Московский государственный технический университет

имени Н.Э. Баумана

М.А. Басараб, Н.С. Коннова

Дополнительные задачи и упражнения теории игр

Учебно-методическое пособие по дисциплине

«Теория игр и исследование операций»

Москва

УДК 519.8 (075.8)

ББК 22.18

Рецензент:

Пролетарский А.В. – руководитель научно-учебного комплекса: «Информатика и системы управления», доктор технических наук, профессор

Коннова Н.С., Басараб М.А.

Дополнительные задачи и упражнения теории игр. М.: Изд-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2023. 91 с.

В учебно-методическом пособии рассмотрены теоретические положения, задачи и упражнения теории игр, включая практические вопросы реализации различных методов оптимизации и принятия решений в виде программно-математического обеспечения. Также в пособии представлены методические указания для выполнения лабораторных работ по дисциплинам «Теория игр и исследование операций», «Методы теории игр в информационной безопасности».

Методические указания предназначены для студентов МГТУ имени Н.Э. Баумана, в том числе – обучающихся по специальностям «Информационная безопасность» (100401 - магистратура), «Информационная безопасность автоматизированных систем» (090303 - специалитет) и «Компьютерная безопасность» (0903010065 - специалитет). Пособие может быть также быть полезно студентам и аспирантам других специальностей, интересующимся современными методами поиска и оптимизации.

Рекомендовано НМС МГТУ им. Н.Э. Баумана

Коннова Наталья Сергеевна

Басараб Михаил Алексеевич

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ТЕОРИИ ИГР

Оглавление

Предисловие

При решении производственных, управленческих, организационно-технических и др. задач, в том числе – в области информационной безопасности, часто приходится иметь дело с проблемой выбора одного варианта (оптимального или квазиоптимального) среди множества альтернативных решений.

В силу значительного многообразия условий решаемых практических задач, в данном пособии предлагается ознакомиться с различными подходами, методами и алгоритмами к их решению на примерах простых математических задач, которые в дальнейшем смогут помочь и при решении реальных проблем в области информационной безопасности.

Лабораторный практикум включает в себя работы по поиску решений в задачах торга, задачах о переговорах, сетевых играх на графах, играх преследования и поиска, информационного противоборства (в том числе в неантагонистической форме), моделей олигополии и др. конкурентных игр.

При выполнении лабораторных работ разрешается воспользоваться в том числе готовыми программными пакетами математического моделирования (Matlab, MathCAD и др.), электронными таблицами (MS Excel), но наиболее целесообразной является разработка учащимися собственных программам, написанных на языке программирования высокого уровня (C++, C#, Python и др.). В последнем случае программа может реализовать не полное решение задачи, а какие-либо вспомогательные и наиболее рутинные шаги всей процедуры.

При подготовке отчета по каждой лабораторной работе необходимо последовательно и полно представить все основные шаги метода (алгоритма) с выводом промежуточных результатов и необходимыми комментариями, демонстрирующими понимание сути процедуры. Студент должен быть знаком с такими понятиями, как вычислительная сложность и погрешность метода, уметь провести качественный и количественный анализ получаемых результатов, быть способным лаконично ответить на предложенные ему контрольные вопросы.

Методические указания содержат достаточный теоретический материал для выполнения каждой лабораторной работы. Вместе с тем, для более глубокого понимания методов и алгоритмов следует использовать дополнительные источники, в том числе указанные в списке литературы.

Данные лабораторные работы являются частью программы дисциплин «Теория игр и исследование операций», «Методы теории игр в информационной безопасности», посвященных изучению методов и алгоритмов поиска стратегий поведения участниками конкретной игры. Рассматриваются проблемы выбора и принятия решений в условиях конфликта интересов различных игроков. Они были разработаны на основе практических и лабораторных занятий, которые проводились с 2019 г. на кафедрах «Информационная безопасность» и «Теоретическая информатика и компьютерные технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Пособие предназначено для студентов МГТУ имени Н.Э. Баумана, обучающихся по специальностям «Информационная безопасность» (100401 – магистратура, 1 курс), «Информационная безопасность автоматизированных систем» (090303 – специалитет, 2 курс), «Компьютерная безопасность» (0903010065 – специалитет, 2 курс), изучающих предметы «Теория игр и исследование операций», «Методы теории игр в информационной безопасности».

В результате изучения дисциплины студенты будут знать:

- основные понятия и концепции теории игр;
- классификации и условия применения различных методов теории игр;

- методы поиска решений в условиях конфликта интересов различных игроков;
- численные методы решения задач теории игр и детали их применения на практике;
- особенности и преимущества вычислительных систем, основанных на оптимизационных технологиях.

Лабораторная работа №1.

Монотонный алгоритм.

Цель работы – изучить решение матричных игр с помощью монотонного итеративного алгоритма.

Постановка задачи

Пусть с помощью матрицы *A* задана матричная антагонистическая игра двух игроков. По данной матрице необходимо найти решение игры для первого игрока (то есть, вектор оптимальных стратегий и цену игры), используя монотонный итеративный алгоритм.

Варианты заданий приведены в таблице 1.1

Варианты заданий

Таблица 1.1:

Номер варианта	Матрица A	Номер варианта	Матрица A	Номер варианта	Матрица A
1	$\begin{bmatrix} 1 & 11 & 11 \\ 7 & 5 & 8 \\ 16 & 6 & 2 \end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix} 6 & 18 & 5 \\ 17 & 13 & 15 \\ 9 & 13 & 19 \end{bmatrix}$	13	$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 13 \\ 1 & 18 & 11 \\ 17 & 4 & 0 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 1 & 17 & 18 \\ 14 & 6 & 16 \\ 14 & 14 & 13 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} 12 & 5 & 4 \\ 12 & 0 & 12 \\ 5 & 13 & 6 \end{bmatrix}$	14	$\begin{bmatrix} 12 & 9 & 18 \\ 15 & 22 & 5 \\ 16 & 3 & 12 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 16 \\ 15 & 10 & 0 \\ 10 & 7 & 10 \end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix} 19 & 7 & 3 \\ 6 & 9 & 9 \\ 8 & 2 & 11 \end{bmatrix}$	15	$\begin{bmatrix} 18 & 13 & 15 \\ 0 & 13 & 16 \\ 1 & 17 & 9 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 17 & 4 & 9 \\ 0 & 16 & 9 \\ 12 & 2 & 19 \end{bmatrix}$	10	$\begin{bmatrix} 0 & 16 & 19 \\ 5 & 19 & 12 \\ 16 & 12 & 7 \end{bmatrix}$	16	$\begin{bmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 10 \\ 8 & 14 & 6 \end{bmatrix}$

5	$\begin{bmatrix} 8 & 12 & 10 \\ 1 & 6 & 19 \\ 17 & 11 & 11 \end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix} 13 & 3 & 14 \\ 15 & 5 & 0 \\ 7 & 19 & 13 \end{bmatrix}$		
6	$\begin{bmatrix} 6 & 18 & 6 \\ 17 & 8 & 18 \\ 16 & 10 & 10 \end{bmatrix}$	12	$\begin{bmatrix} 11 & 10 & 15 \\ 16 & 5 & 13 \\ 15 & 20 & 10 \end{bmatrix}$		

Основные теоретические сведения

Игра описывается перечнем игроков, набором стратегий для каждого игрока и указанием выигрышей, или платежей, игроков для каждой комбинации стратегий (ситуации в игре). Существуют различные виды игр (индивидуальные и кооперативные; антагонистические и неантагонистические; параллельные и последовательные; конечные и бесконечные; с полной и неполной информацией и т.д.), а также разные формы их задания (нормальная, развернутая формы, характеристическая функция и др.). В большинстве рассматриваемых игр, кроме специально оговоренных классов, предполагается, что игроки делают свои ходы одновременно, т.е. в условиях неопределенности, неосведомленности о выборе стратегии соперником.

В нормальной, или стратегической, форме игра описывается платёжной матрицей. Строки определяют стратегии первого игрока, а столбцы – второго. На пересечении двух стратегий можно увидеть выигрыши, которые получат игроки. Подробнее о формальной записи игр и основных понятиях можно прочесть в [16]. Редко игра имеет решение в чистых стратегиях (игровая задача не имеет седловой точки), тогда мы находим решение игры в *смешанных стратегиях*.

Существует довольно много методов решения данной базовой задачи теории игр – нахождения решения антагонистической игры в смешанных стратегиях, или, иначе, стратегической седловой точки. К самым общеупотребимым можно отнести следующие:

- *аналитический метод* (или метод обратной матрицы) – точный метод решения задачи, однако обладающий существенными ограничениями применимости и большой вычислительной сложностью,
- *численный метод Брауна-Робинсон* [16] – итеративный алгоритм, не имеющий ограничений применимости, вычислительно простой, однако являющийся немонотонным алгоритмом со сравнительно медленной сходимостью в среднем,
- *другие численные алгоритмы.*

Поэтому здесь мы рассмотрим другой известный итеративный алгоритм решения задачи, являющийся, в противовес методу Брауна-Робинсон, монотонным.

Рассмотрим смешанное расширение $\Gamma_{\mathrm{A}} = (X, Y, K)$ матричной игры с $(m \times n)$-матрицей A.

Обозначим $x^N = (\xi_1^N, \dots, \xi_m^N) \in X$ приближение оптимальной стратегии первого игрока на *N-ой* операции и $c^N \in R^n$, где $c^N = (\gamma_1^N, \dots, \gamma_n^N)$ – вспомогательный вектор. Алгоритм позволяет находить (точно или приближенно) оптимальную стратегию игрока 1 и значение цены игры v.

В начале процесса игрок 1 выбирает произвольную чистую стратегию i_0, то есть $x^0 = (0, \dots, 1, \dots, 0) = u_{i_0}$, и вспомогательный вектор вида $c^0 = a_{i_0}$, где a_{i_0} – строка матрицы A, имеющая номер i_0.

Итеративный процесс строится следующим образом. Пусть выполнена *N-1* итерация и получены векторы x^{N-1} и c^{N-1}. Тогда x^N и c^N вычисляются следующим образом:

$$x^N = (1-\alpha_N)x^{N-1} + \alpha_N \tilde{x}^N$$

$$c^N = (1-\alpha_N)c^{N-1} + \alpha_N \tilde{c}^N,$$

где параметр α_N лежит в отрезке [0,1]. Векторы $\tilde{x}^N$ и $\tilde{c}^N$ будут получены ниже.

Рассмотрим вектор $c^{N-1} = (\gamma_1^{N-1}, \dots, \gamma_n^{N-1})$ и выберем такие индексы j_i, на которых достигается минимум:

$$\min_{j=1,\dots,n} \gamma_j^{N-1} = \gamma_{j_1}^{N-1} = \gamma_{j_2}^{N-1} = \dots = \gamma_{j_k}^{N-1}$$

Обозначим через:

$$\underline{v}^{N-1} = \min_{j=1,\dots,n} \gamma_j^{N-1}$$

и $J^{N-1} = \{j_1, \dots, j_k\}$ множество индексов, на которых достигается минимум.

Пусть $\Gamma^N \subset \Gamma_A$ – подыгра игры Γ_A с матрицей $A^N = \left\{\alpha_{i_j}^{N-1}\right\},\ i = 1, \dots, m$, а индекс $j \in J^{N-1}$. Решаем подыгру и находим оптимальную стратегию $\tilde{x}^N \in X$ игрока 1. Пусть $\tilde{x}^N = (\tilde{\xi}_1^N, \dots, \tilde{\xi}_m^N)$.

Вычислим вектор $\tilde{c}^N = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\xi}_i^N a_i$. Пусть вектор $\tilde{c}^N$ имеет компоненты $\tilde{c}^N = (\tilde{\gamma}_1^N, \dots, \tilde{\gamma}_n^N)$. Рассмотрим $(2 \times n)$-игру с матрицей

$$\begin{bmatrix} \gamma_1^{N-1}, & \dots, & \gamma_n^{N-1} \\ \tilde{\gamma}_1^N, & \dots, & \tilde{\gamma}_n^N \end{bmatrix}$$

Найдем оптимальную стратегию $(\alpha_N, 1-\alpha_N),\ 0 \le \alpha_N \le 1$, игрока 1 в этой подыгре.

Таким образом, подставляя найденные векторы в исходные итеративные формулы, получаем шаг алгоритма. Алгоритм заканчивается на шаге, на котором $\alpha_N = 0$ или будет достигнута требуемая точность вычисления.

Заметим, что оптимальная стратегия для второго игрока ищется аналогичным образом с помощью транспонированной матрицы A^T. Более строгое описание алгоритма и его применения можно найти в [1].

Порядок выполнения лабораторной работы

1. По заданной матрице A найти решение матричной игры для обоих игроков.
2. Найти решение игры аналитическим методом.
3. Найти решение игры методом Брауна-Робинсон.
4. Сравнить полученные результаты.

Пример выполнения лабораторной работы

Продемонстрируем алгоритм на примере исходной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 19 & 7 & 3 \\ 6 & 9 & 9 \\ 8 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

Итерация 0:

$$x^0 = (1\ 0\ 0)$$

$$\mathrm{c}^0 = (19\ 7\ 3)$$

$$\underline{v}^0 = 3$$

$$J^0 = \{3\}$$

Итерация 1:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Оптимальной стратегией игрока 1 является вектор:

$$\tilde{x}^1 = (0\ 0\ 1)$$

$$\tilde{c}^1 = (8\ 2\ 11)$$

Решим игру:

$$\begin{bmatrix} 19 & 7 & 3 \\ 8 & 2 & 11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

$$1 - \alpha_N = \frac{11-2}{7-3-2+11} = \frac{9}{13},$$

то есть $(\alpha_N, 1 - \alpha_N) = (\frac{4}{13}, \frac{9}{13})$

$$x^1 = \frac{9}{13}(1\ 0\ 0) + \frac{4}{13}(0\ 0\ 1) = (\frac{9}{13}\ 0\ \frac{4}{13})$$

$$\text{c}^1 = \frac{9}{13}(19\ 7\ 3) + \frac{4}{13}(8\ 2\ 11) = (15.62\ 5.46\ 5.46)$$

$$\underline{v}^1 = 5.46$$

$$J^1 = \{2, 3\}$$

Итерация 2:

Получим подыгру $\Gamma^2 \subset \Gamma_A$:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 9 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

Поскольку имеется седловая точка (1, 1), оптимальной стратегией игрока 1 является вектор:

$$\tilde{x}^2 = (0\ 1\ 0)$$

$$\tilde{c}^2 = (6\ 9\ 9)$$

Решим игру:

$$\begin{bmatrix} 15.62 & 5.46 & 5.46 \\ 6 & 9 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 15.62 & 5.46 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$1-\alpha_N = \frac{9-6}{15.62-5.46-6+9} = \frac{3}{13.16} = 0.216\,,$$

$$\text{то есть } (\alpha_N, 1-\alpha_N) = (0.784, 0.216)$$

$$x^2 = 0.216(\frac{9}{13}\ 0\ \frac{4}{13}) + 0.784(0\ 1\ 0) = (0.15\ 0.784\ 0.066)$$

$$\text{c}^2 = 0.216(15.62\ 5.46\ 5.46) + 0.784(6\ 9\ 9) = (8.078\ 8.235\ 8.235)$$

$$\underline{v}^2 = 8.078$$

$$J^2 = \{1\}$$

Итерация 3:

Получим подыгру $\Gamma^3 \subset \Gamma_A$:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 19 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}^3 = (1\ 0\ 0)$$

$$\tilde{c}^3 = (19\ 7\ 3)$$

Решим игру:

$$\begin{bmatrix} 8.078 & 8.235 & 8.235 \\ 19 & 7 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 8.078 & 8.235 \\ 19 & 3 \end{bmatrix}$$

$$1-\alpha_N = \frac{3-19}{8.078-8.235-19+3} = \frac{16}{16} = 1\,,$$

$$\text{то есть } (\alpha_N, 1-\alpha_N) = (0, 1)$$

Получили $\alpha_N = 0$, поэтому останавливаем алгоритм. Следовательно:

$$x^* = (0.15\ 0.784\ 0.066)$$

$$v = 8.078$$

Сравним данное решение с аналитическим решением из первой лабораторной работы:

Аналитический метод:

$$x^* = (0.16\ 0.77\ 0.07)$$

$$v = 8.19$$

Браун-Робинсон:

$$x^* = (0.13\ 0.83\ 0.04)$$

$$v = 8.18$$

$$\varepsilon = 0.09$$

Содержание отчета о лабораторной работе

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Постановка задачи.
4. Все этапы решения матричной игры в смешанных стратегиях численным итерационным алгоритмом.
5. Сравнительная оценка погрешностей, полученных аналитически и численным решением.

Контрольные вопросы и задания

1. Определение смешанной стратегии.
2. Что такое существенная матричная игра?
3. Каковы условия применимости аналитического метода нахождения смешанных стратегий?
4. Какова основная идея итерационного метода нахождения смешанных стратегий?

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать следующее:

1. программную реализацию алгоритмов поиска по своему варианту;
2. результаты работы алгоритмов для заданной в варианте функции;
3. отчет о лабораторной работе;
4. ответы на контрольные вопросы.

Критерии оценивания лабораторной работы

Выполнение поставленной в лабораторной работе задачи засчитывается студенту при успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в разделе «Порядок защиты лабораторной работы», в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Лабораторная работа №2.

Камень - ножницы - бумага.

Цель работы – изучить устойчивые наборы стратегий, которые называются равновесиями по Нэшу.

Постановка задачи

Предположим, что *Игрок В* выбрал чистую стратегию выбора в каждом раунде бумаги. Через несколько раундов побед, проигрышей и ничьих второй игрок скорее всего заметит его систему и выработает выигрышную контрстратегию, выбирая в каждом раунде ножницы. Давайте назовём этот набор стратегий «бумага - ножницы». Если в результате каждого раунда получаются ножницы против бумаги, то второй игрок однозначно становится победителем.

Но *Игрок В* вскоре замечает недальновидность этого набора стратегий. Увидев, что второй игрок выбирает ножницы, он переключается на стратегию постоянного выбора камня. Этот набор стратегий «ножницы – камень» становится выигрышным для *Игрока В*. Но *игрок А* теперь перейдёт к «бумаге». На протяжении этих этапов игры *Игроки А* и *В* используют то, что называется «чистыми» стратегиями.

Варинты заданий приведены в таблице 4.1.

Варианты заданий

Таблица 4.1

Вариант	Кол-во игроков	Кол-во игр	Вариант	Кол-во игроков	Кол-во игр
1	2	1000	9	2	1300
2	3	3000	10	3	4500

3	2	4000	11	2	15000
4	3	6000	12	3	5000
5	2	800	13	2	6500
6	3	6700	14	3	2000
7	2	7300	15	2	7800
8	3	10000	16	3	4300

Основные теоретические сведения

В игре «камень-ножницы-бумага» есть три фигуры. Камень считается сильнее Ножниц, Ножницы – сильнее Бумаги, а Бумага – сильнее Камня.

При игре вдвоём оба игрока одновременно выбрасывают на пальцах одну из фигур и, если они различны, определяется победитель. Если же выброшенные фигуры одинаковы – следует ещё одно выбрасывание, и так до выявления победителя.

