

3. ИЗГИБ

Изгиб, при котором в поперечных сечениях балки нет касательных напряжений, т.е. $Q_Y = Q_Z = 0$ называется чистым. Деформация при изгибе

$\eta_x = \frac{\Delta AB}{AB} = \frac{y}{\rho}$, где y – расстояние до исследуемой точки по высоте сечения (рис. 3.1), а ρ – радиус кривизны изгиба. Характер распределения напряжений по высоте балки $\sigma_{xx} = M_z Y / J_z$. С учетом того, что кривизна $1/\rho = y'' = d^2 Y / dx^2$ соответствует понятию второй производной, соотношениям закона Гука (связи напряжений с деформациями) $\sigma_{xx} = E\varepsilon$ и $dl = \rho d\theta$, $\theta = \arctg(dy/dx)$, получим дифференциальное уравнение упругой линии балки $1/\rho(x) = y(x)'' = M_z(x)/EJ_z$.

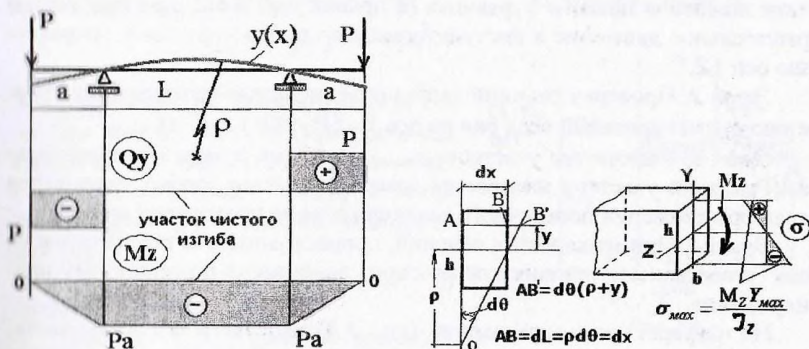


Рис. 3.1

Задача 3.1. Решение задачи на изгиб (рис. 3.2) предполагает определение реакций. Для этого размещаем оси координатной системы XY в

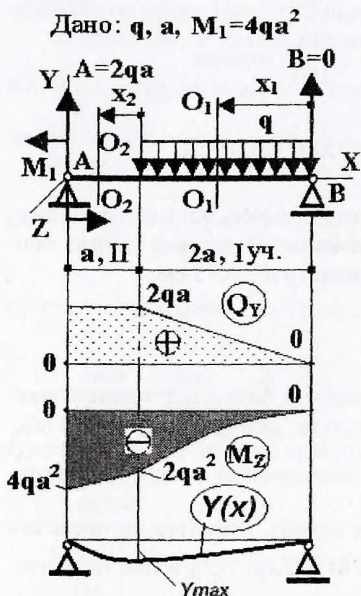


Рис. 3.2

левом крайнем сечении балки, ось X всегда направлена и совпадает с её продольной осью. Затем рисуем два вектора $R_X^A = A_x$, $R_Y^A = A$ в шарнирно-неподвижной опоре A и в шарнирно-подвижной B один вектор $R_Y^B = B$, направив их по осям. Истинное направление векторов устанавливается после решения уравнений статики.

Итак, выполним *этап 1*. Для определения реакций в системе координат XYZ приведем распределенную нагрузку q к сосредоточенной силе $2qa$, которая приложена к центру тяжести площади прямоугольника длиной $2a$ и высотой q . Сумма проекций всех сил на ось X $\sum P_{ix} = 0 = R_X^A = A_x$, так как сил вдоль оси X нет. Из уравнения суммы моментов $\sum M_{iz}^A = 0 = +R_Y^B 3a - 2qa \cdot 2a + M_1$ находим $R_Y^B = 0$. Из уравнения $\sum M_{iz}^B = 0 =$

$= -R_Y^A 3a + 2qa \cdot a + M_1$ следует, что $R_Y^A = A = 2qa$. Запись $\sum M_{iz}^A$ означает, что ищется сумма моментов M_i от сил, вращающих тело относительно оси Z , проходящей через точку A . Положительным считается направление вращения правого буравчика (с правой нарезкой), преобразующее вращательное движение в поступательное по положительному направлению оси $+Z$.

Этап 2. Проверку реакций выполняем по незадействованному уравнению суммы проекций всех сил на ось Y $\sum P_{iy} = 0 = +A - 2qa$.

Этап 3. Количество участков: $n_{\text{гранц}} - 1 = 2$, их нумерация произвольна. (Границей участков называется резкое изменение любых параметров балки при движении поперечного сечения вдоль ее продольной линии.)

Этап 4. Применяя метод сечений, прорисовываем оставшиеся части тела и составляем условия статического равновесия по принятому правилу знаков.

На трафарете «правила знаков» (рис. 3.3) закрываем его левую часть, ту, которая совпадает с мысленным сечением O_1-O_1 первого участка. Затем по стрелкам видимой части трафаретов Q_y и M_z (справа) записыва-

ем условия равновесия для I участка (рис. 3.3):

I уч., $0 \leq x_1 \leq 2a$:

$$Q_Y = +qx_1 \begin{cases} x_1 = 0, & Q_Y = 0, \\ x_1 = 2a, & Q_Y = 2qa; \end{cases} \quad M_Z = -qx_1 x_1 / 2 \begin{cases} x_1 = 0, & M_Z = 0, \\ x_1 = 2a, & M_Z = -2qa^2. \end{cases}$$

I участок, $0 \leq x_1 \leq 2a$



Рис. 3.3

Повторяем эту процедуру для II участка (рис. 3.4). По стрелкам справа у трафаретов Q_Y и M_Z (так как левая часть O_1-O_2 закрывается) записываем выражения для внутренних усилий:

$$\text{II уч., } 0 \leq x_2 \leq a: \begin{cases} x_2 = 0, & Q_Y = 2qa, \\ x_2 = a, & Q_Y = 2qa; \end{cases}$$

$$M_Z = -2qa \cdot (a+x_1) \begin{cases} x_2 = 0, & M_Z = -2qa^2, \\ x_2 = a, & M_Z = -4qa^2. \end{cases}$$

II участок, $0 \leq x_2 \leq a$

Здесь приведенная сосредоточенная сила $2qa$ направлена вниз, расположена справа от мысленного сечения, соответствует направлению правой стрелки на трафарете Q_Y . Подобное повторяем для M_Z .

