Федеральное агентство по образованию Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Тульский государственный университет
Кафедра электротехники и электрооборудования

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению расчетно-графической работы
по дисциплине «Методы оптимизации в электроснабжении»

Направление подготовки 140600
«Электротехника, электромеханика и электротехнологии»

Тула 2007

Разработали:
асс. С.А. Шопин

Рассмотрено на заседании кафедры,
протокол № _____
от «____» ___________ 2007 г.
Зав. кафедрой ЭиЭО
_____________________ Б.В. Сухинин

Согласовано:
Ответственный по стандартизации
_____________________ Н.И. Шутов

Задача 1. Задача безусловной оптимизации

Определить все точки экстремума целевой функции. Найти глобальный минимум и максимум.

1. Найти частные производные функции $f(x_1,x_2)$
2. Определить стационарные точки
3. Найти вторые частные производные функции $f(x_1,x_2)$ и составить матрицу Гессе
4. Рассчитать гессиан для каждой стационарной точки, определить характер экстремума по критерию Сильвестра
5. Определить точки глобального минимума и максимума
6. Построить график функции $z = f(x_1, x_2)$, демонстрирующий глобальный экстремум

Задача 2. Задача условной оптимизации.

Найти экстремум функции $f(x_1, x_2)$ при наличии ограничений, заданных функцией $\varphi(x_1, x_2)$, методом множителей Лагранжа.

1. Составить функцию Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda\varphi(x_1, x_2)$
2. Найти частные производные функции Лагранжа
3. Определить стационарные точки
4. Найти вторые частные производные функции Лагранжа и составить матрицу Гессе
5. Рассчитать гессиан для каждой стационарной точки, определить характер экстремума по критерию Сильвестра
6. Построить графикb функции $z = f(x_1, x_2)$ и и ограничивающей, демонстрирующий глобальный экстремум
7. Решить задачу встроенными средствами MathCAD

Задача 3. Численные методы одномерной оптимизации (минимизации)

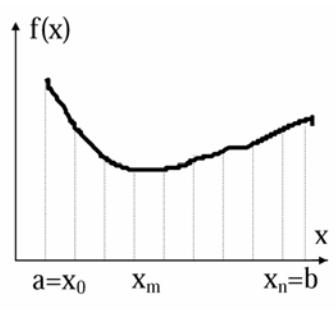
Исходные данные: целевая функция f(x), отрезок [a;b], точность Δ.

1. Построить график функции на заданном отрезке
2. Составить программу в MathCAD, реализующую заданный метод одномерной оптимизации (минимизации функции).
3. Решить задачу встроенными средствами MathCAD

Краткие сведения о численных методах одномерной оптимизации

Метод полного перебора

Идея данного метода предельно проста и состоит в последовательном переборе значений заданной функции при всех значениях аргумента на данном отрезке, равностоящих друг от друга на некоторый шаг Δx.



Алгоритм поиска экстремума выглядит следующим образом:

1) отрезок [a,b] разбивают на n равных отрезков длиной Δx, т.е. $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

2) определяют значения функции f(x) на границах отрезков в точках $x_0 = a; x_1 = a + \Delta x; x_2 = a + 2\Delta x; \ldots; x_n = b$.

3) из множества значений функции f(x) в дискретных точках, т.е. $\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ находят минимальное значение

$$f(x^*) = \min_{0 \le i \le n} f(x_i), \text{ тогда } x^* = \arg\min_{0 \le i \le n} f(x_i)$$

Следующие два метода используют стратегию двух точек для сокращения интервала неопределенности.

Метод половинного деления

На исходном отрезке выбираются две точки в его середине по возможности ближе друг к другу: $x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$ и $x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. После проведения первой пары экспериментов в этих точках, сравнивая знаки функции получаем новый интервал неопределенности:

а) в случае задачи минимизации функции

$[x_1; b]$, если $f(x_1) > f(x_2)$

$[a; x_2]$, если $f(x_1) < f(x_2)$

б) в случае задачи максимизации функции

$[x_1; b]$, если $f(x_1) < f(x_2)$

$[a; x_2]$, если $f(x_1) > f(x_2)$

Снова разделим его пополам и выберем точки эксперимента вблизи середины, продолжая итерационный процесс.

