

Электротехника

Домашняя работа № 2

«Расчёт электрической цепи однофазного синусоидального тока»

Образец выполнения

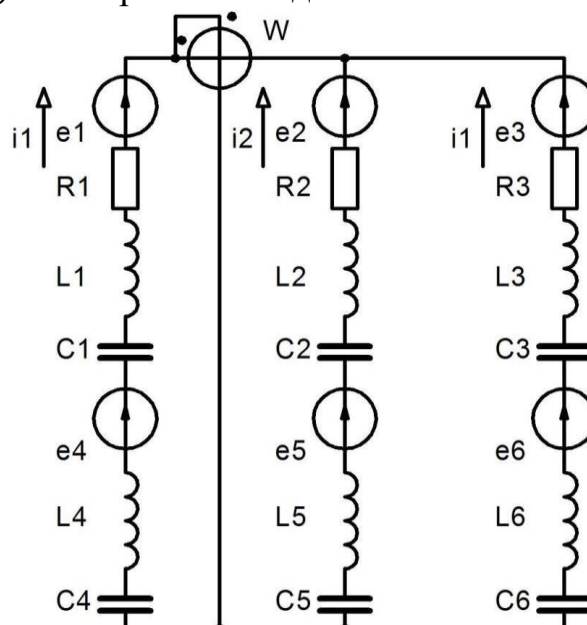
Задание

Номер варианта соответствует
двум последним цифрам номера студенческого билета (зачётки)

ЗАДАНИЕ ДЛЯ ВСЕХ ВАРИАНТОВ

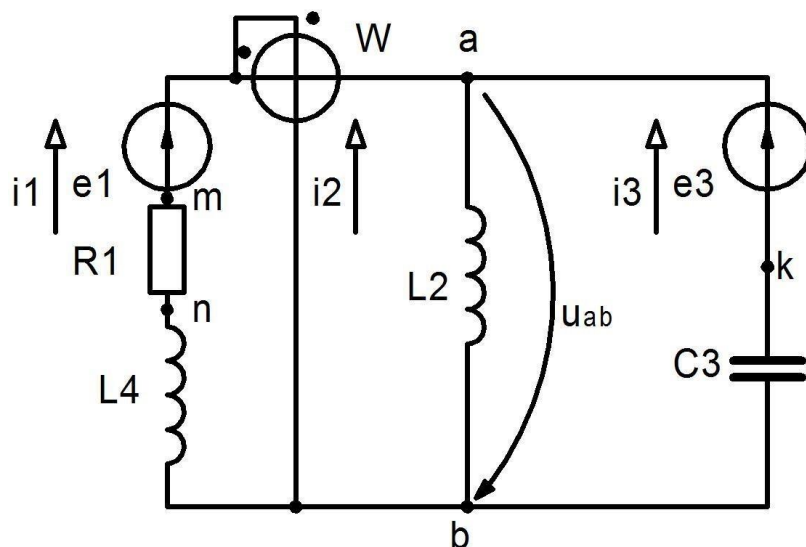
Для схемы, соответствующей Вашему варианту, выполнить следующее:

1. По законам Кирхгофа составить систему уравнений для расчёта токов во всех ветвях, записав её в двух формах:
 - а) для мгновенных значений (дифференциальная форма);
 - б) для комплексов (символическая форма).
 2. Определить комплексы токов в ветвях любым методом.
 3. Определить показание ваттметра двумя способами:
 - а) с помощью выражения для комплексов тока и напряжения;
 - б) по формуле $UI \cos \varphi$.
- Построить векторную диаграмму тока и напряжения для ветви, в которой измерялась мощность. На векторной диаграмме указать угол $\varphi = \psi_u - \psi_i$.
4. Составить баланс мощностей.
 5. Построить векторную топографическую диаграмму токов и напряжений.
 6. Записать выражение для мгновенного значения тока i_1 и построить график зависимости $i_1(\omega t)$ в интервале от 0 до 2π .



Замечание: общее условие и общий рисунок в Ваш отчёт вставлять необязательно!
В отчёте должны быть рисунок и данные, соответствующие **Вашему** варианту.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЁТА. ПРИМЕР РАСЧЁТА



Дано:

$R1 = 42 \text{ Ом},$
 $L2 = 0,59 \text{ Гн},$
 $C3 = 76 \text{ мкФ},$
 $L4 = 0,40 \text{ Гн},$
 $E_{m1} = 51 \text{ В},$
 $\psi_1 = 70^\circ,$
 $E_{m3} = 99 \text{ В},$
 $\psi_3 = 200^\circ,$
 $f = 63 \text{ Гц}$

Рис. 1.