Этап 5. Чертим эпюры (рис. 3.2) согласно расчетам.

Этап 6. Выполняем по правилам проверку эпюр. Так, эпюра Q_Y положительна, следовательно, значение момента должно расти слева-направо, что и наблюдается. Разрыв (скачок) на

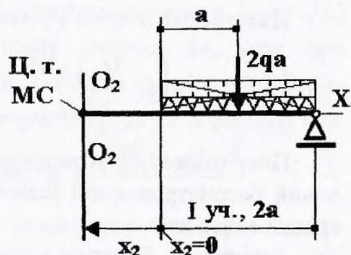


Рис. 3.4

эпюре Q_y равен реакции $R_y^A = A$, а на эпюре M_z – моменту $M_1 = -4qa^2$. Выпуклость эпюры M_z балки на участке I направлена навстречу нагрузке q .

Этап 7. Опасным на эпюре изгибающего момента M_z на участке II является сечение у левой опоры A , в котором $M_z^{\max} = -4qa^2$.

Этап 8. Условие прочности (максимальные напряжения не превышают допускаемые $[\sigma]$) имеет вид

$$\sigma^{\max} = M_z^{\max} / W_z \leq [\sigma],$$

где $W_z = \frac{J_z}{y^{\max}} = \frac{bh^2}{6}$ – момент сопротивления, m^3 ;

$$J_z = \int_F y^2 dF = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy \Big|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{bh^3}{12}, m^4$$
 – осевой момент инерции вокруг

оси z прямоугольного $h \times b$ поперечного сечения (рис. 3.1); высота h перпендикулярна оси z . Зная отношение h/b можно найти размеры сечения.

Например, при $h/b = 2$ $W_z = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3}$, откуда $b \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot M_z^{\max}}{2[\sigma]}}$.

Этап 9. Построение упругой линии (эпюры перемещений). Интегрируя первый раз дифференциальное уравнение упругой линии балки

$$y'' = \frac{M_z(x)}{EJ_z}$$
 по координате x , распространяющейся на всю длину балки,

получаем уравнение углов поворота $\Theta(x)$ ее сечений

$$\Theta(x) = y'(x) = \int_{L_i} \frac{M_z(x) dx}{EJ_z} + C_1.$$

Интегрируя второй – уравнение прогибов

$$y(x) = \int_{L_i} \left(\int_{L_i} \frac{M_z(x) dx}{EJ_z} + C_1 \right) dx = \int_{L_i} dx \int_{L_i} \frac{M_z(x) dx}{EJ_z} + C_1 x + C_2.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий рассматриваемой балки. Особенности решения покажем на конкретном примере.

Решение. 1. Впишем в правое концевое сечение балки B систему координат Y, X (рис. 3.5).

2. Разделим балку на участки и пронумеруем их от начала отсчета системы.

3. Мысленным сечением выделим оставшуюся часть балки на расстоянии x от начала координат на I участке (рис. 3.5) до сечения O_1-O_1 . Найдем для этой части изгибающий момент $M_Z(x) = -qx^2/2$ (участок I), используя правило знаков по трафарету (реакция B равна нулю). Для сечения x , расположенного на расстоянии, большем $2a$ (II участок, сечение O_2-O_2), момент $M_Z(x)$ будет равен

$$M_Z(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{q^{\text{фикт}}(x-2a)^2}{2}.$$

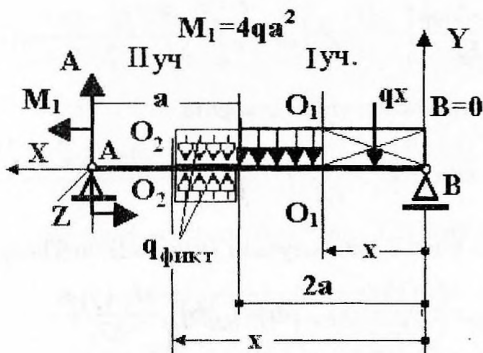


Рис. 3.5

Для интегрирования функции моментов $M_Z(x)$, как единой для всех участков, нужно её соответственно преобразовать. Для этого запись момента $M_Z(x)$ для участка I на длине до $x \leq 2a$ менять не нужно, так как она составлена правильно. Однако на II участке слагаемое $(-qx^2/2)$ продолжает действие нагрузки q за длину участка $2a$, хотя при $x > 2a$ нагрузки нет. Чтобы ликвидировать действие члена $(-qx^2/2)$ на II участке (рис. 3.5), прикладывают фиктивную нагрузку с обратным знаком $q^{\text{фикт}} = -q$ при $x > 2a$ в виде компоненты $+\frac{q^{\text{фикт}}(x-2a)^2}{2}$.

В уравнение моментов $M_Z(x)$ входят только нагрузки, находящиеся до мысленного сечения последнего участка (у нас это O_2-O_2). Момент M_1 и реакция A не войдут, их действие учтено при расчёте реакций.

4. Запишем дифференциальное уравнение упругой линии балки для полученного выражения моментов

$$y(x)'' = \frac{M_z(x)}{EJ_Z} = \frac{1}{EJ_Z} \left(-\frac{qx^2}{2} \Big|_{\text{учI}} + \frac{q^{\text{фигт}}(x-2a)^2}{2} \Big|_{\text{учII}} \right).$$

Интегрируя это уравнение, не раскрывая скобок (по dx от нуля до x и по $d(x-a)$ от нуля до $(x-a)$), получаем уравнение углов поворота $\Theta(x)$ сечений балки

$$\Theta(x) = y'(x) = C_1 + \int_{Li} \frac{M_z(x) dx}{EJ_Z} \quad \text{или}$$

$$y'(x) = C_1 + \frac{1}{EJ_Z} \left(\int_0^x -\frac{qx^2}{2} dx \Big|_{\text{учI}} + \int_0^{(x-2a)} \frac{q^{\text{фигт}}(x-2a)^2}{2} d(x-2a) \Big|_{\text{учII}} \right)$$