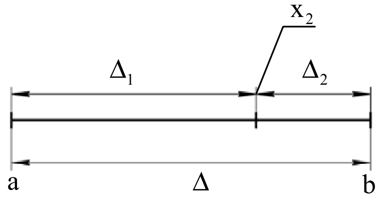
Алгоритм:

1. Задать величину ε
2. Положить $x_0 = a; x_3 = b$
3. Вычислить координаты точек x_1 и x_2:
$$x_1 = \frac{x_0 + x_3}{2} - \frac{\varepsilon}{2},\ x_2 = \frac{x_0 + x_3}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$
4. Вычислить значения функции в точках x_1 и x_2: $f_1 = f(x_1)$ и $f_2 = f(x_2)$
5. Если $f_1 > f_2$, то $x_0 = x_1, x_3 = b$,
если $f_1 < f_2$, то $x_0 = a, x_3 = x_2$.
6. Если $x_3 - x_0 > 2\Delta$, то идем на шаг 3
7. Если $x_3 - x_0 < 2\Delta$, то $x^* = \frac{x_0 + x_3}{2}$

Метод золотого сечения

В отличие от метода половинного деления, в котором на каждом шаге вычисляется 2 новых значения функции в методе золотого сечения используется тот факт, что новый интервал неопределенности уже содержит одну точку с вычисленным значением.

На первом шаге точку x_2 на отрезке выбирают такой, чтобы исходный отрезок делился в соотношении называемом «золотым сечением»:



$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{\tau} \qquad (1.1),$$

Можно показать, что $\tau = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ – число Фидия.

Тогда $\Delta_1 = \frac{1}{\tau}\Delta = \frac{1}{\tau}(b-a)$, $x_2 = a + \Delta_1 = a + \frac{1}{\tau}(b-a)$. Точка x_1 выбирается симметричной точке x_2 относительно середины отрезка, т.е. расстоянии Δ_1 от точки b, т.е.

$$x_1 = b - \frac{1}{\tau}(b-a) = a + \frac{\tau-1}{\tau}(b-a)$$

Т.к. по результатам сравнения знаков функции выбирается один из двух отрезков длиной Δ_1, то в данном отношение длин интервалов неопределенности на соседних шагах остается постоянным:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{L_3}{L_2} = \ldots = \frac{L_k}{L_{k-1}} = \tau .$$

Алгоритм:

1. Положить $i = 0; x_0^i = a; x_3^i = b; L = x_3^i - x_0^i$
2. Если $L^i < 2\Delta$, то $x^* = \dfrac{x_3^i + x_0^i}{2}$ – точка минимума.

   Если $L^i > 2\Delta$, то идем на шаг 3
3. Рассчитываем координаты точек x_1 и x_2: $x_1^i = x_0^i + \dfrac{\tau-1}{\tau}L^i$, $x_2^i = x_0^i + \dfrac{1}{\tau}L^i$
4. Вычислить значения функции в точках x_1 и x_2: $f_1^i = f\left(x_1^i\right)$ и $f_2^i = f\left(x_2^i\right)$
5. $L^{i+1} = \dfrac{L^i}{\tau}$
6. Если $f_1^i > f_2^i$, то $\begin{array}{l} x_0^{i+1} = x_1^i, x_3^{i+1} = x_3^i, \\ x_1^{i+1} = x_2^i,\ x_2^{i+1} = x_3^{i+1} - \left[x_1^{i+1} - x_0^{i+1}\right] \end{array}$,

   если $f_1^i < f_2^i$, то $\begin{array}{l} x_0^{i+1} = x_0^i, x_3^{i+1} = x_2^i, \\ x_2^{i+1} = x_1^i,\ x_1^{i+1} = x_0^{i+1} + \left[x_3^{i+1} - x_2^{i+1}\right] \end{array}$.
7. $i := i + 1$
8. Идем на шаг 2

Где i – номер шага.

Метод Фибоначчи

Процедура поиска аналогична методу золотого сечения. Применяется, когда треубется получить наилучшее приближение экстремума за заданное число шагов.

Отличие метода заключается в способе выбора начальной точки x_2. Ее положение выбирается такой, чтобы последовательность длин интервалов неопределенности удовлетворяла уравнению:

$$L_{N-i} = F_{i+1}L_N - F_{i-1}\varepsilon, \tag{1.2}$$

где F_i – последовательность чисел Фибоначчи.

