Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

М.А. Басараб, Н.С. Коннова

Теория игр в информационной безопасности

Учебно-методическое пособие

BAUMANPRESS
Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана
2019

УДК 519.8
ББК 22.18
Б27

Издание доступно в электронном виде по адресу
ebooks.bmstu.press/catalog/117/book2060.html

Факультет «Информатика и системы управления»
Кафедра «Информационная безопасность»

Рекомендовано Научно-методическим советом МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебно-методического пособия

Рецензент
руководитель научно-учебного комплекса «Информатика и системы управления» МГТУ им. Н. Э. Баумана, д-р техн. наук, профессор *А.В. Пролетарский*

Басараб, М.А.
Б27 Теория игр в информационной безопасности : учебно-методическое пособие / М. А. Басараб, Н. С. Коннова. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2019. — 80, [4] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-5170-8

Рассмотрены различные методы решения задач теории игр. Приведены методические указания для выполнения лабораторных работ и расчетно-графического домашнего задания по дисциплинам «Теория игр и исследование операций», «Методы теории игр в информационной безопасности».

Пособие предназначено для студентов и магистрантов МГТУ им. Н.Э. Баумана, обучающихся по специальностям «Информационная безопасность», «Информационная безопасность автоматизированных систем» и «Компьютерная безопасность», а также студентов и аспирантов других специальностей, интересующихся современными методами решения практических задач теории игр.

УДК 519.8
ББК 22.18

ISBN 978-5-7038-5170-8

Предисловие

Настоящее учебно-методическое пособие содержит основные сведения по теории игр, а также описания восьми лабораторных работ, необходимых для закрепления изученного материала, с подробным разъяснением хода выполнения каждой работы. В лабораторных работах исследуются задачи по принятию решений в условиях неопределенности, теории матричных игр.

Ряд работ имеет отношение к области информационной безопасности, в частности к выбору оптимального набора средств безопасности (задача о покрытии), моделированию действий инсайдера (матричная игра).

При выполнении лабораторных работ целесообразно воспользоваться либо готовыми программными пакетами математического моделирования (MATLAB, MathCAD), электронными таблицами (MS Excel), либо собственными программами, написанными на языке программирования высокого уровня.

В отчете о выполнении каждой лабораторной работы необходимо последовательно и полно представить все основные шаги метода (алгоритма), вывод промежуточных результатов и необходимые комментарии, демонстрирующие понимание сути процедуры. Студент должен быть знаком с таким понятием, как вычислительная сложность метода, уметь провести качественный анализ его в сопоставлении с другими методами, быть способным лаконично ответить на предложенные контрольные вопросы.

Помимо этого в пособии приведены исходные данные для выполнения расчетно-графического домашнего задания по рассматриваемой тематике.

Введение

В данном пособии рассматриваются задачи теории игр, где ключевым понятием является выбор стратегий поведения участниками конкретной игры. Рассматриваются проблемы выбора и принятия решений в условиях конфликта интересов различных игроков.

Игра описывается перечнем игроков, набором стратегий для каждого игрока и указанием выигрышей, или платежей, игроков для каждой комбинации стратегий (ситуации в игре). Существуют различные виды игр (индивидуальные и кооперативные, антагонистические и неантагонистические, параллельные и последовательные, конечные и бесконечные, с полной и неполной информацией и т. д.), а также разные формы их задания (нормальная, развернутая формы, характеристическая функция и др.). В большинстве рассматриваемых игр, кроме специально оговоренных классов, предполагается, что игроки делают свои ходы одновременно, т. е. в условиях неопределенности, неосведомленности о выборе стратегии соперником.

В нормальной, или стратегической, форме игра описывается платежной матрицей. Строки определяют стратегии первого игрока, столбцы — второго. На пересечении двух стратегий можно увидеть выигрыши, которые получат игроки.

При решении производственных, управленческих, организационно-технических и других задач в области информационной безопасности часто приходится иметь дело с проблемой выбора одного варианта (оптимального или квазиоптимального) среди множества альтернативных решений.

В зависимости от целевой функции и характера ограничений такого рода задачи можно условно разбить на два типа.

1. *Задачи оптимизации*. Предполагается, что ограничения известны, и необходимо найти экстремальное решение, доставляющее минимум либо максимум функционалу того или иного вида. Задачи конечномерной оптимизации с одной целевой функ-

цией называются также задачами *математического программирования*.

2. Задачи *теории игр* (принятие решений в условиях неопределенности). Поиск оптимального решения (стратегии) осуществляется при априори неизвестных действиях другого игрока (игроков), имеющего собственные интересы, либо состояниях внешней среды («игра с Природой»).

1. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ. СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

В антагонистических играх сумма всех выигрышей равна сумме всех проигрышей для любого хода. Именно поэтому их еще называют *играми с нулевой суммой*. В платежных матрицах таких игр, как правило, записывается одно число — оно является как выигрышем одного игрока, так и проигрышем другого (или выигрышем с обратным знаком).

Формулировка матричной игры. В общем случае игра двух игроков, A и B, с нулевой суммой записывается в виде *матрицы стратегий*:

Стратегии	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Здесь c_{ij} — выигрыш первого игрока (проигрыш второго игрока) при реализации ими их стратегий a_i, $i = 1, \ldots, m$, b_j, $j = 1, \ldots, n$, соответственно.

Минимальный гарантированный выигрыш игрока A называется *нижней ценой игры*. Он равен $\max\limits_i \min\limits_j c_{ij}$. При плохой игре игрока B выигрыш может быть и бóльшим. Минимально возможный проигрыш игрока B, равный $\min\limits_j \max\limits_i c_{ij}$, называется *верхней ценой игры*.

Теорема о минимаксе. *Пусть* (c_{ij}) — *произвольная матрица* $m \times n$, *тогда*

$$\max_{i \in A} \min_{j \in B} c_{ij} \le \min_{j \in B} \max_{i \in A} c_{ij},$$

где

$$A = 1, \ldots, m; \; B = 1, \ldots, n.$$

Если нижняя и верхняя цены игры равны, их значения называются *ценой игры*.

Теорема о седловой точке. *Для* (c_{ij}) *— произвольной матрицы* $m \times n$

$$\max_{i \in A} \min_{j \in B} c_{ij} = \min_{j \in B} \max_{i \in A} c_{ij},$$

где $A = \overline{1, m}$, $B = \overline{1, n}$, *тогда и только тогда, когда* (c_{ij}) *имеет седловую точку* (i_0, j_0), *для которой* $c_{i_0 j_0}$ *является одновременно минимальным элементом строки и максимальным элементом столбца, и* $\max_{i \in A} \min_{j \in B} c_{ij} = \min_{j \in B} \max_{i \in A} c_{ij} = c_{i_0 j_0}$ *— цена игры.*

Стратегии обоих противников в задачах с седловой точкой называются *оптимальными* и не зависят от дополнительно полученной информации.

Смешанные стратегии. Если игровая задача не имеет седловой точки, то на практике конкурирующие игроки применяют *смешанные* стратегии, т. е. попеременно используют две и более стратегий.

По определению,

x^* — оптимальная частота выбора стратегии для игрока *A*,

y^* — оптимальная частота выбора стратегии для игрока *B*, если

$$E(x, y^*) \le E(x^*, y^*) \le E(x^*, y),$$

где E — математическое ожидание выигрыша.

Рассмотрим произвольную игру с матрицей стратегий

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Смешанная стратегия игрока A — это упорядоченная система m действительных неотрицательных чисел x_i, $i = 1, \ldots, m$, такая, что

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Обозначим S_m — множество всех смешанных стратегий игрока *A*.

Аналогично определяется смешанная стратегия игрока *B* — y_j, $j = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Здесь S_n — множество всех смешанных стратегий игрока *B*.

Стратегия игрока *A*, когда

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = x_{i+2} = \ldots = x_m = 0,$$

а

$$x_i = 1,$$

называется *i-й чистой стратегией*. Аналогично определяется *j*-я чистая стратегия игрока *B*.

Если смешанная стратегия игрока *A*

$$X = (x_1, \ldots, x_m),$$

а смешанная стратегия игрока *B*

$$Y = (y_1, \ldots, y_m),$$

то математическое ожидание выигрыша игрока *A* составляет

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j.$$

Если существуют стратегии

$$X^* \in S_m, \quad Y^* \in S_n,$$

такие, что для любых $X \in S_m$, $Y \in S_n$ выполняются неравенства

$$E\left(X, Y^*\right) \le E\left(X^*, Y^*\right) \le E\left(X^*, Y\right),$$

то X^*, Y^* называются *оптимальными смешанными стратегиями* игроков *A*, *B*; $E\left(X^*, Y^*\right)$ — *цена игры* для игрока *A*; X^*, Y^* — решение игры, или *стратегическая седловая точка*.

Основная теорема прямоугольных игр (теорема Неймана). *Пусть задана матрица стратегий (1.1) и выбраны стратегии* $X = (x_1, \ldots, x_m) \in S_m$, $Y = (y_1, \ldots, y_m) \in S_n$; *математическое ожидание выигрыша игрока A имеет вид*

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j;$$

тогда

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} E(X, Y) = \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} E(X, Y) = E(X^*, Y^*),$$

где (X^*, Y^*) — *стратегическая седловая точка.*

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования. Рассмотрим прямоугольную игру с нулевой суммой и матрицей стратегий (1.1). Пусть

$$\min_{Y \in S_n} E(X, Y) = g(X),$$

тогда для любых $X \in S_m$, $Y \in S_n$ имеем

$$E(X, Y) \geq g(X).$$

В частности, для любой чистой стратегии Y_j и любых $X \in S_m$

$$\begin{cases} E(X, Y_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_{ij} x_i \geq g(X), \quad j = 1, \ldots, n, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Пусть $g(X) > 0$. Разделим почленно обе части неравенства (1.2) на $g(X)$ и положим

$$u_i = \frac{x_i}{g(X)}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Тогда получим

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} u_i \geq 1, \quad j = 1, \ldots, n, \\ u_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \sum_{i=1}^{m} u_i = \dfrac{1}{g(X)}. \end{cases}$$

Задача игрока *A*:

$$g(X) \to \max,$$

т. е.

$$\begin{cases} W(U) = \sum_{i=1}^{m} u_i \to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} c_{ij} u_i \geq 1, \quad j = 1, \ldots, n, \\ u_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{1.3}$$

Для игрока *B* поступаем аналогично. Пусть

$$\max_{X \in S_m} E(X, Y) = h(Y),$$

тогда для любых $X \in S_m$, $Y \in S_n$

$$E(X, Y) \leq h(Y).$$

В частности, для любой чистой стратегии X_i и любых $Y \in S_n$ имеем

$$\begin{cases} E(X_i, Y) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \leq h(Y), \quad i = 1, \ldots, m, \\ y_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Пусть $h(Y) > 0$. Разделим почленно обе части неравенства (1.4) на $h(Y)$ и положим

$$v_j = \frac{y_j}{h(Y)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} v_j \ge 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ v_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \sum\limits_{j=1}^{n} v_j = \dfrac{1}{h(Y)}. \end{cases}$$

Задача игрока B:

$$h(Y) \to \min,$$

т. е.

$$\begin{cases} Z(V) = \sum\limits_{j=1}^{n} v_j \to \max, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} v_j \le 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ v_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Задачи (1.3) и (1.5) — прямая и двойственная задачи линейного программирования (ЛП):

$$\min W(U) = W(U^*) = \max Z(V) = Z(V^*).$$

Оптимальные стратегии определяются как

$$X^* = (x_1^*, \dots, x_m^*), \quad Y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*),$$

где

$$x_i^* = \frac{u_i^*}{W(U^*)}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$y_j^* = \frac{v_j^*}{Z(V^*)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

так как

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} c_{ij} u_i^*}{W(U^*)} \ge \frac{1}{W(U^*)}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i^* = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j^*}{Z(V^*)} \le \frac{1}{Z(V^*)}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Цена игры

$$E(X^*, Y^*) = \frac{1}{W(U^*)} = \frac{1}{Z(V^*)}.$$

Верно и обратное: если X^*, Y^* — оптимальные стратегии A и B, то

$$u_i^* = \frac{x_i^*}{g(X^*)}, \quad v_j^* = \frac{y_j^*}{h(Y^*)}$$

есть оптимальные решения прямой (1.3) и двойственной (1.5) задач ЛП.

Лабораторная работа № 1

Цель работы — изучить постановку антагонистической игры двух лиц в нормальной форме; найти решение игры за обоих игроков в смешанных стратегиях (стратегическую седловую точку).

Постановка задачи и методические указания к выполнению работы

Для игры, заданной матрицей стратегий c_{ij}, требуется найти оптимальные смешанные стратегии обоих игроков, сведя матричную игру к задаче ЛП (прямой для одного игрока и двойственной для другого).

Задачи ЛП следует решать симплекс-методом, приводя начальные, промежуточные и конечные симплекс-таблицы. По окончании алгоритма полученные решения необходимо проверить на допустимость.

Пример выполнения работы

Пусть матрица стратегий имеет вид

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	1	3	9	6
a_2	2	6	2	3
a_3	7	2	6	5

Найдем смешанные стратегии для игрока *A*. Для этого составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_3 \geq g, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq g, \\ 9x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq g, \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq g, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

где g — минимальный выигрыш.

Разделим систему уравнений на функцию g:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + 7u_3 \geq 1, \\ 3u_1 + 6u_2 + 2u_3 \geq 1, \\ 9u_1 + 2u_2 + 6u_3 \geq 1, \\ 6u_1 + 3u_2 + 5u_3 \geq 1, \\ u_1 + u_2 + u_3 = 1 / g. \end{cases}$$

Сформулируем задачу для решения симплекс-методом:

$$W = u_1 + u_2 + u_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + 7u_3 \geq 1, \\ 3u_1 + 6u_2 + 2u_3 \geq 1, \\ 9u_1 + 2u_2 + 6u_3 \geq 1, \\ 6u_1 + 3u_2 + 5u_3 \geq 1, \\ u_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Ниже приведена последовательность симплекс-таблиц, иллюстрирующая этапы решения задачи.

	s_0	u_1	u_2	u_3
u_4	–1	–1	–2	–7
u_5	–1	–3	–6	–2
u_6	–1	–9	–2	–6
u_7	–1	–6	–3	–5
W	0	–1	–1	–1

	s_0	u_4	u_2	u_3
u_1	1	–1	2	7
u_5	2	–3	0	19
u_6	8	–9	16	57
u_7	5	–6	9	37
W	1	–1	1	6

	s_0	u_4	u_2	u_5
u_1	0,263	0,105	2,000	–0,368
u_3	0,105	–0,158	0,000	0,053
u_6	2,000	0,000	16,000	–3,000
u_7	1,105	–0,158	9,000	–1,947
W	0,368	–0,053	1,000	–0,316

	s_0	u_4	u_7	u_5
u_1	0,018	0,140	–0,222	0,064
u_3	0,105	–0,158	0,000	0,053
u_6	0,035	0,281	–1,778	0,462
u_2	0,123	–0,018	0,111	–0,216
W	0,246	–0,035	–0,111	–0,099

Находим оптимальное решение:

$$u_1 = \frac{1}{57},\ u_2 = \frac{7}{57},\ u_3 = \frac{2}{19},$$

$$W = \frac{14}{57},$$

$$g = \frac{1}{W} = \frac{57}{14}.$$

Оптимальные стратегии:

$$x_1 = u_1 g = \frac{1}{57} \cdot \frac{57}{14} = \frac{1}{14},$$

$$x_2 = u_2 g = \frac{7}{57} \cdot \frac{57}{14} = \frac{1}{2},$$

$$x_3 = u_3 g = \frac{2}{19} \cdot \frac{57}{14} = \frac{3}{7}.$$

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока A:

$$\left(\frac{1}{14},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{7},\ 0,\ 0\right).$$

Для нахождения смешанной стратегии игрока B составим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + 9y_3 + 6y_4 \le h, \\ 2y_1 + 6y_2 + 2y_3 + 3y_4 \le h, \\ 7y_1 + 2y_2 + 6y_3 + 5y_4 \le h, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1, \end{cases}$$

где h — максимальный проигрыш игрока B.

Разделим эту систему уравнений на h:

$$\begin{cases} v_1 + 3v_2 + 9v_3 + 6v_4 \le 1, \\ 2v_1 + 6v_2 + 2v_3 + 3v_4 \le 1, \\ 7v_1 + 2v_2 + 6v_3 + 5v_4 \le 1, \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 1/h. \end{cases}$$

Сформулируем задачу для решения симплекс-методом:

$$Z = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} v_1 + 3v_2 + 9v_3 + 6v_4 \le 1, \\ 2v_1 + 6v_2 + 2v_3 + 3v_4 \le 1, \\ 7v_1 + 2v_2 + 6v_3 + 5v_4 \le 1, \\ v_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Последовательность симплекс-таблиц:

	s_0	v_1	v_2	v_3	v_4
v_5	1	1	3	9	6
v_6	1	2	6	2	3
v_7	1	7	2	6	5
Z	0	1	1	1	1

	s_0	v_7	v_2	v_3	v_4
v_5	0,857	–0,143	2,714	8,143	5,286
v_6	0,714	–0,286	5,429	0,286	1,571
v_1	0,143	0,143	0,286	0,857	0,714
Z	–0,143	–0,143	0,714	0,143	0,286

	s_0	v_7	v_6	v_3	v_4
v_5	0,500	0,000	–0,500	8,000	4,500
v_2	0,132	–0,053	0,184	0,053	0,289
v_1	0,105	0,158	–0,053	0,842	0,632
Z	–0,237	–0,105	–0,132	0,105	0,079

	s_0	v_7	v_6	v_5	v_4
v_3	0,063	0,000	–0,063	0,125	0,563
v_2	0,128	–0,053	0,188	–0,007	0,260
v_1	0,053	0,158	0,000	–0,105	0,158
Z	–0,243	–0,105	–0,125	–0,013	0,020

	s_0	v_7	v_6	v_5	v_3
v_4	0,111	0,000	–0,111	0,222	1,778
v_2	0,099	–0,053	0,216	–0,064	–0,462
v_1	0,035	0,158	0,018	–0,140	–0,281
Z	**–0,246**	–0,105	–0,123	–0,018	–0,035

Решение имеет вид

$$v_1 = \frac{2}{57} \approx 0{,}035,\ v_2 = \frac{17}{171} \approx 0{,}099,\ v_3 = 0,\ v_4 = \frac{1}{9} \approx 0{,}111,$$

$$Z = \frac{14}{57} \approx \mathbf{-0{,}246},$$

$$h = \frac{1}{Z} = \frac{57}{14}.$$

Частоты выбора стратегий:

$$y_1 = v_1 h = \frac{2}{57} \cdot \frac{57}{14} = \frac{1}{7},$$

$$y_2 = v_2 h = \frac{17}{171} \cdot \frac{57}{14} = \frac{17}{42},$$

$$y_3 = v_3 h = 0,$$

$$y_4 = v_4 h = \frac{1}{9} \cdot \frac{57}{14} = \frac{19}{42}.$$

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока B:

$$\left(\frac{1}{7}, \frac{17}{42}, 0, \frac{19}{42}\right).$$

Задача решена.

Варианты работы

В приведенных ниже вариантах (табл. Л1.1) строки матрицы соответствуют стратегиям игрока A, столбцы — стратегиям игрока B.

