**Практическое занятие 3**

***Методические указания***

*Модель множественной регрессии* – это уравнение, отражающее корреляционную связь между результатом и несколькими факторами:

$y=a+b\_{1}∙x\_{1}+b\_{2}∙x\_{2}+…….+b\_{p}∙x\_{p}+ė.$ (1)

Для оценки параметров множественной регрессии применяется способ 𝜷 – коэффициентов

$t\_{y}=β\_{1}∙t\_{x\_{1}}+β\_{2}∙t\_{x\_{2}}+ β\_{p}∙t\_{x\_{p}}+ė,$ (2)

$где t\_{y}, t\_{x\_{1}}t\_{x\_{p}}$ – стандартизированные переменные;

$(t\_{y}=\frac{y-\overbar{y}}{σ\_{y}}; t\_{x\_{i}}=\frac{x\_{i}-\overbar{x\_{i}}}{σ\_{x\_{i}}} )$, (3)
$β\_{1}, β\_{2,} β\_{p }$ - стандартизированные коэффициенты регрессии.

Стандартизированные коэффициенты регрессии рассчитываются по формуле

$β\_{i}=b\_{i}∙\frac{σ\_{x}}{σ\_{y}}$. (4)

Параметр$ b\_{i}=β\_{i}∙\frac{σ\_{y}}{σ\_{x}}$.

Параметр $a=\overbar{y }-b\_{1}∙\overbar{x\_{1}}- b\_{2}∙\overbar{x\_{2}}- b\_{p}∙\overbar{x\_{p}}.$

Средние коэффициенты эластичности

$\overbar{Э}\_{y\_{x\_{i}}}=b\_{i}∙\frac{\overbar{x}\_{i}}{\overbar{y}\_{x\_{i}}}$, (4)

где $\overbar{y}\_{x\_{i}}- $среднее по частному уравнению регрессии для фактора *х*

$$\overbar{y}\_{x\_{i}}=a+b\_{1}\overbar{x}\_{1}+b\_{2}∙\overbar{x}\_{2}+b\_{p}∙\overbar{x}\_{p}$$

Частные коэффициенты эластичности [5]:

$Э\_{y\_{x\_{i}}}=b\_{i}∙\frac{x\_{i}}{y\_{x\_{i}x\_{1 }x\_{p}}}$, (5)
где $b\_{i}- $коэффициент чистой регрессии для фактора $x\_{i} $в уравнении множественной регрессии;

$y\_{x\_{i}x\_{1 }x\_{p}}$ – частное уравнение регрессии для фактора $x\_{i}$.

Коэффициент множественной корреляции

$R\_{yx\_{1}x\_{2 }x\_{p}}=\sqrt{1-\frac{σ\_{ост}^{2}}{σ\_{y}^{2}}}=\sqrt{1-\frac{\sum\_{}^{}(y-y\_{x\_{1}x\_{2 }x\_{p}})^{2}}{\sum\_{}^{}(y-\overbar{y})^{2}}}$. (6)

Коэффициент множественной детерминации

$R\_{yx\_{1}x\_{2 }x\_{p}}^{2}=1-\frac{σ\_{ост}^{2}}{σ\_{y}^{2}}=1-\frac{\sum\_{}^{}(y-y\_{x\_{1}x\_{2 }x\_{p}})^{2}}{\sum\_{}^{}(y-\overbar{y})^{2}}$. (7)

При линейной зависимости коэффициент множественной корреляции рассчитывается по формуле

$R\_{yx\_{1}x\_{2 }x\_{p}}=\sqrt{\sum\_{}^{}β\_{i}∙r\_{yx\_{i}}}$ *.* (8)

Скорректированный коэффициент корреляции

$\overbar{R}\_{yx\_{1}x\_{2 }x\_{p}}=\sqrt{1-\frac{\sum\_{}^{}(y-y\_{x})^{2}}{\sum\_{}^{}(y-\overbar{y})^{2}}:\frac{n-m-1}{n-1}}$, (9)

где *n* – число наблюдений;

*m* –число параметров при переменных *x*.

Частные коэффициенты корреляции по рекуррентной формуле, значения которых изменяются от -1 до 1:

$r\_{yx\_{i}\*∙x\_{i-1}x\_{i+1}x\_{p}}=\frac{r\_{yx\_{i}∙x\_{1}x\_{2 }x\_{p-1}}-r\_{yx\_{p}∙x\_{1}x\_{2 }x\_{p-1}\*}r\_{x\_{i}x\_{1}x\_{2 }x\_{p-1}}}{\sqrt{\left(1-r\_{yx\_{p}∙x\_{1}x\_{2 }x\_{p-1}}^{2}\right)∙(1-r\_{x\_{i}x\_{1}x\_{2 }x\_{p-1}}^{2})}}.$ (10)

Оценка значимости уравнения регрессии осуществляется с помощью критерия Фишера

$F=\frac{D\_{факт}}{D\_{ост}}=\frac{R^{2}}{1-R^{2}}∙\frac{n-m-1}{m}$, (11)
где $D\_{факт}$ – факторная дисперсия, объясненная регрессией на одну степень свободы;

$D\_{ост}$ – остаточная дисперсия на одну степень свободы;

$R^{2}$ – множественный коэффициент детерминации;

$n$ – число наблюдений;

$m$ – число параметров при факторах х в уравнении регрессии [6].