Если принять начальный интервал неопределенности $L_1 = b - a$, то на основании формулы (1.2), можно показать, что

$$L_2 = \frac{F_{N-1}}{F_N}(b-a) + \frac{(-1)^N}{F_N}\varepsilon \tag{1.3}$$

Т.о. положение первой точки измерения зависит от числа опытов N. В этом заключается отличие метода Фибоначчи – число шагов необходимо задать заранее.

Алгоритм:

Исходные данные: начальный интервал неопределенности [a;b], требуемое число шагов N.

1. Выбираем $\varepsilon < \dfrac{b-a}{F_{N+1}}$

2. Рассчитываем L_2 по формуле (1.3)
3. $i := 1$ – номер текущего шага

$x_0^i = a, x_3^i = b$

4. Определяем координату точки x_2 и симметричной ей x_1: $x_2^i = x_0^i + L_2$, $x_1^i = x_3^i - L_2$
5. Вычисляем значения функции в точках x_1 и x_2: $f_1^i = f\left(x_1^i\right)$ и $f_2^i = f\left(x_2^i\right)$
6. Если $f_1^i > f_2^i$, то $\begin{array}{l} x_0^{i+1} = x_1^i, x_3^{i+1} = x_3^i, \\ x_1^{i+1} = x_2^i,\ x_2^{i+1} = x_3^{i+1} - \left[x_1^{i+1} - x_0^{i+1}\right] \end{array}$,

   если $f_1^i < f_2^i$, то $\begin{array}{l} x_0^{i+1} = x_0^i, x_3^{i+1} = x_2^i, \\ x_2^{i+1} = x_1^i,\ x_1^{i+1} = x_0^{i+1} + \left[x_3^{i+1} - x_2^{i+1}\right] \end{array}$.
7. $i := i + 1$
8. Если i<N, то идем на шаг 5
9. Если i=N, то $x^* = \dfrac{x_0^N + x_3^N}{2}$

Ввиду того, то в пакете MathCAD отсутствует встроенная функция расчета N-го члена последовательности Фибоначчи, то можно использовать формулу Бине:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Варианты заданий

Задача №1.

№	Целевая функция	№	Целевая функция
1	$f(x_1,x_2)=x_1x_2+\frac{50}{x_1}+\frac{20}{x_2}$	16	$f(x_1,x_2)=7x_1^5+x_2^2x_1+9x_1^2x_2$
2	$f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2-4x_1+6x_2$	17	$f(x_1,x_2)=3x_1^5+x_2^2x_1+11x_1^2x_2+x_1^3$
3	$f(x_1,x_2)=5x_1^2+4x_1x_2+x_2^2-16x_1-12x_2$	18	$f(x_1,x_2)=3x_2^3+13x_1^2+3x_2^2$
4	$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-x_1x_2+x_1-2x_2$	19	$f(x_1,x_2)=9x_1^3+x_2^3+3x_1^2-x_2$
5	$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+x_1x_2-x_1$	20	$f(x_1,x_2)=19x_2^3+x_1+3x_1^2-x_2$
6	$f(x_1,x_2)=x_1^3+x_2^3-3x_1x_2$	21	$f(x_1,x_2)=-x_1^3+x_2^3-x_2+x_1$
7	$f(x_1,x_2)=3x_1x_2-x_1^2x_2-x_1x_2^2$	22	$f(x_1,x_2)=-2x_1^4+x_2^4-x_2^3+x_1^3$
8	$f(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^2-4x_1x_2$	23	$f(x_1,x_2)=-3x_1^2+x_2^2-x_1x_2+x_1+3$
9	$f(x_1,x_2)=x_1e^{x_1}-\left(1+e^{x_1}\right)\sin x_2$	24	$f(x_1,x_2)=-3x_1^2+x_2^2x_1-x_1^2x_2+2x_1+7$
10	$f(x_1,x_2)=x_1x_2^2+x_1^2x_2-3x_1^2-3x_2^2$	25	$f(x_1,x_2)=-13x_1^2-11x_2^2x_1-2x_2^2+17$
11	$f(x_1,x_2)=x_1^3+2\cdot x_2+x_1x_2$	26	$f(x_1,x_2)=13x_1^3-11x_2^2x_1+x_1+21$
12	$f(x_1,x_2)=x_1^3x^2+2x_2^2x_1+x_1x_2$	27	$f(x_1,x_2)=17x_1^3-19x_1^2x_2-x_1+x_2+17$
13	$f(x_1,x_2)=4x_1^2+x_2^2-12x_1x_2+3x_1$	28	$f(x_1,x_2)=17x_1^4-9x_1x_2-x_1^2+x_1^2+17$
14	$f(x_1,x_2)=5x_1^3+x_2+3x_1x_2$	29	$f(x_1,x_2)=x_1^2+3x_2^2+7x_1x_2-x_2+x_1$
15	$f(x_1,x_2)=7x_1^4+x_2x_1+9x_1^2x_2$	30	$f(x_1,x_2)=x_1^3-13x_2^2+9x_1x_2-x_2+x_1$