Таблица Л1.1

Номер варианта	Матрица стратегий	Номер варианта	Матрица стратегий
1	$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 16 & 9 & 17 \\ 11 & 5 & 6 & 9 & 18 \\ 12 & 7 & 13 & 16 & 15 \\ 11 & 7 & 2 & 13 & 7 \end{bmatrix}$	5	$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 17 & 8 & 1 \\ 12 & 6 & 11 & 10 & 16 \\ 4 & 19 & 11 & 15 & 2 \\ 17 & 19 & 6 & 17 & 16 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 6 & 12 \\ 1 & 14 & 14 & 13 & 11 \\ 17 & 6 & 14 & 4 & 3 \\ 18 & 16 & 13 & 15 & 16 \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} 6 & 17 & 16 & 18 & 15 \\ 18 & 8 & 16 & 8 & 8 \\ 6 & 13 & 18 & 4 & 3 \\ 15 & 14 & 2 & 18 & 19 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 1 & 11 & 6 & 15 & 10 \\ 3 & 3 & 15 & 10 & 7 \\ 4 & 7 & 16 & 0 & 10 \\ 16 & 18 & 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix} 19 & 6 & 17 & 9 & 18 \\ 16 & 18 & 13 & 13 & 12 \\ 11 & 1 & 5 & 3 & 12 \\ 4 & 5 & 15 & 19 & 4 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 16 & 3 & 14 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 17 & 0 & 12 \\ 10 & 3 & 4 & 16 & 2 \\ 2 & 3 & 9 & 11 & 19 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} 12 & 16 & 5 & 10 & 1 \\ 5 & 0 & 13 & 10 & 11 \\ 4 & 12 & 6 & 3 & 19 \\ 9 & 0 & 7 & 16 & 1 \end{bmatrix}$

Номер варианта	Матрица стратегий	Номер варианта	Матрица стратегий
9	$\begin{bmatrix} 19 & 6 & 8 & 2 & 7 \\ 7 & 9 & 2 & 0 & 12 \\ 3 & 18 & 11 & 9 & 10 \\ 19 & 10 & 6 & 19 & 4 \end{bmatrix}$	15	$\begin{bmatrix} 12 & 15 & 16 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 3 & 15 & 3 \\ 11 & 18 & 17 & 0 & 14 \\ 7 & 12 & 17 & 19 & 0 \end{bmatrix}$
10	$\begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 & 17 & 9 \\ 0 & 5 & 16 & 0 & 15 \\ 16 & 19 & 12 & 18 & 11 \\ 19 & 12 & 7 & 2 & 13 \end{bmatrix}$	16	$\begin{bmatrix} 16 & 17 & 8 & 15 & 17 \\ 0 & 3 & 19 & 8 & 2 \\ 13 & 19 & 7 & 15 & 9 \\ 11 & 15 & 2 & 16 & 2 \end{bmatrix}$
11	$\begin{bmatrix} 11 & 11 & 14 & 16 & 11 \\ 2 & 11 & 12 & 10 & 5 \\ 5 & 3 & 16 & 19 & 5 \\ 2 & 10 & 12 & 17 & 3 \end{bmatrix}$	17	$\begin{bmatrix} 18 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & 13 & 17 & 15 & 2 \\ 15 & 16 & 9 & 17 & 11 \\ 2 & 3 & 19 & 9 & 4 \end{bmatrix}$
12	$\begin{bmatrix} 13 & 15 & 7 & 0 & 17 \\ 3 & 5 & 19 & 5 & 5 \\ 14 & 0 & 13 & 19 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 13 & 9 \end{bmatrix}$	18	$\begin{bmatrix} 7 & 15 & 12 & 7 & 12 \\ 9 & 8 & 0 & 11 & 2 \\ 15 & 6 & 11 & 10 & 0 \\ 5 & 4 & 7 & 12 & 13 \end{bmatrix}$
13	$\begin{bmatrix} 10 & 11 & 16 & 15 & 2 \\ 9 & 7 & 6 & 17 & 1 \\ 3 & 0 & 19 & 15 & 4 \\ 0 & 15 & 13 & 10 & 6 \end{bmatrix}$	19	$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 & 15 & 19 \\ 18 & 10 & 6 & 10 & 12 \\ 5 & 5 & 15 & 8 & 1 \\ 3 & 15 & 15 & 12 & 0 \end{bmatrix}$
14	$\begin{bmatrix} 14 & 5 & 9 & 1 & 17 \\ 4 & 6 & 10 & 18 & 4 \\ 2 & 5 & 13 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 14 & 1 & 16 \end{bmatrix}$	20	$\begin{bmatrix} 5 & 18 & 9 & 17 & 11 \\ 1 & 10 & 0 & 0 & 3 \\ 13 & 9 & 14 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & 14 & 19 & 14 \end{bmatrix}$

Окончание табл. Л1.1

Номер варианта	Матрица стратегий	Номер варианта	Матрица стратегий
21	$\begin{bmatrix} 15 & 19 & 9 & 4 & 12 \\ 9 & 5 & 14 & 9 & 9 \\ 3 & 1 & 5 & 9 & 14 \\ 15 & 8 & 18 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	26	$\begin{bmatrix} 14 & 6 & 6 & 15 & 11 \\ 2 & 18 & 17 & 19 & 8 \\ 19 & 7 & 14 & 15 & 12 \\ 17 & 8 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$
22	$\begin{bmatrix} 13 & 7 & 8 & 3 & 8 \\ 2 & 6 & 14 & 18 & 7 \\ 4 & 10 & 6 & 18 & 11 \\ 0 & 14 & 3 & 0 & 14 \end{bmatrix}$	27	$\begin{bmatrix} 12 & 19 & 10 & 12 & 4 \\ 7 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 18 & 7 & 3 & 8 & 14 \\ 5 & 12 & 6 & 7 & 17 \end{bmatrix}$
23	$\begin{bmatrix} 7 & 19 & 1 & 19 & 8 \\ 7 & 18 & 5 & 2 & 6 \\ 15 & 3 & 16 & 19 & 4 \\ 5 & 12 & 19 & 14 & 18 \end{bmatrix}$	28	$\begin{bmatrix} 12 & 12 & 17 & 9 & 3 \\ 7 & 16 & 11 & 19 & 3 \\ 16 & 11 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 1 & 8 & 13 \end{bmatrix}$
24	$\begin{bmatrix} 5 & 15 & 11 & 8 & 13 \\ 11 & 5 & 8 & 0 & 9 \\ 12 & 16 & 0 & 16 & 7 \\ 17 & 9 & 19 & 0 & 16 \end{bmatrix}$	29	$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 13 & 3 \\ 3 & 9 & 7 & 3 & 8 \\ 18 & 19 & 13 & 7 & 0 \\ 15 & 1 & 3 & 10 & 8 \end{bmatrix}$
25	$\begin{bmatrix} 15 & 12 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 10 & 18 & 4 & 15 \\ 16 & 13 & 19 & 3 & 19 \\ 12 & 1 & 1 & 19 & 12 \end{bmatrix}$	30	$\begin{bmatrix} 12 & 13 & 7 & 13 & 10 \\ 8 & 14 & 5 & 5 & 16 \\ 13 & 16 & 11 & 5 & 14 \\ 13 & 6 & 18 & 12 & 4 \end{bmatrix}$

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; решение матричной игры в смешанных стратегиях симплекс-методом за обоих игроков (прямая и двойственная задачи ЛП) с приведением начальной, всех промежуточных и заключительной симплекс-таблиц для обоих игроков; проверку решения.

Контрольные вопросы

1. Определите понятие матричной игры с нулевой суммой.
2. Дайте определение верхней и нижней цен игры. Докажите теорему о минимаксе.
3. Что такое цена игры? Сформулируйте теорему о седловой точке.
4. Сформулируйте основную теорему прямоугольных игр.
5. Что такое смешанные стратегии?

2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ (БРАУНА — РОБИНСОН) МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

Если в игре, заданной платежной матрицей, отсутствует седловая точка и требуется найти решение игры в смешанных стратегиях, то помимо сведения задачи к задаче ЛП (см. разд. 1), существует также аналитический и различные численные методы решения.

В данном разделе остановимся подробнее на аналитическом (обратной матрицы) и Брауна — Робинсон методах нахождения смешанных стратегий в антагонистической игре двух лиц в нормальной форме.

Аналитический метод. Пусть задана $(m \times n)$-игра Г двух игроков, A и B, с матрицей стратегий $\mathbf{C}$.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in S_m$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in S_n$ — смешанные стратегии игроков A и B соответственно. Тогда множества индексов $A_\mathbf{x} = \{i \mid i \in A,\ x_i > 0\}$, $B_\mathbf{y} = \{j \mid j \in B,\ y_j > 0\}$, где $A = \{1, 2, \ldots, m\}$, $B = \{1, 2, \ldots, n\}$, называются *спектрами стратегий* $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соответственно. Таким образом, в спектр включаются только стратегии, реализуемые с ненулевыми вероятностями.

Чистая стратегия $i \in A\,(j \in B)$ игрока A (B) называется *существенной*, если имеется оптимальная стратегия $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*) \in S_m$ $(\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*) \in S_n)$ этого игрока, для которой $x_i^* > 0$ $(y_j^* > 0)$.

Спектр $A^*(B^*)$ любой оптимальной стратегии $\mathbf{x}^*(\mathbf{y}^*)$ может состоять лишь из существенных стратегий.

Стратегия $\mathbf{x}$ ($\mathbf{y}$) игрока A (B) называется *вполне смешанной*, если ее спектр состоит из множества всех чистых стратегий игрока, т. е. $A_\mathbf{x} = A$ $(B_\mathbf{y} = B)$.

Ситуация равновесия в игре $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ называется *вполне смешанной*, если стратегии $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ — вполне смешанные.

Игра Γ называется *вполне смешанной*, если каждая ситуация равновесия в ней является вполне смешанной.

Теорема 2.1. *Вполне смешанная игра $(m \times n)$-игра Γ имеет единственную ситуацию равновесия* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ *и квадратную матрицу $(m = n)$; если цена игры $v \neq 0$, то матрица* $\mathbf{C}$ *невырожденная и*

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}}{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}}, \quad \mathbf{y}^* = \frac{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}}{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}}, \quad v = \frac{1}{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}}, \tag{2.1}$$

где вектор $\mathbf{u} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$.

Итерационный метод Брауна — Робинсон. В общем случае для решения произвольной $(m \times n)$-игры Γ можно применить приближенные методы, простейшим из которых является метод Брауна —Робинсон.

Пусть в первой партии оба игрока произвольно выбирают некоторые чистые стратегии. Тогда в партии с номером k каждый игрок должен выбирать чистую стратегию, максимизирующую его ожидаемый выигрыш относительно наблюдаемой эмпирической смешанной стратегии противника и рассчитанную за предыдущие $k - 1$ партий.

Пусть в течение первых k шагов первый игрок использовал каждую i-ю стратегию $\tilde{x}_i[k]$ раз, а второй использовал каждую j-ю стратегию $\tilde{y}_j[k]$ раз. Тогда в следующей, $(k + 1)$-й, партии игроки будут использовать свои стратегии с номерами $i[k]$ и $j[k]$, исходя из оптимизации оценок верхней и нижней цен игры:

$$\overline{v}[k] = \max_{i \in A} \sum_{j \in B} c_{ij} \tilde{y}_j[k] = \sum_{j \in B} c_{i[k+1]j} \tilde{y}_j[k],$$

$$\underline{v}[k] = \min_{j \in B} \sum_{i \in A} c_{ij} \tilde{x}_i[k] = \sum_{i \in A} c_{ij[k+1]} \tilde{x}_i[k].$$

Усредним эти оценки по k шагам алгоритма:

$$\frac{1}{k}\overline{v}[k] = \frac{1}{k} \max_{i \in A} \sum_{j \in B} c_{ij} \tilde{y}_j[k] = \frac{1}{k} \sum_{j \in B} c_{i[k+1]j} \tilde{y}_j[k],$$

$$\frac{1}{k}\underline{v}[k] = \frac{1}{k} \min_{j \in B} \sum_{i \in A} c_{ij} \tilde{x}_i[k] = \frac{1}{k} \sum_{i \in A} c_{ij[k+1]} \tilde{x}_i[k].$$

Тогда оценки смешанных стратегий игроков A и B определяются соответственно векторами

$$\tilde{\mathbf{x}}[k] = \left(\frac{\tilde{x}_1[k]}{k}, \frac{\tilde{x}_2[k]}{k}, \ldots, \frac{\tilde{x}_m[k]}{k} \right), \quad \tilde{\mathbf{y}}[k] = \left(\frac{\tilde{y}_1[k]}{k}, \frac{\tilde{y}_2[k]}{k}, \ldots, \frac{\tilde{y}_n[k]}{k} \right).$$

Для оценки цены игры имеем

$$\max_k \frac{1}{k} \underline{v}[k] \le v \le \min_k \frac{1}{k} \overline{v}[k].$$

Величина

$$\varepsilon[k] = \min_k \frac{1}{k} \overline{v}[k] - \max_k \frac{1}{k} \underline{v}[k] \tag{2.2}$$

может выступать в качестве оценки погрешности итерационного алгоритма. Верна также следующая теорема.

Теорема 2.2. *Предельную оценку цены игры рассчитывают по формуле*

$$\lim_{k\to\infty} \min_k \frac{1}{k} \overline{v}[k] = \lim_{k\to\infty} \max_k \frac{1}{k} \underline{v}[k] = v.$$

Обычно k выбирают, исходя из обеспечения малости погрешности ε — см. (2.2).

Лабораторная работа № 2

Цель работы — изучить аналитический (обратной матрицы) и численный (Брауна — Робинсон) методы нахождения смешанных стратегий в антагонистической игре двух лиц в нормальной форме.

Постановка задачи

Найдите цену игры и оптимальные стратегии обоих игроков методами обратной матрицы и Брауна — Робинсон. Сравните полученные результаты.

Пример выполнения работы

Пусть (3 × 3)-игра Γ задана матрицей

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Расчет по формулам (2.1) дает следующее аналитическое решение задачи:

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad \mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right), \quad v = 1{,}5.$$

Реализуем алгоритм Брауна — Робинсон. Пусть на первом шаге игроки выбрали стратегии x_1, y_1. Учитывая, что игрок A выбрал стратегию x_1, игрок B мог получить один из выигрышей (2, 1, 3). А если игрок B выбрал стратегию y_1, то возможные выигрыши игрока A — (2, 3, 1). Следовательно, на втором этапе игрокам необходимо выбрать стратегии x_2 и y_2 соответственно.

Таблица Л2.1

k	Выбор игрока		Выигрыш игрока A			Проигрыш игрока B			$\frac{1}{k}\overline{v}[k]$	$\frac{1}{k}\underline{v}[k]$	ε
	A	B	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3			
1	x_1	y_1	2	3	1	2	1	3	3	1	2
2	x_2	y_2	3	3	3	5	1	4	3/2	1/2	1/2
3	x_2	y_2	4	3	5	8	1	5	5/3	1/3	1/2
4	x_3	y_2	5	3	7	9	3	6	7/4	3/4	1/2
5	x_3	y_2	6	3	9	10	5	7	9/5	5/5	1/2
6	x_3	y_2	7	3	11	11	7	8	11/6	7/6	1/3
7	x_3	y_2	8	3	13	12	9	9	13/7	9/7	3/14
8	x_3	y_3	11	4	14	13	11	10	14/8	10/8	3/14
9	x_3	y_3	14	5	15	14	13	11	15/9	11/9	3/14
10	x_3	y_3	17	6	16	15	15	12	17/10	12/10	3/14
11	x_1	y_3	20	7	17	17	16	15	20/11	15/11	3/22
12	x_1	y_3	23	8	18	19	17	18	23/12	17/12	1/12

Результаты расчетов рассматриваемого примера на первых 12 шагах алгоритма Брауна — Робинсон приведены в табл. Л2.1.

Таким образом, за 12 шагов получены следующие приближенные смешанные стратегии:

$$\tilde{\mathbf{x}}[12] = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}\right), \quad \tilde{\mathbf{y}}[12] = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{2}, \frac{5}{12}\right),$$

а погрешность, согласно (2.2), составила

$$\varepsilon[12] = \frac{1}{12}.$$

Задача решена.

Варианты работы

В приведенных ниже вариантах (табл. Л2.2) строки соответствуют стратегиям игрока *A*, столбцы — стратегиям игрока *B*. Необходимо выполнить *N* итераций численного метода до достижения заданной точности ε.

Таблица Л2.2

Номер варианта	Матрица стратегий	Номер варианта	Матрица стратегий	Номер варианта	Матрица стратегий
1	$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 11 \\ 7 & 5 & 8 \\ 16 & 6 & 2 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 17 & 4 & 9 \\ 0 & 16 & 9 \\ 12 & 2 & 19 \end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix} 6 & 18 & 5 \\ 17 & 13 & 15 \\ 9 & 13 & 19 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 17 & 18 \\ 14 & 6 & 16 \\ 14 & 14 & 13 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 \\ 1 & 6 & 19 \\ 17 & 11 & 11 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 12 & 5 & 4 \\ 12 & 0 & 12 \\ 5 & 13 & 6 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 6 & 15 & 16 \\ 15 & 10 & 0 \\ 10 & 7 & 10 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 6 & 18 & 6 \\ 17 & 8 & 18 \\ 16 & 10 & 10 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 19 & 7 & 3 \\ 6 & 9 & 9 \\ 8 & 2 & 11 \end{pmatrix}$

Окончание табл. Л2.2

Номер варианта	Матрица стратегий	Номер варианта	Матрица стратегий	Номер варианта	Матрица стратегий
10	$\begin{pmatrix} 0 & 16 & 19 \\ 5 & 19 & 12 \\ 16 & 12 & 7 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 9 & 10 & 13 \\ 1 & 18 & 11 \\ 17 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 10 \\ 8 & 14 & 6 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 13 & 3 & 14 \\ 15 & 5 & 0 \\ 7 & 19 & 13 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 12 & 9 & 18 \\ 15 & 22 & 5 \\ 16 & 3 & 12 \end{pmatrix}$		
12	$\begin{pmatrix} 11 & 10 & 15 \\ 16 & 5 & 13 \\ 15 & 20 & 10 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 18 & 13 & 15 \\ 0 & 13 & 16 \\ 1 & 17 & 9 \end{pmatrix}$		

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; решение матричной игры аналитическим методом; этапы решения матричной игры в смешанных стратегиях численным методом Брауна — Робинсон за обоих игроков (в виде таблицы и графиков) до уровня погрешности $\varepsilon \le 0{,}1$; сравнительную оценку погрешностей, полученных аналитически и приближенным решением.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение смешанной стратегии.
2. Что такое существенная матричная игра?
3. Каковы условия применимости аналитического метода нахождения смешанных стратегий?
4. Какова основная идея итерационного метода нахождения смешанных стратегий?

Лабораторная работа № 3

Цель работы — найти оптимальные стратегии непрерывной выпукло-вогнутой антагонистической игры аналитическим и численным методами.