При игре втроём игроки одновременно выбрасывают одну из фигур, и:

- Если все три фигуры различны, или все они одинаковы, следует перебрасывание;
- Если один игрок выбросил более сильную фигуру, а два других – одинаковую, более слабую, то этот игрок объявляется победителем;
- Если один игрок выбросил более слабую фигуру, а два других – одинаковую, более сильную, то этот один игрок признаётся проигравшим, а победное очко делится между победителями.

Для большего количества игроков правила работают аналогично.

Игра «камень-ножницы-бумага» отлично подходит для того, чтобы быстро и легко выбрать проигравшего. Сначала в игре выбирается принцип, который даёт игроку преимущество, но потом противник быстро понимает его и обращает в свою пользу. В процессе изменения стратегий постепенно достигается точка, в которой ни одна из сторон не может дальше совершенствоваться.

В 1950-х математик Джон Нэш доказал, что в любом виде игры с конечным количеством игроков и конечным количеством вариантов (в таком, как «камень-ножницы-бумага») всегда существует смешение стратегий, при которых ни один игрок не может показать результатов лучше только лишь изменяя собственную стратегию. Теория таких устойчивых наборов стратегий, которые называются равновесиями по Нэшу, совершила революцию в области теории игр, изменила направление развития экономики и способы изучения и анализа всего — от политических договоров до сетевого трафика.

Очевидно, здесь нельзя достичь равновесия: для каждой чистой стратегии, например, всегда выбирать «камень». Можно выработать контрстратегию, например, всегда выбирать «бумагу», которая заставит изменить стратегию ещё раз. Оба игрока постоянно будут преследовать друг друга в выборе стратегий.

Но вы также можете попробовать смешанную стратегию. Предположим, что вместо выбора одной стратегии игрок может каждом раунде случайным образом выбирать одну из чистых стратегий. Вместо «всегда выбирать камень» смешанная стратегия может иметь вид «в половине случаев выбирать камень, в другой половине выбирать ножницы». Нэш доказал, что, когда допустимы такие смешанные стратегии, в каждой подобной игре должна быть по крайней мере одна точка равновесия по Нэшу. Необходимо определить эту точку равновесия.

Аналитически делаем вывод, что разумная смешанная стратегия для «камень-ножницы-бумага» – это «выбирать камень, бумагу или ножницы с равной вероятностью». Такая стратегия записывается как $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ Это означает, что камень, ножницы и бумага выбираются с вероятностью $\frac{1}{3}$.

Равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях для игры «камень-ножницы-бумага» даёт вероятность $\frac{1}{3}$. Другими словами, игра честна, нет «сильных» и «слабых» фигур, и выиграть можно лишь за счёт факторов, не связанных с теорией вероятностей: например, быстрой реакции на фигуру соперника или поиска неслучайных закономерностей в его выборе.

Для подтверждения разумной смешанной стратегии, найденной аналитически, необходимо проверить её на реальном примере для произвольного количества игроков и убедиться, что смешанные стратегии игроков при произвольном большом количестве случайных игр будут сходиться к $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. В данном случае цена игры для игрока будет стремиться к количеству успешно сыгранных игр, то есть тех, которые не закончились ничьей (в ничьей никто из игроков не получает победные очки), делённому на количество игроков.

Порядок выполнения работы

1. Определить для игры точку равновесия по Нэшу.
2. Найти, к чему будут сводится стратегии игроков.
3. Найти цену игры для каждого игрока.
4. Реализовать решение виде кода.

Пример решения задания

Для подтверждения аналитически найденной разумной смешанной стратегии необходимо проверить её на реальном примере для X игроков ($X \geq 2$) и убедиться, что смешанные стратегии игроков при Y случайных игр ($Y = 1000, 10000, 100000$) будут сходиться к $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Цена игры для игрока будет в данном случае стремиться к $\frac{S}{X}$, где S – количество успешно сыгранных игр.

Реализуем данное решение в виде программы на Python и приведем результаты работы на тестовых данных.

Проверим выполнимость аналитических расчётов на разных данных:

- Для 3 игроков:
  - Для 1000 игр
  - Для 10000 игр
  - Для 100000 игр
- Для 5 игроков:
  - Для 1000 игр
  - Для 10000 игр
  - Для 100000 игр
- Для 7 игроков:
  - Для 1000 игр
  - Для 10000 игр
  - Для 100000 игр

Содержание отчета о лабораторной работе

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Постановка задачи.
4. График функции цены игры.
5. Объяснение построения графика.

Контрольные вопросы

1. Как выглядит оптимальная стратегия для игры в «камень-ножницы-бумага».
2. В чем суть свойства равновесия Нэша.
3. Какие факторы могут повысить шансы победы в игре «камень-ножницы-бумага».
4. Разумен ли выбор чистой стратегии для игры в «камень-ножницы-бумага».

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать следующее:

1. программную реализацию алгоритмов поиска по своему варианту;
2. результаты работы алгоритмов для заданной в варианте функции;
3. отчет о лабораторной работе;
4. ответы на контрольные вопросы.

Критерии оценивания лабораторной работы

Выполнение поставленной в лабораторной работе задачи засчитывается студенту при успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в разделе «Порядок защиты лабораторной работы», в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Лабораторная работа №3.

Теория закрытого аукциона первой цены.

Цель работы – изучить теорию закрытого аукциона первой ценны, а именно найти равновесные стратегии игроков.

Постановка задачи

Правила игры:

- n покупателей одновременно делают ставки
- $i -$ й покупатель делает ставку b_i
- ценность товара (внутренняя оценка стоимости товара) для $i -$ го покупателя – X_i
- товар достается тому, кто сделал самую большую ставку
- победитель платит свою ставку
- победитель ожидает прибыль π_i

Задача: найти равновесные стратегии покупателей (равновесие по Нэшу).

Варианты заданий приведены в таблице 3.1.

Варианты заданий

Таблица 3.1:

Номер варианта	Число покупателей n	Номер варианта	Число покупателей n
1	6	9	10
2	13	10	35
3	8	11	11

4	9	12	28
5	14	13	17
6	7	14	25
7	9	15	19
8	24	16	3

Количество товаров – 1.

Внутренняя оценка стоимости товара для $i -$го покупателя X_i – случайное число в отрезке [0, 20000].

Основные теоретические сведения

Пусть ценности X_i будут независимыми и равномерными на отрезке [0; 1] случайными величинами (рисунок 3.1).

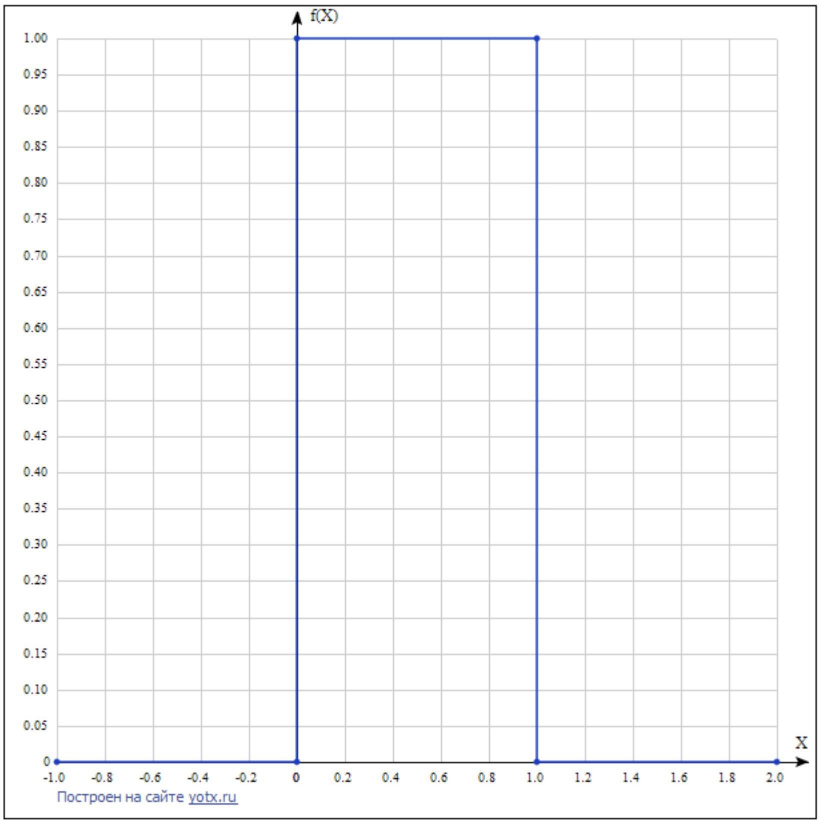


Рисунок 3.1 – закон распределения ценностей.

Мы ограничимся поиском симметричного равновесия, то есть равновесия, где все игроки используют одинаковую стратегию. Фактические ставки при этом могут отличаться.

Стратегия — это функция b от ценности, и даже если эти функции b одинаковые, величины $b(X_i)$ будут разными в силу того, что ценности X_i будут разными.

До начала игры игроки ничем не отличаются: у них одинаковый закон распределения ценности товара, поэтому при анализе мы будем изучать поведение первого игрока.

Найдем оптимальные стратегии:

Предположим, что есть некая равновесная стратегия $b(X)$. Предположим также, что она дифференцируема и возрастает по x.

Первый игрок выигрывает, если его ставка больше всех остальных. Его ожидаемый выигрыш равен:

$$\pi_1(x_1, b_1) = (x_1 - b_1) * \mathrm{P}(b_2 < b_1 \cap b_3 < b_1 \cap \ldots \cap b_n < b_1)$$

То есть чистая прибыль игрока 1 в случае победы - это разница ценности товара и его ставкой на вероятность получения товара.

Наша задача — найти равновесие Нэша, то есть такую ситуацию, когда использование стратегии $b(X)$ является наилучшим действием, если остальные игроки используют такую же стратегию. Поэтому мы предположим, что все игроки, кроме первого, используют стратегию $b(X)$, и найдём условие, при котором первому игроку тоже выгодно её использовать.

Подробнее рассмотрим вероятность $\mathrm{P}(b_2 < b_1 \cap b_3 < b_1 \cap \ldots \cap b_n < b_1)$

Так как b_i это $b(X_i)$, то

$$\mathrm{P}(b_2 < b_1 \cap b_3 < b_1 \cap \ldots \cap b_n < b_1) = \mathrm{P}(b(X_2) < b_1 \cap b(X_3) < b_1 \cap \ldots \cap b(X_n) < b_1)$$

Поскольку случайные величины X_2, $X_3, \ldots, X_n$ независимы, то вероятность пересечений равна произведению вероятностей.

$$\mathrm{P}(b(X_2) < b_1 \cap b(X_3) < b_1 \cap \ldots \cap b(X_n) < b_1) = \mathrm{P}(b(X_2) < b_1) * \mathrm{P}(b(X_3) < b_1) * \ldots * \mathrm{P}(b(X_n) < b_1)$$

Исходя из того, что функция распределения равномерная и равновероятная, а b_1 константа, то все эти вероятности равны (вероятностей $n-1$, так как нужно побороть $n-1$ ставку). Как следствие получаем, что его ожидаемый выигрыш равен:

$$\pi_1(x_1, b_1) = (x_1 - b_1) * \mathrm{P}(b(X_2) < b_1)^{n-1}$$

Далее воспользуемся заменой Уильяма Спенсера Викри из его статьи 1961-го года, а именно заменим число b_1 на неизвестную функцию. $b_1 = b(a)$. Тогда $\pi_1(x_1, b_1) = (x_1 - b(a)) * \mathrm{P}(b(X_2) < b(a))^{n-1}$

Эта замена дает право предположить (в дальнейшем мы это увидим), что функция b возрастает и у нее есть производная.

Вместо максимизации по b_1 нам придется максимизировать по a. Для нахождения оптимальной стратегии первого игрока приравниваем производную по a к нулю:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial a} = -b'(a)\big(F(a)\big)^{n-1} + \big(x - b(a)\big)(n-1) * F(a)^{n-2} * f(a) = 0$$

$F(a)$ – это функция распределения, а именно наше $(X_2 < a)$, произведение функции распределения есть функция плотности $f(a)$.

Если ценность первого игрока – x, то его оптимальная ставка b должна равняться $b(x) = b(a)$, а так как мы предположили, что функция b возрастает, то $a = x$ в точке оптимума.

Тогда:

$$-b'(a)\big(F(a)\big)^{n-1} + \big(x - b(a)\big)(n-1)\,F(a)^{n-2}\,f(a)$$
$$= -b'(x)\big(F(x)\big)^{n-1} + \big(x - b(x)\big)(n-1)F(x)^{n-2}f(x) = 0$$

Сокращаем на $\big(F(x)\big)^{n-2}$

$$-b'(x)F(x) + \big(x - b(x)\big)(n-1)f(x) = 0$$

Получили дифференциальное уравнение первой степени. Заметим, что $f(x) = 1$, а $F(x) = x$ при $x = [0;1]$.

Решая это линейное дифференциальное уравнение первой степени получаем:

$$b(x) = \frac{n-1}{n}x$$

Функция возрастает по x.

Оптимальная стратегия первого и всех остальных игроков — это делать ставку $\frac{n-1}{n}X_i$

Так как $\frac{n-1}{n} < 1$, игроки занижают свою истинную ценность в равновесии Нэша. Причем чем меньше игроков, тем сильнее занижаются ставки по сравнению с субъективной ценностью товара.

Порядок выполнения работы

1. Сгенерировать внутренние оценки товаров для покупателей.
2. Найти оптимальные стратегии по Нэшу для каждого покупателя.
3. Определить победителя аукциона.

Пример выполнения работы

В аукционе принимают участие 10 игроков, выставляется на продажу произведение искусства. a_0, a_1 ... a_9 — участники аукциона. Чем больше картина нравится, тем больше готов за неё заплатить. Участники пишут цену в конверте и сдают конверт администратору.

Вектор внутренних оценок товара игроками: $X = [0, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000]$, где X_i – оценка стоимости лота игроком a_i. Оценка формируется на основе ценности товара для конкретного участника, без влияния (игрок a_0 не меняет свою оценку, так как не знает, что игрок a_9 оценивает товар в 10000)

Чем больше сумма, тем больше шанс выиграть. Но чем меньше сумма, тем больше выигрыш.

Тогда оптимальная по Нэшу ставка $a_0 - \frac{n-1}{n}x = \frac{9}{10} * 0 = 0$

Оптимальная по Нэшу ставка $a_1 - \frac{n-1}{n}x = \frac{9}{10} * 2000 = 1800$

Оптимальная по Нэшу ставка $a_2 - \frac{n-1}{n}x = \frac{9}{10} * 3000 = 2700$

Оптимальная по Нэшу ставка $a_3 - \frac{n-1}{n}x = \frac{9}{10} * 4000 = 3600$

Оптимальная по Нэшу ставка $a_4 - \frac{n-1}{n}x = \frac{9}{10} * 5000 = 4500$

Оптимальная по Нэшу ставка $a_5 - \frac{n-1}{n}x = \frac{9}{10} * 6000 = 5400$

Оптимальная по Нэшу ставка $a_6 - \frac{n-1}{n}x = \frac{9}{10} * 7000 = 6300$

Оптимальная по Нэшу ставка $a_7 - \frac{n-1}{n}x = \frac{9}{10} * 8000 = 7200$

Оптимальная по Нэшу ставка $a_8 - \frac{n-1}{n}x = \frac{9}{10} * 9000 = 8100$

Оптимальная по Нэшу ставка $a_9 - \frac{n-1}{n}x = \frac{9}{10} * 10000 = 9000$

Очевидно, что выиграет игрок a_9, но заметим, что игра a_0 вносит понижение выигрыша a_9 только лишь своим наличием! (без a_0 оптимальная по Нэшу ставка игрока a_9 была бы 8000 следовательно выигрыш бы составил не 1000, а 2000)

Ответ: a_9 выигрывает аукцион с выигрышем: $10000 – 9000 = 1000$, цена игры: 9000

Содержание отчета о лабораторной работе

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Постановка задачи.
4. Решение задачи, оптимальные ставки участников аукциона.
5. Цена игры победителя.

Контрольные вопросы и задания

1. Формула ожидаемого выигрыша $i -$ го покупателя.
2. Что такое равновесие по Нэшу?
3. Опишите принцип закрытого аукциона.

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать следующее:

1. программную реализацию алгоритмов поиска по своему варианту;
2. результаты работы алгоритмов для заданной в варианте функции;
3. отчет о лабораторной работе;
4. ответы на контрольные вопросы.

Критерии оценивания лабораторной работы

Выполнение поставленной в лабораторной работе задачи засчитывается студенту при успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в разделе

«Порядок защиты лабораторной работы», в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Лабораторная работа №4.

Игры в развернутой форме. Игры торга.

Цель работы – изучить модель торга Рубинштейна на примере задачи «Дележ пирога» и выбрать оптимальную стратегию игроков.

Постановка задачи

1. Определить возможности, которые получат игроки, если будут действовать кооперативно.

2.Определить, что произойдет при отсутствии кооперации, что получат игроки, действуя порознь.

Варианты заданий приведены в таблице 6.1.

Варианты заданий

Таблица 6.1

Номер варианта	Ставка дисконтирования	Кол-во итераций
1	0.2	4
2	0.3	5
3	0.1	5
4	0.5	3
5	0.25	4
6	0.125	7
7	0.13	6

Основные теоретические сведения

В данном виде игр, игроки ходят последовательно, и выбор стратегии одного игрока может зависеть от истории игры. Игры торга относятся к классу торговых игр, в которых чередуются предложения на бесконечном временном горизонте. Оригинальное доказательство принадлежит Ариэлю Рубинштейну.

Требования к модели торга Рубинштейна:

- два игрока;

- полная информация;

- предложения выдвигаются поочередно каждым из игроков;

- при достижении взаимного соглашения процедура останавливается и благо распределяется в соответствии с принятым предложением;

- при переходе игры на очередной раунд стоимость блага уменьшается в соответствии с коэффициентами дисконтирования d_1 для первого игрока и d_2 для второго;

- если соглашения не удается достичь за n раундов, то процедура дележа прекращается, и каждый из участников получает 0.

Схема игры торга представлена на рисунке 6.1. Исходная стоимость блага полагается равной единице. Предложения, выдвигаемые в первом раунде обозначены через x_1, предложения, выдвигаемые во втором раунде через x_2. При этом как x_1, так и x_2 обозначим как долю игрока 1, т.е x_2 – эта доля блага, которую второй игрок (во втором раунде) предлагает первому, оставляя себе $1 - x_2$.

Сначала вариант дележа предлагает игрок 1. Если предложение принимает игрок 2, то игра заканчивается с результатом $(x_1,\ 1 - x_1)$. В противном случае игра переходит во второй раунд.

Во втором раунде предложение x_2 выдвигается вторым игроком. Однако с учетом дисконтирующих коэффициентов (δ_1, δ_2), позволяющих учесть убывание полезности доходов в будущих итерациях торга по отношению к текущему моменту времени, игроки получают суммы $\delta_1 x_2$ и $\delta_2(1 - x_2)$. Если первый игрок соглашается с таким исходом, то игра завершается, в противном случае переходит на третий раунд, где ход опять принадлежит первому игроку.