Задача №2.

№	Целевая функция	№	Целевая функция
1	$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ $\varphi(x_1,x_2)=3x_1+4x_2-1$	16	$f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2-4x_1+6x_2$ $\phi(x_1,x_2)=x_1-5+x_1^2$
2	$f(x_1,x_2)=e^{x_1x_2}$ $\varphi(x_1,x_2)=x_1+x_2-1$	17	$f(x_1,x_2)=5x_1^2+4x_1x_2+x_2^2-16x_1-12x_2$ $\phi(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-3$
3	$f(x_1,x_2)=x_1+x_2$ $\varphi(x_1,x_2)=5x_1^2+4x_1x_2+x_2^2$	18	$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-x_1x_2+x_1-2x_2$ $\phi(x_1,x_2)=x_1+x_2-5$
4	$f(x_1,x_2)=x_1^2+12x_1x_2+2x_2^2$ $\varphi(x_1,x_2)=4x_1^2+x_2^2-25$	19	$f(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^2-4x_1x_2$ $\phi(x_1,x_2)=2x_1+7x_2-15$
5	$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ $\varphi(x_1,x_2)=x_1+x_2-1$	20	$f(x_1,x_2)=x_1^3+2\cdot x_2+x_1x_2$ $\phi(x_1,x_2)=2x_1+7x_2+15$
6	$f(x_1,x_2)=x_1+2x_2$ $\varphi(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-1$	21	$f(x_1,x_2)=x_1^3x_2+2x_2^2x_1+x_1x_2$ $\phi(x_1,x_2)=3x_1+17x_2+19$
7	$f(x_1,x_2)=2x_1^2-6x_1-6x_2$ $\varphi(x_1,x_2)=5x_1+x_2-1$	22	$f(x_1,x_2)=5x_1^3-x_2+3x_1x_2+2$ $\phi(x_1,x_2)=x_1^2-x_2-4$

№	Целевая функция	№	Целевая функция
8	$f(x_1,x_2)=x_1x_2$ $\varphi(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-2$	23	$f(x_1,x_2)=7x_1^4+x_2x_1+9x_1^2x_2$ $\phi(x_1,x_2)=3x_1^4-3x_2-14$
9	$f(x_1,x_2)=-x_1^3+x_2^3-x_2+x_1$ $\varphi(x_1,x_2)=x_1+x_2-1$	24	$f(x_1,x_2)=x_1e^{x_1}-\left(1+e^{x_1}\right)\sin x_2$ $\phi(x_1,x_2)=x_1+x_2-3$
10	$f(x_1,x_2)=19x_2^3+x_1+3x_1^2-x_2$ $\varphi(x_1,x_2)=x_1+5x_2-6$	25	$f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2-4x_1+6x_2$ $\phi(x_1,x_2)=x_1^2-x_2-3$
11	$f(x_1,x_2)=9x_1^3+x_2^3+3x_1^2-x_2$ $\varphi(x_1,x_2)=x_1^3+1$	26	$f(x_1,x_2)=3x_1x_2-x_1^2x_2-x_1x_2^2$ $\phi(x_1,x_2)=x_1+x_2^2-3$
12	$f(x_1,x_2)=3x_2^3+13x_1^2+3x_2^2$ $\varphi(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-1$	27	$f(x_1,x_2)=19x_2^3+x_1+3x_1^2-x_2$ $\phi(x_1,x_2)=19x_1+11x_2-3$
13	$f(x_1,x_2)=7x_1^3+x_2^2x_1+9x_1^2x_2$ $\varphi(x_1,x_2)=x_1+x_2-1$	28	$f(x_1,x_2)=-x_1^3+x_2^3-x_2+x_1$ $\phi(x_1,x_2)=x_1^2+x_2-7$
14	$f(x_1,x_2)=x_1^3-13x_2^2+9x_1x_2-x_2+x_1$ $\varphi(x_1,x_2)=2x_1+5x_2-1$	29	$f(x_1,x_2)=x_1x_2+\dfrac{50}{x_1}+\dfrac{20}{x_2}$ $\phi(x_1,x_2)=x_1+x_2-7$
15	$f(x_1,x_2)=x_1^2+3x_2^2+7x_1x_2-x_2+x_1$ $\phi(x_1,x_2)=x_1^2+x_2-x_1+2$	30	$f(x_1,x_2)=-13x_1^2-11x_2^2x_1-2x_2^2+17$ $\phi(x_1,x_2)=x_1+x_2-56$