Замечание: Все расчёты проводятся в основных единицах, поэтому первым шагом необходимо провести соответствующие преобразования исходных данных (т.е. заменить дольные приставки на соответствующие множители: милли на 10^{-3} , микро на 10^{-6} и т.д.). В этом случае результаты тоже будут выражены в основных единицах, и размерность будем писать только в конце.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАСЧЁТЫ

Задание: вычислить комплексы имеющихся в цепи ЭДС и сопротивлений ветвей.

1.1. Вычисление комплексов ЭДС ветвей

По условию для каждой ЭДС заданы амплитуда E_m и начальная фаза ψ . Чтобы записать комплексы ЭДС \underline{E} , нужно для каждой ЭДС вычислить ещё среднеквадратическое (действующее) значение E , действительную $Re \underline{E}$ и мнимую $Im \underline{E}$ части:

$$\underline{E} = Re \underline{E} + j Im \underline{E} = E e^{j\psi_e}$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} E_m; Re \underline{E} = E \cos \psi_e; Im \underline{E} = E \sin \psi_e$$

Замечание: При расчёте \sin и \cos с помощью калькулятора или систем компьютерной математики, обращайте внимание на то, в каком виде функции обрабатывают аргумент — в **градусах** или **радианах**. Для проверки рекомендуется подставить значение, синус или косинус которых известен, например, 90° или 0° ($\cos 90^\circ = \sin 0^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = \cos 0^\circ = 1$).

Для наших данных получим:

Для ЭДС E_1 :

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} E_{m1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 51 = 36,1;$$

$$\operatorname{Re} \underline{E}_1 = E_1 \cos \psi_{e1} = 36,1 \cdot \cos 70^\circ = 12,33$$

$$\operatorname{Im} \underline{E}_1 = E_1 \sin \psi_{e1} = 36,1 \cdot \sin 70^\circ = 33,9$$

Комплекс первой ЭДС: $\underline{E}_1 = 12,33 + j33,9 = 36,1e^{j70^\circ}$

Для ЭДС E_3 :

$$E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} E_{m3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 99 = 70,0;$$

$$\operatorname{Re} \underline{E}_3 = E_3 \cos \psi_{e3} = 70,0 \cdot \cos 200^\circ = -65,8$$

$$\operatorname{Im} \underline{E}_3 = E_3 \sin \psi_{e3} = 70,0 \cdot \sin 200^\circ = -23,9$$

Комплекс третьей ЭДС: $\underline{E}_3 = -65,8 - j23,9 = 70,0e^{j200^\circ}$

1.2. Вычисление полных комплексных сопротивлений ветвей

Полное комплексное сопротивление ветви определяется по формуле:

$$\underline{Z} = R + jX = R + j(X_L - X_C)$$

где R – активное сопротивление ветви;

$X = X_L - X_C$ – реактивное сопротивление;

$X_L = \omega L$ – реактивное индуктивное сопротивление;

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ – реактивное ёмкостное сопротивление;

$\omega = 2\pi f$ – угловая частота.

Подставив числовые значения, получим:

Угловая частота:

$$\omega = 2\pi f = 2 * \pi * 63 = 395,84$$

Первая ветвь:

$$R_1 = 42,0 \text{ Ом}$$

$$X_{L4} = \omega L_4 = 395,84 * 0,4 = 158,34 \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L4} = 42,0 + j158,34 = 163,8e^{j75,1^\circ} \text{ Ом}$$

Вторая ветвь:

$$X_{L2} = \omega L_2 = 395,84 * 0,59 = 233,55 \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_2 = jX_{L2} = j233,55 = 233,55e^{j90^\circ} \text{ Ом}$$

Третья ветвь:

$$X_{C3} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{1}{395,84 * 76 \cdot 10^{-6}} = 33,24 \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_3 = -jX_{C3} = -j33,24 = 33,24e^{-j90^\circ} \text{ Ом}$$

2. СОСТАВИТЬ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ ПО ЗАКОНАМ КИРХГОФА

Задание: составить систему уравнений по законам Кирхгофа, необходимую и достаточную для расчёта цепи. Систему составить в двух формах:

- 1) дифференциальной;
- 2) символической (комплексной).