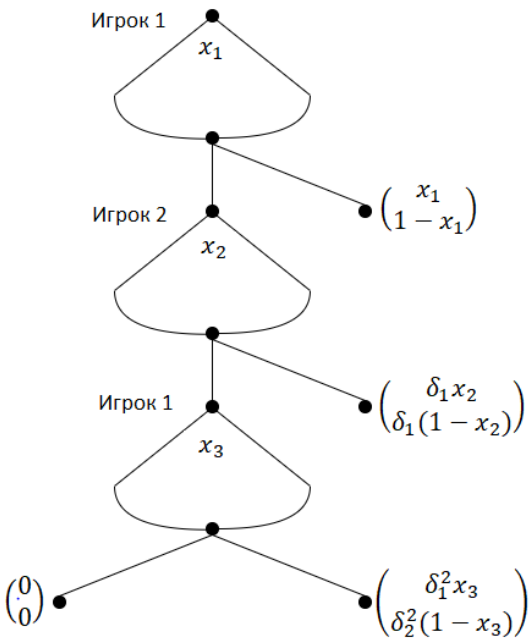


Рисунок 6.1 – схема игры торга.

Проведем анализ игры торга на основе логики обратной индукции для случая трех раундов ($n = 3$). В последнем (третьем) раунде игрок 1 выдвигает предложение x_3, после чего игрок 2 оказывается перед дилеммой "принять или отвергнуть его" рисунок 6.2.

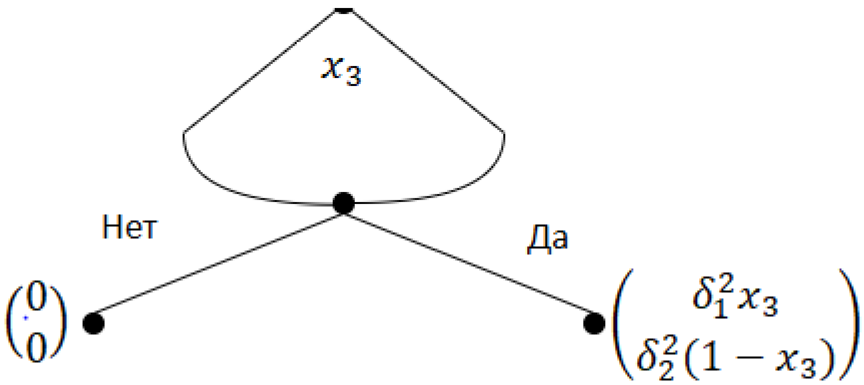


Рисунок 6.2 – игра торга, третий раунд.

При этом выбор игрока 2 происходит между величинами 0 (отказаться от варианта дележа, предлагаемого первым игроком) и $\delta_2^2(1-x_3)$ (согласиться с предложенным дележом). Таким образом, рациональному игроку 2 ничего не остается, как соглашаться с любой сколь угодно малой долей, предлагаемой игроком 1, максимизирующим собственную долю: $\delta_1^2 x_3 \geq \delta_2^2(1-x_3) \geq 0$.

В состоянии равновесия мы получаем исход $(\delta_1^2 x_3, 0)$. Разумеется, подобный исход возможен только при "благосклонно-равнодушном" отношении игрока 2 к результатам игрока 1. Дополнительно подчеркнем, что предпосылка о рациональности игроков в данной модели недвусмысленно предполагает, что они сосредоточиваются на цели максимизации собственной полезности, на которую выигрыши и проигрыши других игроков не оказывают никакого влияния.

Тогда в рамках логики обратной индукции мы можем свернуть игру до второго раунда рисунок 6.3.

Если во втором раунде игрок 2 желает, чтобы его вариант распределения был принят, то он должен предлагать первому игроку долю $\delta_1 x_2$ удовлетворяющую условию $\delta_1 x_2 \geq \delta_1^2$.

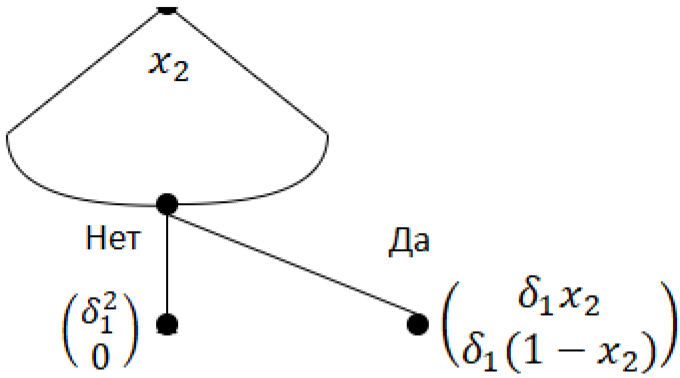


Рисунок 6.3 – игра торга, второй раунд.

В противном случае первому игроку будет выгоднее переходить к третьему раунду, тогда наилучший исход второго раунда для второго игрока $(\delta_1^2 x_3, \delta_2(1-\delta_1))$. Сворачивая игру еще на шаг назад рисунок 6.4, получаем: для того, чтобы она завершилась в первом раунде, первый игрок должен предложить второму долю не меньшую, чем $\delta_2(1-\delta_1)$, т.е. может забрать себе $x_1 = 1 - \delta_2(1-\delta_1)$. Таким образом, мы пришли к заключению, что равновесное распределение в данной трехэтапной игре торга задается парой: $[1-\delta_2(1-\delta_1), \delta_2(1-\delta_1)]$.

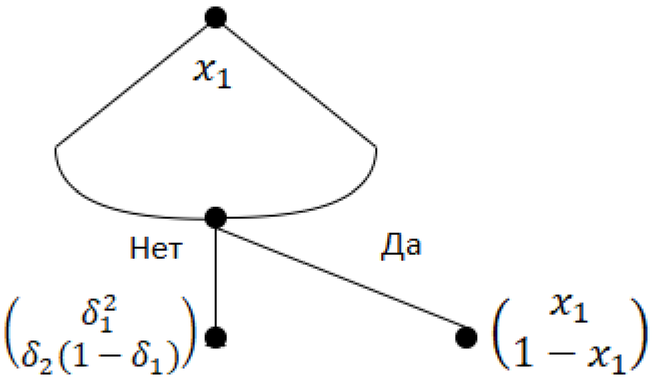


Рисунок 6.4. – игра торга, первый раунд

Порядок выполнения работы

1. Сгенерировать все раунды игры торга и изобразить в виде дерева.
2. Провести анализ игры торга на основе логики обратной индукции.
3. Определить равновесное распределение дележа.

Пример выполнения работы

Мама испекла пирог двум сыновьям, старшему (*С*) и младшему (*М*), и ушла отдыхать, предоставив мальчикам возможность самим решить, как его поделить. Дележ пирога осуществляется в два итерации. Сразу после ухода мамы старший брат предлагает дележ – пропорцию, в которой братья могут разделить пирог. Если младший соглашается на предложение старшего, то они тут же делят пирог в предложенной пропорции и едят его.

Если младший отвергает предложение, то во второй итерации (через 15 минут после ухода мамы) настает черед младшего предлагать дележ. Если старший брат соглашается, то они делят пирог в предложенной младшим пропорции. Если дележ оба раза заканчивается неудачей, то через 30 минут после ухода мамы с работы приходит голодный папа и съедает весь пирог.

Платеж старшего брата

Зададим функцию полезности старшего брата от полученной доли пирога: $u_C(k_C) = \delta^n k_C$, где k_C- доля пирога, которую получает старший брат; n – число прошедших 15-минутных отрезков; $\delta \epsilon [0; 1]$ – ставка дисконтирования (параметр, показывающий, во сколько раз уменьшается полезность пирога за один 15-минутный отрезок).

Платеж младшего брата

Зададим функцию полезности младшего брата от полученной доли пирога: $u_M(k_M) = \delta^n k_M$, где k_M- доля пирога, которую получает младший брат.

Дележом пирога будем называть пару чисел $(k_C; k_M)$, где $k_C + k_M = 1$

Ставка дисконтирования

Будем считать, что в этой игре $\delta = \frac{1}{2}$. Это значит, что за 15 минут пирог теряет половину своих вкусовых качеств. В первом периоде ценность всего пирога равна 1, во втором периоде ценность пирога равна 0.5 и т.д.

Каждый из братьев максимизирует свою полезность. Если одному из братьев безразлично, принимать дележ, предложенный другим, или отвергать его, то он его принимает.

Решим эту игру с конца. Если братьям так и не удастся поделить пирог, то платежи C и M будут соответственно равны $(u_C; u_M) = (0; 0)$, так как папа съест весь пирог.

Тогда C согласится на любой дележ, который M предложит через 15 минут после ухода мамы, так как $u_C = \delta k_C = \frac{1}{2} k_C \geq 0$ вне зависимости от того, какую долю пирога k_C предложит ему младший брат.

В какой пропорции предложит разделить пирог M во втором периоде? Во втором периоде полезность от всего пирога равна 0,5. Максимизируя свой платеж, M предложит C дележ (0;1). Тогда $u_C = \delta k_C = \frac{1}{2} * 0 = 0$; $u_M = \delta k_M = \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{2}$. Любой дележ вида $(k_C; k_M)$, где $k_C > 0$, принесет M меньшую полезность.

Какой дележ тогда предложит C после ухода мамы? Если C предложит M долю пирога $k_M < \frac{1}{2}$, то $u_M = k_M < \frac{1}{2}$. Но тогда M не согласится на такой дележ, так как в следующем периоде M сможет забрать весь пирог себе и получит $u_M = \delta k_M = \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{2}$. Поэтому C предложит дележ $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Предлагать M больше $\frac{1}{2}$ невыгодно для C. Значит, пирог будет разделен после ухода мамы (в первом периоде), и каждый из мальчиков получит платеж $\frac{1}{2}$.

Чем закончится игра, если пирог будет за 15 минут терять не половину, а треть своих вкусовых качеств? Теперь $\delta = \frac{2}{3}$ то есть во втором периоде ценность целого пирога равна $\frac{2}{3}$. Максимизируя свою полезность от пирога, M предложит дележ (0;1) во втором периоде. Тогда $u_C = \delta k_C = \frac{2}{3} * 0 = 0$; $u_M = \delta k_M = \frac{2}{3} * 1 = \frac{2}{3}$. Поэтому C в первом периоде предложит дележ $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. M

согласится на предложение C, и итоговые платежи будут равны $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. Платеж младшего брата увеличился.

Получается, что чем больше δ, тем меньше платеж старшего брата и тем выше платеж младшего брата. Чем больше δ, тем большую часть пирога при дележе во втором периоде «забирает» себе младший брат. Поэтому старшему приходится предлагать младшему долю пирога в первом периоде. Важной предпосылкой является тот факт, что пирог теряет свои вкусовые качества в течение времени. Если бы этого не происходило, то весь пирог забирал бы тот, кто предлагал бы дележ последним. В данном случае это младший брат.

Пусть папа приходит не через 30 минут после ухода мамы, а через 45 минут. Братья теперь делят пирог в течение трех итераций: сразу после ухода мамы, через 15 минут и через 30 минут после ее ухода. Первым дележ предлагает старший брат, через 15 минут наступает очередь младшего брата, а через 30 минут дележ снова предлагает старший брат. Ставка дисконтирования равна $\frac{1}{2}$.

В третьем периоде ценность всего пирога упадет до $\delta^2 = \frac{1}{4}$. Максимизируя свой платёж, в третьем периоде C предложит дележ (1;0). Тогда $u_C = \delta^2 k_C = \frac{1}{4} * 1 = \frac{1}{4}$; $u_M = \delta^2 k_M = \frac{1}{4} * 0 = 0$. M согласится, так как в противном случае весь пирог съест папа и платеж M все равно будет равен 0. Во втором периоде ценность всего пирога составит $\delta = \frac{1}{2}$. М, максимизируя свою полезность, предложит дележ $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Тогда $u_C = \delta k_C = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; $u_M = \delta k_M = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Если М предложит C меньше $\frac{1}{2}$, то C не примет его предложение, так как в третьем периоде он сможет забрать весь пирог себе и гарантированно получить платеж $u_C = \delta^2 k_C = \frac{1}{4} * 1 = \frac{1}{4}$. М нет смысла предлагать C больше $\frac{1}{2}$. В первой итерации ценность всего пирога составит 1. Старший, максимизируя свою полезность, предложит дележ $\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$. Если C предложит M меньше $\frac{1}{4}$, то M не примет его предложение, так как во второй итерации он сможет забрать себе половину пирога и гарантированно получить платеж $u_M = \delta k_M = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. C нет смысла предлагать M больше $\frac{1}{4}$.

Значит, пирог будет разделен в первом периоде, причем старший брат получит $\frac{3}{4}$ всего пирога, а младший $\frac{1}{4}$. Платеж старшего брата увеличился.

Это произошло из-за того, что старший брат теперь обладает большей «переговорной силой» и первый и последний дележ теперь остаются за ним. Младший брат, наоборот, оказывается в значительно более слабом положении и получает лишь небольшую часть пирога.

Данная стратегию хорошо описывает механизм установления заработной платы, так как она является результатом торга между работником и работодателем.

Содержание отчета лабораторной работы

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Постановка задачи.
4. Ход выполнения работы.

Контрольные вопросы

1. Что такое игра торга?
2. Требования к модели торга Рубинштейна.

3. По какой логике игроки предлагают дележ?

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать следующее:

1. программную реализацию алгоритмов поиска по своему варианту;
2. результаты работы алгоритмов для заданной в варианте функции;
3. отчет о лабораторной работе;
4. ответы на контрольные вопросы.

Критерии оценивания лабораторной работы

Выполнение поставленной в лабораторной работе задачи засчитывается студенту при успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в разделе «Порядок защиты лабораторной работы», в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Лабораторная работа №5.

Модель олигополии.

Цель работы – используя статические модели Картеля и «Обмана», смоделировать ситуацию на олигополистическом рынке в долгосрочном периоде.

Постановка задачи

Для двух фирм при заданных по варианту значениях рассчитать прибыль Картеля и «Обмана» по годам.

Определить момент, когда модель «Обмана» перестает быть прибыльной.

Варианты заданий приведены в таблице 7.1

Варианты заданий

Таблица 7.1

Номер варианта	Коэфф-т **a**	Коэфф-т **b**	Переменные издержки, **c**	Процентная ставка, **r**	Количество лет, **years**
1	46	0.16	38	0.392	3
2	53	0.1	28	0.298	5
3	30	0.27	45	0.431	4
4	61	0.2	33	0.312	3
5	47	0.13	29	0.273	4
6	55	0.25	31	0.410	4
7	68	0.22	47	0.365	5
8	34	0.11	24	0.264	3
9	52	0.29	35	0.403	5
10	63	0.15	22	0.215	4

11	58	0.21	37	0.462	3
12	47	0.19	23	0.331	3
13	59	0.27	31	0.379	5
14	44	0.1	25	0.284	3
15	55	0.3	20	0.319	4
16	53	0.26	32	0.288	4
17	49	0.17	26	0.436	3

Основные теоретические сведения

Олигополия **–** это рыночная структура, при которой в реализации какого-либо товара доминирует малая часть продавцов, а появление новых продавцов затруднено или невозможно [1]. Почти все технически сложные отрасли промышленности – металлургия, химия, автомобилестроение, электроника, судостроение, самолетостроение и др., имеют именно такую структуру.

В зависимости от того, выбирает ли олигополист в качестве управляемой переменной величину выпуска или цену, различают олигополию предприятий, устанавливающих величину выпуска, или просто количественную олигополию и олигополию предприятий, назначающих цену, или ценовую олигополию.

Далее рассмотрим три возможные стратегии взаимодействия фирм на количественном олигополистическом рынке: модель Курно, модель Картеля и модель нарушения картельного соглашения (модель «Обмана»). Рассматривать будем на примере дуополии.

Дуополия – частный случай олигополии, это та ситуация, при которой на рынке существует две компании, выпускающие подобную продукцию.

В качестве начальных данных мы имеем:

1) a и b – коэффициенты из формулы задания цены в модели отраслевого спроса $p = a - bQ$, где Q - общий выпуск продукции;
2) $c = c_1 = c_2$ – переменные издержки дуополистов;
3) r – процентная ставка, необходимая для вычисления коэффициента приведения ренты;
4) $years$ – количество лет для расчета.

Объем выпуска, цена продукции и прибыль, полученные в статических моделях, приведены в таблице 7.2.

Таблица 7.2

Показатель	Модель		
	Курно	Картель	«Обман»
q	$\frac{(a-c)}{3b}$	$\frac{(a-c)}{4b}$	$\frac{3(a-c)}{8b}$
p	$\frac{(a+2c)}{3}$	$\frac{(a+c)}{2}$	$\frac{(3a+5c)}{8}$
π	$\frac{(a-c)^2}{9b}$	$\frac{(a-c)^2}{8b}$	$\frac{9(a-c)^2}{64b}$

Дуополия Курно

Дуополия Курно – это модель равновесия в некооперированной олигополии, при условии, что такие параметры, как цена на свою продукцию и объём своего производства изменяются редко [2].

Предположим, что две фирмы $i = 1{,}2$ производят одинаковый продукт и q_1, q_2 – объем производства этого продукта.

Отраслевой спрос характеризуется формулой:

$$P = a - bQ$$

где Q – общий выпуск продукции; a и b – коэффициенты модели.

В силу дуополии имеем:

$$\mathrm{Q} = q_1 + q_2$$

Известны функции затрат фирм:

$$C_i = k_i + c_i q_i$$

где $i = 1,2$. Здесь k_i и c_i– постоянные и переменные издержки производства. Далее будем принимать постоянные издержки за 0.

Объем i-го производителя выражается уравнением:

$$q_i = \frac{a - c_i}{2b} - \frac{1}{2} q_{3-i}$$

В соответствии с этим на рисунке 7.1 построены линии реакции дуополистов. Точка их пересечения определяет рыночное равновесие, поскольку указывает на те объемы индивидуального предложения, в изменении которых не заинтересован ни один из конкурентов.

Решив систему из уравнений объема товаров дуополистов, получим равновесные значения выпуска для первой q_1^* и второй q_2^* фирмы:

$$q_i^* = \frac{a - 2c_{i+} c_{3-i}}{3b}$$

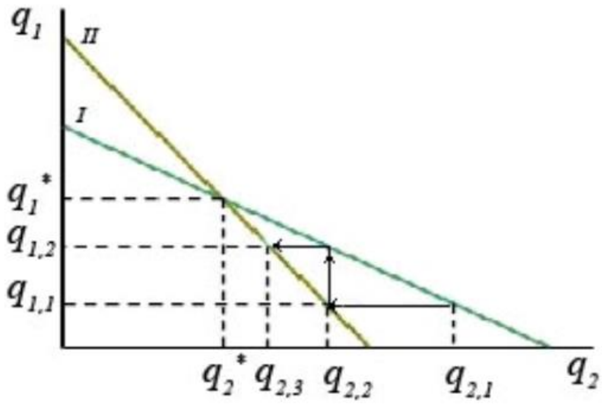


Рисунок 7.1 – равновесие Курно.