Постановка задачи и методические указания к выполнению работы

Пусть функция выигрыша (*ядро*) антагонистической игры, заданной на единичном квадрате, непрерывна:

$$H(x, y) \in C(\Pi), \ \Pi = [0,1] \times [0,1].$$

Тогда существуют нижняя и верхняя цены игры, и, кроме того,

$$h = \overline{h} \equiv \max_F \min_y E(F, y) = \min_G \max_x E(x, G) \equiv \underline{h},$$

а для среднего выигрыша игры имеют место равенства

$$E(x, G) = \int_0^1 H(x, y) \mathrm{d} G(y), \quad E(F, y) = \int_0^1 H(x, y) \mathrm{d} F(x),$$

где $F(x), G(y)$ — произвольные вероятностные меры выбора стратегий для обоих игроков, заданные на единичном интервале.

Выпукло-вогнутая игра всегда разрешима в чистых стратегиях.

Аналитическое решение. Пусть функция ядра имеет вид

$$H(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey.$$

Если выполняются условия

$$H_{xx} = 2a < 0, \quad H_{yy} = 2b > 0,$$

то игра является выпукло-вогнутой.

Для нахождения оптимальных стратегий найдем производные функции ядра по каждой переменной:

$$H_x = 2ax + cy + d, \quad H_y = 2by + cx + e.$$

После приравнивания производных к нулю получим

$$x = -\frac{cy + d}{2a}, \quad y = -\frac{cx + e}{2b}.$$

Учитывая, что x, y должны быть неотрицательными, для оптимальных стратегий соответственно имеем

$$\psi(y) = \begin{cases} -\dfrac{cy + d}{2a}, & y \geq -\dfrac{d}{c}, \\ 0, & y < -\dfrac{d}{c}, \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} -\dfrac{cx + e}{2b}, & x \leq -\dfrac{e}{c}, \\ 0, & x > -\dfrac{e}{c}. \end{cases}$$

Совместное аналитическое решение этой системы имеет вид

$$h = H(x^*, y^*).$$

Численное решение. В общем случае для произвольной игры с непрерывным ядром можно использовать метод аппроксимации функции выигрышей на сетке.

Введем параметр разбиения N и $\forall N = 1, 2, \ldots$ Зададим аппроксимацию функции ядра на единичном квадрате:

$$H^{(N)} = (H_{ij}^{(N)}), \quad H_{ij}^{(N)} = H(i/N, j/N), \quad i, j = 0, \ldots, N.$$

Рассматривая каждую аппроксимацию $H^{(N)}$ как матрицу конечной антагонистической игры двух лиц, найдем оптимальные смешанные стратегии (по теореме Неймана они всегда существуют):

$$X^{(N)} = (x_0^{(N)}, \ldots, x_N^{(N)}), \quad Y^{(N)} = (y_0^{(N)}, \ldots, y_N^{(N)}).$$

При этом ожидаемый выигрыш

$$h^{(N)} = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} H_{ij}^{(N)} x_i^{(N)} y_j^{(N)},$$

а в пределе для исходной непрерывной задачи имеем

$$h = \lim_{N \to \infty} h^{(N)}.$$

Пример выполнения работы

Пусть задана игра:

a	b	c	d	e
–3	3/2	18/5	–18/50	–72/25

Аналитическое решение. Функция ядра имеет вид

$$H(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey.$$

Проверим выполнимость условий для принадлежности игры к классу выпукло-вогнутых:

$$H_{xx} = 2a = -6 < 0,$$

$$H_{yy} = 2b = 3 > 0;$$

$H_{xx} < 0$ и $H_{yy} > 0;$ значит, представленная игра выпукло-вогнутая. Для нахождения оптимальных стратегий найдем производные функции ядра по каждой переменной:

$$H_x = 2ax + cy + d = -6x + \frac{18}{5}y - \frac{18}{50},$$

$$H_y = 2by + cx + e = 3y + \frac{18}{5}x - \frac{72}{25}.$$

После приравнивания производных к нулю получим:

$$x = -\frac{cy + d}{2a} = -\frac{\frac{18}{5}y - \frac{18}{50}}{-6} = \frac{\frac{18}{5}y - \frac{18}{50}}{6},$$

$$y = -\frac{cx + e}{2b} = -\frac{\frac{18}{5}x - \frac{72}{25}}{3}.$$

Учитывая, что x и y должны быть неотрицательными, для оптимальных стратегий соответственно имеем:

$$\psi(y)=\begin{cases}\dfrac{\frac{18}{5}y-\frac{18}{50}}{6}, & y\ge\dfrac{1}{10},\\[2mm] 0, & y<\dfrac{1}{10};\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}-\dfrac{\frac{18}{5}x-\frac{72}{25}}{3}, & x\le\dfrac{4}{5},\\[2mm] 0, & x>\dfrac{4}{5}.\end{cases}$$

Найдем общее решение этих уравнений. Для этого подставим в выражение для y выражение для x:

$$y=-\frac{\frac{18}{5}\left(\frac{\frac{18}{5}y-\frac{18}{50}}{6}\right)-\frac{72}{25}}{3}=-\frac{\frac{18}{5}\left(\frac{180y-18}{300}\right)-\frac{72}{25}}{3}=$$

$$=-\frac{\frac{3240y-324}{1500}-\frac{72}{25}}{3}=-\frac{3240y-324-4320}{4500}=-\frac{3240y-4644}{4500}=$$

$$=\frac{-90y+129}{125},$$

$$125y=-90y+129,$$

$$215y=129,$$

$$y=\frac{3}{5}.$$

Подставим получившееся значение y в выражение для x:

$$x=\frac{\frac{18}{5}\cdot\frac{3}{5}-\frac{18}{50}}{6}=\frac{108-18}{300}=\frac{3}{10}.$$

Получившееся значение x подставим в выражение для y, чтобы выполнить проверку:

$$y = -\frac{\frac{18}{5}\cdot\frac{3}{10} - \frac{72}{25}}{3} = \frac{144-54}{150} = \frac{3}{5}.$$

Найдем седловую точку игры, подставив получившиеся значения x и y в функцию ядра:

$$H(x, y) = -3\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{18}{5}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{5} - \frac{18}{50}\cdot\frac{3}{10} - \frac{72}{25}\cdot\frac{3}{5} =$$

$$= -\frac{27}{100} + \frac{27}{50} + \frac{162}{250} - \frac{54}{500} - \frac{216}{125} = \frac{-135+270+324-54-864}{500} =$$

$$= -\frac{459}{500} = -0{,}918.$$

Численное решение. Для решения игры с непрерывным ядром используем метод аппроксимации функции выигрышей на сетке. С помощью программы найдем решения при различном шаге сетки для исходной задачи. Результат численного решения представлен ниже.

```
N=2
[[ 0.    -1.065 -1.38  ]
 [-0.93  -1.095 -0.51  ]
 [-3.36  -2.625 -1.14  ]]
Седловой точки нет, решение методом Брауна — Робинсон:
x=0.000 y=0.500 H=-1.065

N=3
[[ 0.     -0.793 -1.253 -1.38  ]
 [-0.453 -0.847 -0.907 -0.633]
 [-1.573 -1.567 -1.227 -0.553]
 [-3.36   -2.953 -2.213 -1.14  ]]
Есть седловая точка:
x=0.333 y=0.667 H=-0.907

N=4
[[ 0.     -0.626 -1.065 -1.316 -1.38  ]
 [-0.277 -0.679 -0.892 -0.919 -0.757]
```

```
 [-0.93  -1.106 -1.095 -0.896 -0.51 ]
 [-1.958 -1.909 -1.672 -1.249 -0.637]
 [-3.36  -3.086 -2.625 -1.976 -1.14 ]]
Седловой точки нет, решение методом Брауна — Робинсон:
x=0.250 y=0.750 H=-0.919

N=5
[[ 0.    -0.516 -0.912 -1.188 -1.344 -1.38 ]
 [-0.192 -0.564 -0.816 -0.948 -0.96  -0.852]
 [-0.624 -0.852 -0.96  -0.948 -0.816 -0.564]
 [-1.296 -1.38  -1.344 -1.188 -0.912 -0.516]
 [-2.208 -2.148 -1.968 -1.668 -1.248 -0.708]
 [-3.36  -3.156 -2.832 -2.388 -1.824 -1.14 ]]
Седловой точки нет, решение методом Брауна — Робинсон:
x=0.200 y=0.600 H=-0.948

N=6
[[ 0.    -0.438 -0.793 -1.065 -1.253 -1.358 -1.38 ]
 [-0.143 -0.482 -0.737 -0.908 -0.997 -1.002 -0.923]
 [-0.453 -0.692 -0.847 -0.918 -0.907 -0.812 -0.633]
 [-0.93  -1.068 -1.123 -1.095 -0.983 -0.788 -0.51 ]
 [-1.573 -1.612 -1.567 -1.438 -1.227 -0.932 -0.553]
 [-2.383 -2.322 -2.177 -1.948 -1.637 -1.242 -0.763]
 [-3.36  -3.198 -2.953 -2.625 -2.213 -1.718 -1.14 ]]
Седловой точки нет, решение методом Брауна — Робинсон:
x=0.333 y=0.500 H=-0.918

N=7
[[ 0.    -0.381 -0.7   -0.959 -1.156 -1.292 -1.367 -1.38 ]
 [-0.113 -0.42  -0.666 -0.851 -0.975 -1.037 -1.038 -0.978]
 [-0.348 -0.582 -0.754 -0.866 -0.916 -0.905 -0.833 -0.699]
 [-0.705 -0.866 -0.965 -1.003 -0.98  -0.895 -0.749 -0.542]
 [-1.185 -1.272 -1.298 -1.262 -1.166 -1.008 -0.789 -0.508]
 [-1.788 -1.801 -1.753 -1.644 -1.474 -1.243 -0.95  -0.596]
 [-2.513 -2.453 -2.331 -2.149 -1.905 -1.6   -1.234 -0.807]
 [-3.36  -3.227 -3.032 -2.776 -2.459 -2.08  -1.641 -1.14 ]]
Есть седловая точка:
x=0.286 y=0.571 H=-0.916

N=8
[[ 0. -0.337 -0.626 -0.869 -1.065 -1.214 -1.316 -1.372
  -1.38 ]
```

```
 [-0.092 -0.372 -0.606 -0.792 -0.932 -1.025 -1.071 -1.07
 -1.022]
 [-0.277 -0.502 -0.679 -0.809 -0.892 -0.929 -0.919 -0.862
 -0.757]
 [-0.557 -0.725 -0.846 -0.92 -0.947 -0.927 -0.861 -0.747
 -0.587]
 [-0.93 -1.042 -1.106 -1.124 -1.095 -1.019 -0.896 -0.727
 -0.51 ]
 [-1.397 -1.452 -1.461 -1.422 -1.337 -1.205 -1.026 -0.8
 -0.527]
 [-1.958 -1.957 -1.909 -1.814 -1.672 -1.484 -1.249 -0.967
 -0.637]
 [-2.612 -2.555 -2.451 -2.3 -2.102 -1.857 -1.566 -1.227
 -0.842]
 [-3.36 -3.247 -3.086 -2.879 -2.625 -2.324 -1.976 -1.582
 -1.14 ]]
Седловой точки нет, решение методом Брауна — Робинсон:
x=0.375 y=0.625 H=-0.927

N=9
[[ 0. -0.301 -0.566 -0.793 -0.984 -1.137 -1.253 -1.333
 -1.375 -1.38 ]
 [-0.077 -0.334 -0.554 -0.737 -0.883 -0.992 -1.064 -1.099
 -1.096 -1.057]
 [-0.228 -0.441 -0.616 -0.755 -0.856 -0.921 -0.948 -0.939
 -0.892 -0.808]
 [-0.453 -0.621 -0.753 -0.847 -0.904 -0.924 -0.907 -0.853
 -0.761 -0.633]
 [-0.753 -0.876 -0.963 -1.013 -1.025 -1.001 -0.939 -0.841
 -0.705 -0.533]
 [-1.126 -1.205 -1.247 -1.253 -1.221 -1.152 -1.046 -0.903
 -0.723 -0.506]
 [-1.573 -1.608 -1.606 -1.567 -1.49 -1.377 -1.227 -1.039
 -0.815 -0.553]
 [-2.095 -2.085 -2.039 -1.955 -1.834 -1.676 -1.481 -1.25
 -0.981 -0.675]
 [-2.69 -2.636 -2.545 -2.417 -2.252 -2.05 -1.81 -1.534
 -1.221 -0.87 ]
 [-3.36 -3.261 -3.126 -2.953 -2.744 -2.497 -2.213 -1.893
 -1.535 -1.14 ]]
Седловой точки нет, решение методом Брауна — Робинсон:
x=0.222 y=0.556 H=-0.921
```

```
N=10
[[ 0.  -0.273  -0.516  -0.729  -0.912  -1.065  -1.188  -1.281
  -1.344  -1.377  -1.38  ]
 [-0.066 -0.303 -0.51  -0.687 -0.834 -0.951 -1.038 -1.095
-1.122  -1.119  -1.086]
 [-0.192 -0.393 -0.564 -0.705 -0.816 -0.897 -0.948 -0.969
 -0.96  -0.921  -0.852]
 [-0.378 -0.543 -0.678 -0.783 -0.858 -0.903 -0.918 -0.903
 -0.858  -0.783  -0.678]
 [-0.624 -0.753 -0.852 -0.921 -0.96  -0.969 -0.948 -0.897
-0.816  -0.705  -0.564]
 [-0.93  -1.023 -1.086 -1.119 -1.122 -1.095 -1.038 -0.951
 -0.834  -0.687  -0.51  ]
 [-1.296 -1.353 -1.38  -1.377 -1.344 -1.281 -1.188 -1.065
 -0.912  -0.729  -0.516]
 [-1.722 -1.743 -1.734 -1.695 -1.626 -1.527 -1.398 -1.239
 -1.05  -0.831  -0.582]
 [-2.208 -2.193 -2.148 -2.073 -1.968 -1.833 -1.668 -1.473
 -1.248  -0.993  -0.708]
 [-2.754 -2.703 -2.622 -2.511 -2.37  -2.199 -1.998 -1.767
 -1.506  -1.215  -0.894]
 [-3.36  -3.273 -3.156 -3.009 -2.832 -2.625 -2.388 -2.121
 -1.824  -1.497  -1.14  ]]
Есть седловая точка:
x=0.300 y=0.600 H=-0.918
```

Таким образом, численно найдено решение задачи:
`x≈0.300 y≈0.600 H≈-0.92.`

Варианты работы

Исходные данные для выполнения лабораторной работы приведены в табл. Л3.1.

Таблица Л3.1

Номер варианта	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
1	–5	5/12	10/3	–2/3	–4/3
2	–10	15/4	10	–4	–8
3	–4	4	8	–12/5	–28/5

Окончание табл. Л3.1

Номер варианта	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
4	–15	20/3	40	–12	–24
5	–3	12/5	6	–3/5	–24/5
6	–5	5/2	15	–3	–12
7	–3	3/2	5/2	–4	–11/5
8	–5	9/2	15	–9/2	–9
9	–6	32/5	16	–16/5	–64/5
10	–3	9	18	–9/5	–81/5
11	–5	5/6	10/3	–2/3	–2
12	–10	40/3	40	–16	–32
13	–4	2	8	–4/5	–32/5
14	–6	16/5	16	–16/5	–48/5
15	–15	9/2	24	–36/5	–84/5
16	–5	5/4	10/3	–2/3	–8/3
17	–4	10/3	16/3	–16/30	–112/30
18	–10	15	60	–12	–48
19	–15	15	75	–45/2	–105/2
20	–5	10/3	10	–2	–8

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; решение игры аналитически; 10 итераций численного решения задачи, итоговое численное решение; оценить погрешность между аналитическим и приближенным решениями.

Контрольные вопросы

1. Что такое ядро игры?
2. Почему выпукло-вогнутая игра всегда разрешима в чистых стратегиях?
3. Каковы условия выпуклости игры для одного игрока и вогнутости для другого?

3. ИГРЫ С ПРИРОДОЙ. КРИТЕРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В игре с природой вторым игроком является природа, которая действует («выбирает» стратегии) случайным образом, т. е. она может или улучшать положение первого игрока, или ухудшать. В связи с этим существует несколько критериев оценки результатов исследования игровой модели.

Критерий Бернулли (принцип недостаточного основания). Все состояния природы предполагаются равновероятными. Отыскивается стратегия, реализующая максимум математического ожидания выигрыша.

Критерий Вальда (пессимистический). В соответствии с этим критерием следует применять самую осторожную стратегию, которая сведет к минимуму вероятность (риск) проигрыша и доставит минимальную прибыль. Эта стратегия обеспечивается выбором критерия:

$$\max_i \min_j a_{ij},$$

т. е. этот критерий совпадает с нижней ценой игры.

Критерий максимума (оптимистический). Выбирая этот критерий, полагают, что природа будет максимально благосклонна к игроку. Можно выбирать самые авантюристические стратегии, и они будут реализовываться:

$$\max_i \max_j a_{ij}.$$

Критерий Гурвица. Этот критерий занимает промежуточное положение между критерием Вальда и критерием максимума. Игрок определяет вероятность своего «везения» с помощью числового параметра $\alpha \in [0, 1]$:

$$\max_i \left(\alpha \min_j a_{ij} + (1 - \alpha) \max_j a_{ij} \right).$$

Ответственное лицо, принимающее решение, находит коэффициент α. Если потери могут быть весьма существенными, то значение коэффициента α приближается к единице.

Критерий Сэвиджа (критерий рисков). Этот критерий позволяет анализировать возможные *риски* от применения каждой из стратегий и выбирать такую стратегию, которая обеспечивает приемлемые потери. Риски по каждой стратегии определяются как

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij},$$

т. е. из максимально возможного выигрыша вычитается выигрыш, полученный от использования выбранной стратегии. Смысл каждого элемента матрицы рисков состоит в том, что такие потери понесет фирма (точнее, такой будет недополученная прибыль), если для каждого текущего состояния природы будет выбрана неоптимальная стратегия. Оптимальная стратегия может быть определена по формуле

$$\min_i(\max_j(\max_i a_{ij} - a_{ij})).$$

В качестве эмпирического интегрального критерия можно использовать различные рассмотренные выше критерии и выбирать стратегии, которые обеспечивают выигрыш в максимальном числе вариантов.

Лабораторная работа № 4

Цель работы — изучить постановку «игры с природой»; научиться применять различные критерии (Бернулли, Вальда, максимума (оптимистический), Гурвица, Сэвиджа) для выбора стратегии в условиях полной неопределенности.

Постановка задачи

Для заданной игры с помощью критериев Бернулли, Вальда, максимума (оптимистического), Гурвица, Сэвиджа определить оптимальные стратегии.

Пример выполнения работы

Рассмотрим игру с природой, описываемую матрицей стратегий:

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	5	8	7	5	4
a_2	1	10	5	5	6
a_3	2	4	3	6	2
a_4	3	5	4	12	3

Произведем расчет ожидаемых выигрышей для всех стратегий игрока по каждому критерию: Бернулли (Б.), Вальда (В.), Гурвица (Г.), оптимистическому (опт.).

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	Критерии			
						Б.	В.	Г.	опт.
a_1	5	8	7	5	4	**5,8**	**4**	6	8
a_2	1	10	5	5	6	5,4	1	5,5	10
a_3	2	4	3	6	2	3,4	2	4	6
a_4	3	5	4	12	3	5,4	3	**7,5**	**12**

Если воспользоваться критерием Бернулли, то следует руководствоваться стратегией a_1. Соответствующее математическое ожидание выигрыша при этом максимально и равно 5,8.