Расчёт полученных систем проводить не обязательно.

2.1. Для мгновенных значений (дифференциальная форма):

При составлении уравнений по законам Кирхгофа в дифференциальной форме нужно помнить связь между токами и напряжениями на отдельных элементах для мгновенных значений:

для активного сопротивления:

$$u = Ri$$

для индуктивности:

$$u = L \frac{di}{dt}$$

для ёмкости:

$$u = \frac{1}{C} \int idt$$

Отметим для удобства три дополнительные точки: m , n и k (см. рис. 1), не являющиеся узлами.

Данная цепь (рис. 1) имеет 3 ветви и 2 узла (a и b). Поэтому необходимо составить систему трёх уравнений с тремя неизвестными. Одно уравнение составим по 1-му закону Кирхгофа, два – по второму:

уравнение для узла a :

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

уравнение для левого контура $abnma$:

$$-L_2 \frac{di_2}{dt} + L_4 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = e_1$$

уравнение для правого контура $akba$:

$$-\frac{1}{C_3} \int i_3 dt + L_2 \frac{di_2}{dt} = -e_3$$

Таким образом, получаем систему из трёх интегро-дифференциальных уравнений с тремя неизвестными токами i_1, i_2, i_3 :

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -L_2 \frac{di_2}{dt} + L_4 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = e_1 \\ -\frac{1}{C_3} \int i_3 dt + L_2 \frac{di_2}{dt} = -e_3 \end{cases}$$

2.2. Для комплексов (символическая форма):

Связь между комплексами токов и напряжений на отдельных элементах имеет вид:

для активного сопротивления:

$$\underline{U} = R\underline{I}$$

для индуктивности:

$$\underline{U} = j\omega L\underline{I} = jX_L\underline{I}$$

для ёмкости:

$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I} = -jX_C\underline{I}$$

уравнение для узла а:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

уравнение для левого контура акба:

$$-jX_{L2}\underline{I}_2 + jX_{L4}\underline{I}_1 + R_1\underline{I}_2 = \underline{E}_1$$

уравнение для правого контура амнбка:

$$-(-jX_{C3}\underline{I}_3) + jX_{L2}\underline{I}_2 = -\underline{E}_3$$

Получаем систему 3 уравнений с 3 неизвестными токами: $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \\ -jX_{L2}\underline{I}_2 + jX_{L4}\underline{I}_1 + R_1\underline{I}_2 = \underline{E}_1 \\ -(-jX_{C3}\underline{I}_3) + jX_{L2}\underline{I}_2 = -\underline{E}_3 \end{cases}$$

3. НАЙТИ ТОКИ В ВЕТВЯХ

Задание: вычислить комплексы действующих в цепи токов.

Поскольку расчётная цепь (рис. 1) имеет 2 узла (a и b), для её расчёта воспользуемся методом двух узлов.

В общем случае уравнение для комплекса межузлового напряжения имеет вид:

$$\underline{U}_{ab} = \frac{\sum_k \frac{\pm E_k}{\underline{Z}_k}}{\sum_n \frac{1}{\underline{Z}_n}}$$

где в числителе стоит сумма по всем активным ветвям, а в знаменателе – по всем ветвям. Знак «+» в числителе выбирается, если ЭДС направлена против межузлового напряжения \underline{U}_{ab} .

Для рассматриваемой цепи (рис. 1) получим:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{ab} &= \frac{\frac{E_1}{\underline{Z}_1} + \frac{E_3}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{\frac{12,33 + j33,9}{42,0 + j158,34} + \frac{-65,8 - j23,9}{-j33,24}}{\frac{1}{42,0 + j158,34} + \frac{1}{j233,55} + \frac{1}{-j33,24}} = \\ &= \frac{(0,21926 - j0,019738) + (0,72029 - 1,979)}{(0,0015652 - j0,0059005) + (-j0,0042818) + (j0,030084)} \\ &= -96,1 - j54,8 = 110,6e^{-j150,3^\circ} \text{ В}\end{aligned}$$

Токи в ветвях найдём по закону Ома для активной ветви. **Знаки ЭДС и напряжения определяются относительно направления тока:**