Исходя их формулы формирования отраслевого спроса, выразим прибыль i-ой фирмы $\pi_i = Pq_i - cq$:

$$\pi_i = [a - b(q_1 + \cdots + \ q_n)]q_i - cq_i = aq_i - bq_q q_i - \cdots - bq_{i^2} - \cdots - bq_i q_n$$

Максимальную прибыль будем искать из условия: $\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 0$

Максимальная прибыль для i-ой фирмы: $P = bq_i + c$

Следовательно:

1. $q_i^* = (P - c)/b$
2. В состоянии равновесия все фирмы будут иметь одинаковый объем реализации. Это вытекает из допущения, что у всех фирм одинаковые предельные затраты на производство.

Подставим объем равновесного выпуска отдельной фирмы в функцию отраслевого спроса, тогда

$$P = a - bQ = a - \frac{nb(P - c)}{b}$$

При $n = 1$ получаем монопольную цену, а по мере увеличения n цена приближается к предельным затратам.

Равновесие Нэша в модели Курно характеризуется тем, что ни одному конкуренту не выгодно менять свое поведение, пока поведение других конкурентов остается неизменным.

Картель

В случае вступления фирмы в сговор с целью совместного определения выпуска модель Курно выглядят не очень разумной. Если сговор возможен, то фирмам выгоднее выбирать объем выпуска, максимизирующий общую прибыль отрасли, а затем разделить прибыль между собой.

Картелем называют группу олигополистов, договорившихся об определенных принципах установления цен и/или распределения долей рынка.

Таким образом, задача максимизации прибыли для двух фирм состоит в выборе таких объемов выпуска q_1 и q_2, которые бы максимизировали общую прибыль отрасли:

$$\pi = \max\left(P(q_1 + q_2) - c(q_1 + q_2)\right)$$

Условия оптимальности (предельный доход от добавочной единицы выпуска должен быть одинаковым независимо от того, где он произведен):

$$P^* + \left(\frac{\partial P^*}{\partial Q}\right)(q_1^* + q_2^*) - c = 0$$

$$P^* = P(q_1^* + q_2^*)$$

Для линейной кривой спроса максимальная прибыль картеля(общая):

$$\pi = [a - b(q_1 + q_2) - c](q_1 + q_2) = (a - c)(q_1 + q_2) - b(q_1 + q_2)^2$$

Равенство предельного дохода и предельный издержек:

$$q_1^* + q_2^* = \frac{a - c}{2b}$$

Следовательно, в условиях картеля нет проблем с получением максимальной суммарной прибыли, так как информация полная и нет необходимости анализировать разные гипотезы.

Нарушение картельного соглашения («Обман»)

Проблема с решением вступить в картель состоит в том, что всегда есть искушение нарушить условия соглашения. Рассмотрим, например, точку, в которой две фирмы делят рынок поровну. Представим, что произошло бы, если бы руководство фирмы 1 предположило, что фирма 2 будет поддерживать свой выпуск постоянным. Если бы фирма 1 увеличила свой выпуск, а фирма 2 сохранила постоянный выпуск, то прибыль фирмы 1 увеличилась бы.

Рассчитаем прибыль, которую получит фирма 2, нарушив картельное соглашение с фирмой 1.

Предположим, что фирма 1 придерживается договоренного объема выпуска (считая, что $c = c_1 = c_2$)

$$q = \frac{(a - c)}{4b}$$

, тогда для фирмы 2 необходимо подобрать такой объем выпуска, чтобы максимизировать прибыль:

$$\pi_2 = (p - c)q_2 = aq_2 - bq_mq_2 - b{q_2}^2 - cq_2$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial q_2} = a - bq_m q_2 - b2 - c = 0$$

Решим и получим:

$$q_2 = \frac{(a-c) - bq_m}{2b} = \frac{3(a-c)}{8b}$$

Тогда получится, что цена p_2 равна:

$$p_2 = a - b\left(q_m + \frac{a-c-bq_m}{2b}\right) = \frac{a+c-bq_m}{2}$$

При картеле прибыль будет равна:

$$\pi_1 = (a - 2bq_m - c)q_m = \frac{(a-c)^2}{8b}$$

А при обмане:

$$\pi_2 = \left(\frac{a-2bq_m}{2} - c\right)\left(\frac{a-c-bq_m}{2b}\right) = \frac{9(a-c)^2}{64b}$$

Дельта при обмане:

$$\pi_2 - \pi_1 = \frac{\frac{1}{64}(a-c)^2}{b}$$

Порядок выполнения работы

1. Найти прибыли фирмы, совершившей обман.
2. Найти прибыли фирмы в картеле.
3. Рассмотреть функционирование фирм на рынке в бесконечном периоде.

Пример выполнения работы

Выражение $\sum_{i}^{n}\frac{1}{(1+r)^{i}}$ представляет собой коэффициент приведения годовой ренты, равный $\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$

Нахождение прибыли фирмы, совершившей обман:

$$\pi_0 = \pi_{\text{Обман},1} + \sum_{i}^{n}\frac{1}{(1+r)^{i}}\pi_{\text{Курно},i} = \left(\frac{(a-c)^2}{b}\right)(\frac{9}{64} + 1/9\sum_{i}^{n}\frac{1}{(1+r)^{i}})$$

Нахождение прибыли фирмы в картеле:

$$\pi_k = \sum_{i}^{n}\frac{1}{(1+r)^{i}}\pi_{\text{Картель},i} = \left(\frac{(a-c)^2}{b}\right)(1/8\sum_{i}^{n}\frac{1}{(1+r)^{i}})$$

Приравняем π_k и π_o:

$$\frac{1}{8}\sum_{i}^{n}\frac{1}{(1+r)^{i}} - \frac{1}{9}\sum_{i}^{n}\frac{1}{(1+r)^{i}} = \frac{9}{64}$$

$$\sum_{i}^{n}\frac{1}{(1+r)^{i}} = \frac{9}{8}$$

$$n = -\frac{\ln\left(1 - r * \left(\frac{9}{8}\right)\right)}{\ln(1+r)}$$

где $0 < r < \frac{8}{9}$

Если рассматривать функционирование фирм на рынке в бесконечном периоде, то при

$$n \to \infty: \sum_{i}^{n}\frac{1}{(1+r)^{i}} \to \frac{1}{r}$$

Следовательно,

$$\pi_0^\infty = \frac{(a-c)^2(64+81r)}{576 \cdot r \cdot b}$$

$$\pi_k^\infty = \frac{(a-c)^2(8+r)}{8 \cdot r \cdot b}$$

$$\pi_k^\infty/\pi_0^\infty = \frac{576+72r}{64+81r}$$

При $r \in \left[0, \frac{8}{9}\right], \frac{\pi_k^\infty}{\pi_0^\infty} \in [9; 4.71]$

Содержание отчета о лабораторной работе

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Постановка задачи.
4. Ход выполнения работы.

Контрольные вопросы

1. Какая модель олигополии является наиболее выгодной для ее участников в долгосрочной перспективе?
2. В чем состоит главная особенность рынка олигополии?
3. Почему не существует общей модели олигополии?
4. Опишите состояние равновесия на олигополистическом рынке в соответствии с моделью Курно. Всегда ли оно достигается?

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать следующее:

1. программную реализацию алгоритма по своему варианту;

2. результаты работы алгоритма для заданных в варианте значений;
3. отчет о лабораторной работе;
4. ответы на контрольные вопросы.

Критерии оценивания лабораторной работы

Выполнение поставленной в лабораторной работе задачи засчитывается студенту при успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в разделе «Порядок защиты лабораторной работы», в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Лабораторная работа № 6.

Информационное противоборство.

Цель работы — изучить теоретико-игровую модель информационного противоборства в социальных сетях. Найти аналитическое решение игры с не противоположными интересами двух игроков и определить итоговые расстояния до точки утопии.

Постановка задачи

1. Для 10 агентов случайным образом сгенерировать стохастическую матрицу доверия.
2. Получить результирующую матрицу доверия.
3. Случайным образом выбрать номера агентов из общего числа агентов для первого и второго игроков.
4. Определить функции выигрыша, целевые функции, точку утопии, найти аналитическое решение игры с не противоположными интересами двух игроков.

Варианты заданий

Таблица 8.1

Номер варианта	a	b	c	d	g_f	g_s
1	1	2	1	5	1	2
2	2	3	2	4	2	1
3	3	4	3	3	2	3
4	4	5	4	2	4	6
5	5	6	1	1	1	5
6	1	1	2	5	5	6
7	2	2	3	4	3	1
8	3	3	4	3	4	4

9	4	4	1	2	2	2
10	5	5	2	1	4	2
11	1	6	3	5	6	6
12	2	1	4	4	1	3
13	3	2	1	3	3	2
14	4	3	2	2	3	3
15	5	4	3	1	1	4
16	1	5	4	5	2	5
17	2	6	1	4	6	5
18	3	1	2	3	4	5
19	4	2	3	2	2	6
20	5	3	4	1	4	1

Основные теоретические сведения

В данном разделе мы будем рассматривать игру с не противоположными интересами, для антагонистической игры обратитесь к описанию решения в [16].

Дадим определение информационному управлению:

Информационное управление — это целенаправленное воздействие на начальные мнения агентов с целью обеспечить требуемые (для субъекта, осуществляющего управление) значения их итоговых мнений.

Дадим определение информационному противоборству:

Информационное противоборство — это социальная структура множества субъектов-пользователей, как индивидуальных, так и коллективных. Информационное противоборство представляет собой комплексное деструктивное воздействие на информационные системы и информационную инфраструктуру конкурирующей стороны с одновременной защитой собственной информации, информационных систем и информационной инфраструктуры от подобных воздействий. Объект информационного противоборства — информационно-коммуникационная система.

Рассмотрим социальную сеть, состоящую из n агентов. Мнение i-го агента в момент времени t – действительное число $x_i^t, i \in N = \{1,2,\ldots,n\}, t = 0,1,2\ldots.$ Информационное влияние агентов друг на друга будем отражать неотрицательной стохастической по строкам матрицей доверия $A = \|a_{ij}\|$, где a_{ij} — степень доверия i-го агента j-му агенту, $i,j \in N$. Будем считать, что каждый агент хоть сколько-нибудь доверяет другим агентам $a_{ij} > 0, i,j \in N$.

Вектор мнений $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в игре с n игроками меняется следующим образом в зависимости от момента времени t:

$$x(t) = Ax(t-1)$$

При достаточно долгом взаимодействии агентов вектор мнений сходится к итоговому значению:

$x = A^\infty x(0)$,

где $A^\infty = \lim\limits_{t\to\infty} A^t$.

Если $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}, a_{ij} > 0$, то:

1. Все строки матрицы A^∞ одинаковы;
2. Итоговые мнения всех агентов одинаковы ($\forall i \in \{1,\ldots,n\}, x_i = X$).

Обозначив строку матрицы A^∞ через r, получим выражение

$$X = \sum_{k\in \mathrm{N}} r_k\, x_k^0$$

Пусть имеются два игрока, каждый из которых может влиять на начальные мнения некоторых агентов. Обозначим $F \subseteq N$ – множество агентов, чьи мнения формируются первым игроком (агенты влияния первого игрока), $S \subseteq N$ – множество агентов, чьи мнения формируются вторым игроком (агенты влияния второго игрока), $F \cap S = \emptyset$. Предположим, что у всех агентов из множества F формируется начальное мнение $u \in U$, а у всех агентов из множества S формируется начальное мнение $v \in V$, где U и V — числовые отрезки.

Обозначим:

$$r_f = \sum_{i \in \mathrm{F}} r_i,$$

$$r_s = \sum_{j \in \mathrm{S}} r_j\,,$$

$$X^0 = \sum_{k \in \mathrm{N}\ (F \cup S)} r_k\, x_k^0$$

тогда получим:

$$X(u, v) = r_f u + r_s v + X^0$$

то есть итоговое мнение членов социальной сети будет линейно зависеть от управлений u и v, входящих соответственно с весами $r_f > 0$ и $r_s > 0$, где $r_f + r \leq 1_s$, которые определяются суммарной влиятельностью агентов влияния.

Имея зависимость $X(u, v) = r_f u + r_s v + X^0$ итогового мнения агентов от управляющих воздействий, можно формулировать теоретико-игровую модель взаимодействия игроков, осуществляющих эти воздействия. Для этого необходимо определить их целевые функции. Предположим, что целевая функция первого (второго) игрока $\Phi_f(u, v) = H_f\big(X(u, v)\big) - c_f$ $\big(\Phi_s(u, v) = H_s\big(X(u, v)\big) - c_s\big)$, где H_f, H_s – доходы, а c_f, c_s – затраты.

Совокупность $\Gamma = \{\Phi_f(u, v), \Phi_s(u, v), u \in U, v \in \mathrm{V}\}$ целевых функций и множеств допустимых действий двух игроков задают семейство игр, различия между которыми порождаются конкретизацией информированности игроков и порядка функционирования.

Если описание игры Г и выражение $X(u, v) = r_f u + r_s v + X^0$ являются общим знанием среди игроков, которые выбирают свои действия однократно, одновременно и независимо, то получаем игру в нормальной форме, для которой можно искать и исследовать равновесия Нэша, их эффективность по Парето и т.д. Фиксировав последовательность выбора игроками своих действий, получим ту или иную иерархическую игру.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Для 10 агентов случайным образом сгенерировать стохастическую матрицу доверия.
2. Назначить всем агентам случайное начальное мнение из заданного отрезка числовой оси. Найти итоговое мнение агентов.
3. Случайным образом выбрать количество и номера (непересекающиеся) агентов влияния из общего числа агентов для первого и второго игроков. Назначить им начальные мнения первого и второго игроков. Остальным агентам (нейтральным) назначить случайные начальные мнения. Смоделировать информационное управление в рамках игры и определить итоговое мнение агентов.

Пример выполнения лабораторной работы

Рассмотрим игру для 10 агентов. Сначала сгенерируем матрицу доверия и убедимся, что она стохастическая:

$$\begin{pmatrix}
0.202 & 0.114 & 0.114 & 0.156 & 0.061 & 0.139 & 0.179 & 0.019 & 0.015 & 0 \\
0.048 & 0.093 & 0.037 & 0.144 & 0.105 & 0.148 & 0.17 & 0.087 & 0.117 & 0.051 \\
0.124 & 0.101 & 0.18 & 0.055 & 0.06 & 0.074 & 0.151 & 0.18 & 0.04 & 0.036 \\
0.109 & 0.149 & 0.101 & 0.145 & 0.163 & 0.009 & 0.11 & 0.077 & 0.135 & 0.002 \\
0.11 & 0.163 & 0.171 & 0.05 & 0.11 & 0.168 & 0.079 & 0.111 & 0.014 & 0.023 \\
0.068 & 0.014 & 0.198 & 0.138 & 0.138 & 0.044 & 0.094 & 0.196 & 0.034 & 0.076 \\
0.274 & 0.038 & 0.043 & 0.069 & 0.081 & 0.127 & 0.151 & 0.046 & 0.037 & 0.134 \\
0.105 & 0.146 & 0.076 & 0.151 & 0.054 & 0.249 & 0.084 & 0.069 & 0.063 & 0.04 \\
0.082 & 0.072 & 0.154 & 0.105 & 0.07 & 0.094 & 0.113 & 0.132 & 0.016 & 0.16 \\
0.021 & 0.059 & 0.133 & 0.131 & 0.138 & 0.107 & 0.073 & 0.146 & 0.124 & 0.068
\end{pmatrix}$$

Теперь случайным образом выберем номера агентов первого и второго игрока (номера агентов не должны пересекаться, так как это выходит за рамки данной работы). Нужно обратить внимания, что количество агентов первого игрока не обязательно должно совпадать с количеством агентов второго игрока, и вообще может быть равно 0:

Агенты первого игрока:4,5,6

Агенты второго игрока:1,2,3

Рассчитаем результирующую матрицу доверия:

$$\begin{pmatrix} 0.125 & 0.096 & 0.119 & 0.114 & 0.097 & 0.115 & 0.121 & 0.102 & 0.057 & 0.053 \\ 0.125 & 0.096 & 0.119 & 0.114 & 0.097 & 0.115 & 0.121 & 0.102 & 0.057 & 0.053 \\ 0.125 & 0.096 & 0.119 & 0.114 & 0.097 & 0.115 & 0.121 & 0.102 & 0.057 & 0.053 \\ 0.125 & 0.096 & 0.119 & 0.114 & 0.097 & 0.115 & 0.121 & 0.102 & 0.057 & 0.053 \\ 0.125 & 0.096 & 0.119 & 0.114 & 0.097 & 0.115 & 0.121 & 0.102 & 0.057 & 0.053 \\ 0.125 & 0.096 & 0.119 & 0.114 & 0.097 & 0.115 & 0.121 & 0.102 & 0.057 & 0.053 \\ 0.125 & 0.096 & 0.119 & 0.114 & 0.097 & 0.115 & 0.121 & 0.102 & 0.057 & 0.053 \\ 0.125 & 0.096 & 0.119 & 0.114 & 0.097 & 0.115 & 0.121 & 0.102 & 0.057 & 0.053 \\ 0.125 & 0.096 & 0.119 & 0.114 & 0.097 & 0.115 & 0.121 & 0.102 & 0.057 & 0.053 \\ 0.125 & 0.096 & 0.119 & 0.114 & 0.097 & 0.115 & 0.121 & 0.102 & 0.057 & 0.053 \end{pmatrix}$$

Пусть $\mathrm{a} = 2, \mathrm{b} = 4, \mathrm{c} = 4, \mathrm{d} = 2, g_f = 1,\ g_s = 2$

Функции выигрыша имеют вид:

$$\mathrm{H_f}(\mathrm{x}) = ax - bx^2 \to \max_u$$

$$\mathrm{H_s}(\mathrm{x}) = cx - dx^2 \to \max_v$$

Подставим наши значения:

$$\mathrm{H_f}(\mathrm{x}) = 2x - 4x^2$$

$$\mathrm{H_s}(\mathrm{x}) = 4x - 2x^2$$

Оптимальные мнения:

$$X_{maxf} = 0.25, X_{maxs} = 1$$

Целевая функция первого игрока:

$$\Phi_{\mathrm{f}}(u,v) = a\left(r_f u + r_s v\right) - b\left(r_f u + r_s v\right)^2 - g_f \frac{u^2}{2}$$

Целевая функция второго игрока:

$$\Phi_s(u,v) = c\left(r_f u + r_s v\right) - d\left(r_f u + r_s v\right)^2 - g_s \frac{u^2}{2}$$

где g_f и g_s – коэффициенты затрат первого и второго игрока соответственно.