Пессимистический критерий (критерий Вальда) определяет выбор стратегии a_1 (нижняя цена игры равна 4).

Оптимистический критерий (максимума) соответствует выбору стратегии a_4 (максимально возможный выигрыш — 12).

Критерий Гурвица определим из условия равновероятной реализации пессимистической и оптимистической стратегий $(\alpha = 0{,}5)$. Наилучшая стратегия — a_4 (ожидаемый выигрыш равен 7,5).

На основании критерия Сэвиджа составим для рассматриваемой игры таблицу рисков. Если игрок выберет например, стратегию a_1, а природа реализует стратегию b_1, то игрок получит максимально возможную прибыль — 5 (недополученная прибыль составит 0). Игрок угадал состояние природы. Но если природа реализует стратегию b_4, то игрок вместо максимально возможной прибыли 12 получит прибыль 5, а недополученная прибыль составит 7, так как

$$\min_i \max_j \left(\max_i c_{ij} - c_{ij} \right) = \min\{7, 7, 6, 5\} = 5.$$

Таблица рисков имеет следующий вид:

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	0	2	0	7	2
a_2	4	0	2	7	0
a_3	3	6	4	6	4
a_4	2	5	3	0	3

Таким образом, оптимальная «рисковая» стратегия — a_4.

Окончательно, согласно интегральному критерию, следует рекомендовать выбор стратегии a_4 — лучшей по трем из пяти рассмотренных критериев. Следующая по значимости стратегия — a_1 (лучшая по двум из пяти критериев).

Варианты работы

В приведенных ниже вариантах (табл. Л4.1) строки платежной матрицы соответствуют стратегиям игрока, столбцы — состояниям природы. Найти стратегии игрока при реализации критериев недостаточного основания (Бернулли), пессимизма (Вальда), оптимизма, смешанной (Гурвица) при $\alpha = 0{,}5$ и рисков (Сэвиджа).

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; нахождение оптимальной стратегии в соответствии с критериями Вальда, максимума, Гурвица и Сэвиджа; выбор рекомендуемой стратегии по принципу простого большинства «побед».

Таблица Л4.1

Номер варианта	Платежная матрица	Номер варианта	Платежная матрица
1	$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 16 & 9 & 17 \\ 11 & 5 & 6 & 9 & 18 \\ 12 & 7 & 13 & 16 & 15 \\ 11 & 7 & 2 & 13 & 7 \end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix} 19 & 6 & 17 & 9 & 18 \\ 16 & 18 & 13 & 13 & 12 \\ 11 & 1 & 5 & 3 & 12 \\ 4 & 5 & 15 & 19 & 4 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 6 & 12 \\ 1 & 14 & 14 & 13 & 11 \\ 17 & 6 & 14 & 4 & 3 \\ 18 & 16 & 13 & 15 & 16 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} 12 & 16 & 5 & 10 & 1 \\ 5 & 0 & 13 & 10 & 11 \\ 4 & 12 & 6 & 3 & 19 \\ 9 & 0 & 7 & 16 & 1 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 1 & 11 & 6 & 15 & 10 \\ 3 & 3 & 15 & 10 & 7 \\ 4 & 7 & 16 & 0 & 10 \\ 16 & 18 & 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix} 19 & 6 & 8 & 2 & 7 \\ 7 & 9 & 2 & 0 & 12 \\ 3 & 18 & 11 & 9 & 10 \\ 19 & 10 & 6 & 19 & 4 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 16 & 3 & 14 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 17 & 0 & 12 \\ 10 & 3 & 4 & 16 & 2 \\ 2 & 3 & 9 & 11 & 19 \end{bmatrix}$	10	$\begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 & 17 & 9 \\ 0 & 5 & 16 & 0 & 15 \\ 16 & 19 & 12 & 18 & 11 \\ 19 & 12 & 7 & 2 & 13 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 17 & 8 & 1 \\ 12 & 6 & 11 & 10 & 16 \\ 4 & 19 & 11 & 15 & 2 \\ 17 & 19 & 6 & 17 & 16 \end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix} 11 & 11 & 14 & 16 & 11 \\ 2 & 11 & 12 & 10 & 5 \\ 5 & 3 & 16 & 19 & 5 \\ 2 & 10 & 12 & 17 & 3 \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} 6 & 17 & 16 & 18 & 15 \\ 18 & 8 & 16 & 8 & 8 \\ 6 & 13 & 18 & 4 & 3 \\ 15 & 14 & 2 & 18 & 19 \end{bmatrix}$	12	$\begin{bmatrix} 13 & 15 & 7 & 0 & 17 \\ 3 & 5 & 19 & 5 & 5 \\ 14 & 0 & 13 & 19 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 13 & 9 \end{bmatrix}$

Номер варианта	Платежная матрица	Номер варианта	Платежная матрица
13	$\begin{bmatrix} 10 & 11 & 16 & 15 & 2 \\ 9 & 7 & 6 & 17 & 1 \\ 3 & 0 & 19 & 15 & 4 \\ 0 & 15 & 13 & 10 & 6 \end{bmatrix}$	19	$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 & 15 & 19 \\ 18 & 10 & 6 & 10 & 12 \\ 5 & 5 & 15 & 8 & 1 \\ 3 & 15 & 15 & 12 & 0 \end{bmatrix}$
14	$\begin{bmatrix} 14 & 5 & 9 & 1 & 17 \\ 4 & 6 & 10 & 18 & 4 \\ 2 & 5 & 13 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 14 & 1 & 16 \end{bmatrix}$	20	$\begin{bmatrix} 5 & 18 & 9 & 17 & 11 \\ 1 & 10 & 0 & 0 & 3 \\ 13 & 9 & 14 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & 14 & 19 & 14 \end{bmatrix}$
15	$\begin{bmatrix} 12 & 15 & 16 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 3 & 15 & 3 \\ 11 & 18 & 17 & 0 & 14 \\ 7 & 12 & 17 & 19 & 0 \end{bmatrix}$	21	$\begin{bmatrix} 15 & 19 & 9 & 4 & 12 \\ 9 & 5 & 14 & 9 & 9 \\ 3 & 1 & 5 & 9 & 14 \\ 15 & 8 & 18 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
16	$\begin{bmatrix} 16 & 17 & 8 & 15 & 17 \\ 0 & 3 & 19 & 8 & 2 \\ 13 & 19 & 7 & 15 & 9 \\ 11 & 15 & 2 & 16 & 2 \end{bmatrix}$	22	$\begin{bmatrix} 13 & 7 & 8 & 3 & 8 \\ 2 & 6 & 14 & 18 & 7 \\ 4 & 10 & 6 & 18 & 11 \\ 0 & 14 & 3 & 0 & 14 \end{bmatrix}$
17	$\begin{bmatrix} 18 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & 13 & 17 & 15 & 2 \\ 15 & 16 & 9 & 17 & 11 \\ 2 & 3 & 19 & 9 & 4 \end{bmatrix}$	23	$\begin{bmatrix} 7 & 19 & 1 & 19 & 8 \\ 7 & 18 & 5 & 2 & 6 \\ 15 & 3 & 16 & 19 & 4 \\ 5 & 12 & 19 & 14 & 18 \end{bmatrix}$
18	$\begin{bmatrix} 7 & 15 & 12 & 7 & 12 \\ 9 & 8 & 0 & 11 & 2 \\ 15 & 6 & 11 & 10 & 0 \\ 5 & 4 & 7 & 12 & 13 \end{bmatrix}$	24	$\begin{bmatrix} 5 & 15 & 11 & 8 & 13 \\ 11 & 5 & 8 & 0 & 9 \\ 12 & 16 & 0 & 16 & 7 \\ 17 & 9 & 19 & 0 & 16 \end{bmatrix}$

Окончание табл. Л4.1

Номер варианта	Платежная матрица	Номер варианта	Платежная матрица
25	$\begin{bmatrix} 15 & 12 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 10 & 18 & 4 & 15 \\ 16 & 13 & 19 & 3 & 19 \\ 12 & 1 & 1 & 19 & 12 \end{bmatrix}$	28	$\begin{bmatrix} 12 & 12 & 17 & 9 & 3 \\ 7 & 16 & 11 & 19 & 3 \\ 16 & 11 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 1 & 8 & 13 \end{bmatrix}$
26	$\begin{bmatrix} 14 & 6 & 6 & 15 & 11 \\ 2 & 18 & 17 & 19 & 8 \\ 19 & 7 & 14 & 15 & 12 \\ 17 & 8 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$	29	$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 13 & 3 \\ 3 & 9 & 7 & 3 & 8 \\ 18 & 19 & 13 & 7 & 0 \\ 15 & 1 & 3 & 10 & 8 \end{bmatrix}$
27	$\begin{bmatrix} 12 & 19 & 10 & 12 & 4 \\ 7 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 18 & 7 & 3 & 8 & 14 \\ 5 & 12 & 6 & 7 & 17 \end{bmatrix}$	30	$\begin{bmatrix} 12 & 13 & 7 & 13 & 10 \\ 8 & 14 & 5 & 5 & 16 \\ 13 & 16 & 11 & 5 & 14 \\ 13 & 6 & 18 & 12 & 4 \end{bmatrix}$

Контрольные вопросы

1. Что подразумевается под термином «игры с природой»?
2. Сформулируйте критерий недостаточного основания (Бернулли).
3. Укажите, в чем состоит различие между критериями Вальда, максимума и Гурвица.
4. Дайте определение критерию Сэвиджа. Раскройте понятие рисков.

4. НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ. КРИТЕРИИ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ В БЕСКОАЛИЦИОННЫХ ИГРАХ НЕСКОЛЬКИХ ИГРОКОВ

Многие практические задачи принятия решения в условиях конфликта характеризуются большим числом участников и, как следствие, неантагонистичностью конфликтной ситуации. Если говорить о конфликте двух лиц и его моделях, то можно заметить, что он также не исчерпывается только антагонистическим случаем. Интересы игроков могут пересекаться, но не быть противоположными. Бывает, что такие взаимовыгодны обоим игрокам (в антагонистических играх это невозможно), что делает целесообразным кооперирование (выбор согласованного решения), приводящее к увеличению выигрыша обоих игроков. Однако, когда кооперация или соглашения невозможны по правилам игры, возникают конфликты. В связи с этим в неантагонистических играх различают бескоалиционное поведение, когда соглашения между игроками запрещены правилами, и кооперативное поведение игроков, когда разрешается кооперация в виде выбора совместных стратегий и совершения побочных платежей.

В этом разделе рассмотрены критерии выбора оптимальных стратегий в неантагонистических бескоалиционных играх. Введем несколько определений.

Система

$$\Gamma = \left(N,\ \{x_i\}_{i \ni N},\ \{H_i\}_{i \ni N}\right),$$

в которой $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество игроков, а X_i — множество стратегий игрока i, определенная на декартовом произведении множеств стратегий игроков $X = \Pi_{i=1}^{n} X_i$ (множество ситуаций игры), называется *бескоалиционной игрой*.

Бескоалиционная игра n лиц происходит следующим образом. Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают свои стратегии x_i из множеств стратегий X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, в результате чего формируется ситуация $x = (x_i, \ldots, x_n)$, $x_i \in X_i$. После этого каждый игрок i получает выигрыш $H_i(x) = H_i(x_1, \ldots, x_n)$ и игра заканчивается. Если множества чистых стратегий игроков X_i конечны, то игра называется *конечной бескоалиционной игрой n лиц*.

Равновесие по Нэшу. Ситуацией равновесия по Нэшу является линия поведения игроков, если она устойчива относительно их индивидуального отклонения, т. е. в этой ситуации ни одному игроку не выгодно изменять свое мнение о выбранной стратегии при сохранении линии поведения другими игроками, так как он первым же при этом и пострадает.

Ситуация $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ называется ситуацией *равновесия по Нэшу* (в чистых стратегиях), если для всех $x_i \in X_i$, $i \in N$, справедливо неравенство

$$H_i(x_i^*, x_{(-i)}^*) \geq H_i(x_i, x_{(-i)}^*).$$

Совокупность всех равновесных по Нэшу ситуаций игры называется *множеством равновесий Нэша*.

Оптимальность по Парето. Ситуацией, оптимальной по Парето, называется состояние системы, при котором значение каждого частного критерия, описывающего состояние системы, не может быть улучшено без ухудшения положения других элементов.

Рассмотрим множество векторов

$$\{H(x)\} = \{H_1(x), \ldots, H_n(x)\}, \ x \in X, \ x = \Pi_{i=1}^{n} x_{i,},$$

т. е. множество значений вектор-выигрышей игроков во всех возможных ситуациях $x \in X$.

Ситуация $\overline{x}$ в бескоалиционной игре Г называется *оптимальной по Парето*, если не существует ситуации $x \in X$, для которой имеют место неравенства

$$H_i(x) \geq H_i(x)$$

для всех $i \in N$ и

$$H_{i0}(x) \geq H_{i0}(\overline{x})$$

хотя бы для одного $i_0 \in N$.

Рассмотрим применение данных критериев выбора стратегий на примере нескольких классических игр.

Игра «Перекресток». Два автомобилиста двигаются по двум взаимно перпендикулярным дорогам и одновременно встречаются на перекрестке. Каждый из них может остановиться (стратегия 1 — α_1 или β_1) и ехать (стратегия 2 — α_2 или β_2).

Предполагается, что каждый из игроков предпочитает остановиться, а не пострадать в аварии, и проехать, если другой сделал остановку. Этот конфликт может быть формализован биматричной игрой:

$$(A, B) = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad\beta_1 & \qquad\beta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (1,1) & (1-\varepsilon,2) \\ (2,1-\varepsilon) & (0,0) \end{bmatrix} \end{array}.$$

Равновесие Нэша: (1; 2) (2; 1).

Оптимальность по Парето: (1; 1) (1; 2) (2; 1).

Таким образом, для каждого игрока равновесной является стратегия «ехать», если другой игрок остановился, и «остановиться», если другой выбрал стратегию «ехать». Однако выигрыш в две единицы каждый игрок может получить только при выборе стратегии «ехать», поэтому неизбежна борьба за лидерство.

Игра «Семейный спор». Рассматривается биматричная игра с матрицей

$$(A, B) = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \beta_1 & \quad\beta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (4,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,4) \end{bmatrix} \end{array}.$$

Существуют различные интерпретации этой игры, но наиболее известна следующая. Муж (игрок 1) и жена (игрок 2) могут выбрать одно из двух вечерних развлечений: футбольный матч (стратегия 1, более предпочтительная для мужчины, как видно из выигрышей в ситуации (α_1, β_1)) или театр (стратегия 2, более предпочтительная для женщины, что отражено в выигрышах ситуации (α_2, β_2)). Если их желания не совпадают, они остаются дома: (α_1, β_2) или (α_2, β_1). Однако обоим гораздо важнее провести вечер вместе, чем участвовать в развлечении (хотя и предпочтительном) одному, что отражается в нулевых выигрышах в ситуациях (α_1, β_2) и (α_2, β_1).

Равновесие Нэша: (4; 1) (1; 4).

Оптимальность по Парето: (4; 1) (1; 4).

Игра «Дилемма заключенного». Интерпретация известной математической дилеммы такова: игроки являются пойманными преступниками, которые находятся под подозрением в совершении тяжкого преступления и содержатся раздельно. Если оба сознаются (стратегия 1), то будут осуждены на пять лет каждый (ситуация (α_1, β_1)), если оба будут молчать (стратегия 2), то будут, за неимением доказательств, обвинены в незначительном преступлении и получат срок по одному году (ситуация (α_2, β_2)). Если признается один, а другой промолчит, то первый будет выпущен на свободу, а второй получит 10 лет (ситуации (α_1, β_2) и (α_2, β_1)). Таким образом, игра описывается матрицей

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \quad\beta_1 & \qquad\beta_2 \end{array} \\ (A, B) = \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (-5, -5) & (0, -10) \\ (-10, 0) & (-1, -1) \end{bmatrix}. \end{array}$$

Парадокс игры в том, что стороннему наблюдателю очевидно выигрышной стратегией кажется «молчать», чтобы получить незначительный срок и выйти на свободу (ситуация (α_2, β_2)). Однако из этой ситуации велик соблазн отклониться каждому из игроков в пользу другой стратегии («говорить»), чтобы получить больший выигрыш и выйти на свободу.

Поэтому в этой игре одна ситуация равновесия — (α_1, β_1), она дает игрокам выигрыш (–5; –5).

Остальные ситуации являются оптимальными по Парето.

Равновесие Нэша: (–5; –5).

Оптимальность по Парето: (–1; –1) (–10; 0) (0; –10).

Следует обратить внимание, что множество пересечений ситуаций, оптимальных по двум критериям, пусто.

Лабораторная работа № 5

Цель работы — изучить критерии выбора стратегий в неантагонистической бескоалиционной игре двух игроков на основе равновесия Нэша и оптимальности по Парето. Проверить данные критерии на примере рассмотренных выше игр. Исследовать свойства оптимальных решений неантагонистических бескоалиционных игр на примере биматричных (2×2)-игр.

Постановка задачи

1. Сгенерировать случайную биматричную игру (10×10). Найти ситуации, равновесные по Нэшу и оптимальные по Парето, а также пересечение множеств этих ситуаций. Выполнить проверку реализованных алгоритмов на примере трех известных игр: «Семейный спор», «Перекресток», «Дилемма заключенного».

2. Для заданной биматричной (2×2)-игры $\Gamma(A, B)$, пользуясь теоремами о свойствах оптимальных решений, найти ситуации, равновесные по Нэшу, для исходной игры и для ее смешанного расширения.

Методические указания к выполнению работы

Теорема Л5.1. Пусть $\Gamma(A, B)$ — биматричная (2×2)-игра, где (A, B) — невырожденные матрицы:

$$(A, B) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \quad\beta_1 & \qquad\beta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (\alpha_1, \beta_1) & (\alpha_1, \beta_2) \\ (\alpha_2, \beta_1) & (\alpha_2, \beta_2) \end{bmatrix} \end{array}.$$

Если игра Γ *имеет вполне смешанную ситуацию равновесия, то она единственная и вычисляется по формулам:*

$$\mathbf{x} = v_2 u B^{-1},$$

$$\mathbf{y} = v_1 A^{-1} u,$$

где

$$v_1 = 1/\left(u A^{-1} u\right), \quad v_2 = 1/\left(u B^{-1} u\right).$$

Возможны три случая:

1) если в исходной игре Γ по крайней мере один игрок имеет строго доминирующую стратегию, тогда игра Γ и ее смешанное расширение $\overline{\Gamma}$ имеют единственную ситуацию равновесия по Нэшу;

2) если игра Γ не имеет ситуации равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, то, согласно приведенной выше теореме, в игре существует вполне смешанная ситуация равновесия (x^*, y^*);

3) если игра Г имеет две равновесные по Нэшу ситуации, в смешанном дополнении игры существует еще одна вполне смешанная ситуация равновесия (x^*, y^*).