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{E_1 - \underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_1} = \frac{(12,33 + j33,9) - (-96,1 - j54,8)}{42,0 + j158,34} = \\ &= 0,693 - 0,501j = 0,855e^{-j35,8^\circ} \text{ А}\end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{-\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_2} = \frac{-(-96,1 - j54,8)}{j233,55} = 0,235 - 0,412j = 0,474e^{-j60,3^\circ} \text{ А}$$

$$\begin{aligned}I_3 &= \frac{E_3 - \underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = \frac{(-65,8 - j23,9) - (-96,1 - j54,8)}{-j33,24} = \\ &= -0,927 + 0,913j = 1,301e^{j135,4^\circ} \text{ А}\end{aligned}$$

4. СОСТАВИТЬ БАЛАНС МОЩНОСТЕЙ

Задание: По результатам расчётов составить баланс комплексных мощностей источников и потребителей.

Баланс мощностей определяется для комплексной мощности, и заключается в том, что комплексная мощность, которую дают все источники в электрической цепи, равна комплексной мощности, которая тратится во всех потребителях:

$$\sum \underline{S}_{\text{ист}} = \sum \underline{S}_{\text{потр}}$$

С учётом выражения для комплексной мощности $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$, где \underline{I}^* – сопряжённый комплекс тока (напомним, сопряжённые комплексы отличаются знаком мнимой части), получим:

$$\sum \underline{E} \cdot \underline{I}^* = \sum \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

Выразим комплексную мощность потребителей через их сопротивление:

$$\sum \underline{S}_{\text{потр}} = \sum \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \sum \underline{I} \underline{Z} \cdot \underline{I}^* = \sum I e^{j\psi_I} \underline{Z} \cdot I e^{-j\psi_I} = \sum I^2 \underline{Z}$$

где I^2 – квадрат модуля¹ комплексного тока.

Итоговое выражение имеет вид:

$$\sum \underline{E} \cdot \underline{I}^* = \sum I^2 \underline{Z}$$

Составим баланс мощности для анализируемой цепи:

Мощность источников:

$$\begin{aligned} S_{\text{ист}} &= \sum \underline{E} \cdot \underline{I}^* = \underline{E}_1 \underline{I}_1^* + \underline{E}_3 \underline{I}_3^* = \\ &= 36,1 e^{j70^\circ} * 0,855 e^{j0,855^\circ} + 70 e^{j200^\circ} * 1,301 e^{-j135,4^\circ} = \\ &= 30,866 e^{j108,8^\circ} + 91,07 e^{j83,3^\circ} = (-8,40 + j29,70) + (39,06 + j82,27) = \\ &= \mathbf{30,66 + j111,97 = 116,09 e^{j74,7^\circ} \text{ ВА}} \end{aligned}$$

Мощность потребителей:

$$\begin{aligned} S_{\text{ист}} &= \sum I^2 \underline{Z} = I_1^2 \underline{Z}_1 + I_2^2 \underline{Z}_2 + I_3^2 \underline{Z}_3 = \\ &= 0,855^2 * 163,8 e^{j75,1^\circ} + 0,474^2 * 233,55 e^{j90^\circ} + 1,301^2 * 33,24 e^{-j90^\circ} = \\ &= 119,74 e^{j75^\circ} + 52,47 e^{j90^\circ} + 56,26 e^{-j90^\circ} = \\ &= (30,79 + j115,71) + (j52,47) + (-j56,26) = \\ &= \mathbf{30,79 + j111,92 = 116,08 e^{j74,6^\circ} \text{ ВА}} \end{aligned}$$

¹ Модуль комплексного тока равен среднеквадратическому (действующему) значению тока.

5. ОПРЕДЕЛИТЬ ПОКАЗАНИЕ ВАТТМЕТРА

Задание: Рассчитать активную мощность двумя способами:

- 1) как действительную часть комплексной мощности;
- 2) используя коэффициент мощности ($\cos \varphi$);
- 3) построить векторную диаграмму тока и напряжения в ветви, для которой был проведён расчёт показаний ваттметра, указать на диаграмме разность фаз φ .