Подставим наши значения:

$$\Phi_{\mathrm{f}}(u,v) = 2\left(r_f u + r_s v\right) - 4\left(r_f u + r_s v\right)^2 - \frac{u^2}{2}$$

$$\Phi_{\mathrm{s}}(u,v) = 4\left(r_f u + r_s v\right) - 2\left(r_f u + r_s v\right)^2 - \frac{2v^2}{2}$$

Равновесие Нэша:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{du}\Phi_{\mathrm{f}}(u,v) = 2r_f - 8{r_f}^2 u - 8r_f r_s v - u \to 0 \\ \dfrac{d}{dv}\Phi_{\mathrm{s}}(u,v) = 4r_s - 4{r_s}^2 u - 4r_f r_s u - 2v \to 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{du}\Phi_{\mathrm{f}}(u,v) = 2r_f - 8{r_f}^2 u - 8r_f r_s v - u = 0 \\ \dfrac{d}{dv}\Phi_{\mathrm{s}}(u,v) = 4r_s - 4{r_s}^2 v - 4r_f r_s u - 2v = 0 \end{cases}$$

Выразим v через u:

$$v = \frac{u + 8{r_f}^2 u - \ 2r_f}{-8r_f r_s}$$

Подставим это выражение в $\frac{d}{dv}\Phi_{\mathrm{s}}(u,v)$ и найдем u:

$$u = \frac{2r_f - 12{r_s}^2 r_f}{2{r_s}^2 + 8{r_f}^2 + 1}$$

Найдем r_f и r_s:

$\mathrm{r_f} = 0.114 + 0.097 + 0.115 = 0.326$

$\mathrm{r}_s = 0.125 + 0.096 + 0.119 = 0.34$

Подставим получившиеся значения r_f и r_s:

$$u = \frac{2 * 0.326 - 12 * 0.34^2 * 0.326}{2 * 0.34^2 + 8 * 0.326^2 + 1} = 0.095 \to u = 0.095$$

Теперь мы можем найти v и точку утопии X:

$$v = \frac{0.095 + 8 * 0.326^2 * 0.095 - \ 2 * 0.326}{-8 * 0.326 * 0.34} = 0.53 \to v = 0.53$$

$X = \mathrm{r_f} u + \mathrm{r_s} v = 0.326 * 0.095 + 0.34 * 0.53 = 0.211$

При $\mathrm{X_{maxf}} = 0.25,\ \mathrm{X_{maxs}} = 1$ найдем расстояния:

$\Delta_{x_f} = 0.039$

$\Delta_{x_s} = 0.789$

Как мы видим $\Delta_{x_f} < \Delta_{x_s}$, поэтому выиграл первый игрок.

Содержание отчета о лабораторной работе

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Полное решение задачи.
4. Расчет целевой функции для каждого игрока, точки утопии, расстояний до точки утопии для каждого из игроков.

Контрольные вопросы

1. Дайте определения и опишите свойства стохастической матрицы.
2. Что такое информационное противоборство? Что является объектом информационного противоборства?
3. Что такое иерархическая игра?

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать следующее:

1. программную реализацию алгоритмов поиска по своему варианту;
2. результаты работы алгоритмов для заданной в варианте функции;
3. отчет о лабораторной работе;
4. ответы на контрольные вопросы.

Критерии оценивания лабораторной работы

Выполнение поставленной в лабораторной работе задачи засчитывается студенту при успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в разделе «Порядок защиты лабораторной работы», в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Лабораторная работа № 7.

Сетевые игры на графах.

Цель работы – изучить кооперативные игры со взвешенными графами, а также понятие вектора Майерсона. Используя взвешенный граф, с вершиной заданной в соответствии с номером варианта, определить компоненты вектора Майерсона для соответствующей кооперативной игры. На основании полученных данных, найти выигрыш игрока.

Постановка задачи

1. Найти производящие функции для заданного дерева.
2. Рассчитать вектор Майерсона.

Варианты заданий приведены на рисунке 9.1.

Варианты заданий

В соответствии с номером варианта в данном взвешенном графе выбирается вершина:

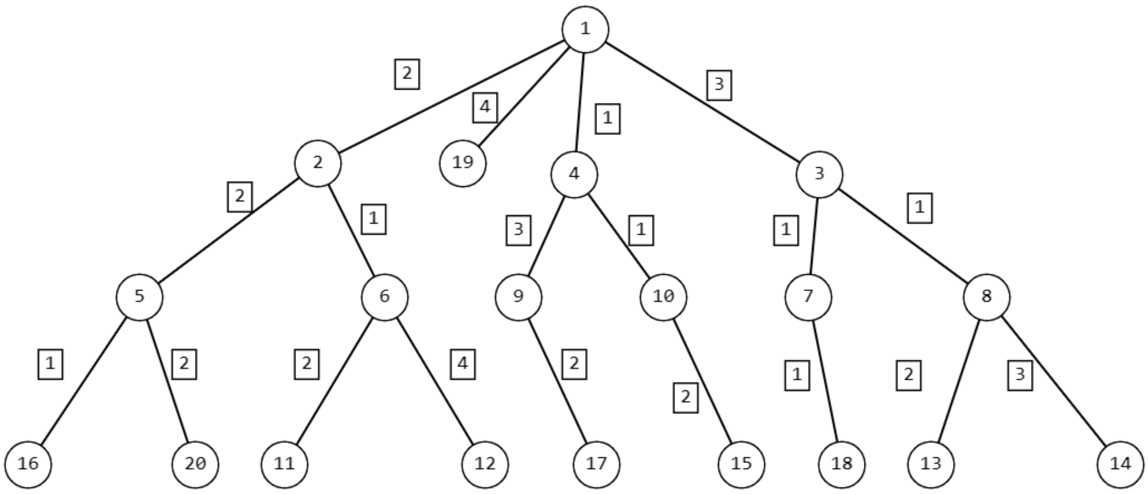


Рисунок 9.1 – варианты работ.

Основные теоретические сведения

В данной работе мы будем рассматривать кооперативную игру со взвешенным графом, где ребра имеют веса с целыми значениями.

Дадим определение кооперативной игры:

Кооперативной игрой n лиц будем называть пару $< N;\ v >$, где $N = \{1,2,\dots,n\}$ – множество игроков, а v: $2^N \to R$ – отображение, предписывающее каждой коалиции $S \in 2^N$ некоторое численное значение такое, что $v(\emptyset) = 0$. Функция v называется характеристической функцией кооперативной игры.

Неориентированный граф $g = (N, E)$ состоит из множества вершин N и множества ребер E, вершины графа ассоциируются с игроками, а ребро графа ij означает, что игроки i и j могут взаимодействовать напрямую, если и только если $ij \in g$.

Граф g на множестве игроков N связный, если для любых двух вершин существует путь в g от одной вершины к другой. Коалиция S связана, если любая пара игроков в S связана путём состоящим только из игроков данной коалиции. Связная компонента – максимальное связное подмножество. $N|g$ означает множество всех связных компонент в g.

Дадим определение вектора Майерсона:

Рассматривается кооперативная игра $< N, v >$ с множеством игроков N и граф g, вершинами которого являются игроки. Для каждого игрок i данного графа g и характеристической функции v *вектор Майерсона* $Y(v,g) = \left(Y_1(v,g), \dots, Y_n(v,g)\right)$ определяется следующими аксиомами:

A1. Если S – связная компонента, то сумма выигрышей игроков коалиции S равна ценности всей коалиции, т.е. $\forall S \in N|g$:

$$\sum_{i \in S} Y_i(v,g) = v(S).$$

A2. $\forall g, \forall ij \in g$ оба игрока одинаково получают выгоду или теряют от создания связи:

$$Y_i(v,g) - Y_i(v, g-ij) = Y_j(v,g) - Y_j(v, g-ij).$$

Если для любой коалиции S определить характеристическую функцию как

$$v_g(S) = \sum_{k \in S|g} v(K),$$

то вектор Майерсона может быть вычислен по формуле:

$$Y_i(v,g) = \sum_{S \subset N\{i\}} (v_g(S \cup i) - v_g(S)) \frac{s!(n-s-1)!}{n!},$$

где $s = |S|, n = |N|$.

В нашем случае рассматривается взвешенный граф, где ребра имеют веса с целыми значениями. Преобразуем каждое ребро веса m в m параллельных ребер веса 1. Получим мультиграф. Заметим, что число кратчайших путей станет больше из-за мультиребер. Если вершины i_1 и i_2 связаны m ребрами и вершины i_2 и i_3 связаны n ребрами, то вершины i_1 и i_3 связаны $m \times n$ путями.

Теперь более подробно рассмотрим дерево $g_p = (N, E)$ со взвешенными ребрами и корнем в вершине p. Введем производящую функцию вида

$$\varphi_P(x) = \sum_{k=1}^{L} \alpha_k^P x^k,$$

где α_k^P – число путей из k вершин (длины k – 1) в мультиграфе, которые проходят через вершину p.

В финальных вершинах положим

$$\varphi_P(x) = x.$$

Во всех остальных вершинах мультиграфа кроме корня, положим

$$\varphi_q(x) = x(1 + \sum\nolimits_i w(q, q_i)\varphi_{q_i}(x)),$$

где q_i – число потомков q и $w(q, q_i)$ – вес ребра (q, q_i). А в корне дерева положим

$$\varphi_q(x) = x(1 + \sum\nolimits_{i=1}^{d} w(p, q_i)\varphi_{q_i}(x) + \sum\nolimits_{i \neq j} w(p, q_i)\varphi_{q_i}(x) *$$
$$w(p, q_j)\varphi_{q_j}(x)).$$

Теперь опишем процедуру получения дележа для произвольного игрока i.

Шаг 1. Два напрямую связанных игрока получают r. По отдельности они не получат ничего, поэтому каждый из них вправе рассчитывать на половину, т.е. выигрыш составит $\frac{r}{2}$. Но если игрок участвует в нескольких таких связях, то он получит $\frac{r}{2}$ от каждой. Значит, его выигрыш нужно умножить на количество путей длины 1, содержащих этого игрока.

Шаг 2. Чтобы получить r^2 нужен путь из трёх игроков. Без любого из них коалиция заработает меньше, поэтому каждый из трёх должен получить $\frac{r^2}{3}$ от всех путей длины 2, проходящих через него.

Рассуждая аналогичным образом, и суммируя выигрыши каждого шага получим делёж:

$$Y_i(v, g) = \frac{A_1(g_i)}{2} r + \frac{A_2(g_i)}{3} r^2 + \cdots + \frac{A_L(g_i)}{L+1} r^L = \sum\nolimits_{k=1}^{L} \frac{A_k(g_i)}{k+1} r^k,$$

где $A_k(g_i)$ – число путей длины k в дереве g с вершиной i.

Пример выполнения работы

Рассмотрим следующее дерево с вершиной $p = 3$ (рисунок 9.2):

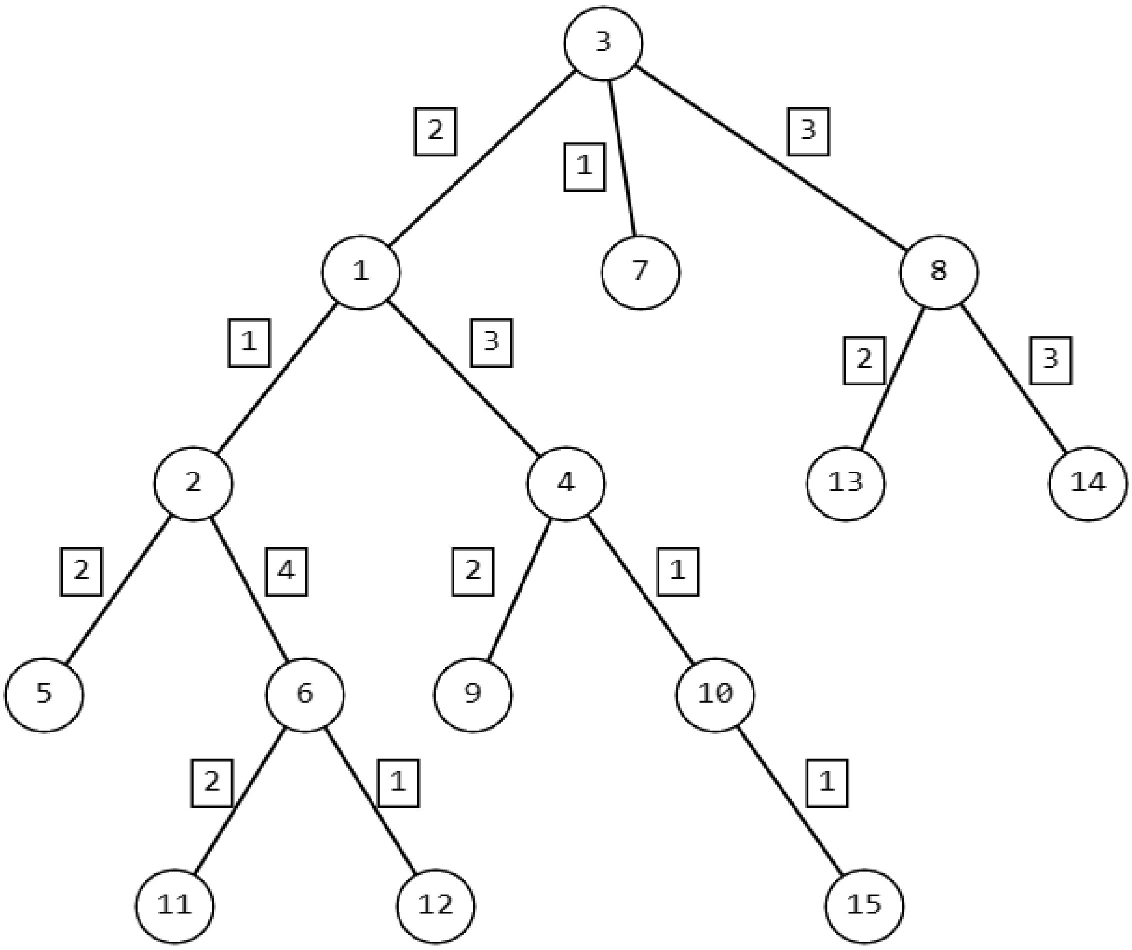


Рисунок 9.2 – дерево.

Отсюда рассчитаем и получим следующие значения производящих функций:

1) $\varphi_5(x) = \varphi_{11}(x) = \varphi_{12}(x) = \varphi_9(x) = \varphi_{15}(x) = \varphi_7(x) = \varphi_{13}(x) = \varphi_{14}(x) = x$
2) $\varphi_6(x) = x(1 + 2\varphi_{11}(x) + \varphi_{12}(x)) = x(1 + 3x) = x + 3x^2$
3) $\varphi_8(x) = x(1 + 2\varphi_{13}(x) + 3\varphi_{14}(x)) = x(1 + 5x) = x + 5x^2$
4) $\varphi_{10}(x) = x(1 + \varphi_{15}(x)) = x(1 + x) = x + x^2$

5) $\varphi_4(x) = x(1 + 2\varphi_9(x) + \ \varphi_{10}(x)) = x(1 + 2x + x + x^2) = x(1 + 3x + 5x^2)$
6) $\varphi_2(x) = x(1 + 2\varphi_5(x) + \ 4\varphi_6(x)) = x(1 + 2x + 4x + 12x^2) = x(1 + 6x + 12x^2)$
7) $\varphi_1(x) = x(1 + 3\varphi_4(x) + \ \varphi_2(x)) = x(1 + 3x(1 + 3x + x^2) + x + 6x^2 + 12x^3) = x(1 + 4x + 15x^2 + 15x^3) = x + 4x^2 + 15x^3 + 15x^4$
8) $\varphi_3(x) = x(1 + 2\varphi_1(x) + \ \varphi_7(x) + 3\varphi_8(x) + 2\varphi_1(x)\varphi_7(x) + 3\varphi_8(x)\varphi_7(x) + 6\varphi_1(x)\varphi_8(x)) = x(1 + 6x + 34x^2 + 107x^3 + 270x^4 + 480x^5 + 450x^6) = x + 6x^2 + 34x^3 + 107x^4 + 270x^5 + 480x^6 + 450x^7$

Таким образом получаем:

1) $A_1(3) = \alpha_2^3 = 6$
2) $A_2(3) = \alpha_3^3 = 34$
3) $A_3(3) = \alpha_4^3 = 107$
4) $A_4(3) = \alpha_5^3 = 270$
5) $A_5(3) = \alpha_6^3 = 480$
6) $A_6(3) = \alpha_7^3 = 450$

И теперь найдём вектор Майерсона:

$$Y_3(G) = \frac{6}{2}r + \frac{34}{3}r^2 + \frac{107}{4}r^3 + \frac{270}{5}r^4 + \frac{480}{6}r^5 + \frac{450}{7}r^6$$

Содержание отчета о лабораторной работе

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Постановка задачи.
4. График функции цены игры.
5. Объяснение построения графика.

Контрольные вопросы

1. Что такое вектор Майерсона? Какой смысл он в себе несёт?
2. Назовите основные аксиомы, определяющие вектор Майерсона.
3. Что такое характеристическая функция кооперативной игры?

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать следующее:

1. программную реализацию алгоритмов поиска по своему варианту;
2. результаты работы алгоритмов для заданной в варианте функции;
3. отчет о лабораторной работе;
4. ответы на контрольные вопросы.

Критерии оценивания лабораторной работы

Выполнение поставленной в лабораторной работе задачи засчитывается студенту при успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в разделе «Порядок защиты лабораторной работы», в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Лабораторная работа №8.

Игры поиска.

Цель работы – изучить игры поиска на примере игры поиска точек на геометрической фигуре.

Постановка задачи

Для заданной геометрической фигуры распределить точки для двух игроков, определить победителя в игре (для множества итераций). Определить цену игры аналитическим и численным методами.

Варианты заданий приведены в таблице 2.1.

Варианты заданий

Таблица 2.1:

Номер варианта	Геометрическая фигура
1	Конус
2	Цилиндр
3	Параллелепипед
4	Тор

Основные теоретические сведения

Бесконечные антагонистические игры отличаются от матричных игр тем, что в них оба игрока имеют бесконечное множество стратегий. В бесконечных играх исследуются системы вида:

$$\Gamma = (X, Y, H),$$

где X и Y – произвольные бесконечные множества, элементы которых являются стратегиями игроков 1 и 2 соответственно.

H – функция выигрыша игрока 1:

$$H: X \times Y \to R$$

Опишем постановку задачи на примере куба. Игрок 1 выбирает произвольным образом s точек на кубе. Его вектор стратегий состоит их координат данных точек $(x_1, \dots, x_s)$. Игрок 2 выбирает точку на том же кубе. Функция выигрыша для игрока 1 имеет следующий вид:

$$H = \begin{cases} 1, \text{если } |x_i - y| \leq r, \text{ хотя бы для одного } i \\ 0, \text{ иначе} \end{cases},$$

где r – радиус поражения каждой выбранной точки игрока 1. Функция выигрыша говорит о том, что игрок 1 выиграл в том случае, если игрок 2 выбрал такую точку, евклидово расстояние от которой хотя бы до одной из точек игрока 1 меньше r. Таким образом можно провести M экспериментов и узнать цену игры:

$$\mathrm{H} = \frac{\text{количество игр, выигранных игроком 1}}{\text{общее количество игр}}$$

Порядок выполнения работы

1. Построить геометрическую фигуру, в соответствии с вариантом.
2. Смоделировать игру поиска со множеством итераций.
3. Найти цену игры аналитическим и численным методами.
4. Определить победителя.

Пример выполнения работы

Аналитический метод.

Для решения данной задачи аналитическим методом необходимо вычислить значение цены игры по следующей формуле:

$$H = \frac{\text{Площадь покрытия } s \text{ точками игрока 1}}{\text{площадь поверхности куба}}$$

Саму игру можно интерпретировать как оценку площади покрытия методом Монте-Карло, с условием, что в качестве стратегии игрок 2 выбирает точку из равномерного распределения на всей поверхности куба. То есть он с вероятностью *1/6* выбирает грань, а уже на ней выбирает точку из равномерного распределения на этой грани.

