, если $z = 3 - i$

Ответ:

введите ответ

Покажем, как осуществляются арифметические операции для разных форм записи комплексного числа.
Пусть

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1},\ z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2},$$

тогда

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \text{ – } \textbf{\textit{сумма}},$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1iy_2 + x_1iy_2 + x_2iy_1 =$$
$$= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \text{ – } \textbf{\textit{произведение}} \text{ чисел.}$$

Заметим, что операции выполняются аналогично сложению и умножению многочленов.
Произведение в показательной форме имеет вид:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Видим, что аргумент произведения двух комплексных числе равен сумме их аргументов.
Рассмотрим комплексно сопряженное число $z = x - iy$, заметим, что

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|.$$

Воспользовавшись этим фактом, можно определить операцию деления для комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|}.$$

В показательной и тригонометрической формах операция имеет вид

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Видим, что аргумент частного двух комплексных чисел равен разности их аргументов.

Вычислите $\frac{z_1 + 2z_2}{z_3}$, если $z_1 = 3 - i,\ z_2 = 5 + 2i,\ z_3 = 1 + i$

Ответ:

введите ответ

Тест «Комплексные числа (лекция)»

Формула Муавра Лапласа

$$z^a = |z|^a\left(\cos(a\mathrm{Arg}z) + i\sin(a\mathrm{Arg}z)\right).$$

При $a \in \mathbf{Z}$ значение z^a – единственно, при $a = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ степень z^a принимает n различных значений. При возведении в степени 2 и 3 можно воспользоваться формулами сокращенного умножения.

Примеры.

$i^3 = i \cdot (i)^2 = -i$

$i^{25} = i \cdot i^{24} = i \cdot (i^2)^{12} = i(-1)^{12} = i$

$(1-i)^3 = 1^3 - 3i + 3i^2 - i^3 = 1 - 3i - 3 + i = -2 - 2i.$

Запишите чему равно число i^{11}

Ответ:

введите ответ