5.1. Определить показание ваттметра как действительную часть комплексной мощности

Комплексная мощность определяется выражением:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = P + jQ$$

Ваттметр показывает активную мощность, следовательно, для действующих в ветви комплексов тока \underline{I} и напряжения \underline{U} , получим:

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = \operatorname{Re}(\underline{U} \cdot \underline{I}^*)$$

где \underline{I}^* – сопряжённый комплекс тока², $\operatorname{Re} \underline{S}$ – действительная часть комплекса \underline{S} .

Ваттметр на рис. 1 включён так, что измеряет активную мощность участка (двухполюсника), расположенного справа от ваттметра. Комплекс тока этого двухполюсника \underline{I}_1 , комплекс напряжения \underline{U}_{ab} .

Подставив числовые значения, получим:

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{Re}((-96,1 - j54,8) \cdot (0,693 + j0,501)) = \\ &= \operatorname{Re}(-39,14 - j86,123) = -39,14 \text{ Вт} \end{aligned}$$

5.2. Определить показание ваттметра используя коэффициент мощности ($\cos \varphi$)

Коэффициент мощности показывает долю активной мощности в полной:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \Rightarrow P = S \cos \varphi = UI \cos \varphi$$

где U и I – среднеквадратические значения напряжения и тока, а φ – угол сдвига фаз между напряжением и током.

В рассматриваемом случае (рис. 1) обмотка напряжения ваттметра подключена к узлам a и b (т.е. к ней приложено напряжение \underline{U}_{ab}), а токовая обмотка подключена к первой ветви, (т.е. через неё протекает ток \underline{I}_1).

Среднеквадратические (действующие) значения соответствующих напряжения и тока равны:

² Сопряжённые комплексные числа отличаются знаком мнимой части.

$$U_{ab} = |\underline{U}_{ab}| = |-96,1 - j54,8| = 110,6 \text{ В}$$

$$I_1 = |\underline{I}_1| = |0,693 - j0,501| = 0,855 \text{ А}$$

Угол сдвига фаз между током и напряжением φ равен разности начальных фаз напряжения и тока:

$$\begin{aligned} \varphi &= \psi_{U_{ab}} - \psi_{I_1} = \arctg\left(\frac{\text{Im}(\underline{U}_{ab})}{\text{Re}(\underline{U}_{ab})}\right) - \arctg\left(\frac{\text{Im}(\underline{I}_1)}{\text{Re}(\underline{I}_1)}\right) = \\ &= \arctg\left(\frac{\text{Im}(-96,1 - j54,8)}{\text{Re}(-96,1 - j54,8)}\right) - \arctg\left(\frac{\text{Im}(0,693 - j0,501)}{\text{Re}(0,693 - j0,501)}\right) = \\ &= \left[\arctg\left(\frac{-54,8}{-96,1}\right) - 180^\circ\right] - \arctg\left(\frac{-0,501}{0,693}\right) = \\ &= [\arctg(0,5702) - 180^\circ] - \arctg(-0,7229) = 29,692^\circ - 180^\circ - (-35,862^\circ) \\ &= -150,31^\circ - (-35,862^\circ) = -114,45^\circ \end{aligned}$$

Замечание: Расчёт аргумента комплексного числа ведём по правилу (на примере тока):

$$\psi = \begin{cases} \arctg\left(\frac{I_a}{I_p}\right), & \text{при } I_a, I_p > 0 \text{ или } I_a > 0, I_p < 0 \\ \arctg\left(\frac{I_a}{I_p}\right) + 180^\circ, & \text{при } I_a < 0, I_p > 0 \\ \arctg\left(\frac{I_a}{I_p}\right) - 180^\circ, & \text{при } I_a, I_p < 0 \end{cases}$$

Тогда активная мощность:

$$P = U_{ab} * I_1 * \cos \varphi = 110,6 * 0,855 * \cos(-114,45^\circ) = -39,14 \text{ Вт}$$

5.3. На векторной диаграмме тока и напряжения ваттметра указать угол $\varphi = \psi_U - \psi_I$.

На комплексной плоскости построим векторы \underline{U}_{ab} и \underline{I}_1 .

Исходя из величин действующих значений комплексов \underline{U}_{ab} и \underline{I}_1 , выберем масштабы для векторов напряжения и тока: $m_I = 0,1 \frac{\text{А}}{\text{см}}$; $m_U = 10 \frac{\text{В}}{\text{см}}$ (рис. 2).