и окончательно уравнение углов поворота

$$y'(x) = \Theta(x) = C_1 + \frac{1}{EJ_Z} \left(-\frac{qx^3}{3!} \Big|_{\text{учI}} + \frac{q^{\text{фигт}} \cdot (x-2a)^3}{3!} \Big|_{\text{учII}} \right).$$

Интегрируя второй раз, получаем уравнение прогибов балки

$$y(x) = \int_{Li} \left(\int_{Li} \frac{M_z(x) dx}{EJ_Z} + C_1 \right) dx = \int_{Li} dx \int_{Li} \frac{M_z(x) dx}{EJ_Z} + C_1 x + C_2 \quad \text{или}$$

$$y(x) = C_1 x + C_2 + \frac{1}{EJ_Z} \left(\int_0^x -\frac{qx^3}{3!} dx \Big|_{\text{учI}} + \int_0^{(x-a)} \frac{q^{\text{фигт}} \cdot (x-2a)^3}{3!} d(x-a) \Big|_{\text{учII}} \right),$$

которое примет вид

$$y(x) = C_1 x + C_2 + \frac{1}{EJ_Z} \left(-\frac{qx^4}{4!} \Big|_{\text{учI}} + \frac{q^{\text{фигт}}(x-2a)^4}{4!} \Big|_{\text{учII}} \right). \quad (3.1)$$

Согласно теории, $C_1 = y'(x_0) = \Theta(x_0)$, или $C_1 = y'_0 = \Theta_0$ – первая постоянная интегрирования, соответствующая углу поворота поперечного сечения при $x_0 = x_{\text{нач}}$. В системе координат XU значение $x_{\text{нач}}$ – начальное смещение искомой функции $y(x)$ относительно начала координат. В данном случае $x_0 = x_{\text{нач}} = 0$, так как смещения нет. Вторая постоянная интегрирования $C_2 = y(x_0) = y_0$ соответствует вертикальному перемещению поперечного сечения при $x_0 = x_{\text{нач}} = 0$.

Рассматривая балку, прогибы которой описываются искомой функцией $y(x)$ – уравнением, отражающим физику процесса деформирования,

обратим внимание на опоры, которые неподвижны по вертикали и служат для фиксирования тела балки в пространстве. Видно, что при $x_0 = 0$ опора *В* не может перемещаться по *Y* и аналогично при $x = l_{\text{балки}} = 3a$ опора *А* перемещаться так же не может и $y(x=3a) = y_A = y_l = 0$. Следовательно, из уравнения (3.1) можно найти неизвестный начальный угол поворота $C_1 = \Theta_0$ при $x = l_{\text{балки}} = 3a$. Тогда

$$y(x=3a) = y_l = 0 = \Theta_0(3a) + 0 + \frac{1}{EJ_Z} \left(-\frac{q(3a)^4}{4!} \Big|_{\text{учI}} + \frac{q^{\text{фигт}}(3a-2a)^4}{4!} \Big|_{\text{учII}} \right).$$

Откуда $\Theta_0 = -\frac{1}{EJ_Z(3a)} \left(-\frac{81qa^4}{24} \Big|_{\text{учI}} + \frac{qa^4}{24} \Big|_{\text{учII}} \right) = \frac{80qa^3}{72EJ_Z}$ и уравнение прогибов примет вид

$$y(x) = \left(\frac{80qa^3}{72EJ_Z} \right) x + \frac{1}{EJ_Z} \left(-\frac{qx^4}{4!} \Big|_{\text{учI}} + \frac{q^{\text{фигт}} \cdot (x-2a)^4}{4!} \Big|_{\text{учII}} \right). \quad (3.2)$$

Для составления графика прогибов (рис. 3.2) заполняют таблицу расчетных данных

| <i>X</i> | 0 | 0,5 <i>a</i> | <i>a</i> | 1,5 <i>a</i> | 2 <i>a</i> | 2,5 <i>a</i> | 3 <i>a</i> |
|-------------|---|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|------------|
| <i>y(x)</i> | 0 | $0,553 \frac{qa^4}{EJ_Z}$ | $1,069 \frac{qa^4}{EJ_Z}$ | $1,456 \frac{qa^4}{EJ_Z}$ | $1,556 \frac{qa^4}{EJ_Z}$ | $1,153 \frac{qa^4}{EJ_Z}$ | 0 |

Особое внимание нужно обратить на то, что слагаемые уравнения (3.2), включающие разности значений $(x-2a)$ и т.п., могут быть только положительными. Члены уравнения (3.2), имеющие отрицательную разность (или равные нулю), в него не включаются. То есть это уравнение при решении содержит разное количество слагаемых. Например, при определении $y(x)$ и $\Theta(x)$ для мысленного сечения O_1-O_1 в уравнении (3.2) сохраняется только первое слагаемое, а второе слагаемое $q^{\text{фигт}}$ относится к отброшенной части тела и не изгибает балку, т.е. не работает и не имеет физического смысла. Максимальный прогиб балки находится на границе участков, более точно значение находят при уточненных расчетах. Условием жесткости является выполнение неравенства

$$y(x)^{\text{max}} = 1,556 \frac{qa^4}{EJ_Z} \leq [y] = \frac{l_{\text{балки}}}{500}, \text{ м.}$$

Здесь $[y]$ – допускаемый прогиб балки, а $l_{\text{балки}}$ – длина балки. Число в знаменателе зависит от назначения балки и меняется от 250 до 1000.

Задача 3.2. Дано: стальная двутавровая балка на двух опорах постоянного поперечного сечения; $P_1 = 50$ кН; $P_2 = 30$ кН; $M = 100$ кНм; $q_1 = 3$ кН/м; $q_2 = 2$ кН/м; $a = 4$ м; $b = 2$ м; $c = 2$ м; $d = 1$ м; $[\sigma] = 160$ МПа; $[\tau] = 80$ МПа.

Требуется подобрать номер двутавра, построить упругую линию балки, проверить жесткость.

Решение. Расчетная схема балки представлена на рис. 3.6.