Пример выполнения работы

Рассмотрим случайную биматричную игру:

$\binom{24}{32}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{40}{17}$	$\binom{-46}{-29}$	$\binom{27}{-42}$	$\binom{-46}{-8}$	$\binom{35}{-20}$	$\binom{-23}{-16}$	$\binom{-33}{12}$	$\binom{-50}{-1}$
$\binom{-40}{-11}$	$\binom{28}{-22}$	$\binom{-15}{-47}$	$\binom{38}{49}$	$\binom{26}{-25}$	$\binom{-38}{26}$	$\binom{-35}{35}$	$\binom{-26}{30}$	$\binom{-37}{23}$	$\binom{-19}{-30}$
$\binom{-1}{46}$	$\binom{-36}{-14}$	$\binom{30}{-17}$	$\binom{-35}{5}$	$\binom{4}{-22}$	$\binom{7}{-33}$	$\binom{17}{-2}$	$\binom{-6}{-15}$	$\binom{-8}{-48}$	$\binom{-33}{-14}$
$\binom{46}{28}$	$\binom{1}{-6}$	$\binom{2}{18}$	$\binom{-48}{-38}$	$\underline{\binom{\mathbf{45}}{\mathbf{49}}}$	$\binom{-3}{-28}$	$\binom{-29}{37}$	$\binom{-24}{7}$	$\binom{36}{17}$	$\binom{24}{-19}$
$\binom{-9}{25}$	$\binom{41}{-48}$	$\binom{-9}{6}$	$\binom{-17}{-22}$	$\binom{-30}{12}$	$\binom{-20}{-5}$	$\binom{-44}{32}$	$\binom{41}{-35}$	$\binom{-43}{42}$	$\binom{9}{-33}$
$\binom{19}{13}$	$\binom{49}{-37}$	$\binom{0}{-10}$	$\binom{-30}{39}$	$\binom{-48}{-16}$	$\binom{38}{42}$	$\binom{-18}{-31}$	$\binom{-27}{-6}$	$\binom{35}{-16}$	$\binom{11}{-43}$
$\binom{37}{10}$	$\binom{4}{-38}$	$\binom{-9}{36}$	$\binom{-7}{-30}$	$\binom{-21}{5}$	$\binom{-9}{-9}$	$\binom{15}{-30}$	$\binom{-49}{34}$	$\binom{-23}{43}$	$\binom{-20}{-15}$
$\binom{-33}{37}$	$\binom{29}{23}$	$\binom{-29}{5}$	$\binom{24}{17}$	$\binom{-21}{49}$	$\binom{17}{-30}$	$\underline{\binom{\mathbf{49}}{\mathbf{47}}}$	$\binom{41}{8}$	$\binom{-36}{6}$	$\binom{40}{34}$
$\binom{-40}{9}$	$\binom{24}{-32}$	$\binom{-45}{41}$	$\binom{49}{34}$	$\binom{1}{-12}$	$\underline{\binom{47}{43}}$	$\binom{49}{-11}$	$\binom{-17}{-39}$	$\binom{26}{24}$	$\binom{-15}{-3}$
$\binom{46}{-49}$	$\binom{9}{-5}$	$\binom{28}{36}$	$\binom{-38}{24}$	$\binom{-11}{-39}$	$\binom{32}{-41}$	$\binom{9}{-13}$	$\binom{42}{10}$	$\binom{19}{-18}$	$\binom{37}{4}$

Стратегии первого игрока записаны по строкам, второго — по столбцам.

Ситуации, равновесные по Нэшу, выделены курсивом и подчеркнуты.

Ситуации, оптимальные по Парето, выделены жирным и подчеркнуты.

Ситуации, и равновесные по Нэшу, и оптимальные по Парето, соответственно выделены жирным курсивом и подчеркнуты.

Легко проверить, например, что кроме ситуаций (45, 49) и (49, 47) нет других ситуаций, в которых выигрыш одного игрока можно было бы улучшить, не ухудшив при этом выигрыш другого. Следовательно, эти ситуации оптимальны по Парето.

Аналогично с равновесием по Нэшу: на примере ситуации (47, 43) можно видеть, что первому игроку не имеет смысла изменять свою стратегию (строку матрицы) при фиксации выбора второго игрока (столбца), а второму игроку нет смысла изменять свою стратегию (столбец).

Рассмотрим биматричную игру:

```
( 0/ 1) ( 11/ 4)
( 7/ 8) ( 6/ 3)
```

Как видим, у этой игры есть две равновесные по Нэшу ситуации в чистых стратегиях (выделены жирным и подчеркнуты), поэтому в смешанном дополнении игры существует еще одна вполне смешанная ситуация равновесия, которую мы можем рассчитать по формулам (Л5.1):

$$\mathbf{x} = [0{,}625;\ 0{,}375],\ \ \mathbf{y} = [0{,}417;\ 0{,}583].$$

Равновесные выигрыши: $v_1 = 6{,}417$; $v_2 = 3{,}625$.

Варианты работы

В первой части задания требуется сгенерировать случайную платежную матрицу. В табл. Л5.1 приведены биматричные игры для второй части задания.

Таблица Л5.1

Номер варианта	Биматричная игра	Номер варианта	Биматричная игра	Номер варианта	Биматричная игра
1	$\begin{bmatrix} (5,0) & (8,4) \\ (7,6) & (6,3) \end{bmatrix}$	3	$\begin{bmatrix} (3,1) & (5,0) \\ (9,6) & (2,3) \end{bmatrix}$	5	$\begin{bmatrix} (5,8) & (7,4) \\ (11,7) & (6,9) \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} (6,7) & (8,4) \\ (2,1) & (9,3) \end{bmatrix}$	4	$\begin{bmatrix} (4,7) & (5,2) \\ (0,2) & (7,3) \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} (3,8) & (2,4) \\ (1,3) & (12,5) \end{bmatrix}$

Окончание табл. Л5.1

Номер варианта	Биматричная игра	Номер варианта	Биматричная игра	Номер варианта	Биматричная игра
7	$\begin{bmatrix} (0, 1) & (9, 2) \\ (4, 6) & (6, 3) \end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix} (3, 0) & (5, 4) \\ (11, 6) & (6, 7) \end{bmatrix}$	15	$\begin{bmatrix} (0, 10) & (9, 1) \\ (7, 8) & (6, 11) \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} (4, 7) & (8, 3) \\ (2, 1) & (10, 6) \end{bmatrix}$	12	$\begin{bmatrix} (10, 7) & (0, 4) \\ (2, 1) & (9, 3) \end{bmatrix}$	16	$\begin{bmatrix} (8, 7) & (1, 2) \\ (2, 0) & (3, 4) \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} (5, 1) & (10, 4) \\ (8, 6) & (6, 9) \end{bmatrix}$	13	$\begin{bmatrix} (4, 1) & (6, 2) \\ (11, 7) & (0, 5) \end{bmatrix}$	17	$\begin{bmatrix} (1, 5) & (6, 4) \\ (7, 9) & (3, 8) \end{bmatrix}$
10	$\begin{bmatrix} (6, 8) & (7, 4) \\ (0, 1) & (9, 3) \end{bmatrix}$	14	$\begin{bmatrix} (9, 8) & (7, 4) \\ (2, 1) & (10, 3) \end{bmatrix}$	18	$\begin{bmatrix} (2, 7) & (8, 4) \\ (1, 1) & (11, 3) \end{bmatrix}$

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; ситуации, оптимальные по Парето, устойчивые по Нэшу, пересечения множеств этих ситуаций; все равновесные ситуации, в том числе в смешанном дополнении игры.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение равновесных ситуаций в игре.
2. Объясните, что такое оптимальность по Парето в бескоалиционных неантагонистических играх нескольких игроков.
3. Объясните понятие «нахождение равновесия в смешанных стратегиях».
4. Всегда ли существуют смешанные, равновесные по Нэшу ситуации в биматричной игре ($n \times m$)?

5. ПОЗИЦИОННЫЕ ИГРЫ. МЕТОД ОБРАТНОЙ ИНДУКЦИИ

Введем несколько определений.

Позиционная игра — это *бескоалиционная игра*, моделирующая процессы последовательного принятия решений игроками в условиях изменяющейся во времени и неполной информации.

Смысл позиционной игры заключается в последовательном переходе от одного состояния игры к другому, когда игроки выбирают одно из возможных действий согласно правилам игры либо случайным образом (случайный ход).

Пример позиционных игр: игры в крестики-нолики, шашки, шахматы, карточные игры, домино и др. Интересно отметить, что право выбора первого хода в этих играх определяется *случайным образом*.

Позиция — состояние игры (отсюда и название — позиционные игры).

Альтернатива — возможные выборы в каждой позиции.

Дерево игры — множество позиций в виде древовидного упорядоченного множества.

Цепь — каждая окончательная вершина определяет единственную цепь (последовательность идущих друг за другом звеньев), связывающую начальную вершину с данной.

Позиционная форма игры. Рассмотрим простейший пример — игру крестики-нолики на поле 3×3.

Пронумеруем соответствующие клетки:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Обозначения игроков: × и ○.

Дерево этой игры (в нем информационные множества — одноточечные) будет иметь вид, как на рис. 5.1, где цифры у ребер —

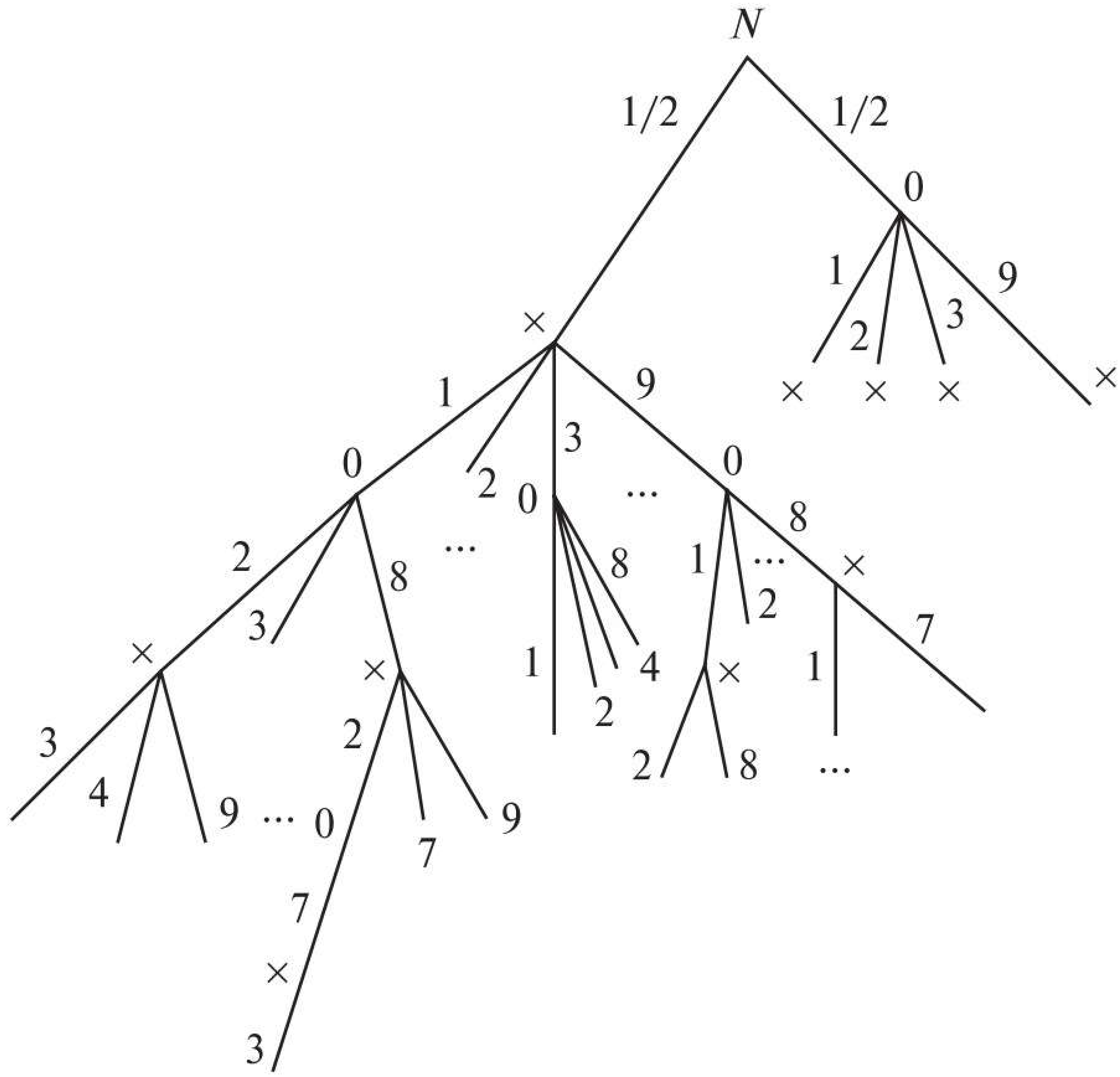

Рис. 5.1. Пример дерева позиционной игры

это номера клеток, в которых ставится соответствующий крестик или нолик, а в вершине, обозначенной N, ход делает природа, равновероятно выбирая очередность хода (например, с помощью подбрасывания монетки). Также следует учесть, что дерево отображает все возможные ходы независимо от их разумности.

Условная запись позиционной формы игры включает перечисленные ниже элементы:

1) список игроков;
2) дерево игры;
3) указание для каждой вершины номера игрока (или природы (*случайный механизм*) — игрока под номером 0), который делает ход в этой вершине;
4) список ходов, доступных игроку в каждой вершине, и соответствия между ходами и последующими вершинами;
5) информационные множества;
6) указание выигрышей в каждой терминальной (окончательной) вершине;
7) вероятное распределение на множестве ходов в каждой вершине, в котором ход делает природа.

Игра в позиционной форме называется *игрой с совершенной информацией*, если каждое информационное множество состоит из единственной вершины (примеры игр с совершенной информацией: шахматы, шашки). В противном случае игра называется *игрой с несовершенной информацией*.

Соответственно различают позиционные игры:

1) *с полной информацией* (шашки, шахматы).

Каждый игрок при своем ходе знает ту позицию дерева игры, в которой он находится;

2) *с неполной информацией* (домино).

В игре с неполной информацией природа делает ход первой, и он ненаблюдаем по крайней мере одним из игроков. В противном случае игра является игрой с полной информацией.

В играх с неполной информацией игрок, делающий ход, не знает точно, в какой именно позиции дерева игры он фактически находится. Этому игроку известно лишь некоторое множество позиций, включающее в себя его фактическую позицию. Такое множество позиций называется *информационным множеством*. В игре с неполной информацией игрок при своем ходе знает, в каком информационном множестве он находится, но ему неизвестно, в какой именно позиции этого множества.

Метод обратной индукции. В динамических играх с полной и совершенной информацией удобно решать игру методом обратной индукции. В методе обратной индукции рассматриваются все последние вершины игры, в которых один из игроков делает выбор, исходя из его рациональности. Далее процесс повторяется для всех предшествующих вершин, пока не дойдет до начальной вершины.

Для детального разбора обратной индукции в конечной игре с совершенной информацией следует начинать с определения оптимального «действия» в последних вершинах дерева, где принимается решение (т. е. в тех вершинах, для которых последующие вершины — только терминальные). Если решение, принимаемое игроком в такой вершине, не зависит от стратегического взаимодействия, то имеют дело с простой задачей принятия решения. На следующем шаге можно обратиться к «предпоследней» вершине и найти оптимальное решение, предвидя ход, который будет сделан в последней вершине, и т. д.

Под-игра — поддерево, которое начинается с некоторой вершины дерева данной игры, содержит все вершины, следующие за ней, и только их.

Выигрыш внутренней (нетерминальной) *вершины* — цена соответствующей под-игры.

Таким образом, суть метода обратной индукции состоит в постепенном «сворачивании» дерева от конечных вершин к начальной (корню). Для каждой вершины, начиная с терминальных и заканчивая корнем, определяется ее выигрыш по следующим правилам:

- если данная вершина является терминальной, цена подигры соответствует выигрышу в данной вершине;
- если данная вершина имеет только одного потомка, ее выигрыш соответствует выигрышу потомка;
- если данная вершина, соответствующая ходу игрока N, имеет несколько потомков, то выигрыш вершины соответствует выигрышу того потомка, для которого выигрыш игрока N максимален;
- если данная вершина — корень дерева, то ее выигрыш соответствует цене всей игры.

Обоснованием применения данного метода является следующая теорема. *В любой конечной игре с совершенной информацией* Γ_E *существует ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, которая может быть найдена с помощью метода обратной индукции. Более того, если ни один из игроков не имеет одинаковых выигрышей ни в одной из терминальных вершин, то существует единственное равновесие Нэша, которое может быть получено таким образом.*

В качестве примера рассмотрим игру, заданную деревом, приведенным на рис. 5.2.

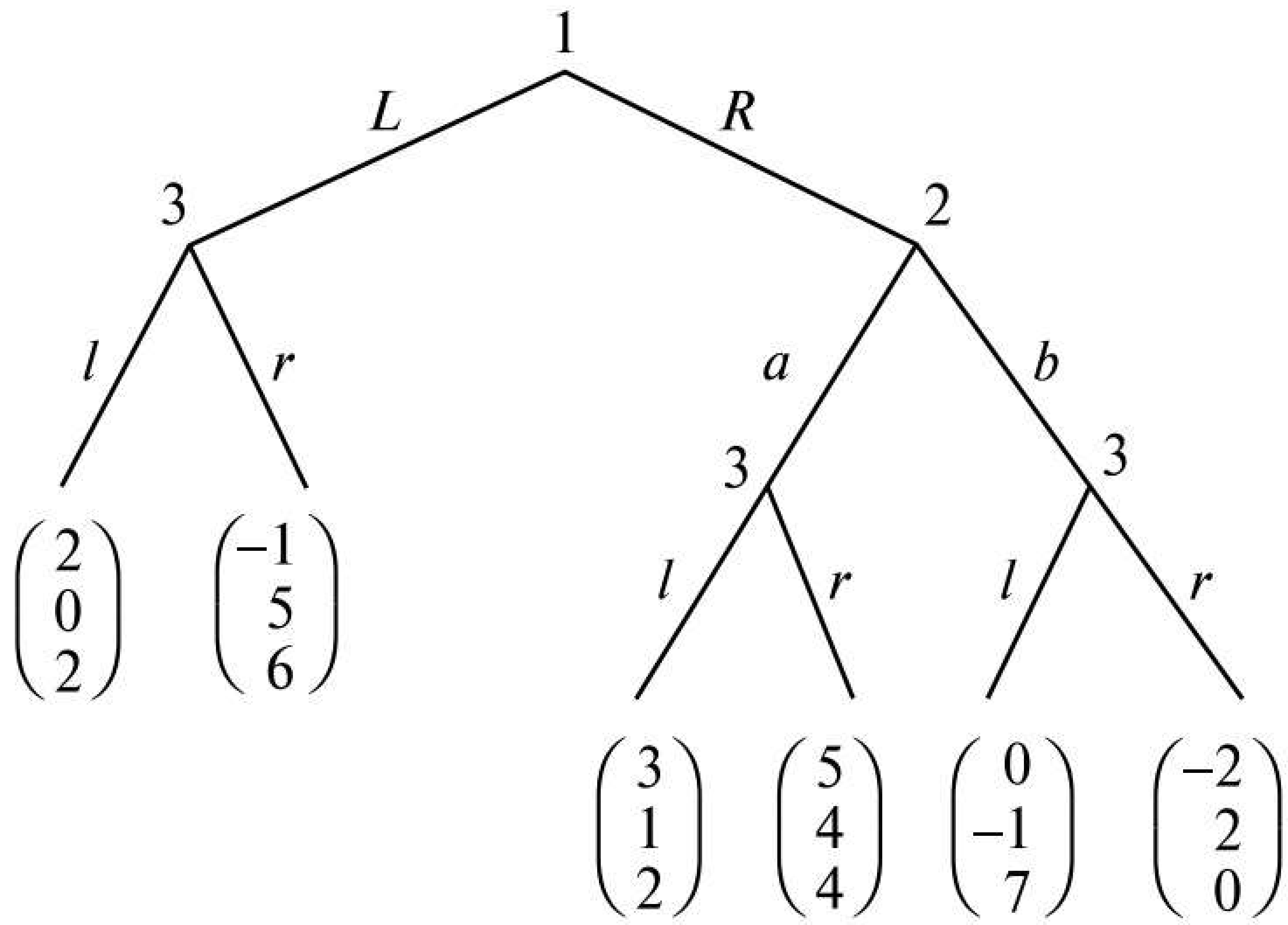

Рис. 5.2. Дерево исходной игры

В терминальных вершинах записаны варианты каждого из трех игроков. В узлах дерева — номер игрока, осуществляющего ход. На ребрах — альтернатива из множества стратегий соответствующего игрока.

Редуцируем приведенную игру согласно правилам метода обратной индукции. Рассмотрим все вершины дерева, следующими для которых являются только терминальные вершины, и сделаем выбор за игрока, номер которого указан в узлах дерева (это игрок 3). Следовательно, выбирать будем по величине выигрыша, записанного в третьей позиции информационного множества терминальных вершин. После окончания процедуры выбора получим редуцированное дерево, изображенное на рис. 5.3. После следующего шага метода обратной индукции (выбор за игрока 2) получим дерево, приведенное на рис. 5.4.

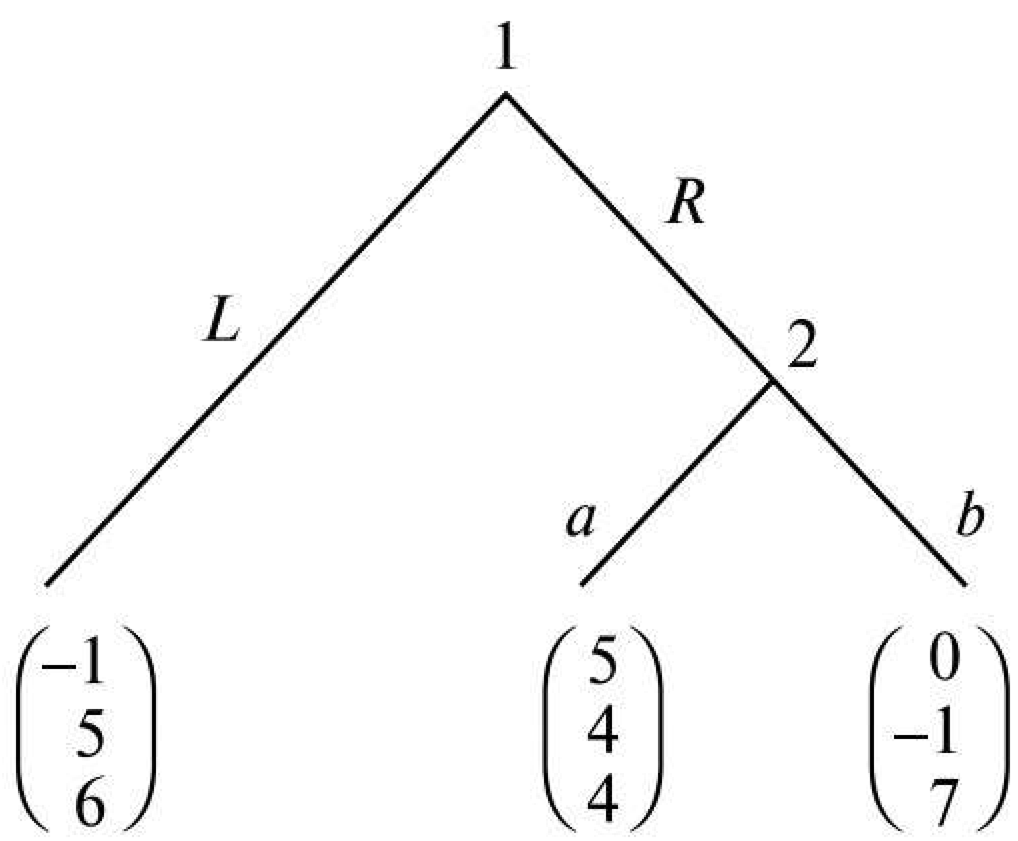

Рис. 5.3. Дерево первой редуцированной игры

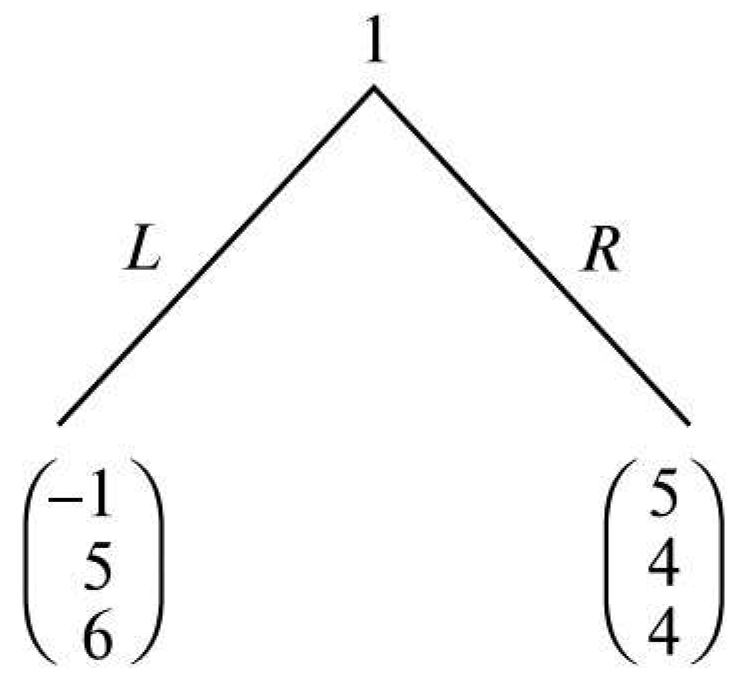

Рис. 5.4. Дерево второй редуцированной игры

На последнем шаге метода мы делаем выбор за игрока 1, которому, очевидно, рационально выбрать альтернативу, дающую выигрыш 5. Таким образом, игра решена, и в ней найден оптимальный путь от корня до терминальной вершины по методу обратной индукции. Поскольку в терминальных вершинах совпадающих выигрышей не было, такой путь является единственным.

Лабораторная работа № 6

Цель работы — изучить метод обратной индукции и его применение к решению конечных позиционных игр с полной информацией. Изучить свойства решений таких игр.

Постановка задачи

Найти решение конечношаговой позиционной игры с полной информацией. Для этого сгенерировать и построить дерево случайной игры согласно варианту, используя метод обратной индукции, найти решение игры и путь (все пути, если он не единственный) к этому решению. Обозначить их на дереве.

Пример выполнения работы

Рассмотрим игру, заданную в позиционной форме в виде дерева, представленного на рис. Л6.1. Все вершины для удобства описания пронумерованы слева направо. Номер вершины записан внутри кружка, обозначающего вершину. В игре участвуют два игрока: A и B, у каждого — по две стратегии, поэтому дерево бинарное. Пусть первым ходит игрок A (ход в корне дерева), затем они ходят поочередно. Чтобы не загромождать рисунок, обозначения игроков у каждого узла не приводятся, так как нетрудно определить, кто ходит в каждом узле, зная, чей ход первый.

Итак, метод обратной индукции заключается в установлении выигрышей для корня путем последовательного восхождения от листьев (терминальных вершин). Выигрыши в узле, для обоих потомков которого выигрыши определены, устанавливаются равными выигрышам того потомка, при выборе которого игрок, осуществляющий ход, получит больший выигрыш.

Проследим ход метода обратной индукции. Напомним, что начинать нужно с узлов, за которыми следуют только терминальные вершины. Определим выигрыши для узла 13. В данном узле ход осуществляет игрок B. Поскольку выигрыш в узле 12 (1) больше выигрыша в узле 14 (–3), узлу 13 присваивается пара выигрышей (8, 1). Результат первого шага представлен на рис. Л6.2.

Аналогично определим пары выигрышей для узлов 3, 7, 15, 19, 33 с учетом того, что в данных узлах ходит игрок A. В узле 3 устанавливается пара выигрышей (–4, 3), так как $-4 > -5$, в узле 7 — (6, –8), так как $6 > 1$, в узле 15 — (8, 1), так как $8 > -2$, и т. д. (рис. Л6.3–Л6.6).

На рис. Л6.5 можно видеть, что в узле 17 для игрока A обе стратегии принесут одинаковый выигрыш и могут считаться оптимальными. Поэтому узлу 17 будет присвоено две пары выигрышей, и, следовательно, через этот узел будут проходить два пути: первый приведет в узел 11, второй — в узел 21.

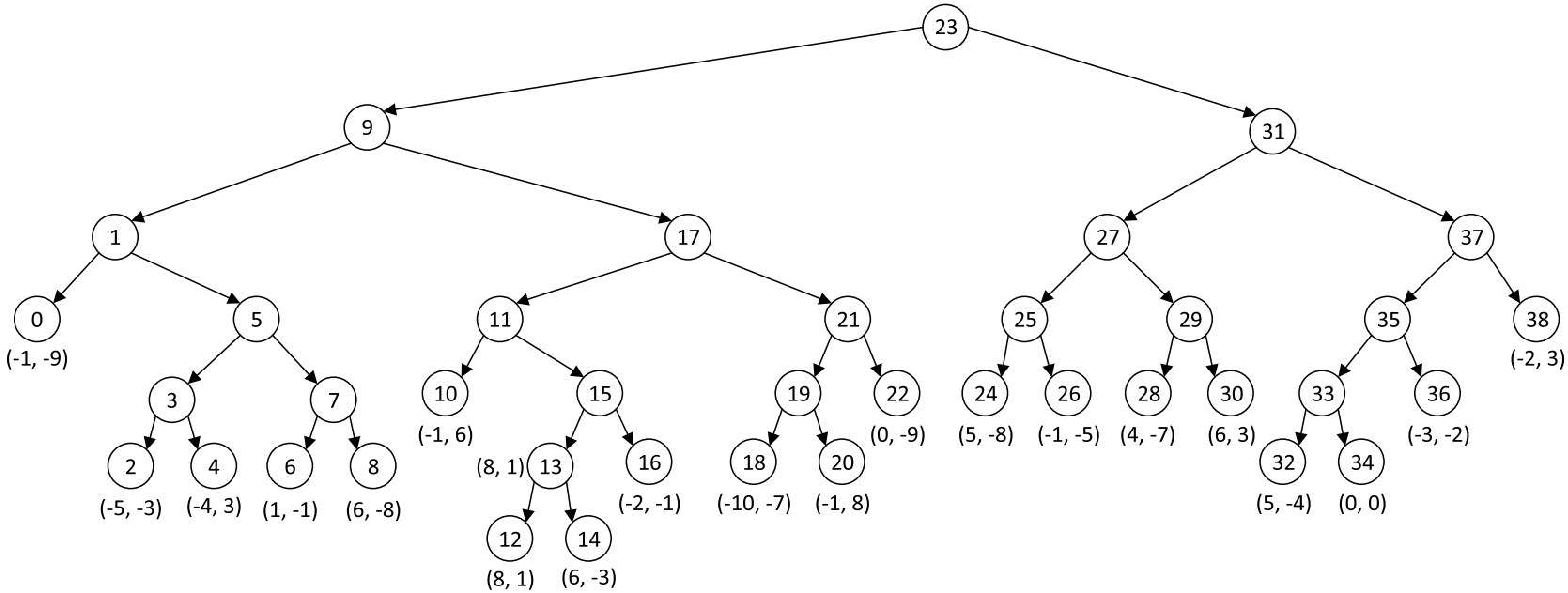

Рис. Л6.1. Дерево исходной игры

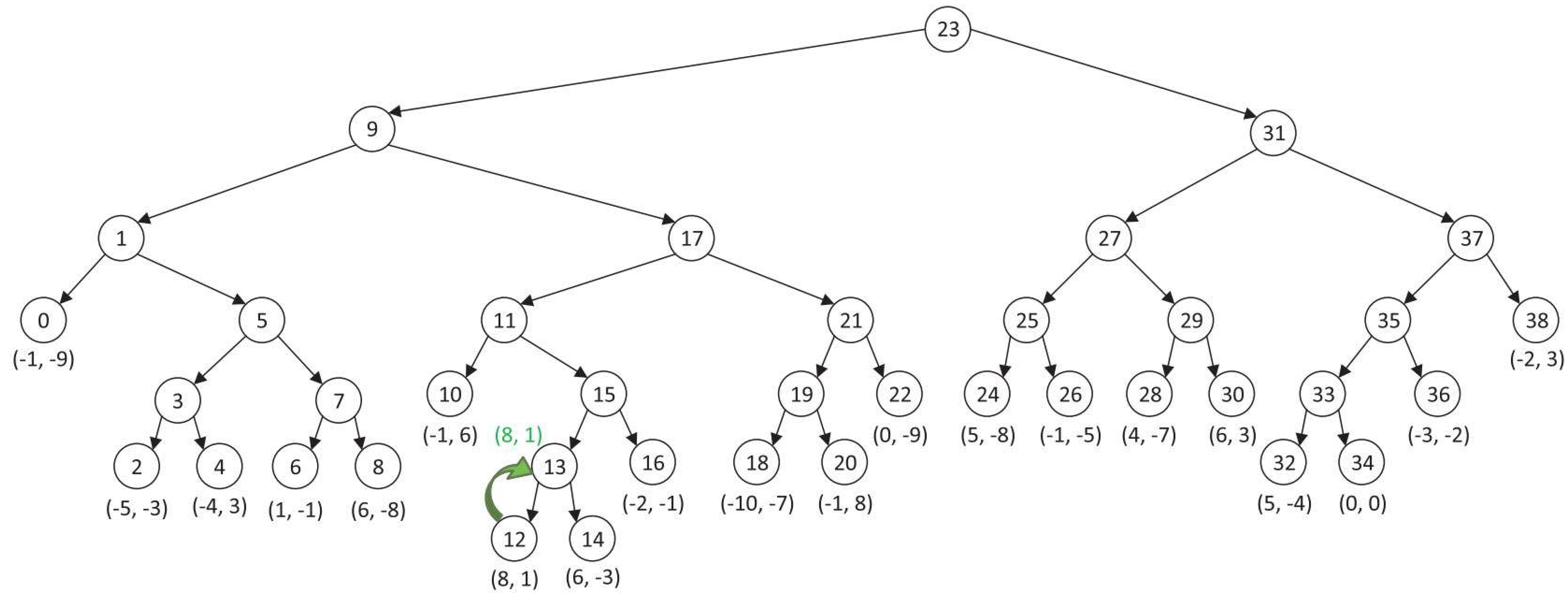

Рис. Л6.2. Дерево игры на первой итерации метода обратной индукции

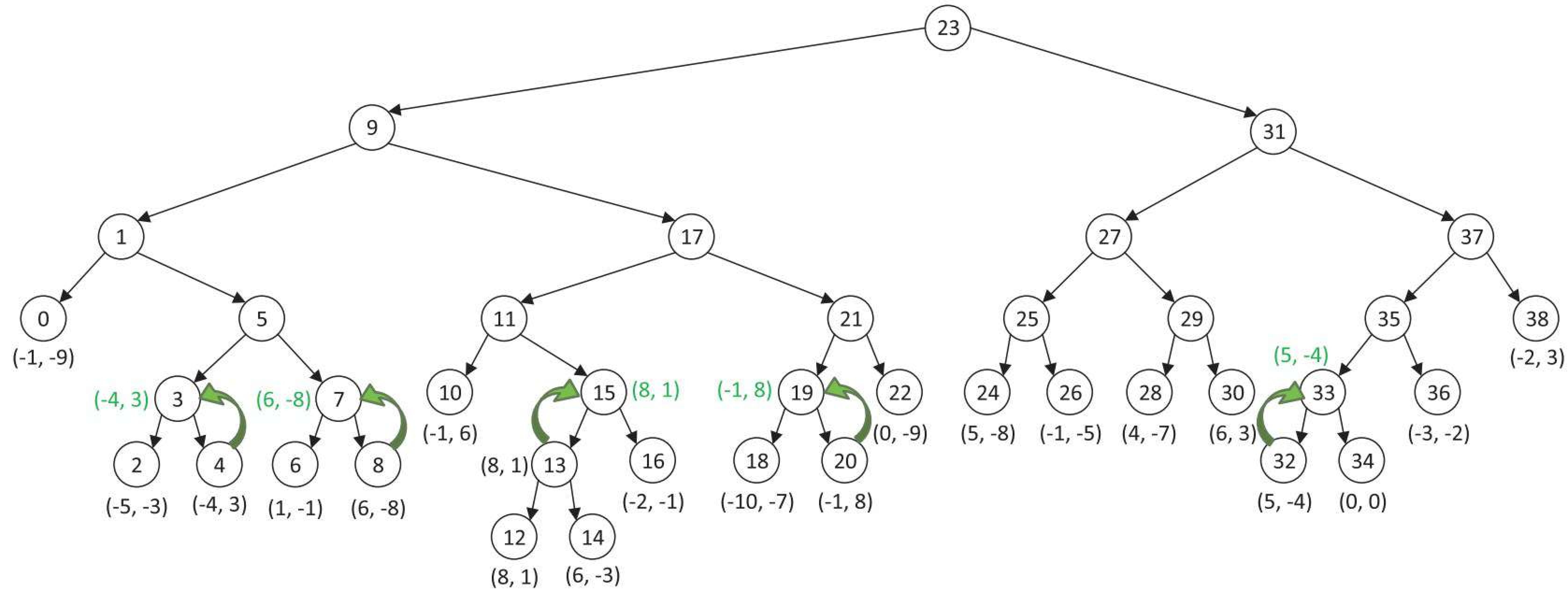

Рис. Л6.3. Дерево игры на второй итерации метода обратной индукции

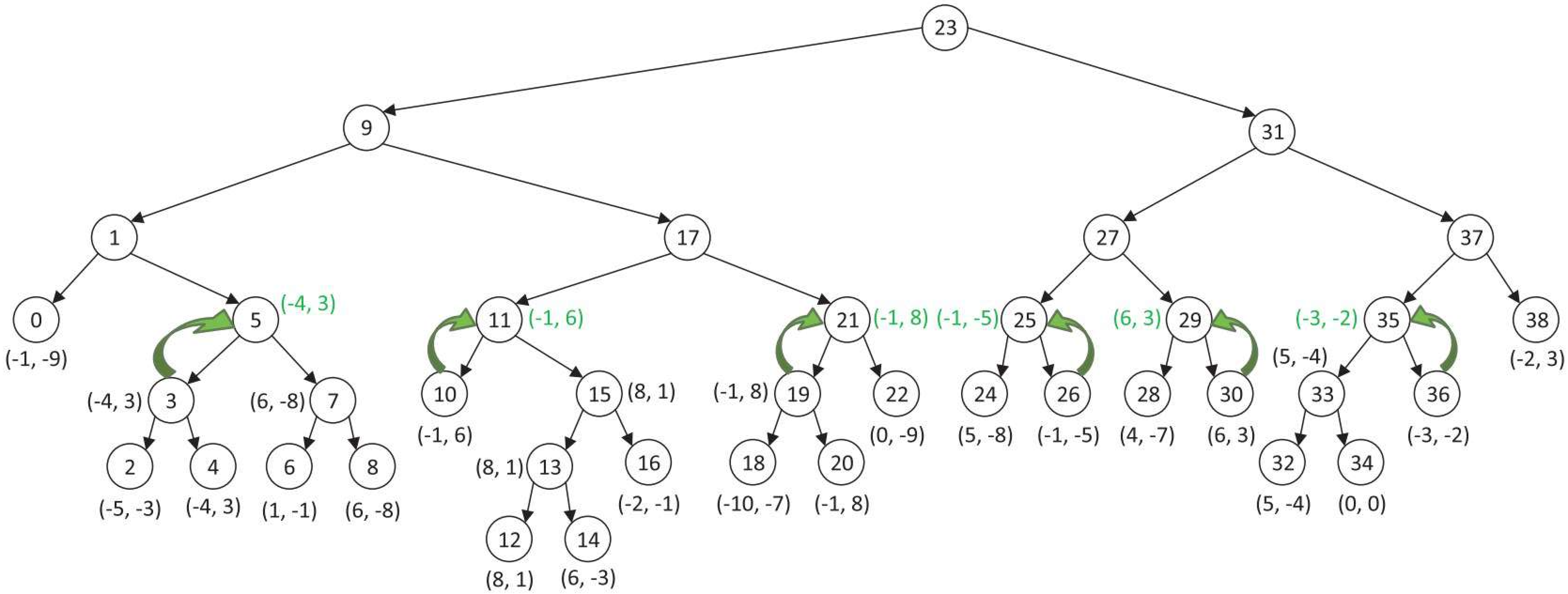

Рис. Л6.4. Дерево игры на третьей итерации метода обратной индукции

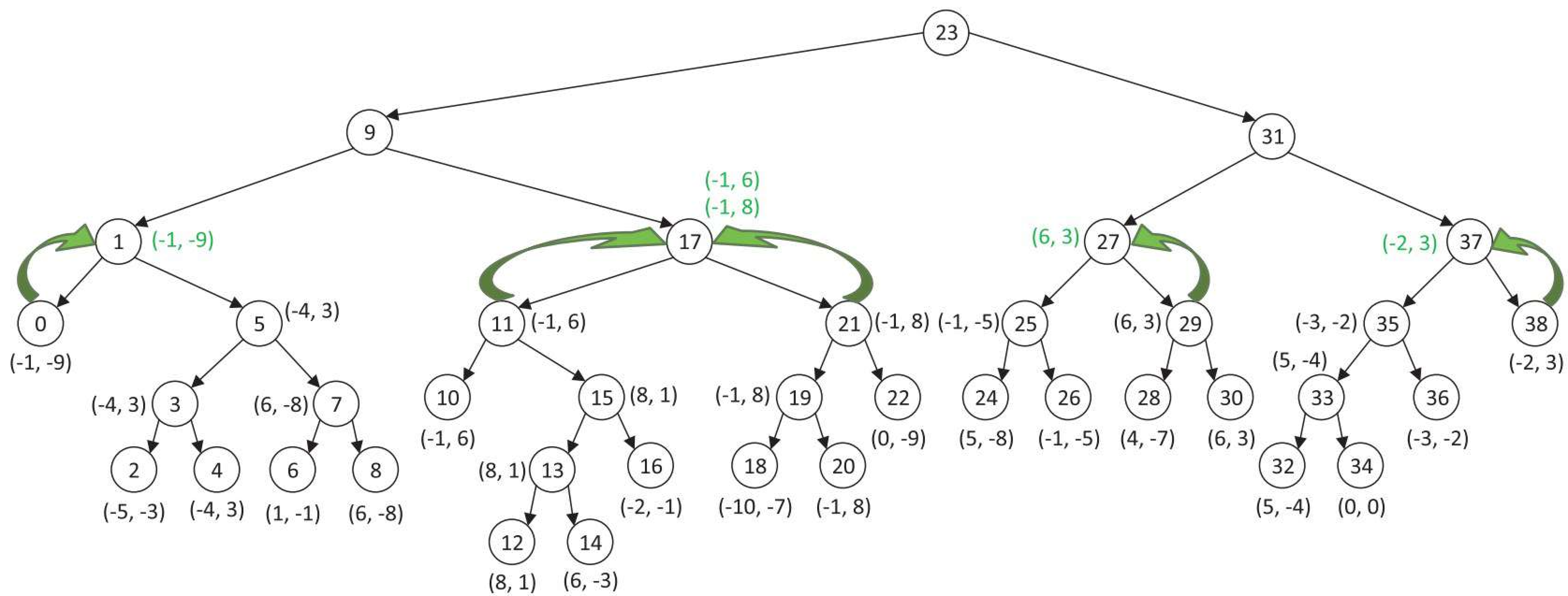

Рис. Л6.5. Дерево игры на четвертой итерации метода обратной индукции

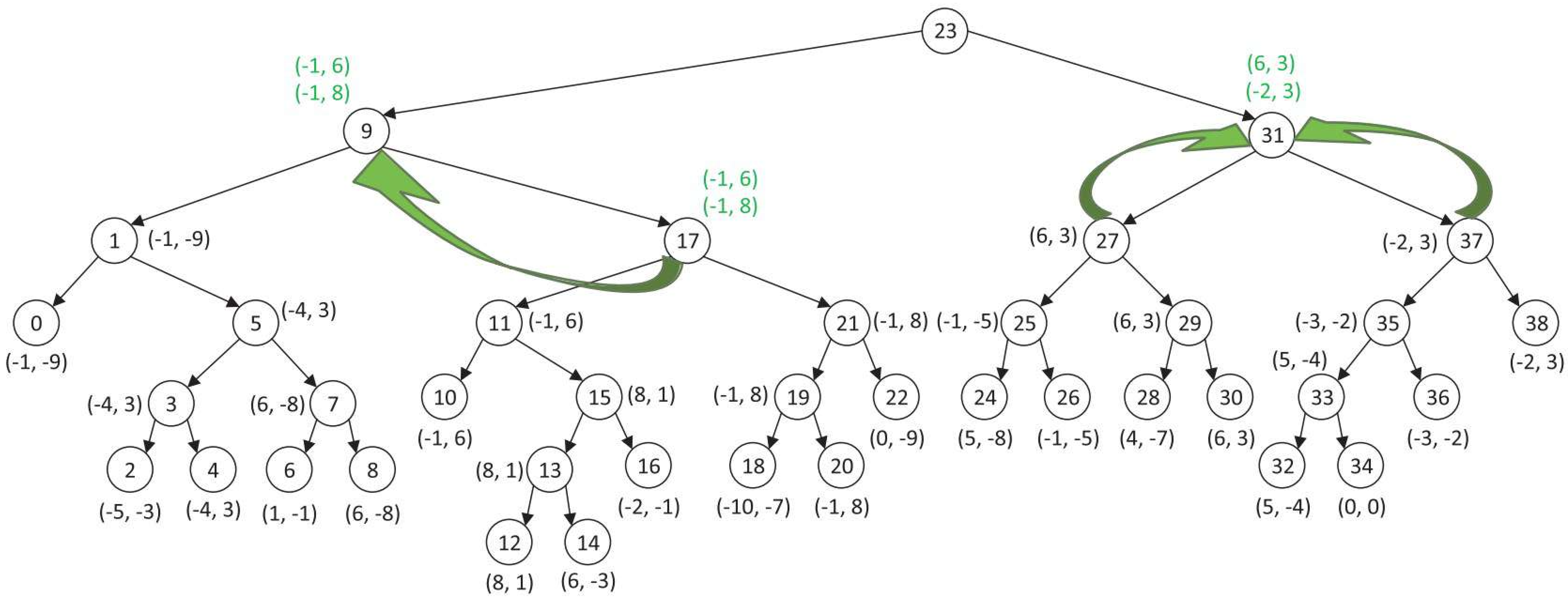

Рис. Л6.6. Дерево игры на пятой итерации метода обратной индукции

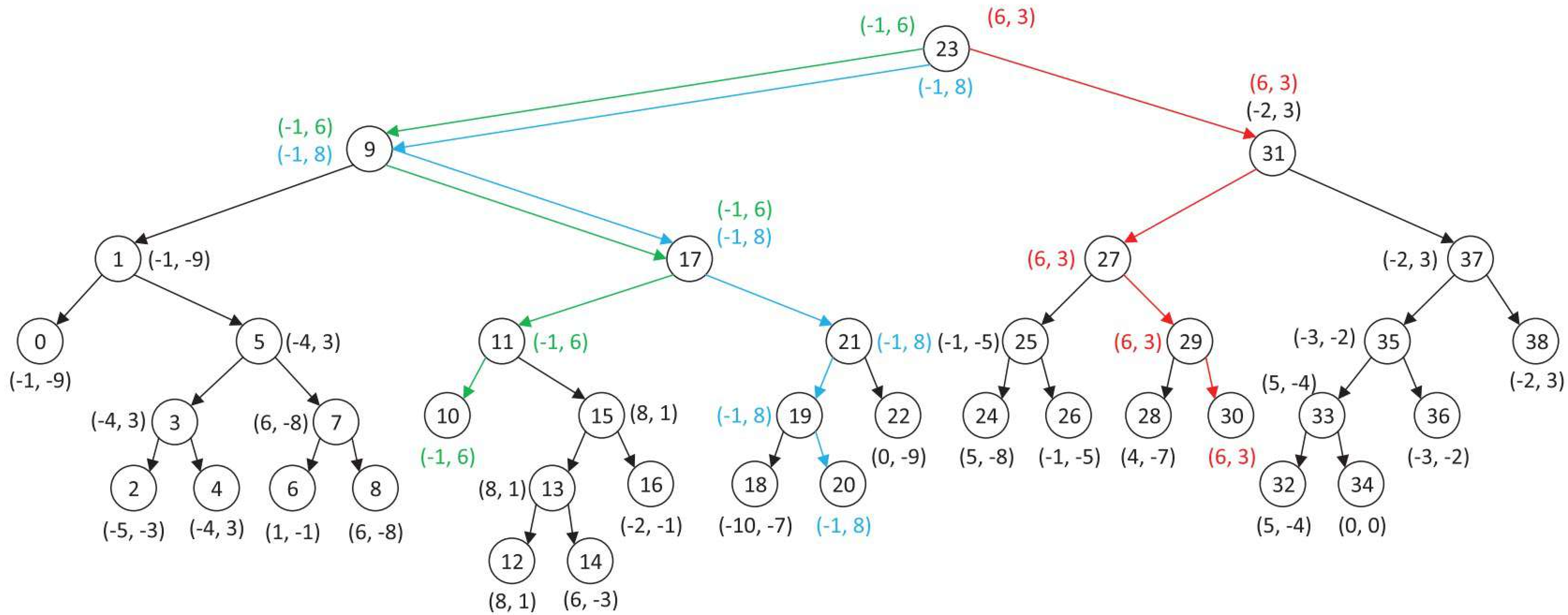

Рис. Л6.7. Пути, найденные методом обратной индукции

На следующей итерации эти же пары выигрышей будут присвоены узлу 9 (см. рис. Л6.6), так как для осуществляющего ход игрока *B* оба выигрыша в узле 17 будут больше выигрыша в узле 1 (6 > –9, 8 > –9). В узле 31 также появляются две пары выигрышей, так как игрок *B* при выборе как узла 27, так и узла 37 получит выигрыш, равный трем.

На последней, шестой, итерации игрок *A* осуществляет выбор между двумя узлами — 9 и 31, но так как в каждом узле по две пары выигрышей, всего может возникнуть четыре различные ситуации. Таким образом, узлу 23 присваиваются три пары выигрышей: (6, 3), (– 1, 6), (– 1, 8). Поскольку узел 23 является корнем, получаем три разных пути обратной индукции (рис. Л6.7) с различными ценами игры (указаны у корня).

Пути, являющиеся решениями игры, на рис. Л6.7 отмечены разными цветами.

Варианты работы

Требуется выполнить генерацию случайного дерева игры заданной глубины со случайными значениями выигрышей в терминальных вершинах (табл. Л6.1).

Таблица Л6.1

Номер варианта	Глубина дерева	Количество игроков	Количество стратегий	Диапазон выигрышей
1	5	3	2, 3, 2	[–50, 50]
2	6	3	2, 2, 2	[0, 50]
3	7	2	2, 3	[0, 10]
4	5	3	3, 3, 2	[–50, 0]
5	6	2	2, 3	[0, 20]
6	7	3	3, 2, 2	[–50, 50]
7	5	3	3, 3, 3	[0, 15]
8	6	2	3, 3	[–10, 10]
9	7	2	2, 2	[0, 20]
10	5	2	2, 3	[–20, 20]
11	6	3	3, 3, 2	[–10, 10]

Окончание табл. Л6.1

Номер варианта	Глубина дерева	Количество игроков	Количество стратегий	Диапазон выигрышей
12	7	2	2, 3	[–5, 25]
13	5	3	2, 4, 2	[–50, 20]
14	6	3	2, 2, 3	[–20, 15]
15	7	2	3, 2	[–10, 20]
16	5	3	2, 2, 4	[0, 10]
17	6	2	2, 4	[–5, 5]
18	7	3	2, 2, 2	[0, 15]
19	5	3	3, 2, 2	[–10, 10]
20	6	2	4, 2	[–50, 50]

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; построенное дерево исходной игры; все найденные методом обратной индукции пути на дереве позиционной игры; решение игры.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение позиционной формы игры. Чем отличаются игры с полной и неполной информацией?
2. Перечислите основные шаги метода обратной индукции, использующиеся при решении позиционных игр.
3. Укажите условия единственности пути на дереве позиционной игры, найденного по методу обратной индукции.

6. РАЦИОНАЛЬНЫЙ ДЕЛЕЖ В КООПЕРАТИВНЫХ ИГРАХ

Кооперативные игры — это игры, в которых группы игроков (*коалиции*) могут объединять свои усилия. Этим кооперативные игры отличаются от некооперативных (или бескоалиционных) игр, в которых коалиции неприемлемы и каждый обязан играть за себя. Обычно кооперативные игры задаются с помощью *характеристической функции*, которая показывает полезность каждого варианта коалиции, т. е. объединения усилий игроков.

Рассмотрим свойства кооперативных игр и особенности их решения на примере, содержащем необходимые сведения из теории.

Задана кооперативная игра N игроков (в лабораторной работе № 7 $N = 4$) с характеристической функцией (ХФ)

$$v(S) : 2^N \to \mathbb{R}, \quad S \subseteq I,$$

где S — произвольная коалиция; $I = \{1, 2, \ldots, N\}$ — *тотальная* коалиция. Функция $v(S)$ определяет *полезность* коалиции S. Считается, что $v(\varnothing) = 0$.

Кооперативная игра называется *супераддитивной*, если

$$\forall S, T \subseteq I \ (S \cap T = \varnothing): \quad v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Кооперативная игра называется *выпуклой*, если

$$\forall S, T \subseteq I: \quad v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

Рациональный *дележ* в кооперативной игре единственным образом определяется *вектором Шепли*

$$X(v) = \big(x_1(v), x_2(v), \ldots, x_N(v)\big)$$

с компонентами

$$x_i(v) = \frac{1}{N!}\sum_{S:\, i\in S}\big(|S|-1\big)!\big(N-|S|\big)!\big(v(S)-v(S\setminus\{i\})\big),$$

где $x_i(v)$ — распределение дележа i-му игроку $(i\in I)$ в зависимости от ХФ; $|S|$ — число игроков в коалиции S.

При этом выполняются условия:

а) *групповой рационализации*

$$\sum_{i\in I} x_i(v) = v(I);$$

б) *индивидуальной рационализации*

$$x_i(v) \ge v\big(\{i\}\big), \quad i\in I.$$

Вектор Шепли удовлетворяет следующим аксиомам.

1. **Аксиома линейности.** *Для любых двух кооперативных игр с одними и теми же игроками, но различными ХФ v, w и для любого $\lambda\in\mathbb{R}$ имеем*

$$x_i(v+w) = x_i(v)+x_i(w);$$
$$x_i(\lambda v) = \lambda x_i(v), \quad i\in I.$$

2. **Аксиома симметричности.** *Получаемый игроком выигрыш не зависит от его номера. Это означает, что если игра w получена из игры v перестановкой игроков, то ее вектор Шепли $X(w)$ есть вектор $X(v)$ с соответствующим образом переставленными элементами.*

3. **Аксиома «нулевого игрока».** *Нулевым игроком называется игрок, не вносящий ненулевого вклада ни в какую коалицию, т. е. игрок i, такой, что $\forall S$: $i\in S$ имеем $v(S)-v(S\setminus\{i\})=0$. При рациональном дележе $x_i(v)=0$.*

4. **Аксиома эффективности.** *Имеющееся в распоряжении тотальной коалиции благосостояние распределяется без остатка (условие групповой рационализации).*

Лабораторная работа № 7

Цель работы — изучить постановку кооперативной игры и найти оптимальное распределение выигрыша (дележ) между игроками путем вычисления компонент вектора Шепли.

Постановка задачи

Для заданной характеристической функцией игры выполнить следующее.

1. Проверить кооперативную игру на супераддитивность и выпуклость. Если игра не супераддитивна, изменить характеристическую функцию таким образом, чтобы игра стала супераддитивной.

2. Составить программу вычисления компонент вектора Шепли и рассчитать его.

3. Проверить условия индивидуальной и групповой рационализации.

Пример выполнения работы

Пусть $N = 3$, а ХФ имеет вид

$$v(\varnothing) = 0;\ v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 1;$$
$$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 3;\ v(I) = 4.$$

Эта кооперативная игра является супераддитивной, так как (с учетом симметричности)

$$v(\{i, j\}) > v(\{i\}) + v(\{j\}) \quad (\delta_{i,j} = 0),$$
$$v(I) > v(\{i\}) + v(\{j\}) + v(\{k\}),$$
$$v(I) = v(\{i,\ j\}) + v(\{k\}) \quad (\delta_{i,j} + \delta_{i,k} + \delta_{j,k} = 0),$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Вместе с тем игра не является выпуклой, так как, к примеру, для коалиций $S = \{1, 2\}$ и $T = \{2, 3\}$ имеем

$$v(I) + v(\{2\}) < v(\{1, 2\}) + v(\{2, 3\}).$$

Рассчитаем долю первого игрока при рациональном дележе:

$$x_1(v) = \frac{1}{3!}\Big\{0!2!\big(v(\{1\}) - v(\varnothing)\big) +$$
$$+1!1!\Big[\big(v(\{1, 2\}) - v(\{2\})\big) + \big(v(\{1, 3\}) - v(\{3\})\big)\Big] + 2!0!\big(v(I) - v(\{2, 3\})\big)\Big\} = \frac{4}{3}.$$

Очевидно, что в силу симметричности доли остальных двух игроков в данной задаче будут такими же:

$$x_1(v) = x_2(v) = x_3(v) = \frac{4}{3}.$$

При этом выполняются условия:

а) $x_1(v) + x_2(v) + x_3(v) = 4 = v(I)$ (групповая рационализация);

б) $x_i(v) = \frac{4}{3} > v(\{i\}) = 1, \quad i = 1, 2, 3$ (индивидуальная рационализация).