Для удобства будем называть пересечение поверхности круга с *r-окрестностью* любой атакующей точки просто окрестностью (радиус будет понятен из контекста). Под площадью окрестности будем иметь ввиду сумму площадей плоских фигур, из которых она состоит как объединение. В отличие от аналогичной игры на сфере в данном случае придется учесть два факта:

1. Площадь окрестности одной атакующей точки не постоянная величина (как и геометрическая форма самой окрестности).
2. Площадь пересечения окрестностей зависит не только от расстояния между соответствующими точками, но и от положения этих точек на самом кубе.

Поэтому сразу поставим разумные ограничения на исследование этой задачи: радиус атаки не больше половины ребра куба. Это необходимо для того, чтобы было меньше условий для аналитической модели – при данном ограничении окрестность любой точки будет состоять из не более чем трех фигур.

Далее в контексте данной работы будем считать, что ребро куба фиксировано и равно 2, таким образом, точка $(0,0,0)$ есть центр куба, а каждая точка на поверхности имеет хотя бы 1 координату $+1$ или -1 (число таких координат определяет, скольким граням одновременно принадлежит точка). Это не принципиальный момент, однако так будет намного удобнее согласовывать аналитические формулы, описанные в данном примере, и реализующие их функции в программном коде на этапе моделирования.

Очевидно, что в этом случае площадь окрестности выражается следующей формулой:

$$S(x_i, x_j, R) = \sum_{(a_i, a_j) \in \{-1,+1\}^2} S_* \left(\frac{1 - a_i x_i}{R}, \frac{1 - a_j x_j}{R}, R\right),$$

где x_i, x_j – координаты точки на грани (в декартовой системе координат с центром в центре самой грани и осями, параллельными сторонам грани, так как грань у куба есть квадрат), R – радиус поражения (поиска), S_* - это площадь «четверти» окрестности (выделены разными цветами на рисунке 2.1):

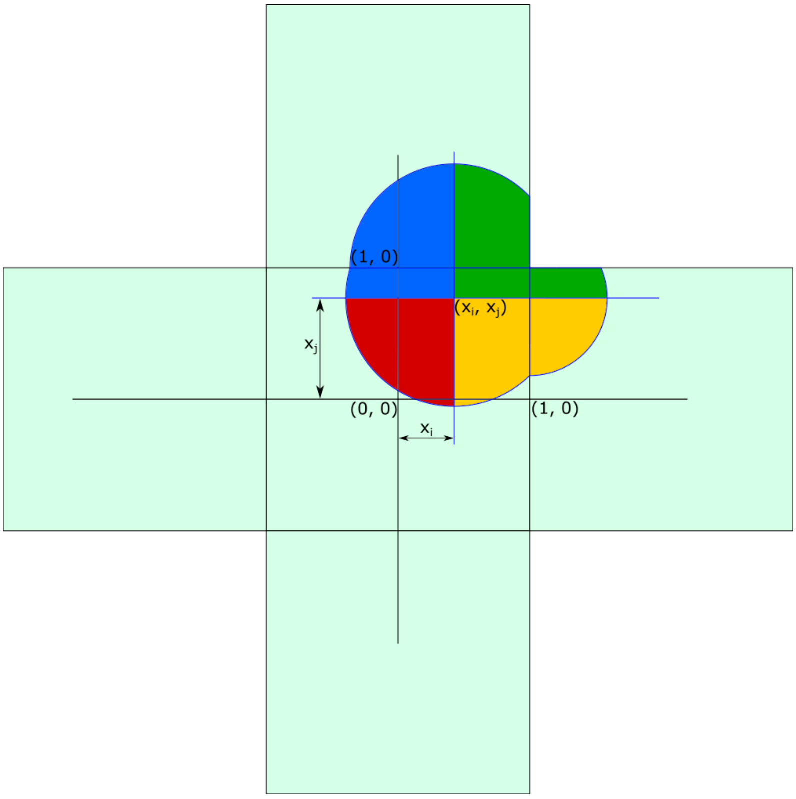


Рисунок 2.1 - Развертка куба без задней грани для демонстрации составляющих окрестности одной точки.

Формула для S_*:

$$S_*(a, b, R) = R^2 \cdot \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{если } a \geq 1, b \geq 1, \\ \frac{1 - b^2}{4}\pi + \frac{1}{2}\arcsin(b) + \frac{b}{2}\sqrt{1 - b^2}, & \text{иначе и если } a \geq 1, b \leq 1, \\ \frac{1 - a^2}{4}\pi + \frac{1}{2}\arcsin(a) + \frac{a}{2}\sqrt{1 - a^2}, & \text{иначе и если } b \geq 1, a \leq 1, \\ \frac{1}{2}\left[\frac{\pi(2 - a^2 - b^2)}{2} + a\sqrt{1 - a^2} + b\sqrt{1 - b^2} + \frac{\pi}{2} - \arccos(\mathrm{a}) - \arccos(\mathrm{b})\right], & \text{иначе и если } \sqrt{a^2 + b^2} \geq 1, \\ ab + (a + b)\frac{(1 - a^2 - b^2)}{2} + (1 - a^2)arcsin\frac{b}{\sqrt{1 - a^2}} + (1 - b^2)arcsin\frac{a}{\sqrt{1 - b^2}}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что указанная формула справедлива не только в рамках наших ограничений, но и для радиусов не больших стороны квадрата. Для более удобного анализа построим функцию $S(x, y, R)$ при нескольких фиксированных радиусах R (рисунок 2.2):

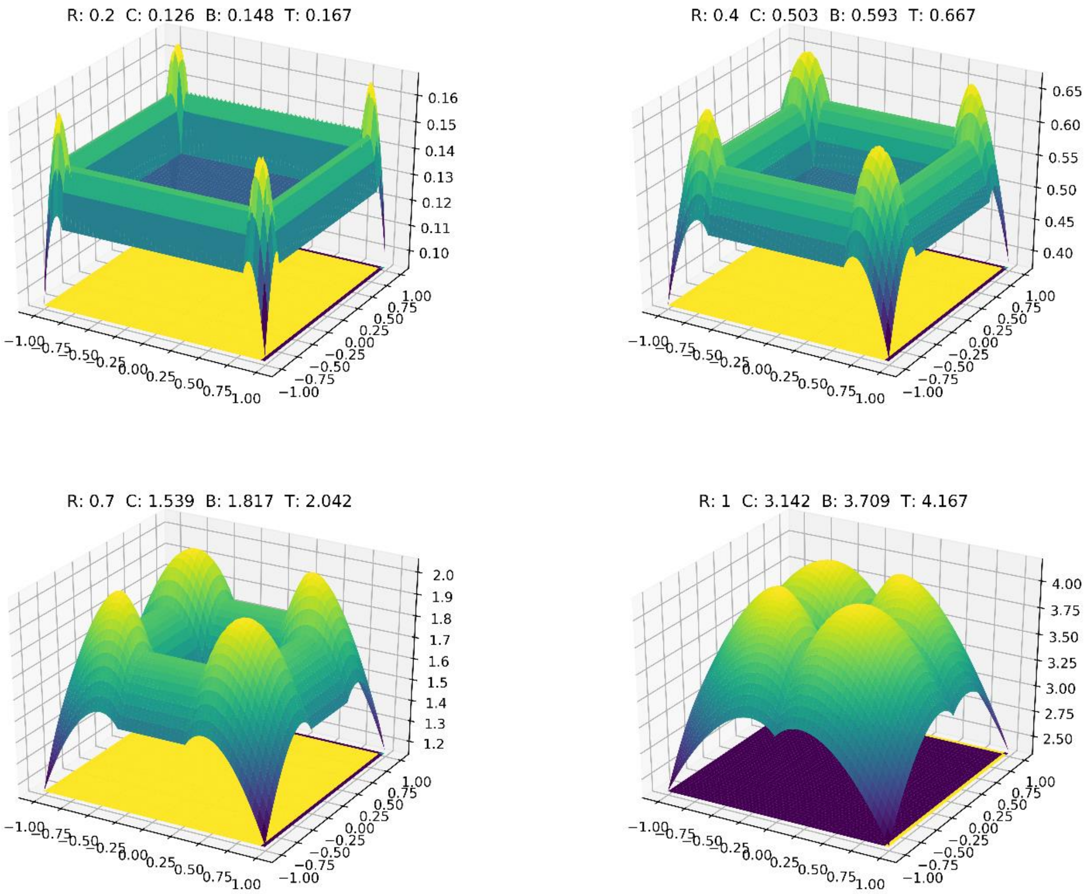


Рисунок 2.2 – Площадь окрестности точки в зависимости ее положения на грани. Здесь R – радиус, для которого построена функция, C – значение в центре грани (то есть площадь круга радиуса R), B – значение функции на «стене», а T – пиковые значения, то есть на «горках».

Здесь необходимо определить, для чего именно необходима введенная функция. Из графика видно, что не все точки равнозначны, более того, можно выделить области эквивалентности (множества точек, площади окрестностей которых равны), что дало бы бесконечное множество классов эквивалентности, или можно было бы сделать это множество конечным, введя дискретизацию на площади. Однако как бы мы не рассуждали, итог один – у игрока 1 есть позиции, которые потенциально могли бы дать больший выигрыш при условии, что игрок 2 играет «равномерно». Однако, игроку 2 в таком случае будет явно не выгодно ставить точки в областях «стенок» функции площади и тем более в области «горок», где находится абсолютный максимум. Поэтому игрок 2 будет играть неравномерно, отдавая предпочтение точкам в центре граней или напротив, на ребрах, например, взяв распределение Гаусса с нулевым математическим ожиданием (в смысле (0, 0) – координату) за распределение по граням, а сами грани выбирая равновероятно. В этом случае для игрока 1 будет самым разумным вариантом не строить свою функцию распределения точек на основе функции площади для максимизации всего покрытия, а напротив, чаще бить в центр. В ответ на это (конечно же, мы рассматриваем не последовательность игр, и здесь неприменимо такое понятие, как ответ, но интуитивно ясно, что имеется в виду) игрок 2 может играть по «противоположному» распределению. Все это ведет к следующему выводу: несмотря на то, что у обоих игроков бесконечное число стратегий, в данной задаче их можно нестрого поделить на 2 группы – «играть от центра» и «играть к центру». Это рассуждение было необходимо для следующей гипотезы: если выбранные игроками стратегии относятся к одной группе, то шанс выигрыша у игрока 1 выше, иначе шанс выигрыша выше у игрока 2; тогда пусть они выбирают распределения случайно так, чтобы смешанное распределение было равномерным, а полученный выигрыш мы назовем ценой игры.

Итак, теперь мы можем сформулировать следующие задачи: оценить аналитически этот выигрыш при указанной равномерной стратегии и смоделировать игру, вычислив то же значение численно.

Рассмотрим идеальную для игрока 1 ситуацию при равномерной игре: все площади не пересекаются. Тогда площадь покрытия (и следовательно вероятность выигрыша) можно определить как мат. ожидание площади окрестности, умноженное на s.

Брать интеграл по грани от указанной функции представляется нетривиальной задачей, однако можно проинтегрировать ее численно при нескольких фиксированных радиусах, а затем аппроксимировать некоторой математической моделью. Численное интегрирование дало следующие значения (приведены только первые 10 значений, интеграл же брался по 50) с ошибкой интегрирования не более $6.5E-7$ (таблица 2.2):

Таблица 2.2

R	S
0.0	0.0
0.1	0.1286
0.2	0.5253
0.3	1.2045
0.4	2.1780
0.5	3.4552
0.6	5.0427
0.7	6.9446
0.8	9.1625
0.9	11.6950

Необходимо решить задачу регрессии, в качестве модели возьмем полином степени 3. После обучения получим коэффициенты полинома:

$$M[S] = 3.46997531 \cdot x^2 + 0.23637155 \cdot x^3$$

По графику на рисунке 2.3 и представленному на ней коэффициенту детерминации (именно это в легенде обозначает R^2, а не квадрат радиуса) видно, что модель достаточно приближает искомую зависимость. На рисунке

2.4 построена функция без обучающей выборки (нет значений численных интегралов).

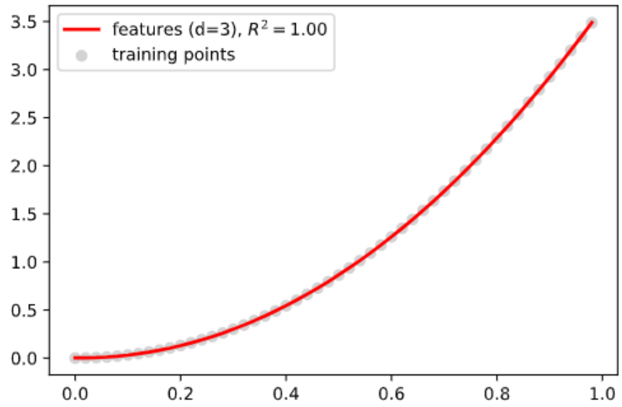


Рисунок 2.3 – Аппроксимация математического ожидания площади окрестности точки, выбранной из равномерного распределения по грани, в зависимости от радиуса.

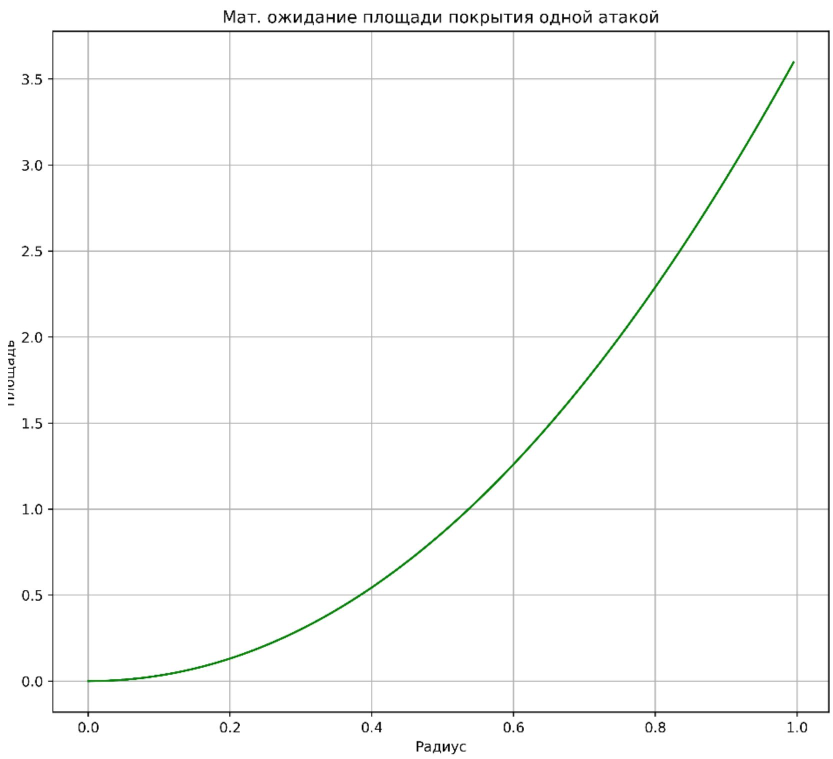


Рисунок 2.4 – Аппроксимация $M[S]$.

Теперь мы знаем, с чем можно сравнивать результат, который будет получен численным методом.

Численный метод.

Для численного решения необходимо решить 2 задачи: генерация атаки и непосредственное проведение игры. Под генерацией атаки подразумевается создание указанного числа точек (s) на кубе для указанного радиуса (R). Проведение игры – это генерация точки игрока 2 и проверка того, попала ли она в какую-либо покрытую область или нет.

Начнем с генерации атаки. При рассуждениях в аналитической части было допущено, то атакующие точки распределяются по равномерному закону. Проверим, можем ли мы генерировать такое распределение – создадим такую атаку из 60000 точек. На рисунке 2.5 показано распределение точек по граням - оно действительно равновероятно, нельзя сказать, что определенной грани отдается большее или меньшее «предпочтение». На рисунке 2.6 показано распределение на случайно взятой грани, из которого можно сделать вывод о равномерности последнего.

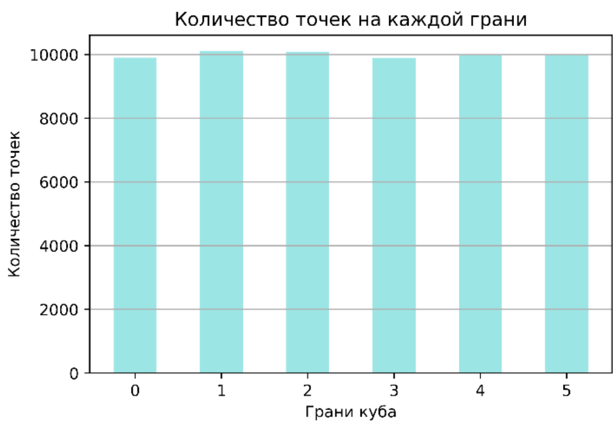


Рисунок 2.5 – Распределение точек по граням куба.

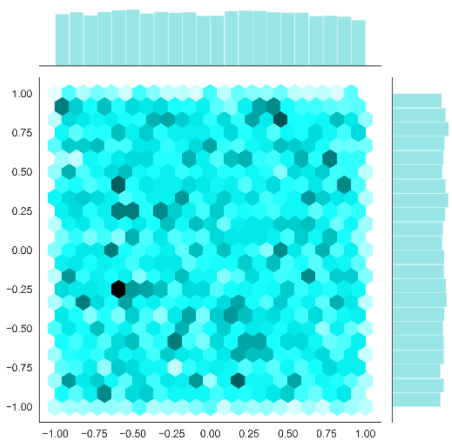


Рисунок 2.6 – Распределение точек на грани куба.

Однако это не идеальный вариант для игрока 1. Рассмотрим рисунок 2.7, где показана генерация атаки просто из равномерного распределения:

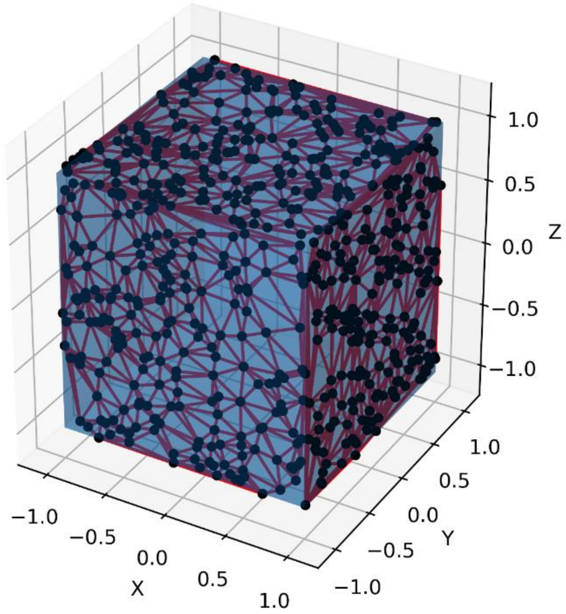


Рисунок 2.7 - Атака на основе равномерного распределения.