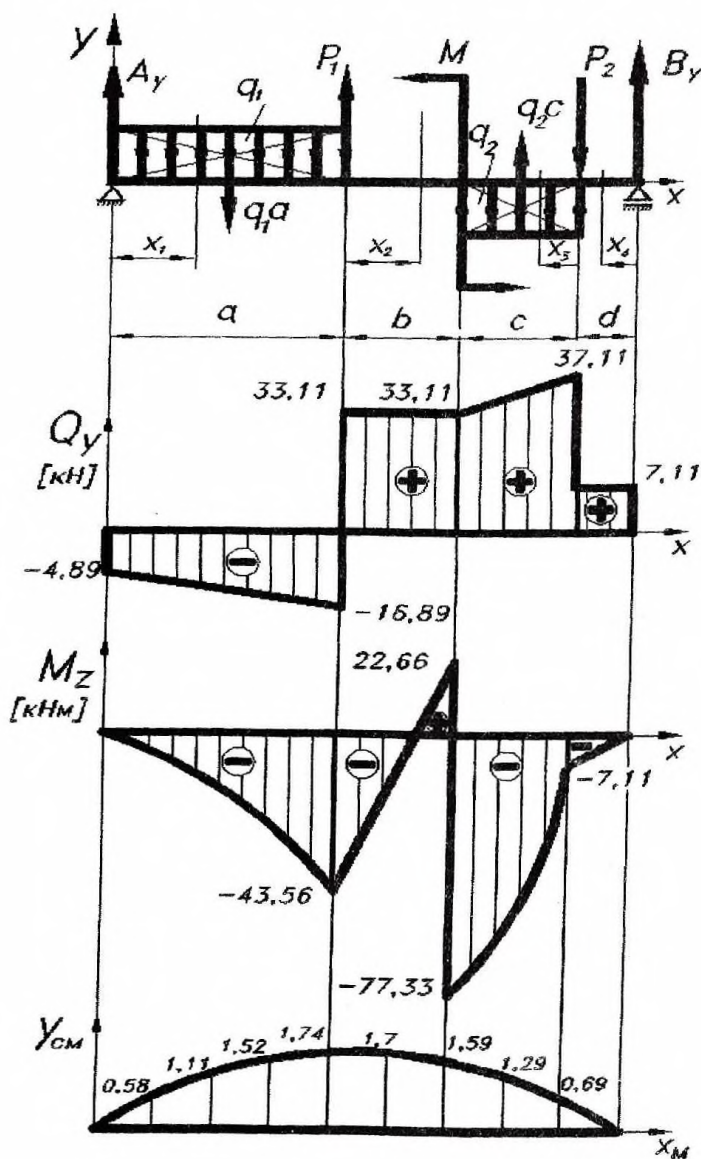


Рис. 3.6

1. Определим реакции опорных устройств из уравнений равновесия: сумма проекций всех сил на ось y равна нулю и сумма моментов всех внешних сил относительно оси z в точке A равна нулю, или $\sum P_y = 0$, $\sum M_{zA} = 0$:

$$\sum P_y = 0 = A_y + B_y - q_1 a + q_2 c - P_2 + P_1 \quad \text{и}$$

$$\sum M_{zA} = 0 = -q_1 a(a/2) + P_1 a + M + q_2 c(a+b+c/2) - P_2(a+b+c) + B_y(a+b+c+d).$$

Обозначим $a+b+c+d=l$. Из этих формул найдем реакции, подставив численные значения: $A_y = -4,89 \text{ кН}$, $B_y = -7,11 \text{ кН}$.

2. Эпюры изгибающего момента $M_z(x)$ и поперечной силы $Q_y(x)$ строим методом сечений. Балку разбиваем на четыре участка (рис. 3.7). Для изгибающего момента применим следующее правило знаков: момент $M_z(x)$ в произвольном сечении считается положительным, если он приводит к положительной кривизне оси балки по отношению к рассматриваемому сечению с координатой x («веселая улыбка»), и отрицательным в противном случае («грустная улыбка») (см. рис. 3.7,а). Поперечная сила Q_y в произвольном сечении положительна, если внешняя сила слева от сечения направлена вверх, а справа от него вниз. На рис. 3.7,б силы A_y и P направлены вверх и поперечная сила от них будет положительна, а, например, от $q_1 a$ — отрицательна.

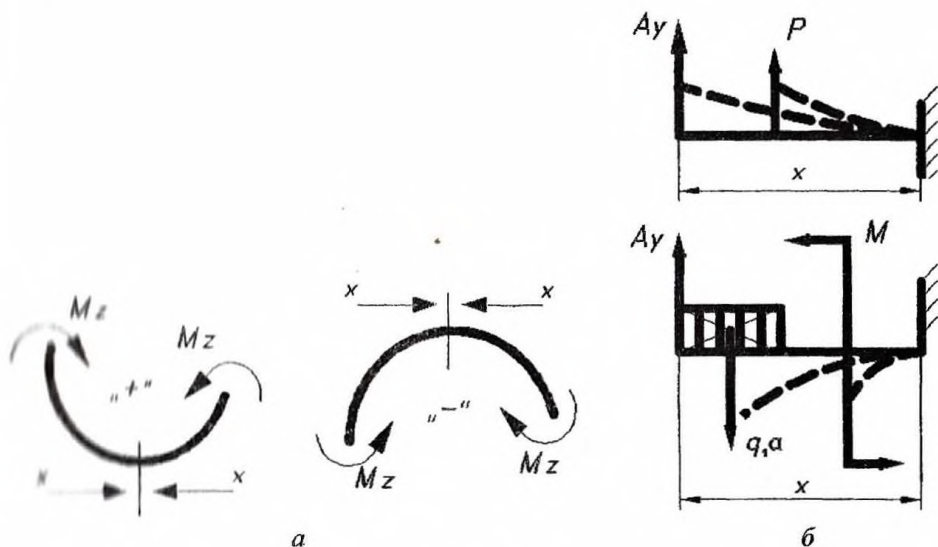


Рис. 3.7

I участок: $0 \leq x_1 \leq a = 4 \text{ м}$ (рис. 3.6, $A_y = -4,89 \text{ кН}$)

$$Q_{y1} = A_y - q_1 x_1;$$

$$Q_{y1} \Big|_{x_1=0} = -4,89 \text{ кН};$$

$$Q_{y1} \Big|_{x_1=4\text{м}} = -16,89 \text{ кН}.$$

Это уравнение линейной функции, поэтому для построения эпюры необходимо вычислить ее значения для двух сечений балки, обычно в начале (от опоры A) и конце участка с q_1 . Функция изгибающего момента на порядок выше, согласно дифференциальной зависимости

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y, \quad M_{z1}(x) = A_y x_1 - \frac{q_1 x_1^2}{2}$$

— это квадратичная парабола. При $x_1 = 0$ $M_{z1}(x) \Big|_{x_1=0} = 0$ и при $x_1 = a = 4 \text{ м}$ $M_{z1}(x) \Big|_{x_1=4\text{м}} = -43,56 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Вычислим вторую производную от функции момента, чтобы определить, куда будет направлена выпуклость. $M''_{z1} = -q_1 < 0$, следовательно, выпуклость направлена вверх, навстречу распределенной нагрузке.