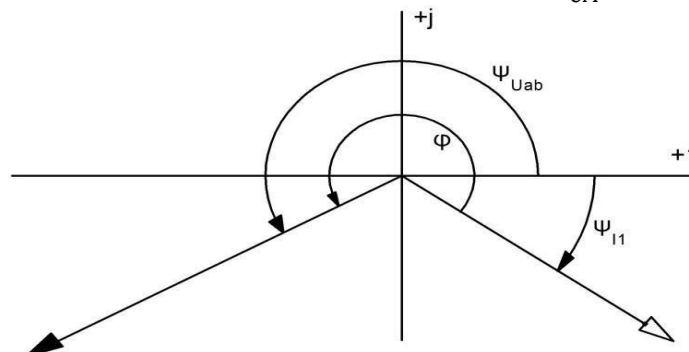


Рис. 2.

6. ПОСТРОИТЬ ВЕКТОРНУЮ ТОПОГРАФИЧЕСКУЮ ДИАГРАММУ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

Задание: Отобразить на комплексной плоскости действующие в цепи токи и напряжения:

- 1) построить векторную диаграмму токов;
- 2) построить топографическую диаграмму напряжений на всех имеющихся в цепи активных и пассивных элементах.

Векторная топографическая диаграмма токов и напряжений – это изображение на комплексной плоскости векторов всех токов и напряжений на всех элементах цепи. Причём векторы напряжений должны быть расположены в том же порядке, что и элементы цепи. Рекомендуется сначала разместить на комплексной плоскости точки, соответствующие комплексным потенциалом всех точек цепи, а потом соединить соседние точки. Тогда каждый отрезок диаграммы будет соответствовать элементу цепи.

Выберем за уровень отсчёта потенциала точку b на рис. 1: $\underline{V}_b = 0$.

Тогда потенциалы остальных точек могут быть найдены путём подсчёта изменения потенциала при движении от точки b (или от других точек с известным потенциалом) к этим точкам. При выборе исходной точки и пути можно руководствоваться простотой расчётов.

$$\underline{V}_a = \underline{V}_b + \underline{U}_{ab} = \underline{U}_{ab} = -96,1 - j54,8$$

$$\underline{V}_m = \underline{V}_b - jX_{L4} \cdot \underline{I}_1 = -jX_{L4} \cdot \underline{I}_1 = -79,4 - j109,7$$

$$\underline{V}_n = \underline{V}_a - \underline{E}_1 = \underline{U}_{ab} - \underline{E}_1 = -108,5 - j88,7$$

$$\underline{V}_k = \underline{V}_a - \underline{E}_3 = \underline{U}_{ab} - \underline{E}_3 = -30,3 - j30,08$$