Задача решена.

Варианты работы

Исходные данные для выполнения лабораторной работы приведены в табл. Л7.1.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; проверку на супераддитивность и выпуклость; фрагмент кода программы с расчетом компонент вектора Шепли; результат расчета варианта; проверку условий индивидуальной и групповой рационализации.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение кооперативной игры и ее характеристической функции.
2. Дайте определение выпуклой игры. Является ли любая выпуклая игра супераддитивной, и наоборот?
3. Что означает дележ в кооперативной игре? Перечислите аксиомы рационального дележа.
4. На примере двух вариантов задания поясните аксиому линейности.
5. Поясните смысл условий групповой и индивидуальной рационализации.
6. Каким свойством обладает «нулевой игрок»?
7. Раскройте смысл вектора Шепли.

Таблица Л7.1

Номер варианта	Характеристическая функция															
	$v(\varnothing)$	$v(\{1\})$	$v(\{2\})$	$v(\{3\})$	$v(\{4\})$	$v(\{1, 2\})$	$v(\{1, 3\})$	$v(\{1, 4\})$	$v(\{2, 3\})$	$v(\{2, 4\})$	$v(\{3, 4\})$	$v(\{1, 2, 3\})$	$v(\{1, 2, 4\})$	$v(\{1, 3, 4\})$	$v(\{2, 3, 4\})$	$v(I)$
1	0	4	1	3	1	6	8	6	5	3	5	9	8	10	7	11
2	0	4	3	2	3	8	6	7	5	7	6	10	12	10	9	13
3	0	3	4	1	2	7	5	6	5	7	3	10	10	9	9	12
4	0	1	1	3	3	4	4	6	4	4	7	9	9	8	8	11
5	0	3	2	3	2	6	6	5	6	4	7	10	10	9	10	12
6	0	4	2	2	1	7	7	5	4	4	3	11	9	10	7	13
7	0	4	3	2	2	7	7	6	6	6	4	11	10	11	10	13
8	0	2	1	1	2	4	4	4	2	4	4	7	8	8	6	10
9	0	3	3	1	2	7	6	7	4	7	3	10	10	9	7	12
10	0	3	1	2	4	4	5	8	3	5	6	7	10	11	8	13
11	0	3	4	4	4	8	7	7	9	8	9	13	13	13	14	16
12	0	2	3	4	1	6	7	4	7	5	6	12	9	9	10	14

Окончание табл. Л7.1

Номер варианта	Характеристическая функция															
	$v(\varnothing)$	$v(\{1\})$	$v(\{2\})$	$v(\{3\})$	$v(\{4\})$	$v(\{1, 2\})$	$v(\{1, 3\})$	$v(\{1, 4\})$	$v(\{2, 3\})$	$v(\{2, 4\})$	$v(\{3, 4\})$	$v(\{1, 2, 3\})$	$v(\{1, 2, 4\})$	$v(\{1, 3, 4\})$	$v(\{2, 3, 4\})$	$v(I)$
13	0	3	3	2	4	6	5	8	6	9	8	9	12	10	12	14
14	0	4	1	1	1	7	7	7	3	2	2	10	10	10	6	12
15	0	2	3	2	4	6	5	7	6	8	8	9	11	10	12	14
16	0	4	4	4	2	9	9	6	10	7	7	15	12	12	14	17
17	0	1	2	1	1	4	2	3	4	4	2	7	6	5	6	9
18	0	2	3	4	4	6	6	7	7	8	8	11	11	12	12	14

7. ИНФОРМАЦИОННОЕ ПРОТИВОБОРСТВО

Прежде чем дать определение информационного противоборства, следует рассмотреть информационное управление в социальных сетях.

Информационное управление — это целенаправленное воздействие на начальные мнения агентов с целью обеспечить требуемые (для субъекта, осуществляющего управление) значения их итоговых мнений.

В модели социальной сети рассматриваются агенты $(i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N})$, составляющие эту сеть, и их мнения x_i, зависящие от дискретного момента времени: $x_i = x_i(t)$, $t = 0, 1, 2 \ldots$.

В каждый момент времени мнения агентов изменяются под влиянием мнений других агентов. Степень этого влияния определяется неотрицательной стохастической по строкам матрицей $\mathbf{A} = (a_{ij})$, где a_{ij} — степень доверия i-го агента j-му агенту (в том числе и самому себе).

Вектор мнений $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задан для начального момента времени $(\mathbf{x}(0))$ и изменяется следующим образом:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t-1).$$

Этот закон можно записать иначе:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t-1).$$

При достаточно долгом взаимодействии агентов вектор мнений сходится к итоговому значению:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\infty}\mathbf{x}(0),$$

где $\mathbf{A}^{\infty} = \lim\limits_{t \to \infty} \mathbf{A}^{t}$.

Если $\forall i,\ j \in N,\ a_{ij} > 0$, то выполняются следующие условия:

1) все строки матрицы $\mathbf{A}^{\infty}$ одинаковы;

2) итоговые мнения всех агентов одинаковы $(\forall i \in N,\ x_i = X)$.

Обозначив строку матрицы $\mathbf{A}^{\infty}$ через $\mathbf{r}$, получим выражение

$$X = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j(0).$$

Для информационного управления необходимо наличие нескольких игроков (в данном случае — двух), которые могут влиять на начальные мнения некоторых агентов.

В таком случае для множества агентов влияния первого игрока $F \subseteq N$ устанавливается начальное мнение $u \in U$, а для множества агентов влияния второго игрока $S \subseteq N$, $F \bigcap S = \varnothing$ устанавливается начальное мнение $v \in V$, где U и V — некоторые отрезки числовой оси $\mathbb{R}$.

Обозначив

$$r_F = \sum_{i \in F} r_i,$$

$$r_S = \sum_{j \in S} r_j,$$

$$X^0 = \sum_{k \in N \setminus (F \bigcup S)} r_k x_k(0),$$

получим альтернативную запись выражения, иллюстрирующего вклад мнения агентов влияния:

$$X = r_F u + r_S v + X^0.$$

Это показывает, что итоговое мнение членов социальной сети будет линейно зависеть от управлений u и v, входящих соответственно с весами $r_f > 0$ и $r_S > 0$, где $r_F + r_S \leq 1$, которые определяются суммарной влиятельностью агентов влияния.

Заметим, что отличной от рассматриваемой является ситуация, когда агенты влияния не изменяют своих мнений: $a_{ij} = 0, j \neq i$, $i \in F \cup S$.

Информационное противоборство — это социальная структура множества субъектов-пользователей, как индивидуальных, так и коллективных. Информационное противоборство представляет собой комплексное деструктивное воздействие на информационные системы и информационную инфраструктуру конкурирующей стороны с одновременной защитой собственной информации, информационных систем и информационной инфраструктуры от подобных воздействий. Объект информационного противоборства — информационно-коммуникационная система.

Имея зависимость $X(u, v) = r_F u + r_s v + X^0$ итогового мнения агентов от управляющих воздействий, можно сформулировать теоретико-игровую модель взаимодействия игроков, осуществляющих эти воздействия. Для этого необходимо определить их целевые функции.

Предположим, что целевая функция первого (второго) игрока $f_F(u, v) = H_F\left(X(u, v)\right) - c_F(u)$ $\left(f_s(u, v) = H_s\left(X(u, v)\right) - c_s(v)\right)$ определяется разностью между его «доходом», зависящим от итогового мнения агентов, и затратами на осуществление управления.

Совокупность $\Gamma = \{f_F(u, v),\ f_s(u, v),\ u \in U,\ v \in V\}$ целевых функций и множеств допустимых действий двух игроков задает семейство игр, различия между которыми порождаются конкретизацией информированности игроков и порядка функционирования.

Если описание игры Г и выражение $X(u, v) = r_F u + r_s v + X^0$ являются общим знанием для игроков, которые выбирают свои действия однократно, одновременно и независимо, то получаем игру в нормальной форме, для которой можно искать и исследовать равновесия Нэша, их эффективность по Парето и т. д. После фиксирования последовательностей выбора игроками их действий получим ту или иную иерархическую игру.

Иерархическая игра (игра с иерархической структурой) — важнейшим подклассом неантагонистических многошаговых игр. Многие конфликтно-управляемые системы обладают иерархической структурой. В математической постановке иерархические игры классифицируют по числу уровней и характеру вертикальных связей. Если отказаться от гипотезы об общем знании, получим рефлексивную игру.

Рефлексивная игра — игра, в которой ситуации рассматриваются с учетом мысленного воспроизведения возможного образа действий и поведения противника, т. е. в которой информированность агентов не является общим знанием и агенты принимают решения на основе иерархии своих представлений.

Рефлексивные игры позволяют моделировать поведение рефлексирующих объектов, исследовать зависимость выигрышей агентов от рангов их рефлексий, ставить и решать задачи рефлексивного управления; единообразно описывать многие явления, которые связаны с рефлексией.

Лабораторная работа № 8

Цель работы — изучить теоретико-игровую модель информационного противоборства в социальных сетях. Промоделировать информационное управление в рамках игры и определить итоговое мнение агентов.

Постановка задачи

1. Для 10 агентов случайным образом сгенерировать стохастическую матрицу доверия.

2. Назначить всем агентам случайное начальное мнение из заданного отрезка числовой оси. Найти итоговое мнение агентов.

3. Случайным образом выбрать количество и номера (непересекающиеся) агентов влияния из общего числа агентов для первого и второго игроков. Назначить им начальные мнения первого и второго игроков. Остальным агентам (нейтральным) назначить случайные начальные мнения. Смоделировать информационное управление в рамках игры и определить итоговое мнение агентов.

Пример выполнения работы

Рассмотрим игру для девяти агентов. Сначала сгенерируем матрицу доверия и убедимся, что она стохастическая:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}111 & 0{,}178 & 0{,}003 & 0{,}074 & 0{,}152 & 0{,}131 & 0{,}145 & 0{,}101 & 0{,}104 \\ 0{,}045 & 0{,}125 & 0{,}076 & 0{,}086 & 0{,}112 & 0{,}11 & 0{,}207 & 0{,}125 & 0{,}112 \\ 0{,}006 & 0{,}214 & 0{,}095 & 0{,}038 & 0{,}038 & 0{,}142 & 0{,}162 & 0{,}275 & 0{,}032 \\ 0{,}168 & 0{,}164 & 0{,}094 & 0{,}094 & 0{,}007 & 0{,}105 & 0{,}15 & 0{,}075 & 0{,}143 \\ 0{,}046 & 0{,}258 & 0{,}093 & 0{,}113 & 0{,}07 & 0{,}006 & 0{,}18 & 0{,}113 & 0{,}122 \\ 0{,}198 & 0{,}175 & 0{,}07 & 0{,}039 & 0{,}187 & 0{,}022 & 0{,}064 & 0{,}12 & 0{,}125 \\ 0{,}196 & 0{,}077 & 0{,}134 & 0{,}151 & 0{,}047 & 0{,}223 & 0{,}139 & 0{,}017 & 0{,}017 \\ 0{,}049 & 0{,}201 & 0{,}009 & 0{,}099 & 0{,}077 & 0{,}296 & 0{,}056 & 0{,}006 & 0{,}207 \\ 0{,}068 & 0{,}036 & 0{,}155 & 0{,}138 & 0{,}148 & 0{,}058 & 0{,}226 & 0{,}019 & 0{,}15 \end{pmatrix}.$$

Затем сформируем случайным образом вектор начальных мнений агентов (без влияния), например в диапазоне от 1 до 20, и произведем необходимое число итераций до схождения матрицы, задав точность $\varepsilon = 10^{-6}$, получим итоговое мнение агентов.

Изначальные мнения агентов:

$$\mathbf{x}(0) = (15,\ 14,\ 19,\ 8,\ 12,\ 1,\ 16,\ 11,\ 17).$$

Результирующие мнения агентов (без влияния) после 11 итераций:

$$\mathbf{x}(11) = (12{,}533;\ 12{,}533;\ 12{,}533;\ 12{,}533;\ 12{,}533;\ 12{,}533;\ 12{,}533;\ 12{,}533;\ 12{,}533).$$

Теперь смоделируем игру с информационным влиянием. Случайным образом выберем число и номера агентов первого игрока и аналогично число и номера агентов второго игрока (они не должны пересекаться, так как эта ситуация выходит за рамки данной работы). Следует обратить внимание, что число агентов влияния первого игрока не обязательно должно совпадать с числом агентов влияния второго игрока.

Затем сгенерируем случайным образом управление *u* для агентов влияния первого игрока (например, в диапазоне от 0 до 100), а также управление *v* агентов влияния второго игрока (соответственно в противоположном диапазоне: [–100, 0]). Сформируем вектор начальных мнений агентов с учетом информационного влияния, нейтральным агентам назначим случайные стартовые мнения. Проведем моделирование:

Агенты первого игрока: 4, 5; агенты второго игрока: 1, 2.

Сформированное начальное мнение агентов первого игрока: 57.

Сформированное начальное мнение агентов второго игрока: –63.

Изначальные мнения с учетом сформированных:

$$\mathbf{x}(0) = (15,\ -63,\ -63,\ 8,\ 57,\ 57,\ 16,\ 11,\ 17).$$

Результирующее мнение после 12 итераций:

$$\mathbf{x}(12) = (5{,}202;\ 5{,}202;\ 5{,}202;\ 5{,}202;\ 5{,}202;\ 5{,}202;\ 5{,}202;\ 5{,}202;\ 5{,}202).$$

Выиграл первый игрок.

Варианты работы

Требуется выполнить генерацию матрицы доверия и начального вектора мнений агентов случайным образом.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; сгенерированную матрицу доверия; начальный вектор мнений агентов для моделирования без управления; результат такого моделирования; номера агентов первого и второго игроков для информационного противоборства двух игроков, их управления, начальные мнения нейтральных агентов; результат моделирования с информационным управлением.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение и опишите основные свойства матрицы доверия.
2. Что такое информационное управление и как оно осуществляется?
3. Опишите принцип формирования итогового мнения агентов при моделировании информационного управления.

8. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Задана платежная матрица прямоугольной игры с нулевой суммой.

В процессе выполнения домашнего задания необходимо сделать следующее.

1. Нормализовать матрицу (привести к матрице с неотрицательными элементами) и свести исходную игру к матричной игре (2×2) следующими способами:

а) поглощением доминируемых стратегий;

б) удалением NBR-стратегий.

2. Найти смешанные стратегии игроков следующими методами:

а) графоаналитическим;

б) аналитическим (матричным);

в) графически (задача ЛП);

г) симплекс-методом (задача ЛП).

3. Рассчитать цену игры для исходной матрицы.

Варианты задания

Исходные данные приведены в табл. ДЗ1

Таблица ДЗ1

Номер варианта	Платежная матрица					Номер варианта	Платежная матрица				
1	4	–3	5	6	4	2	5	3	0	4	–1
	6	5	–3	4	7		2	–1	2	1	1
	6	5	–3	–3	5		1	1	2	1	2
	–3	–3	4	4	4		4	2	0	3	–1
	7	6	4	5	6		–1	0	2	1	1

Номер варианта	Платежная матрица					Номер варианта	Платежная матрица				
3	1	4	6	2	2	8	2	2	1	0	2
	4	–2	–1	4	5		1	1	–2	0	3
	1	5	5	0	1		2	4	4	3	2
	1	4	4	1	1		0	–3	–4	3	2
	1	6	7	2	1		3	1	1	3	4
4	8	8	6	7	8	9	–5	–1	–1	–3	0
	7	7	6	4	9		–4	1	0	–4	0
	10	8	9	10	8		–6	–1	0	–5	0
	3	6	9	–2	8		–3	0	0	–3	0
	7	9	9	7	10		2	–3	–4	3	–3
5	5	3	0	1	1	10	–4	–1	1	–3	–3
	4	4	0	–1	0		–4	–1	–1	–4	–4
	–2	–3	3	3	4		–4	0	0	–5	–4
	3	3	0	0	0		–1	–7	–6	–1	0
	6	5	0	1	0		–4	1	2	–3	–4
6	2	4	4	2	5	11	0	–1	1	2	0
	2	2	1	–1	4		2	1	–1	0	3
	5	3	4	5	3		2	1	–1	–1	1
	3	3	1	2	3		–1	–1	0	0	0
	–2	1	4	–3	3		3	2	0	1	2
7	–1	2	0	0	4	12	–4	–6	3	–5	–4
	–1	4	–1	0	5		–6	–4	–5	3	–7
	–1	3	–1	–2	3		–6	3	–5	3	–2
	–1	2	–1	–1	2		3	–4	3	–4	–4
	2	–4	3	2	–3		–7	–5	–6	–4	–6

Окончание табл. Д31

Номер варианта	Платежная матрица					Номер варианта	Платежная матрица				
13	1	1	0	7	6	15	4	2	3	4	2
	4	3	4	–1	–2		1	2	0	2	2
	4	5	4	0	0		1	4	3	1	3
	4	3	3	1	–1		–2	3	0	1	1
	4	4	4	1	1		–4	2	3	–3	0
14	0	–4	–5	–3	1	16	2	–1	3	4	2
	–2	–1	1	0	–1		4	3	–1	2	5
	–2	–1	–1	–1	–2		4	3	–1	–1	3
	0	–3	–3	–2	1		–1	–1	2	2	2
	–2	–1	–2	1	–1		5	4	2	3	4

Литература

Акоф Р., *Сасиени М.* Основы исследования операций. М.: Мир, 1971.

Аттетков А.В., *Галкин С.В.*, *Зарубин В.С.* Методы оптимизации. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.

Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Высш. шк., 2001.

Грешилов А.А. Математические методы принятия решений. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.

Губанов Д.А., *Новиков Д.А.*, *Чхартишвили А.Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. М.: Физматлит, 2010.

Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. М.: Логос, 2000.

Лефевр В.А., *Смолян Г.Л.* Алгебра конфликта. М.: КомКнига, 2007.

Оуэн Г. Теория игр. М.: ЛКИ, 2010.

Петросян Л.А., *Зенкевич Н.А.*, *Шевкопляс Е.В.* Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2014.

Романовский И.В. Дискретный анализ. СПб.: Невский Диалект, 2004.

Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений. СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

Ширяев В.И., *Ширяев Е.В.* Принятие решений. Математические основы. Статические задачи. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.

Содержание

Учебное издание

Басараб Михаил Алексеевич
Коннова Наталья Сергеевна

**Теория игр
в информационной безопасности**

Редактор *Е.К. Кошелева*
Художник *Я.М. Асинкритова*
Корректор *О.Ю. Соколова*
Компьютерная графика *Т.К. Сегеды*
Компьютерная верстка *Т.В. Батраковой*

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В оформлении использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева.

Подписано в печать 28.01.2019. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 5,25. Тираж 100 экз. Изд. № 650-2019. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
baumanprint@gmail.com