II участок: $0 \leq x_2 \leq b = 2 \text{ м}$ (рис. 3.6, часть слева)

$$Q_{y2} = A_y - q_1 a + P_1 = 33,11 \text{ кН};$$

$$M_{z2} = A_y(a + x_2) - q_1 a(a/2 + x_2) + P_1 x_2;$$

$$M_{z2} \Big|_0 = -43,56 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{z2} \Big|_{2\text{м}} = +22,66 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

III участок: $0 \leq x_3 \leq c = 2 \text{ м}$ (рис. 3.6, часть справа, $B_y = -7,11 \text{ кН}$)

$$Q_{y3} = -B_y + P_2 - q_2 x_3; \quad Q_{y3} \Big|_0 = 37,11 \text{ кН};$$

$$Q_{y3} \Big|_{x_3=2\text{м}} = 33,11 \text{ кН};$$

$$M_{z3} = B_y(d + x_3) - P_2 x_3 + q_2 x_3^2 / 2.$$

Это уравнение квадратичной параболы. Найдем ее значения в начале и в конце участка: $M_{z3} \Big|_0 = -7,11 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_{z3} \Big|_{x_3=2\text{м}} = -77,33 \text{ кН} \cdot \text{м}$, а также исследуем функцию на экстремум. Для этого первую производную $\frac{dM_z}{dx} = Q_y$ приравняем к нулю:

$$M'_{z3} = B_y - P_2 + q_2 x_3 = -Q_{y3} = 0.$$

Отсюда следует, что $x_3 = 37,11/2 = 18,55 \text{ м}$. Это значение x выходит за границы III участка, значит, экстремума в пределах участка нет. На это

указывает и график $Q_3(x)$, который не пересекает нулевую ось и не имеет значений, равных нулю.

VI участок: $0 \leq x_4 \leq d = 1$ м (рис. 3.6, часть справа, $B_y = -7,11$ кН). Уравнение поперечной силы имеет вид $Q_{y4} = -B_y = 7,11$ кН, а изгибающих моментов $M_{Z4} = B_y x_4$, откуда $M_{Z4}|_0 = 0$; $M_{Z4}|_{x_4=1\text{м}} = -7,11$ кН·м.

Проверим эпюры. Необходимым условием правильности построения эпюр является совпадение скачков (разрывов функций) с сечениями приложения сосредоточенных внешних сил и сосредоточенных внешних моментов для эпюры изгибающего момента. Это условие выполняется (рис. 3.6). Площади эпюр $Q_j(x)_i$ на каждом участке равны перепаду значений $\Delta M_Z(x)_i$. Например, площадь эпюры $Q_j(x)_i$ II участка равна 66,22 кНм и соответственно равна разрыву значений $\Delta M_Z(x)_i = -43,56 + 22,66$ кНм. Для III участка $Q_j(x)_3 = \frac{(37,11 + 33,11) \cdot 2}{2} = 70,22$ кНм, что равно $\Delta M_Z(x)_i = 77,33 - 7,11$ кНм.

3. Подбор номера двутавра из условия прочности

$$[\sigma]_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_Z} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \frac{|M|_{\max}}{W_Z} \leq [\sigma]. \quad (3.3)$$

Отсюда $W_Z \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{77,33 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 483,3 \text{ см}^3$, где W_Z — момент сопротивления изгибу; $|M|_{\max}$ — максимальное значение (по абсолютной величине) изгибающего момента, которое выбираем из эпюры (см. рис. 3.6).

По таблицам сортамента прокатной стали находим профиль двутавра, у которого момент сопротивления изгибу наиболее близок к вычисленному значению, подставляем в формулу (3.3) и рассчитываем коэффициент перенапряжения η (или недонапряжения, в зависимости от знака). Если этот коэффициент не превышает 5%, то расчет может быть закончен.

Из таблицы сортаментов выбираем двутавр №30 с $W_Z = 472 \text{ см}^3$. Проверим $[\sigma]_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_Z} = \frac{77330}{472 \cdot 10^6} = 163,83 \text{ МПа}$; $\eta = \frac{163,83 - 160}{160} 100\% = 2,3\%$, что меньше 5%, следовательно, двутавр №30 удовлетворяет условию прочности.

Для этого двутавра из этой же таблицы выписываем значение осевого момента инерции сечения $J_Z = 7080 \text{ см}^4$.

4. Для построения упругой линии балки запишем ее уравнение, используя универсальное уравнение упругой линии. При построении будем придерживаться следующих правил:

- выберем начало координат в крайнем левом сечении балки — ось x вдоль оси балки, а ось y вертикально вверх;

- уравнение составляется для произвольного сечения с координатой x последнего участка балки для всех нагрузок, лежащих слева от сечения;

- правило знаков перед слагаемыми в уравнении совпадает с правилом знаков для изгибающего момента, т.е. если по отношению к сечению с координатой x нагрузка изгибает балку в виде «веселой улыбки» (положительная кривизна), то знак перед слагаемым «+», а если в виде «грустной улыбки» (отрицательная кривизна), то знак «-» (см. рис. 3.7, а, б). Например, A_y и P создают положительную кривизну, и слагаемые с их участием войдут в уравнение со знаком «+»; распределенная нагрузка q_1 и M — отрицательную кривизну, и члены с их участием войдут в уравнение со знаком «-»;

- уравнение составляем последовательно слева направо по участкам, не пропуская ни одной нагрузки;

- для определения начальных параметров y_0 и θ_0 воспользуемся граничными условиями (ГУ) — условиями закрепления балки. В нашем случае ГУ: а) при $x=0$ $y(0)=y_0=0$; б) при $x=l$ $y(l)=y_l=0$, где $l=(a+b+c+d)=4+2+2+1=9$ м — длина всей балки,

$$EJ_Z y(x) = EJ_Z y_0 + EJ_Z \theta_0 x + \frac{A_y x^3}{3!} - \frac{q_1 x^4}{4!} \Big|_I + \frac{q_1^\Phi (x-a)^4}{4!} + \frac{P_1 (x-a)^3}{3!} \Big|_{II} - \frac{M(x-a-b)^2}{2!} + \frac{q_2 (x-a-b)^4}{4!} \Big|_{III} - \frac{q_2^\Phi (x-a-b-c)^4}{4!} - \frac{P_2 (x-a-b-c)^3}{3!} \Big|_{IV} \quad (3.4)$$

Из условия «а» следует, что $y_0=0$, так как соответствует положению опоры А. Вычислим θ_0 — угол поворота в начале координат. Для этого в уравнение (3.4) вместо x подставим $l=9$ м, а также все численные значения и приравняем левую часть уравнения нулю (опора В), тогда

$$0 = EJ_Z \theta_0 9 - 4,89 \cdot \frac{9^3}{6} - 3 \cdot \frac{9^4}{24} + 3 \cdot \frac{5^4}{24} + 50 \cdot \frac{5^3}{6} - 100 \cdot \frac{3^2}{2} + 2 \cdot \frac{3^4}{24} - \frac{2}{24} - \frac{30}{6}.$$

Отсюда следует, что $EJ_Z \theta_0 = \frac{742,8}{9} = 82,533 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$. Если $\theta_0 > 0$, то сече-

ние над левой опорой (начало координат) повернется против часовой стрелки. Теперь будем определять прогибы балки через каждый метр и по полученным точкам строить упругую линию. Если координата сечения ≤ 4 м, т.е. в пределах I участка, то

$$EJ_Z y(x) = 82,533 \cdot x - \frac{4,89}{6} x^3 - \frac{3}{24} x^4; \quad EJ_Z y(x) \Big|_{x=1\text{м}} = 82,533 \cdot 1 - \frac{4,89}{6} - \frac{3}{24}$$

или $y|_{x=1\text{м}} = \frac{(82,533 - 0,94) \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = 0,0058 \text{ м} = 0,58 \text{ см}$. При $x = 2 \text{ м}$

$y|_{x=2\text{м}} = 0,0111 \text{ м} = 1,11 \text{ см}$ и так далее: $y|_{x=3\text{м}} = \frac{215,469}{14160} = 1,52 \text{ см}$;

$y|_{x=4\text{м}} = \frac{245,972}{14160} = 1,74 \text{ см}$. В уравнениях учитываются только слагаемые разности длин, большие нуля и не равные нулю.

Для сечений II участка используем

$$EJ_Z y(x) = 82,533 \cdot x - \frac{4,89}{6} x^3 - \frac{3}{24} x^4 + \frac{50}{6} (x-4)^3 + \frac{3}{24} (x-4)^4.$$

Например, при $x = 5 \text{ м}$ $EJ_Z y(5) = 82,533 \cdot 5 - \frac{4,89}{6} 5^3 - \frac{3}{24} 5^4 + \frac{50}{6} + \frac{3}{24}$;

$y(5) = \frac{241,123}{14160} = 1,7 \text{ см}$; $y(6) = \frac{225,825}{14160} = 1,59 \text{ см}$.

Для сечений III участка:

$$EJ_Z y(x) = 82,533 \cdot x - \frac{4,89}{6} x^3 - \frac{3}{24} x^4 + \frac{50}{6} x^3 + \frac{3}{24} (x-4)^4 - \frac{100}{2} (x-6)^2 + \frac{2}{24} (x-6)^4.$$

При $x = 7 \text{ м}$ $EJ_Z y(x) = 82,533 \cdot 7 - \frac{4,89}{6} 7^3 - \frac{3}{24} 7^4 + \frac{50}{6} 7^3 + \frac{3}{24} 1^4 - \frac{100}{2} 1^2 + \frac{2}{24} 1^4$; $y(7) = \frac{183,269}{14160} = 1,29 \text{ см}$; $y(8) = \frac{97,651}{14160} = 0,69 \text{ см}$.

Для сечений IV участка используем все члены уравнения (3.4), тогда $y(9) = 0$, что соответствует граничному условию «б».

Сведем результаты вычислений в таблицу и построим по точкам упругую линию (см. рис. 3.6).

| $x, \text{ м}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--------------------|------|------|------|------|-----|------|------|------|---|
| $y(x), \text{ см}$ | 0,58 | 1,11 | 1,52 | 1,74 | 1,7 | 1,59 | 1,29 | 0,69 | 0 |

Из таблицы видно, что максимальный прогиб $y_{\max} = 1,74 \text{ см}$ балка имеет при $x = 4 \text{ м}$. Согласно условию жесткости для стальных балок

$|y|_{\max} \leq [y] = \frac{l}{250}$, в нашем случае $[y] = \frac{l}{250} = \frac{9}{250} = 3,6 \text{ см}$, т.е. условие

жесткости выполняется и расчет может быть закончен.

Задача 3.3. Балка, нагруженная сосредоточенной силой P и равномерно распределенной нагрузкой q , шарнирно оперта по краям (рис. 3.8). Вид поперечного сечения для каждого участка a_i показан на рисунке.

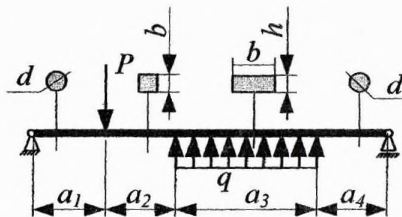


Рис. 3.8

Требуется построить эпюры внутренних усилий (поперечной силы Q и изгибающего момента M) и эпюру максимальных нормальных напряжений.

Решение. 1. Определение реакций. Поскольку свободного конца у данной балки нет (в отличие от консольно-зашемленной балки), необходимо найти реакции опор. После того, как реакции опор станут известны, сами опоры можно будет исключить из задачи, заменив их влияние найденными реакциями. Силовая схема для определения реакций приведена на рис. 3.9 (направление реакций назначаем произвольно).