На рисунке специально отрисованы линии, полученные с помощью триангуляции Делоне, для демонстрации расстояний между точками, что помогает более объективно визуально оценить неравномерность распределения. На каждом подобном рисунке будет триангуляция, кроме тех мест, где это будет мешать восприятию другой более полезной информации.

Является ли атака на рисунке 2.7 приемлемой для игрока 1? Если радиус атаки 0.0001 – да, так как атака равномерная, а пересечений нет. Если радиус 0.1 – нет, так как пересечения явно есть, и они не минимизированы (четко видны большие флуктуации точек в одной части грани и большую разреженность в другой). Поэтому возникает подзадача – распределение (в плане «растаскивания») уже сгенерированных точек. Данный процесс будем называть разрежением.

Решать эту задачу будем как задачу оптимизации. Будем минимизировать оценку пересечения. Следует подчеркнуть, не пересечение, а оценку пересечения – то есть величину, которая сильно коррелирует с реальной величиной площади, покрываемой более, чем одной точкой. В аналитической части уже упоминалось, что площадь пересечения окрестностей зависит не только от расстояния между соответствующими точками, но и от положения этих точек на самом кубе. Описать аналитической формулой площадь пересечения окрестностей 2 точек на плоскости – тривиальная задача, однако она перестает быть таковой для 3 и более точек. Ситуацию усложняет и факт того, что описать аналитически пересечение нескольких точек вблизи ребра и/или углов достаточно трудно. Поэтому, в качестве оптимизируемой величины выберем сумму пересечений для всех пар точек, и если точки из рассматриваемой пары находятся на разных гранях, то в сумму будет добавляться не пересечение, а треть от него (эвристика без доказательства – этот гиперпараметр был подобран в ходе исследований алгоритма растаскивания).

Оптимизируемая величина:

$$I(P) = \sum_{\substack{(p_1,p_2)\in P^2 \\ p_1\neq p_2}} \begin{cases} i(p_1,p_2), \text{если } p_1 \text{и } p_2 \text{ на одной грани} \\ \frac{i(p_1,p_2)}{3}, \text{если } p_1 \text{и } p_2 \text{ на соседних гранях} \end{cases},$$

где

$$i(p_1,p_2) = \begin{cases} R^2 \cdot \left(arccos\left(\frac{\|p_1-p_2\|_2}{2R}\right) - \frac{\sqrt{2R-\|p_1-p_2\|_2^2}}{2R} \right), \text{ если } \|p_1-p_2\|_2 \leq 2R \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}.$$

Алгоритм распределения итеративный. На вход алгоритму подается исходное множество точек P и радиус R. В алгоритме используются 1 параметр Q – он является коэффициентом изменения (начальное значение $BOOT\_MAX\_Q = 0.01$). На каждой итерации используется вспомогательная функция *dispose*, принимающая P, R, и численный коэффициент k.

Функция dispose(P, R, k):

Forces := hashtable{p_i: (0, 0, 0) для всех p_i из P}

Для всех пар (p_i, p_j) *из* P^2, где $i \neq j$:

$f := force(p_i, p_j, R)$

$Forces[p_i] := Forces[p_i] + f$

$Forces[p_j] := Forces[p_j] - f$

Для всех p_i *из* P:

$Forces[p_i] := k \cdot Forces[p_i] + edge\_force(p_i, \frac{k}{2})$

Вернуть $\{fix(p_i + Forces[p_i])$ *для всех* $p_i\}$

Здесь $force(p_i, p_j, R)$ – специально подобранная функция «отталкивания», можно и нужно интерпретировать как силу отталкивания. На рисунке 2.8 представлены графики зависимости приведенных сил отталкивания от расстояния между точками p_i, p_j при некоторых фиксированных радиусах R, то есть $force(p_i, p_j, R)/R$.

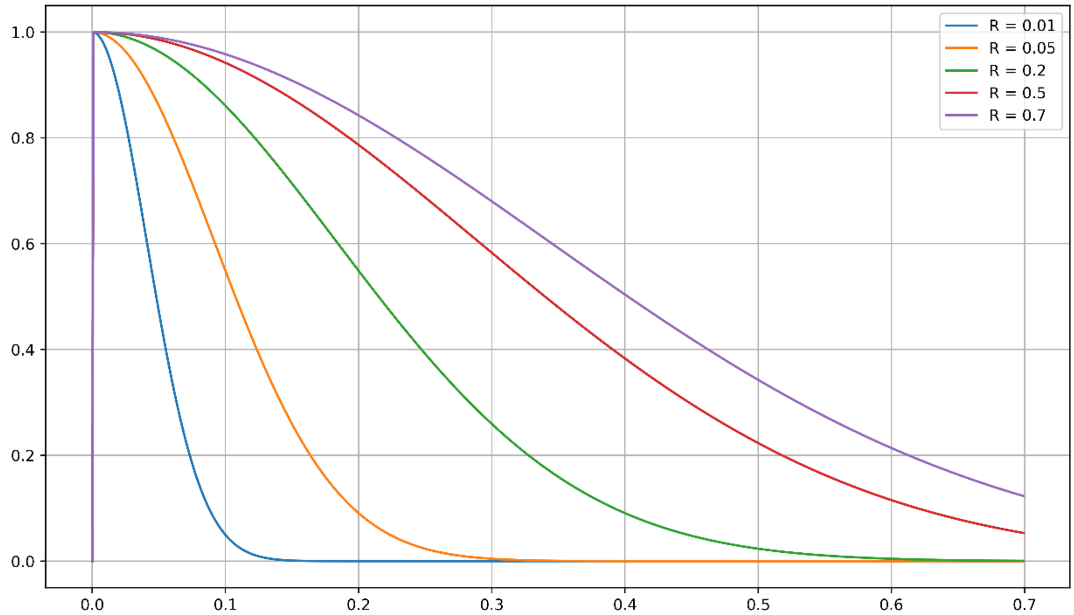
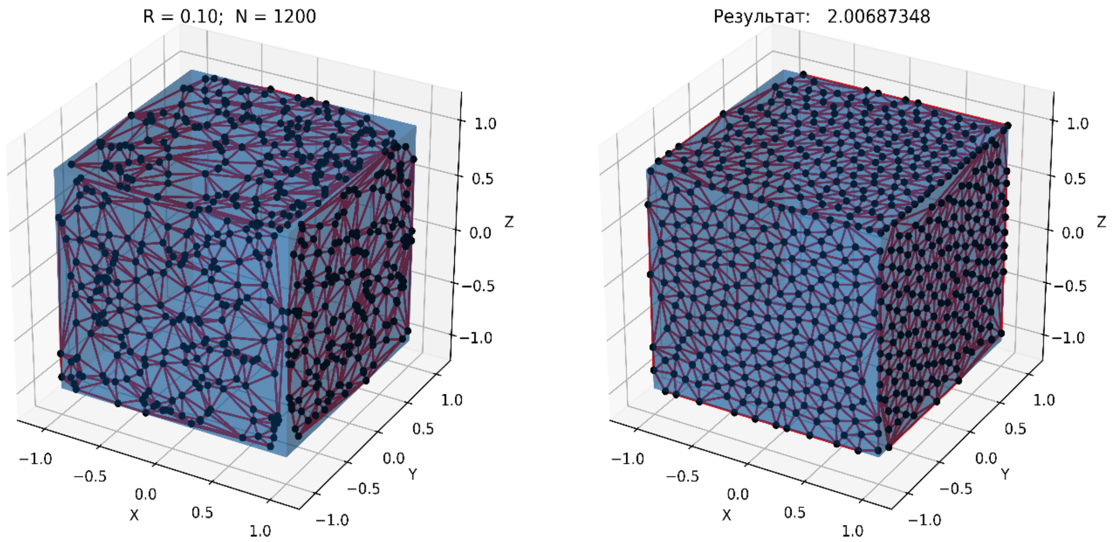


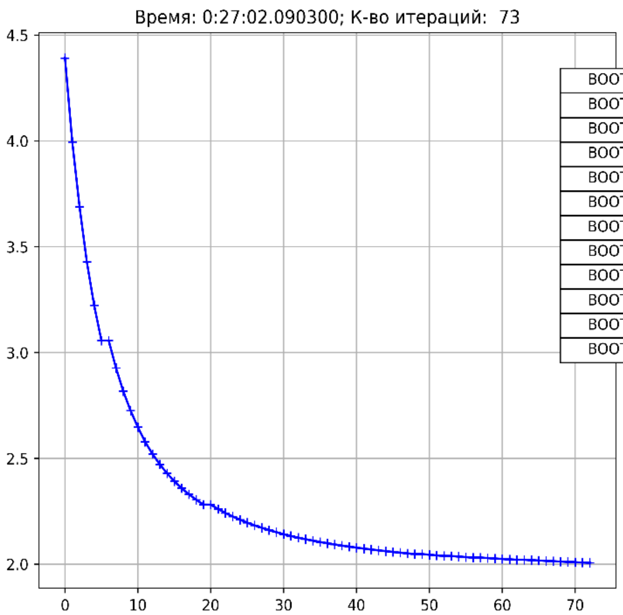
Рисунок 2.8 - Зависимость силы отталкивания от расстояния между точками при некоторых фиксированных радиусах.

Функция *edge_force* есть быстро убывающая функция, которая нужна для создания дополнительного отталкивания от граней.

Отдельно отметим некоторые нюансы алгоритма: операция случайного перемещения точек в маленькой окрестности нужно для того, чтобы точки не застревали на ребрах и углах (так как силы не могут «столкнуть» точку с ребра).

Пример работы алгоритма растаскивания при выбранных гиперпараметрах для всех игр представлен на рисунке 2.9.





Гиперпараметры перераспределения

	value
BOOT_MAX_STEPS	250
BOOT_MAX_Q	0.01
BOOT_MIN_Q	1e-06
BOOT_SCALE_Q	0.95
BOOT_RND_POINT_ON_FACE	0.2
BOOT_RND_POINT_ON_EDGE	0.9
BOOT_RND_POINT_ON_VERTEX	1
BOOT_RND	0.1
BOOT_FORCE	2
BOOT_MAX_DELTA	0.001
BOOT_MAX_FAILS	20
BOOT_STRIKE	10

Рисунок 2.9 - Результат работы *bootstrap* для радиуса R и числа точек N. Видно, что алгоритм достаточно равномерно распределил точки, существенно уменьшив оценку пересечений. Время работы алгоритма требовалось для отладки.

Из-за того, что генерация атаки вычислительно сложна, будем проводить для каждой атаки 10000 игр, а самих игр проводить не боле 50. Это даст хороший усредненный результат.

За несколько суток имитации игр были получены следующие данные (рисунок 2.10):

		attempts	inters		hits	
		count	mean	var	mean	var
radius	number					
0.01	**120**	5	0.000000	0.000000e+00	0.001480	7.500000e-10
	480	10	0.000000	0.000000e+00	0.006173	4.444556e-08
	900	10	0.000000	0.000000e+00	0.011841	4.434333e-08
	960	10	0.000000	0.000000e+00	0.012700	7.844444e-08
	1200	17	0.000000	0.000000e+00	0.015551	1.543485e-07
0.02	**480**	10	0.000000	0.000000e+00	0.025070	1.617111e-07
0.04	**120**	5	0.000000	0.000000e+00	0.024878	3.360700e-07
	480	10	0.000000	0.000000e+00	0.101365	8.091833e-07
	1200	4	0.000009	3.107964e-10	0.255892	6.442250e-07
0.10	**120**	5	0.000002	1.127837e-11	0.160568	3.176470e-06
	480	8	0.007665	1.716263e-05	0.635068	6.601193e-06
	600	4	0.074281	5.768352e-05	0.769160	3.523800e-06
	900	10	0.735477	2.950523e-04	0.942465	1.760681e-05
	960	4	0.965203	1.892336e-04	0.953363	1.064709e-05
	1020	3	1.189167	1.920656e-04	0.964493	6.748233e-06
0.15	**120**	5	0.000555	7.926377e-07	0.363560	2.764650e-06
	360	6	0.469005	1.649565e-04	0.907590	2.604608e-05
	420	6	0.879266	1.789825e-04	0.953363	5.585027e-06
	480	10	1.384644	5.579336e-04	0.978840	1.688524e-05
0.20	**120**	9	0.022984	6.533564e-05	0.635081	3.041656e-05
	480	4	6.610122	2.554006e-03	0.999985	9.000000e-10
0.25	**120**	5	0.357310	1.187581e-03	0.868806	2.768218e-05
0.30	**60**	20	0.095843	6.438358e-04	0.691426	6.230772e-05
	120	5	1.382150	2.522121e-03	0.964398	1.818266e-04
0.40	**60**	22	0.942258	6.086929e-03	0.932630	2.595825e-04
0.70	**60**	41	19.363804	2.367401e+00	0.993603	4.596875e-05

Рисунок 2.10 - Статистики игр. Здесь *hits* - доля попаданий, *inters* - оценка величины пересечений, attempts - число различных атак.

Каждая игра была представлена графически. В примере далее будут приведены некоторые из них (рисунки 2.11-2.12).

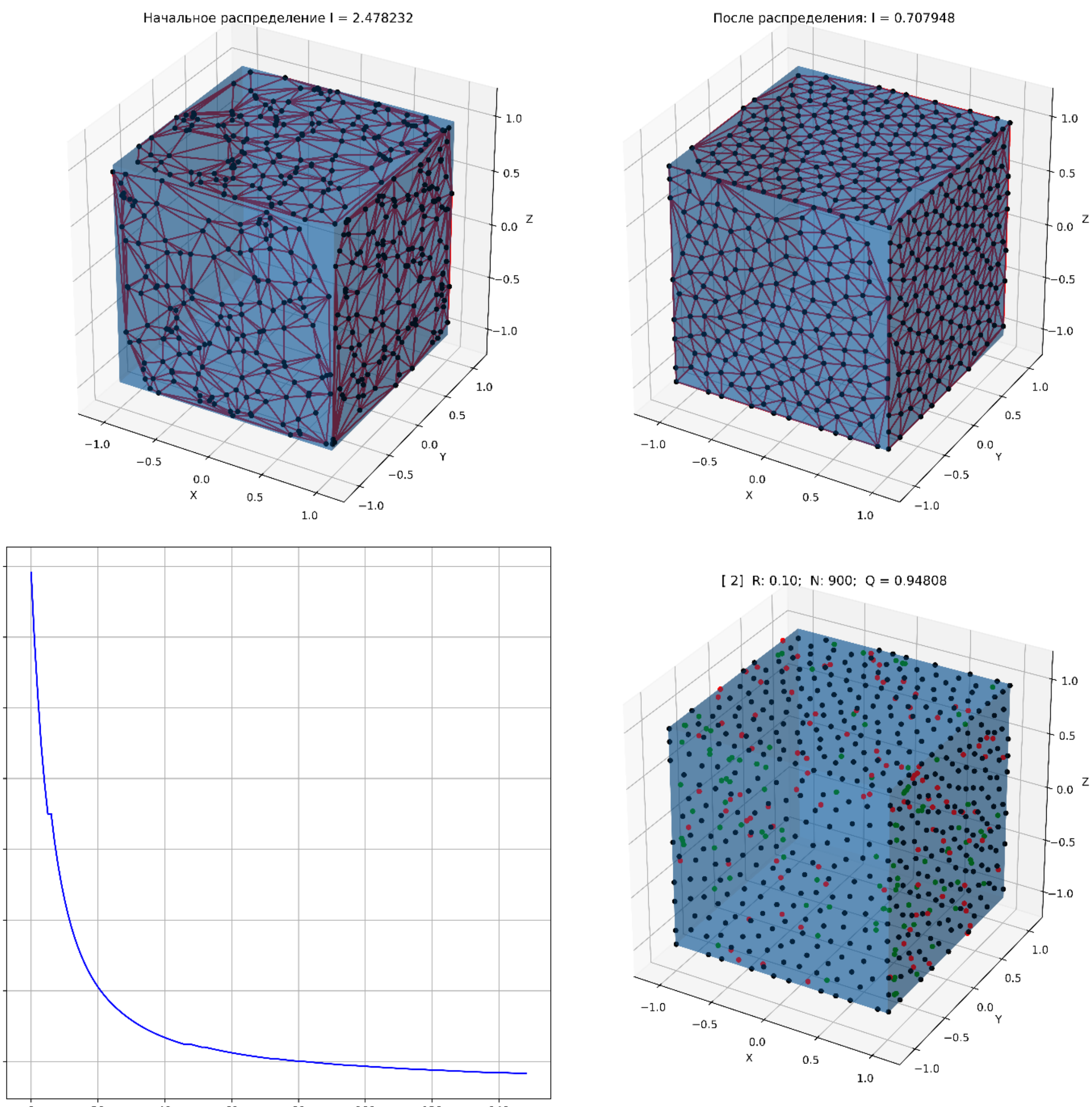


Рисунок 2.11 - Игра с параметрами: атака из 900 точек с радиусами 0.1. Сама игра с атакующими, найденными (красные) и спрятавшимися (зеленые) точками представлена в правом нижнем углу.

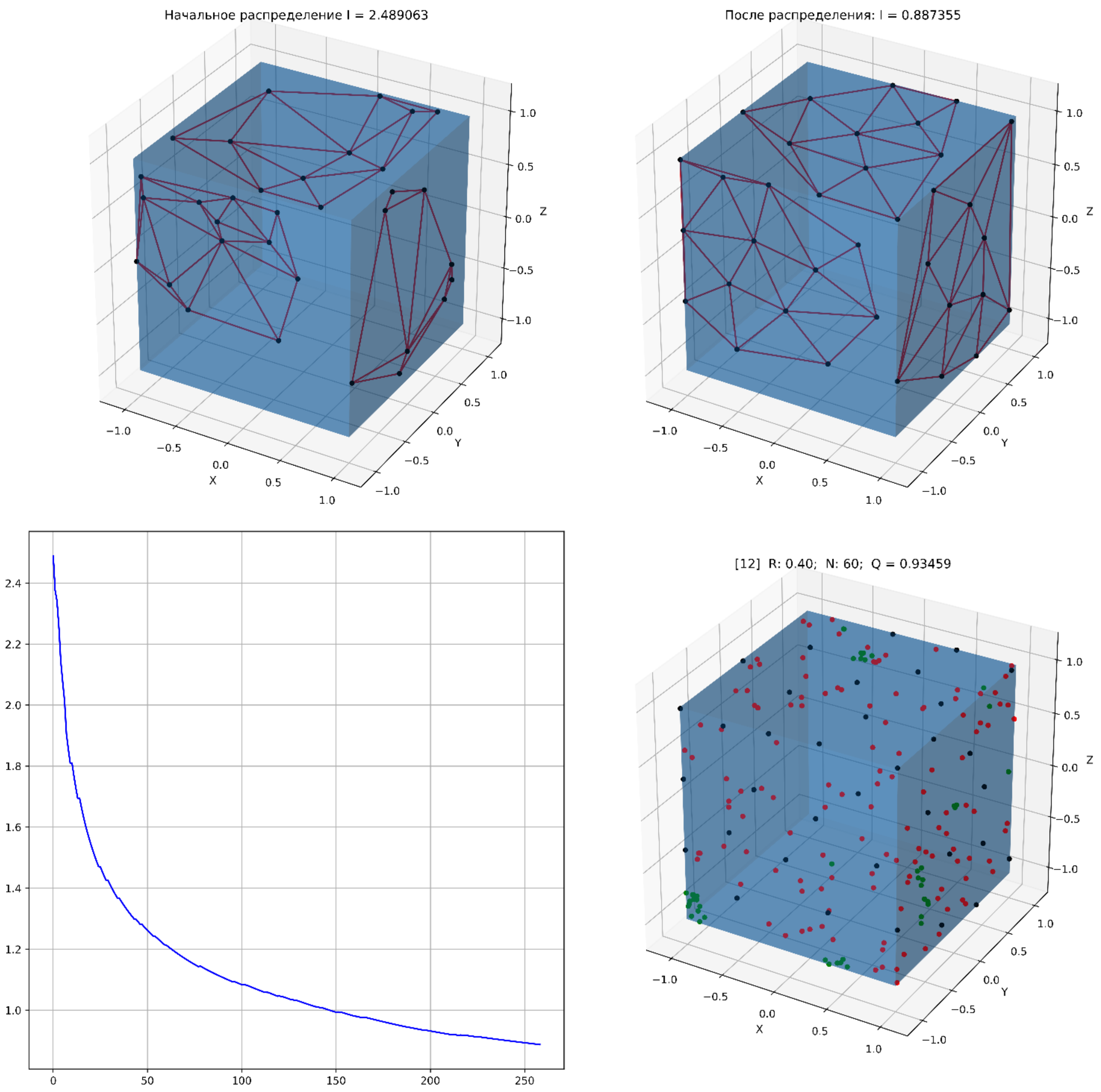


Рисунок 2.12- Игра с параметрами: атака из 60 точек с радиусами 0.4.

Анализ численного метода.

Составим несколько гистограмм, на которых зеленым цветом отметим среднее из вычисленных выигрышей игры, красным – величину $s * M[S(R)]$, то есть аналитическое мат. ожидание площади окрестности при равномерном распределении, умноженное на число атак.

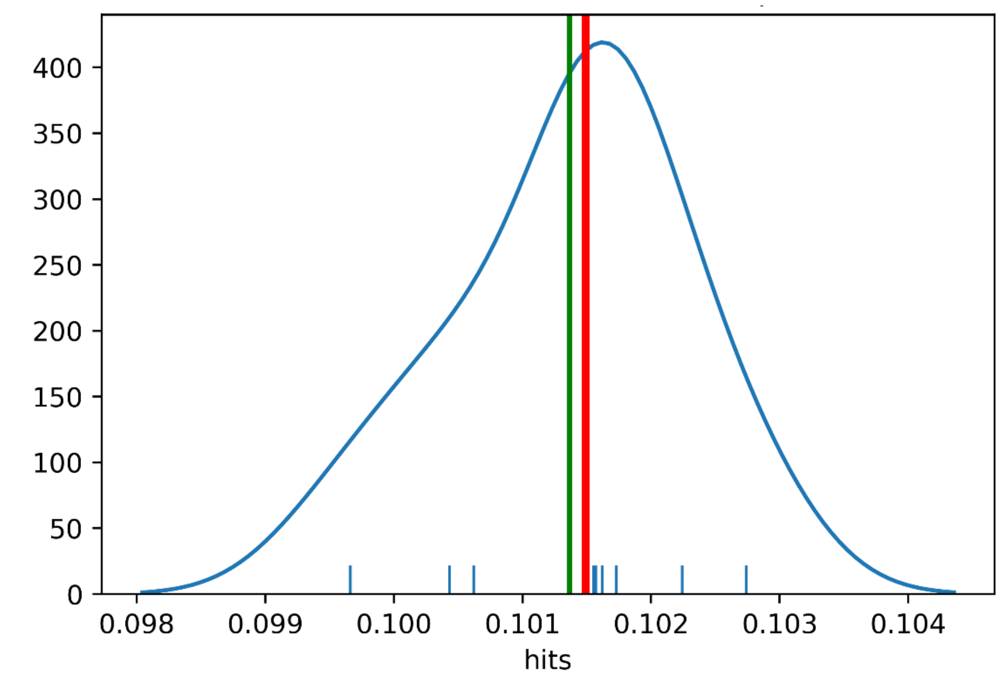


Рисунок 2.13 - Анализ игр с параметрами $R = 0.04, s = 480$. Относительная ошибка предсказания 0.12%.

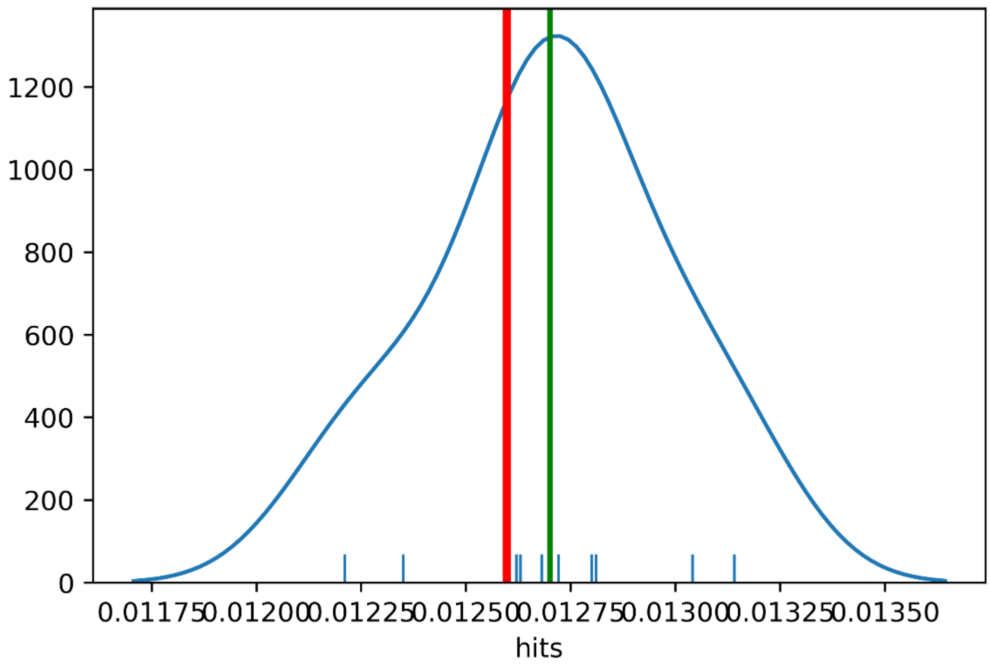


Рисунок 2.14 - Анализ игр с параметрами $R = 0.01, s = 960$. Относительная ошибка предсказания 0.82%.

На рисунках 2.13 и 2.14 видно, что расхождения с математической моделью довольно малы. Однако стоит рассмотреть следующие сравнения (рисунки 2.15 и 2.16):

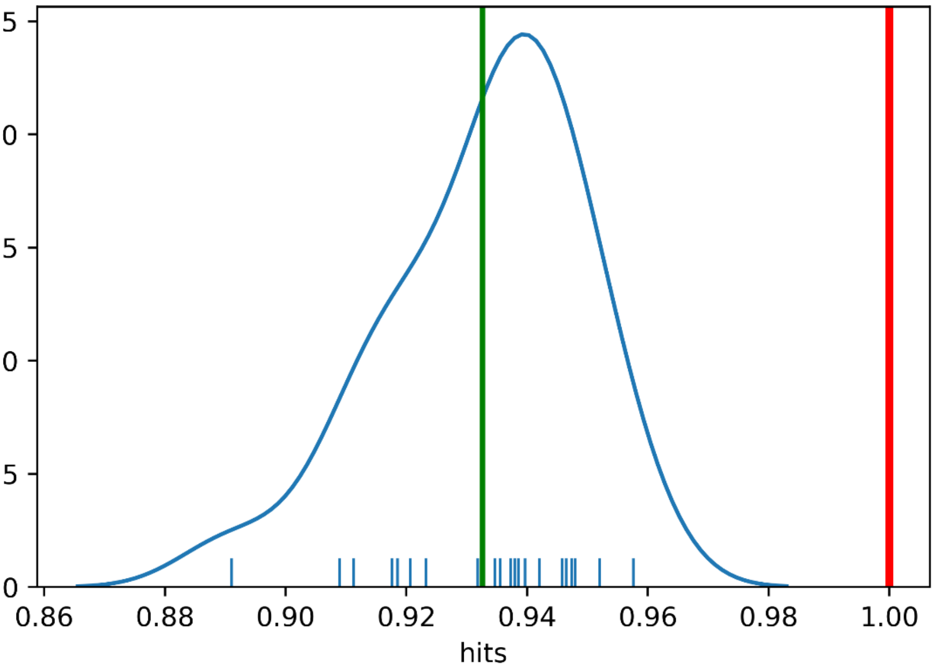


Рисунок 2.15 - Анализ игр с параметрами $R = 0.4, s = 60$. Относительная ошибка предсказания 6.74%. Математическая модель предсказывает значение больше 1, так как не учитывает пересечения.

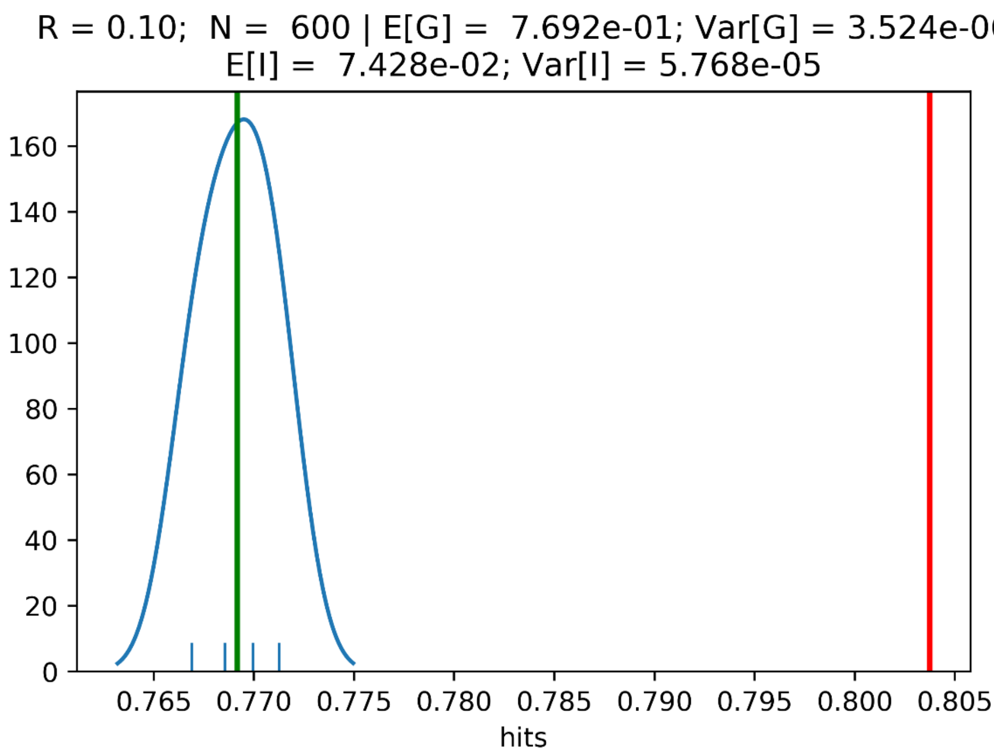


Рисунок 2.16 - Анализ игр с параметрами $R = 0.1, s = 600$.

Математическая модель предсказывает значение сильно выше, так как не учитывает пересечения.

Из приведенных графиков видно, что модель достаточно точна при малых радиусах (так как величина пересечений достаточно низка даже при большом количестве точек), однако сильно ошибается там, где величиной пересечения пренебрегать нельзя.

Осталось только посмотреть на выигрыш как на функцию от радиуса при фиксированном количестве точек (рисунки 2.17-2.18), и наоборот, как функцию от количества точек при фиксированном радиусе (рисунки 2.19-2.20):

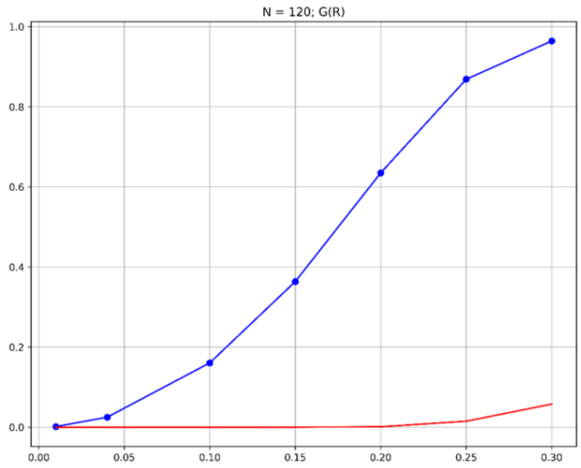


Рисунок 2.17 - Зависимость выигрыша от радиуса атаки (синяя) и оценка пересечений (красная) при фиксированном числе точек - 120.

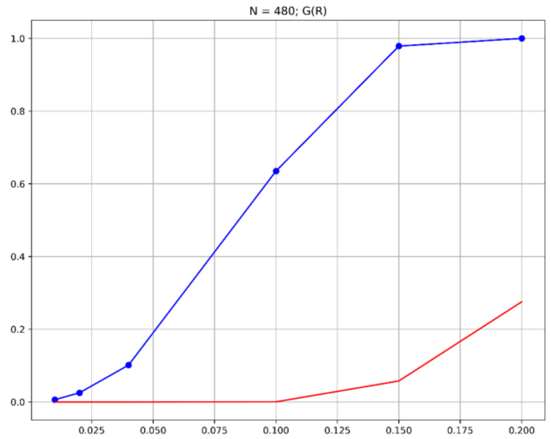


Рисунок 2.18- Зависимость выигрыша от радиуса атаки (синяя) и оценка пересечений (красная) при фиксированном числе точек - 480.

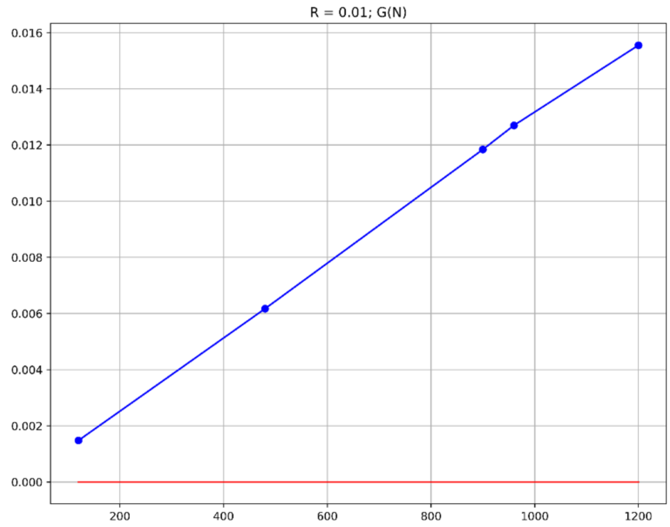


Рисунок 2.19 - Зависимость выигрыша от числа точек (синяя) и оценка пересечений (красная) при фиксированном радиусе - 0.01. Видно, что зависимость почти линейная (для такого радиуса 1200 точек распределить без пересечений легко).

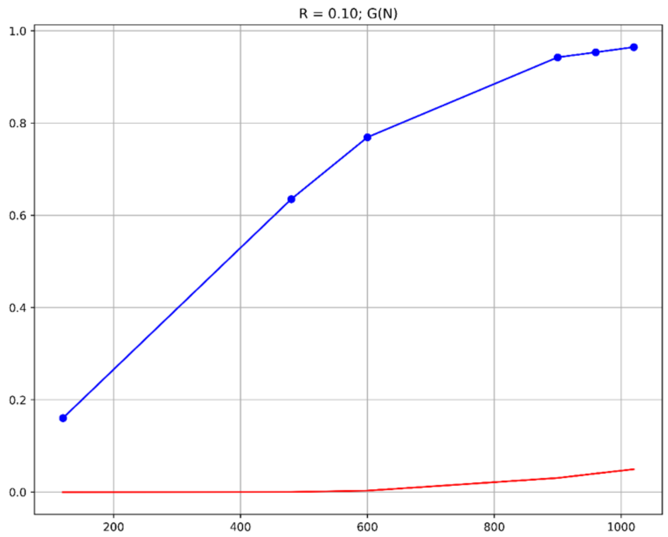


Рисунок 2.20 - Зависимость выигрыша от числа точек (синяя) и оценка пересечений (красная) при фиксированном радиусе - 0.1. Видно, что рост функции замедляется при больших N.

Из графиков видно, что пока пересечения малы, функция выигрыша пропорциональна числу точек и квадрату радиуса (что очевидно), однако при больших параметрах игры производная выигрыша и по радиусу, и по числу точек уменьшается.

Содержание отчета о лабораторной работе

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Постановка задачи.
4. Решение игры аналитическим методом и численным методом.
5. Этапы решения бесконечной игры.
6. Сравнительная оценка численного и аналитического метода.

Контрольные вопросы

1. Формула функции выигрыша для игрока 1.

2. Отличие матричной игры от бесконечной антагонистической игры.
3. Функция цены игры.

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать следующее:

1. программную реализацию алгоритмов поиска по своему варианту;
2. результаты работы алгоритмов для заданной в варианте функции;
3. отчет о лабораторной работе;
4. ответы на контрольные вопросы.

Критерии оценивания лабораторной работы

Выполнение поставленной в лабораторной работе задачи засчитывается студенту при успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в разделе «Порядок защиты лабораторной работы», в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Литература

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр*. – СПб.: БХВ-Петербург, 2014. – 432 с.
2. Оуэн Г. *Теория игр*. – М.: Изд. «ЛКИ», 2010. – 212 с.
3. Вентцель Е.С. *Исследование операций: задачи, принципы, методология.* – М.: Высшая школа, 2001. – 208 с.
4. Черноруцкий И.Г. *Методы принятия решений.* – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
5. Грешилов А.А. *Математические методы принятия решений*. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 584 с.
6. Романовский И.В. *Дискретный анализ*. – СПб.: Невский Диалект, 2004. – 320 с.
7. Черноруцкий И.Г. *Методы принятия решений*. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
8. Ширяев В.И., Ширяев Е.В. *Принятие решений. Математические основы. Статические задачи*. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 208 с.
9. Акоф Р., Сасиени М. *Основы исследования операций*. – М.: Мир, 1971.
10. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. *Методы оптимизации*. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
11. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства*. – М.: Физматлит, 2010.
12. Ларичев О.И. *Теория и методы принятия решений*. – М.: Логос, 2000.
13. Лефевр В.А., Смолян Г.Л. *Алгебра конфликта*. – М.: КомКнига, 2007.
14. Лю Б. *Теория и практика неопределенного программирования*. – М.: БИНОМ, 2005.

15. Мак-Кинси Дж. *Введение в теорию игр*. – М.: Физматгиз, 1960.
16. М.А. Басараб, Н.С. Коннова. *Теория игр в информационной безопасности: учебно-методическое пособие*. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019. – 80 с.