Задача №3.

Методы оптимизации:

а) метод половинного деления

б) метод золотого сечения

в) метод Фибоначчи

№	Метод	Функция	Параметры
1	а	$f(x)=-\dfrac{x^2+1}{x^3-1}$	$a=-0.5, b=1, \Delta=0.01$
2	б	$f(x)=-\dfrac{\sin(x)}{x+1}$	$a=-2, b=2, \Delta=0.05$
3	в	$f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^2}$	$a=2, b=7, N=15$
4	а	$f(x)=\dfrac{\cos\left(\dfrac{x^2+1}{10}\right)}{\pi x}$	$a=-9, b=-6, \Delta=0.01$
5	б	$f(x)=\sqrt{5}e^{-2x}\cos(17x+\sqrt{\pi})$	$a=-3.4, b=-3.1, \Delta=0.001$
6	в	$f(x)=5e^{-2x}+e^{0.5x}$	$a=-2, b=4, N=15$
7	а	$f(x)=-0.5x^5+2x^4+50\sin(5x)$	$a=-2, b=-1, \Delta=0.01$
8	б	$f(x)=5e^{-2x}\sin(22x+\pi)$	$a=0.2, b=0.4, \Delta=0.001$

№	Метод	Функция	Параметры
9	в	$f(x)=\frac{e^{-3x}}{1+x^2}+8x^2$	$a=-1, b=1, N=15$
10	а	$f(x)=\frac{x^3+x^2}{1-x^2+x^3}$	$a=-0.5, b=0.5, \Delta=0.01$
11	б	$f(x)=\frac{\cos(6x)+1.5}{1-x^3+1/x}$	$a=0.4, b=0.8, \Delta=0.005$
12	в	$f(x)=\frac{e^{-3x}}{1+x^2}+4x^2$	$a=-2, b=2, N=15$
13	а	$f(x)=e^{-0.5x}\sin(4x+1)$	$a=0.6, b=1.4, \Delta=0.01$
14	б	$f(x)=\frac{\cos^2(3x)+\sin^3(8x)}{\operatorname{tg}(7x)}$	$a=0.48, b=0.55, \Delta=0.0001$
15	в	$f(x)=\frac{1.5}{1+1/x^3}e^{-0.5x}$	$a=-2, b=-1.5, N=15$
16	а	$f(x)=\frac{\operatorname{tg}(9x/\pi)}{\cos^2(5x)+\sin^5(x)}$	$a=0.4, b=0.55, \Delta=0.001$
17	б	$f(x)=\frac{\cos(x^2)}{1+x^5}-0.2$	$a=1, b=2.6, \Delta=0.01$
18	в	$f(x)=\frac{-x^3+4x^2-2}{\sin\left(x+\sqrt{\pi/3}\right)}$	$a=-0.9, b=1, N=15$
19	а	$f(x)=\frac{\cos\left(7x+\sqrt{2}\pi\right)}{x^2+e^{-0.5x}}+0.8$	$a=-3, b=-2.5, \Delta=0.005$
20	б	$f(x)=-\frac{\operatorname{tg}(x)}{e^{0.5x}-x^2}$	$a=-1.5, b=-1, \Delta=0.005$
21	в	$f(x)=\frac{3\cos(8\pi x)}{x^4+1}$	$a=5, b=5.2, N=15$
22	а	$f(x)=3\frac{x^2+1}{x^3+2}e^{\cos(x)}-4\sin(x)$	$a=1, b=3, \Delta=0.01$
23	б	$f(x)=\frac{e^{-\cos(x)+1}}{x^3+1}+0.2$	$a=0, b=1, \Delta=0.01$
24	в	$f(x)=3\frac{x^2+1}{x^3+2}e^{\cos(x)}$	$a=0, b=5, N=15$
25	а	$f(x)=\frac{\sin(x)}{x}e^{-2x+1}-1$	$a=2, b=6, \Delta=0.05$
26	б	$f(x)=-\frac{1}{x^3+\cos(x)}e^{x}$	$a=0, b=1, \Delta=0.01$
27	в	$f(x)=\frac{x^3+x^2-x}{\sin(2x+1)+x^4}e^{-x}$	$a=0, b=1, N=15$
28	а	$f(x)=\frac{\cos(x)}{x^3+1}e^{-x}$	$a=-5, b=-1, \Delta=0.05$

№	Метод	Функция	Параметры
29	б	$f(x)=\frac{x^2+2}{\sin(x)}e^{\cos(x)}$	$a=-5, b=-3.2, \Delta=0.01$
30	в	$f(x)=\frac{e^{1-\cos(x)}}{x^2+1}\sin(x)$	$a=-3, b=0, N=15$

Примечание.

1. При решении заданий 1 и 2 среди полученного множества стационарных точек можно рассматривать только действительные решения.

Пример решения задачи №1.

Целевая функция $f(x1,x2) := x1 \cdot x2^2 + x1^2 \cdot x2 - 3 \cdot x1^2 - 3 \cdot x2^2$

1. Находим производные целевой функции

$$dfx1(x1,x2) := \frac{d}{dx1} f(x1,x2) \qquad dfx2(x1,x2) := \frac{d}{dx2} f(x1,x2)$$

$$dfx1(x1,x2) \rightarrow x2^2 + 2 \cdot x1 \cdot x2 - 6 \cdot x1 \qquad dfx2(x1,x2) \rightarrow 2 \cdot x1 \cdot x2 + x1^2 - 6 \cdot x2$$

2. Находим стационарные точки

Составляем систему уравнений

Given

$dfx1(x1,x2) = 0$

$dfx2(x1,x2) = 0$

Решаем символьно систему уравнений $R := Find(x1,x2) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & (-3) - 3 \cdot 5^{\frac{1}{2}} & 3 \cdot 5^{\frac{1}{2}} - 3 \\ 0 & 2 & 3 \cdot 5^{\frac{1}{2}} - 3 & (-3) - 3 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$

Имеем 4 стационарные точки

3. Находим матрицу Гессе

$$G(x1,x2) := \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dx1^2} f(x1,x2) & \frac{d}{dx2}\frac{d}{dx1} f(x1,x2) \\ \frac{d}{dx2}\frac{d}{dx1} f(x1,x2) & \frac{d^2}{dx2^2} f(x1,x2) \end{pmatrix} \qquad G(x1,x2) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot x2 - 6 & 2 \cdot x2 + 2 \cdot x1 \\ 2 \cdot x2 + 2 \cdot x1 & 2 \cdot x1 - 6 \end{pmatrix}$$

4.Проверяем стационарные точки

В примере ограничимся только точкой (0, 0).

а) Точка 1 $\quad X1 := R^{\langle 0 \rangle} \qquad X1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