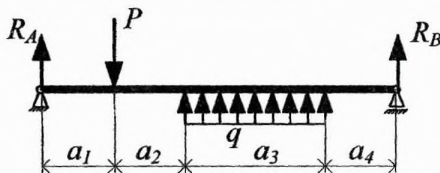


Рис. 3.9

Уравнения равновесия имеют следующий вид:

$\sum P_i = R_A - P + qa_3 + R_B = 0$ – сумма сил, действующих на балку, на вертикальную ось Y ;

$$\sum_{i=1}^{n=3} M_{Zi}^A = -Pa_1 + qa_3 \left(a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2} \right) + R_B (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 0 \quad \text{– сумма}$$

моментов всех сил относительно опоры A . При этом в качестве положительного направления момента принято направление поворота балки (как твердого тела) против часовой стрелки относительно опоры A (ось Z на нас). Из последнего уравнения получаем

$$R_B = \frac{Pa_1 - qa_3 \left(a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2} \right)}{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)},$$

а из первого уравнения значение реакции R_A :

$$R_A = P - qa_3 - \frac{Pa_1 - qa_3 \left(a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2} \right)}{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)} =$$

$$= P \frac{a_2 + a_3 + a_4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} - qa_3 \frac{\frac{a_3}{2} + a_4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}.$$

2. Проверка реакций. Обычно для проверки используют незадействованное уравнение статики. В данном случае таковым будет уравнение суммы моментов относительно опоры В:

$$\sum_{i=1}^n M_{Bi}^H = 0 = -R_A (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + P(a_2 + a_3 + a_4) - qa_3 \left(\frac{a_3}{2} + a_4 \right).$$

Если уравнение соблюдается, значения реакций найдены правильно и переходят к решению следующего этапа расчетов.

3. Выполним нумерацию участков, начиная от левой опоры балки.

4. Применим метод сечений. В произвольном сечении x мысленно отсечем участок, тогда для I участка получим расчетную схему, приведенную на рис. 3.10. Там же показана правая система координат в сечении. Внутренние усилия направляем в положительном направлении осей этой системы координат. К отсеченному кусочку прикладываем все действующие на него внешние силы (в данном случае это реакция опоры R_A).

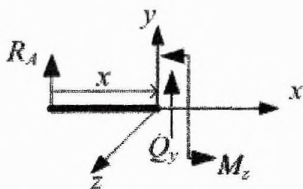


Рис. 3.10

Уравнения равновесия для отсеченного участка имеют следующий вид:

$R_A + Q_y^I = 0$ – сумма сил в проекции на ось y , действующих на участок;

$-R_A x + M_z^I = 0$ – сумма моментов всех сил относительно сечения x .

Откуда получаем $Q_y^I = -R_A$ и $M_z^I = R_A x$.

II участок. Выполним сечение на произвольном x II участка (рис. 3.11). Уравнения равновесия для II участка:

$R_A - P + Q_y^{II} = 0$ – сумма сил в проекции на ось y , действующих на участок;

$-R_A (x + a_1) + Px + M_z^{II} = 0$ – сумма моментов всех сил относительно сечения x .

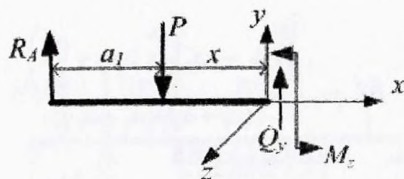


Рис. 3.11

Соответственно внутренние усилия на II участке $Q_y^{\text{II}} = P - R_A$ и $M_z^{\text{II}} = R_A(x + a_1) - Px$.

Для произвольного сечения на III участке (рис. 3.12) уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} R_A - P + qx + Q_y^{\text{III}} &= 0, \\ -R_A(x + a_1 + a_2) + P(x + a_2) - \frac{qx^2}{2} + M_z^{\text{III}} &= 0. \end{aligned}$$

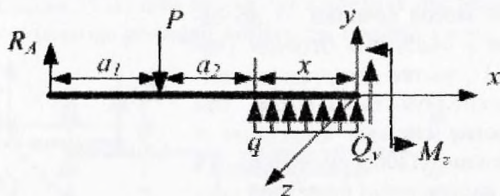


Рис. 3.12

Внутренние усилия на III участке

$$Q_y^{\text{III}} = P - R_A - qx \quad \text{и} \quad M_z^{\text{III}} = R_A(x + a_1 + a_2) - P(x + a_2) + \frac{qx^2}{2}.$$

Для последнего IV участка расчетная схема приведена на рис. 3.13.

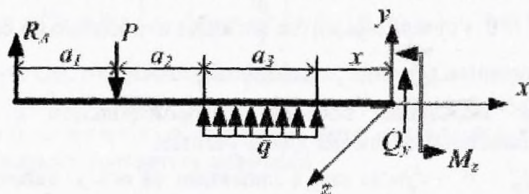


Рис. 3.13

Уравнения равновесия:

$$R_A - P + qa_3 + Q_y^{\text{IV}} = 0,$$

$$R_A(a_1 + a_2 + a_3 + x) + P(a_2 + a_3 + x) - qa_3\left(\frac{a_3}{2} + x\right) + M_z^{IV} = 0.$$

Внутренние усилия на IV участке

$$Q_y^{IV} = P - R_A - qa_3 \quad \text{и}$$

$$M_z^{IV} = R_A(x + a_1 + a_2 + a_3) - P(x + a_2 + a_3) + qa_3(a_3/2 + x).$$

Все зависимости для построения эпюр внутренних усилий получены. Пусть $P = 10 \text{ кН}$, $q = 5 \text{ кН/м}$, $a_1 = 0,5 \text{ м}$, $a_2 = 0,5 \text{ м}$, $a_3 = 1 \text{ м}$, $a_4 = 1 \text{ м}$, тогда $R_A = 5833 \text{ Н}$, $R_B = -833 \text{ Н}$ (знак «-» у реакции R_B указывает, что ее истинное направление противоположно выбранному на рис. 3.9).

Эпюры внутренних усилий приведены на рис. 3.14.