Критерий Стьюдента:

$t\_{b\_{i}}=\frac{b\_{i}}{m\_{b\_{i}}}$, (12)

где $b\_{i}$ – коэффициент «чистой» регрессии;

$m\_{b\_{i}}$ – средняя квадратичная ошибка коэффициента регрессии $b\_{i}$.

$m\_{b\_{i}}=\frac{σ\_{y}∙\sqrt{1-R\_{yx\_{1}x\_{2}x\_{i }x\_{p}}^{2}}}{σ\_{x\_{i}}∙\sqrt{1-R\_{х\_{i}x\_{1}x\_{2}x\_{i-1}x\_{i+1 }x\_{p}}^{2}}}∙\frac{1}{\sqrt{n-m-1}}$. (13)

**Решение типовой задачи**

**Пример.** Построить уравнение множественной регрессии в стандартизированном и естественном виде, рассчитать частные коэффициенты эластичности и сравнить с 𝜷 – коэффициентами.

**Исходные данные**

Имеются данные по 30 предприятиям

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Признак | Среднее значение | Среднеквадратичное отклонение | Линейный коэффициент парной корреляции |
| Среднедневной доход *y*, руб.  | 433,5 | 61,44 | - |
| Среднедневная заработная плата одного работника *x1*, руб.  | 254,9 | 25,86 | $$r\_{yx\_{1}}=0,84$$ |
| Средний возраст работника *х2*, лет  | 33,5 | 0,58 | $$r\_{yx\_{2}}=-0,21$$$$r\_{x\_{1}x\_{2}}=-0,11$$ |

**Решение**

Линейное уравнение множественной регрессии *y* от *х1* и *х2* имеет вид: $y=a+b\_{1}∙x\_{1}+b\_{2}∙x\_{2}$. Для расчета его параметров применяется метод стандартизированных коэффициентов уравнение в стандартизированном масштабе имеет вид: $t\_{y}=β\_{1}∙t\_{x\_{1}}+β\_{2}∙t\_{x\_{2}}$. Расчет 𝜷 – коэффициентов осуществляется по формуле

$$β\_{1}=\frac{r\_{yx\_{1}}-r\_{yx\_{2}}∙r\_{x\_{1}\*x\_{2}}}{1-r\_{x\_{1}\*x\_{2}}^{2}}=\frac{0,84-0,21∙0,11}{1-0,11^{2}}=0,82;$$

$$β\_{2}=\frac{r\_{yx\_{2}}-r\_{yx\_{1}}∙r\_{x\_{1}\*x\_{2}}}{1-r\_{x\_{1}\*x\_{2}}^{2}}=\frac{-0,21+0,84∙0,11}{1-0,11^{2}}=-0,12.$$

Уравнение в стандартизированном виде имеет вид

$$t\_{y}=0,82∙t\_{x\_{1}}-0,12∙t\_{x\_{2}}.$$

Параметр *b* рассчитывается по формуле: $b\_{i}=β\_{i}∙\frac{σ\_{y}}{σ\_{x}}$.

$$b\_{1}=\frac{0,82∙61,44}{25,86}=1,95;$$

$$b\_{2}=\frac{-0,12∙61,44}{0,58}=-12,71.$$

Параметр$ a $вычисляется по формуле

$a=\overbar{y}-b\_{1}∙\overbar{x\_{1}}-b\_{2}∙\overbar{x\_{2}}=433,5-1,95∙254,9+12,71∙33,5=362,2$.

Следовательно, уравнение множественной регрессии примет вид

$$y=362,2+1,95∙x\_{1}-12,71∙x\_{2}.$$

Средние коэффициенты эластичности

$$\overbar{Э}\_{y\_{x\_{i}}}=b\_{i}∙\frac{\overbar{x}\_{i}}{\overbar{y}\_{x\_{i}}};$$

$$\overbar{Э}\_{y\_{x\_{1}}}=1,95∙\frac{254,9}{433,5}=1,15\%;$$

$$\overbar{Э}\_{y\_{x\_{2}}}=-12,71∙\frac{33,5}{433,5}=-0,98\%.$$

С увеличением средней заработной платы на 1% от её среднего уровня среднедневной доход увеличивается на 1,15% от своего среднего уровня; при повышении среднего возраста работников на 1% среднедневной доход уменьшается на 0,98% от своего среднего уровня. Следовательно, сила влияния средней заработной платы на среднедневной доход оказалась больше чем сила влияния среднего возраста работников

Задание для самостоятельного решения

***Задание 1.*** Построить уравнение множественной регрессии в стандартизированном и естественном виде, рассчитать частные коэффициенты эластичности и сравнить с 𝜷 – коэффициентами.

**Исходные данные**

Имеются данные по 30 предприятиям

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Признак | Среднее значение | Среднеквадратичное отклонение | Линейный коэффициент парной корреляции |
| Среднедневной доход *y*, руб.  | 515,8 | 74,8 | - |
| Среднедневная заработная плата одного работника *x1*, руб.  | 321,5 | 21,6 | $$r\_{yx\_{1}}=0,87$$ |
| Средний возраст работника *х2*, лет  | 34 | 0,51 | $$r\_{yx\_{2}}=-0,29$$$$r\_{x\_{1}x\_{2}}=-0,16$$ |