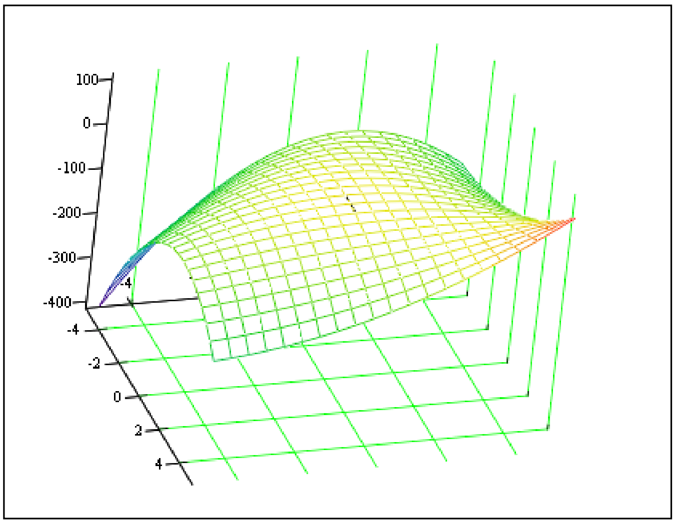
Вычисляем гессиан

$$G1 := G\left(X1_0, X1_1\right) \qquad G1 = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Проверяем положительную определенность $G1_{0,0} = -6 \qquad |G1| = 36$

Матрица G1 отрицательно определена -> **X1 - точка максимума**

5. График функции



f, X1

Пример решения задачи 2

Целевая функция $f(x1,x2) := x2$

Система ограничений $\phi(x1,x2) := x1^3 + x2^3 + 3x1\cdot x2$

1. Составляем функцию Лагранжа

$$L(x1,x2,\lambda) := f(x1,x2) + \lambda\cdot\phi(x1,x2)$$

2. Находим стационарные точки

Given

$$\frac{d}{dx1}L(x1,x2,\lambda) = 0 \qquad \frac{d}{dx2}L(x1,x2,\lambda) = 0 \qquad \frac{d}{d\lambda}L(x1,x2,\lambda) = 0$$

$$R := \mathrm{Find}(x1,x2,\lambda) \rightarrow \begin{bmatrix} -2^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\cdot i\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\cdot i\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}} \\ -2^{\frac{2}{3}} & -\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\cdot i\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^2 & -\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\cdot i\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^2 \\ \frac{-1}{6}\cdot 2^{\frac{2}{3}} & \frac{-1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\cdot i\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^2 & \frac{-1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\cdot i\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} -1.26 & 0.63 - 1.091i & 0.63 + 1.091i \\ -1.587 & 0.794 + 1.375i & 0.794 - 1.375i \\ -0.265 & 0.132 + 0.229i & 0.132 - 0.229i \end{pmatrix}$$

Ограничимся действительными решениями: точкой $R^{\langle 0\rangle} = \begin{pmatrix} -1.26 \\ -1.587 \\ -0.265 \end{pmatrix}$

3. Составляем матрицу Гессе

$$G(x1,x2,\lambda) := \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dx1^2}L(x1,x2,\lambda) & \frac{d}{dx2}\frac{d}{dx1}L(x1,x2,\lambda) \\ \frac{d}{dx2}\frac{d}{dx1}L(x1,x2,\lambda) & \frac{d^2}{dx2^2}L(x1,x2,\lambda) \end{pmatrix} \qquad G(x1,x2,\lambda) \rightarrow \begin{pmatrix} 6\cdot\lambda\cdot x1 & 3\cdot\lambda \\ 3\cdot\lambda & 6\cdot\lambda\cdot x2 \end{pmatrix}$$

4.Проверяем стационарные точки

$$X1 := R^{\langle 0\rangle} \qquad X1 = \begin{pmatrix} -1.26 \\ -1.587 \\ -0.265 \end{pmatrix}$$

Вычисляем гессиан

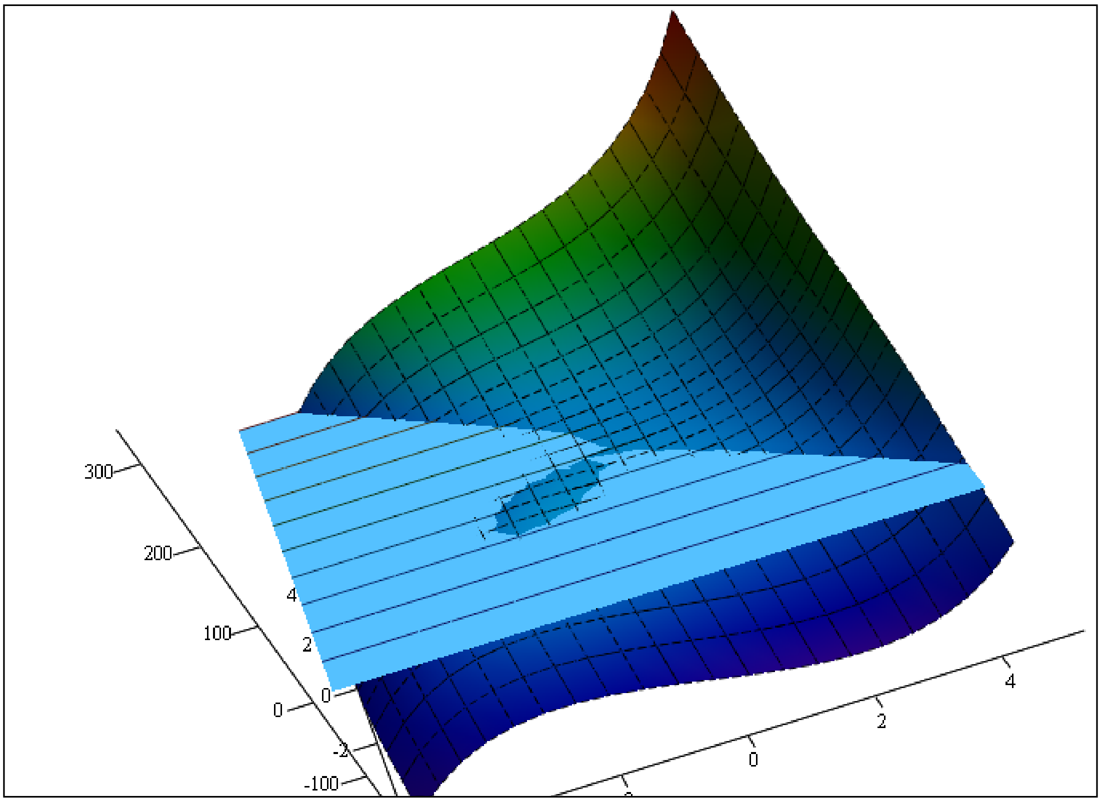
$$G1 := G(X1_0, X1_1, X1_2) \qquad G1 = \begin{pmatrix} 2 & -0.794 \\ -0.794 & 2.52 \end{pmatrix}$$

Проверяем знакоопределенность матрицы G1

$$G1_{0,0} = 2 \qquad |G1| = 4.41$$

Матрица G положительно определена, следовательно точка X1 - точка минимума

5. Графики



f, ϕ , X1

6. Решение встроенными средствами MathCAD

Начальное приближение $X1 := 0$ $X2 := 0$

Given

$$\phi(X1, X2) = 0$$

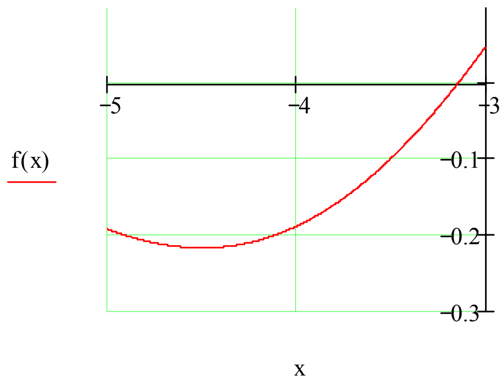
$$\text{Minimize}(f, X1, X2) = \begin{pmatrix} -1.258 \\ -1.587 \end{pmatrix}$$

Пример решения задачи 3

Решим задачу методом полного перебора

Целевая функция $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ Отрезок $a := -5$ $b := -3$ Точность $\Delta := 0.01$

1. Строим график функции



2. Составляем программу решения

$$Xm := \left| \begin{array}{l} xm \leftarrow a \\ ym \leftarrow f(a) \\ n \leftarrow \mathrm{round}\left(\frac{b-a}{\Delta}\right) \\ \Delta x \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow a + i \cdot \Delta x \\ y \leftarrow f(x) \\ \text{if } y < ym \\ \quad \left| \begin{array}{l} ym \leftarrow y \\ xm \leftarrow x \\ im \leftarrow i \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} \Delta x \\ xm \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$Xm = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -4.49 \end{pmatrix}$$

2. Решаем задачу встроенными средствами MathCAD

Начальное приближение Xm $x := \frac{a+b}{2}$

Given

$a < x < b$

$\mathrm{Minimize}(f, x) = -4.493$