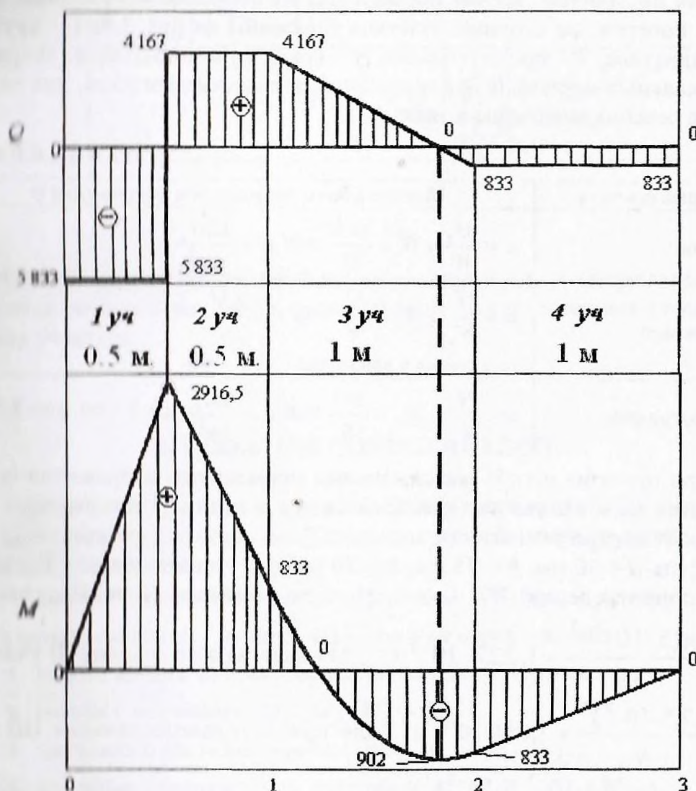


Рис. 3.14

Сечение с максимальным (по абсолютной величине) значением изгибающего момента на III участке можно найти, продифференцировав выражение $M(x)$ и приравняв найденное выражение нулю:

$$\frac{dM_z^{\text{III}}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(R_A(x + a_1 + a_2) - P(x + a_2) + \frac{qx^2}{2} \right) = R_A - P + qx = 0,$$

откуда $x_* = \frac{P - R_A}{q} = \frac{10 - 5,833}{5} = 0,8334$ м. Подставляя величину x_* в выражение изгибающего момента, находим момент в этом сечении:

$$M_z^{\text{III}}(x_*) = 5,833(0,8334 + 0,5 + 0,5) - 10(0,8334 + 0,5) + (5 \cdot 0,8334^2 / 2) = -0,902 \text{ кН} \cdot \text{м} = -902 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Для построения эпюры нормальных напряжений необходимо знать форму поперечных сечений участков (показаны на рис. 3.8: 1 – круглое, 2 – квадратное, 3 – прямоугольное, 4 – круглое) и их размеры. Формулы максимальных нормальных напряжений, вызванных изгибом, для каждого вида сечения включены в табл. 3.1.

Т а б л и ц а 3.1

| Форма сечения | Максимальное нормальное напряжение σ |
|---------------|--|
| Круглое | $\sigma = \frac{M_z}{W}, W = \frac{\pi d^3}{32}$ или $\sigma = \frac{32M_z}{\pi d^3}$ |
| Квадратное | $\sigma = \frac{M_z}{W_z}, W_z = \frac{b^3}{6}$ или $\sigma = \frac{6M_z}{b^3}$ (b – сторона квадрата) |
| Прямоугольное | $\sigma = \frac{M_z}{W_z}, W_z = \frac{bh^2}{6}$ или $\sigma = \frac{6M_z}{bh^2}$ (b, h – см. рис. 3.8) |

При плоском изгибе максимальные нормальные напряжения всегда находятся на внешней поверхности балок, в точках, максимально удаленных от центра тяжести сечения (оси Z).

Пусть $d = 50$ мм, $b = 75$ мм, $h = 30$ мм для участков балки. Тогда момент сопротивления W_z для круглого сечения (I и IV участки)

$$W_z = \frac{\pi(5 \cdot 10^{-2})^3}{32} = 1,227 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3, \text{ для квадратного сечения (II участок)}$$

$$W_z = \frac{(7,5 \cdot 10^{-2})^3}{6} = 7,031 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3, \text{ для прямоугольного сечения (III участ-}$$

$$\text{сток)} \quad W_z = \frac{7,5 \cdot 10^{-2}(3 \cdot 10^{-2})^2}{6} = 1,125 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3. \text{ Поделив значения изги-}$$

бывших моментов на полученные величины моментов сопротивления на каждом участке, построим эпюру нормальных максимальных напряжений балки в мегапаскалях (рис. 3.15).

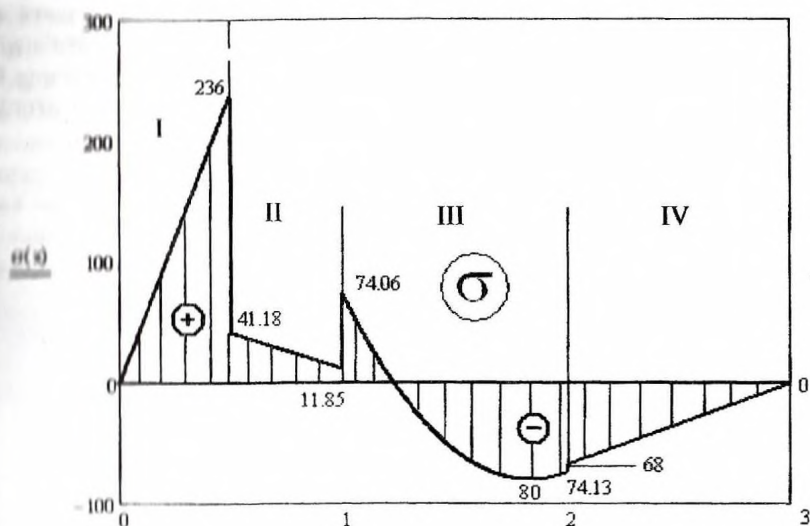


Рис. 3.15

Скачки (разрывы) значений на эпюре нормальных напряжений объясняются резким изменением формы и размеров поперечных сечений на стыках участков.