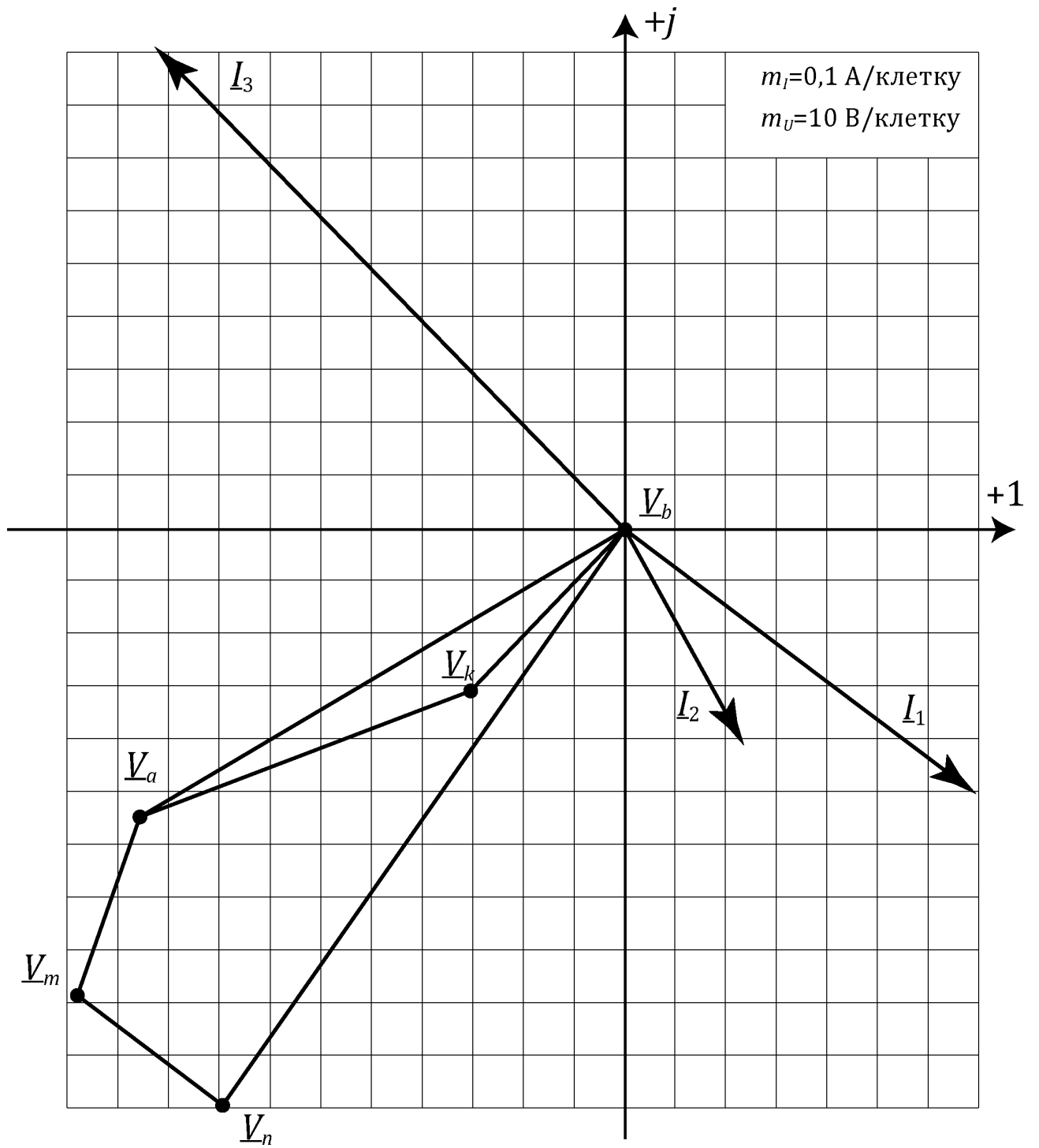


Рис. 3.

7. ПОСТРОИТЬ ВРЕМЕННУЮ ДИАГРАММУ ТОКА В ПЕРВОЙ ВЕТВИ

Задание: Построить временную диаграмму (осциллограмму) тока в первой ветви:

- 1) записать выражение для мгновенного значения тока в первой ветви;
- 2) построить график функции $i_1(\omega t)$ в интервале от 0 до 2π .

Выражение для мгновенного значения тока имеет вид:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

где $I_m = \sqrt{2}I$ – амплитуда тока;

I – среднеквадратическое (действующее) значение тока;

$\omega = 2\pi f$ – угловая частота;

ψ_i – начальная фаза тока ($\psi_{i_1} = \operatorname{arctg} \frac{-0,501}{0,693} = -0,626 \text{ рад} = -35,9^\circ$).

Замечание: Расчёт аргумента комплексного числа ведём по правилу (на примере тока):

$$\psi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left(\frac{I_a}{I_p} \right), & \text{при } I_a, I_p > 0 \text{ или } I_a > 0, I_p < 0 \\ \operatorname{arctg} \left(\frac{I_a}{I_p} \right) + 180^\circ, & \text{при } I_a < 0, I_p > 0 \\ \operatorname{arctg} \left(\frac{I_a}{I_p} \right) - 180^\circ, & \text{при } I_a, I_p < 0 \end{cases}$$

Для первой ветви получим:

1. Среднеквадратическое (действующее) значение тока: $I_1 = 0,855$.
2. Амплитуда тока: $I_{1m} = \sqrt{2}I_1 = \sqrt{2} \cdot 0,855 = 1,209 \text{ А}$.
3. Начальная фаза тока I_1 : $\psi_{I_1} = \operatorname{arctg} \frac{-0,501}{0,693} = -0,626 \text{ рад} = -35,9^\circ$.
4. Частота: $\omega t = 0 \dots 2\pi$.

В итоге получаем:

$$i_1 = 1,209 \sin(\omega t - 0,626 \text{ рад}) = 1,209 \sin(\omega t - 35,9^\circ)$$

График этой функции имеет вид:

