

## Индивидуальное домашнее задание (весенний семестр)

1. В условиях задачи 10 ИДЗ 1 (осенний семестр) найдите:
  - 1) Математическое ожидание и дисперсию случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - 2) Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$
  - 3) Математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $\mu$ , математическое ожидание и ковариацию случайных величин  $\mu_1$  и  $\mu_2$
2. В условиях задачи 12 ИДЗ 1 (осенний семестр) найдите
  - 1) Математическое ожидание и дисперсию случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - 2) Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - 3) Математическое ожидание случайной величины  $\mu$ .
3. В условиях задачи 10 ИДЗ 1 (осенний семестр) найдите:
  - 1) условное математическое ожидание с.в.  $\xi$  при условии  $\eta$ ;
  - 2) условное математическое ожидание с.в.  $\eta$  при условии  $\xi$ ;
4. В условиях задачи 12 ИДЗ 1 (осенний семестр) найдите условное математическое ожидание с.в.  $\eta$  при условии  $\xi$  и условное математическое ожидание с.в.  $\xi$  при условии  $\eta$ .
5. Выполните следующие задания:
  - 1) По заданным плотностям  $p_\xi(x)$  и  $p_\eta(y)$  найдите характеристические функции  $f_\xi(t)$  и  $f_\eta(t)$  случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ ; характеристическую функцию  $f_\mu(t)$  случайной величины  $\mu = \xi + \eta$
  - 2) По заданной характеристической функции  $f_\xi(t)$  вычислите математическое ожидание случайной величины  $\xi$  и дисперсию случайной величины  $\xi$ .
6. Посетитель тира платит  $a$  рублей за выстрел. При попадании в девятку получает выигрыш  $b$  рублей, при попадании в десятку получает выигрыш  $c$  рублей. Если стрелок не попадает ни в девятку, ни в десятку, то деньги ему не выплачиваются. Вероятности попадания в девятку, десятку и промаха равны  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  соответственно. Число посетителей равно  $n$ .  
С помощью **неравенства Чебышева**:
  - 1) найдите границы, в которых будет лежать суммарная прибыль владельца тира с вероятностью не менее  $\alpha$ ;
  - 2) найдите число посетителей тира, чтобы вероятность отклонения суммарной прибыли от среднего размера суммарной прибыли на величину не меньше  $\beta$  % (от средней суммарной прибыли) равнялась  $p$С помощью **центральной предельной теоремы** оцените вероятность того, что
  - 1) размер убытка у владельца тира будет лежать в пределах от  $m_1$  до  $m_2$  рублей;
  - 2) что суммарная прибыль окажется в пределах от  $n_1$  до  $n_2$  рублей.
7. По заданным выборкам  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  объема  $n = 50$  найти и построить:
  - 1) минимальный и максимальный элементы выборки, разброс выборки, статистический ряд;
  - 2) гистограмму, полигон относительных частот, эмпирическую функцию распределения (для выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$ );
  - 3) выборочные характеристики: среднее, дисперсию (смещенную и несмещенную) (по выборке и по статистическому ряду), медиану.
8. Известно, что выборка  $X_1, X_2, \dots, X_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью  $p_\xi(x)$  с неизвестным параметром. Найдите оценку неизвестного параметра методом моментов.
9. а) Известно, что выборка  $X_1, X_2, \dots, X_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\left(x\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами  $(a, b)$ .

б) Известно, что выборка  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a\pi x^2}} e^{-\frac{(\ln x - b)^2}{2a}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами  $(a, b)$ .

Найдите оценку максимального правдоподобия этих параметров

**10.** С помощью критерия отношения правдоподобия проверьте:

- 1) гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  о принадлежности выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  дискретному распределению с заданными параметрами.
- 2) гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  о принадлежности выборки  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  непрерывному распределению с заданными параметрами.

**11.** С помощью критерия  $\chi^2$  проверьте:

- 1) гипотезу о принадлежности выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  к заданному дискретному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).
- 2) гипотезу о принадлежности выборки  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  заданному непрерывному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).

**Распределение баллов (15 баллов)**

<b>Задача 1</b>	<b>Задача 2</b>	<b>Задача 3</b>	<b>Задача 4</b>	<b>Задача 5</b>	<b>Задача 6</b>
<b>1, 5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1 балл</b>	<b>1 балл</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>

<b>Задача 7</b>	<b>Задача 8</b>	<b>Задача 9</b>	<b>Задача 10</b>	<b>Задача 11</b>
<b>1,5 балл</b>	<b>1 балл</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>

13.	5.	Независимые непрерывные случайные величины $\xi$ и $\eta$ имеют плотности распределения $p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-x), 0 \leq x \leq 2 \\ 0, x < 0, x > 2 \end{cases}$ и $p_{\eta}(y) = \begin{cases} \ln 6 \cdot 6^{-y}, y \geq 0 \\ 0, y < 0, \end{cases}$ $f(t) = \frac{e^{-2t^2}}{1+2t^2}$																																					
	6.	$a = 150, b = 300, c = 600, \quad p_1 = 0,3, p_2 = 0,1, p_3 = 0,6, \quad n = 500,$ $\alpha = 0,75, \quad \beta = 25, \quad p = 0.05$ $m_1 = 0, \quad m_2 = 1000, n_1 = 100, n_2 = 1500$																																					
	7.	Выборка $X_1, \dots, X_n$ 5 8 5 5 10 7 6 7 9 7 8 7 7 6 8 6 3 7 5 9 11 9 6 10 5 12 5 7 9 3 5 12 7 7 5 4 3 6 7 9 4 4 5 10 4 12 2 6 11 8  Выборка $Y_1, \dots, Y_n$ 14.83 11.52 17.18 16.36 14.36 15.01 13.50 16.00 11.45 16.97 12.53 11.92 11.48 15.34 16.70 13.51 16.08 15.29 17.82 17.00 11.24 13.06 13.15 17.34 12.40 17.10 17.94 17.22 17.53 11.11 16.54 14.51 13.25 15.05 13.83 12.83 11.25 16.88 16.65 16.38 14.92 11.62 14.22 13.38 11.13 14.40 17.04 12.88 16.56 15.19																																					
	8.	Выборка $X_1, \dots, X_n$ – имеет плотность распределения $f(x) = \begin{cases} p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2^2 x e^{-\lambda_2 x}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$ При заданных значениях параметров $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 0,8$ найти оценку параметра $p$ . Таблица частот <table><tr><td>интер-валы</td><td>0-0.5</td><td>0.5-1</td><td>1-1.5</td><td>1.5-2</td><td>2-2.5</td><td>2.5-3</td><td>3-3.5</td><td>3.5-4</td><td>4-4.5</td><td>4.5-5</td></tr><tr><td>частоты</td><td>253</td><td>104</td><td>49</td><td>27</td><td>19</td><td>13</td><td>10</td><td>8</td><td>6</td><td>5</td></tr></table>	интер-валы	0-0.5	0.5-1	1-1.5	1.5-2	2-2.5	2.5-3	3-3.5	3.5-4	4-4.5	4.5-5	частоты	253	104	49	27	19	13	10	8	6	5															
	интер-валы	0-0.5	0.5-1	1-1.5	1.5-2	2-2.5	2.5-3	3-3.5	3.5-4	4-4.5	4.5-5																												
частоты	253	104	49	27	19	13	10	8	6	5																													
9.	По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров $a$ и $b$ <table><tr><td>интер-валы</td><td>1.1-1.7</td><td>1.7-2.3</td><td>2.3-2.9</td><td>2.9-3.5</td><td>3.5-4.1</td><td>4.1-4.7</td><td>4.7-5.3</td></tr><tr><td>частоты</td><td>12</td><td>49</td><td>59</td><td>44</td><td>22</td><td>10</td><td>4</td></tr></table> По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров $a$ и $b$ <table><tr><td>интер-валы</td><td>1.0-2.3</td><td>2.3-3.6</td><td>3.6-4.9</td><td>4.9-6.2</td><td>6.2-7.5</td><td>7.5-8.8</td><td>8.8-10.1</td><td>10.1-11.4</td><td>11.4-12.7</td><td>12.7-14.0</td></tr><tr><td>частоты</td><td>126</td><td>363</td><td>311</td><td>126</td><td>39</td><td>14</td><td>10</td><td>8</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	интер-валы	1.1-1.7	1.7-2.3	2.3-2.9	2.9-3.5	3.5-4.1	4.1-4.7	4.7-5.3	частоты	12	49	59	44	22	10	4	интер-валы	1.0-2.3	2.3-3.6	3.6-4.9	4.9-6.2	6.2-7.5	7.5-8.8	8.8-10.1	10.1-11.4	11.4-12.7	12.7-14.0	частоты	126	363	311	126	39	14	10	8	1	2
интер-валы	1.1-1.7	1.7-2.3	2.3-2.9	2.9-3.5	3.5-4.1	4.1-4.7	4.7-5.3																																
частоты	12	49	59	44	22	10	4																																
интер-валы	1.0-2.3	2.3-3.6	3.6-4.9	4.9-6.2	6.2-7.5	7.5-8.8	8.8-10.1	10.1-11.4	11.4-12.7	12.7-14.0																													
частоты	126	363	311	126	39	14	10	8	1	2																													
10.	Гипотеза $H_0$ --- биномиальное распределение $Binom(k = 30, p = 0.3)$ Гипотеза $H_1$ --- биномиальное распределение $Binom(k = 30, p = 0.4), \alpha = 0.101$ 10 9 6 11 9 10 12 6 12 7 12 7 10 8 8 8 7 13 7 6 10 10 6 14 6 10 10 11 7 9 6 8 7 6 9 10 5 6 8 5 7 6 13 9 11 11 10 8 13 9  Гипотеза $H_0$ --- Гамма-распределение $Gamma(\gamma = 4, \lambda = 0.2)$ Гипотеза $H_1$ --- Гамма-распределение $Gamma(\gamma = 4, \lambda = 0.25), \alpha = 0.105$ 28.88 18.73 2 1.91 14.42 31.47 20.92 7.18 17.96 18.73 11.09 18.77 13.98 11.05 11.30 14.63 30.19 18.56 8.25 7.05 11.04 17.18 30.42 28.45 24.49 18.56 29.45 12.31 20.01 18.87 57.96 19.90 20.92 18.08 27.60 14.80 30.83 20.06 10.74 29.17 13.02 39.72 22.61 12.91 28.13 23.21 15.86 11.83 16.88 9.59 17.47																																						

11.	<p>Распределение Пуассона с неизвестным параметром <math>\lambda</math>, <math>\alpha = 0.05</math></p> <p>Выборка <math>X_1, \dots, X_n</math></p> <table><tr><td>5</td><td>8</td><td>5</td><td>5</td><td>10</td><td>7</td><td>6</td><td>7</td><td>9</td><td>7</td></tr><tr><td>8</td><td>7</td><td>7</td><td>6</td><td>8</td><td>6</td><td>3</td><td>7</td><td>5</td><td>9</td></tr><tr><td>11</td><td>9</td><td>6</td><td>10</td><td>5</td><td>12</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>12</td><td>7</td><td>7</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>5</td><td>10</td><td>4</td><td>12</td><td>2</td><td>6</td><td>11</td><td>8</td></tr></table> <p>Равномерное распределение с параметрами <math>a</math> и <math>b</math>, <math>\alpha = 0.1</math></p> <p>Выборка <math>Y_1, \dots, Y_n</math></p> <table><tr><td>14.83</td><td>11.52</td><td>17.18</td><td>16.36</td><td>14.36</td><td>15.01</td><td>13.50</td><td>16.00</td><td>11.45</td><td>16.97</td></tr><tr><td>12.53</td><td>11.92</td><td>11.48</td><td>15.34</td><td>16.70</td><td>13.51</td><td>16.08</td><td>15.29</td><td>17.82</td><td>17.00</td></tr><tr><td>11.24</td><td>13.06</td><td>13.15</td><td>17.34</td><td>12.40</td><td>17.10</td><td>17.94</td><td>17.22</td><td>17.53</td><td>11.11</td></tr><tr><td>16.54</td><td>14.51</td><td>13.25</td><td>15.05</td><td>13.83</td><td>12.83</td><td>11.25</td><td>16.88</td><td>16.65</td><td>16.38</td></tr><tr><td>14.92</td><td>11.62</td><td>14.22</td><td>13.38</td><td>11.13</td><td>14.40</td><td>17.04</td><td>12.88</td><td>16.56</td><td>15.19</td></tr></table>	5	8	5	5	10	7	6	7	9	7	8	7	7	6	8	6	3	7	5	9	11	9	6	10	5	12	5	7	9	3	5	12	7	7	5	4	3	6	7	9	4	4	5	10	4	12	2	6	11	8	14.83	11.52	17.18	16.36	14.36	15.01	13.50	16.00	11.45	16.97	12.53	11.92	11.48	15.34	16.70	13.51	16.08	15.29	17.82	17.00	11.24	13.06	13.15	17.34	12.40	17.10	17.94	17.22	17.53	11.11	16.54	14.51	13.25	15.05	13.83	12.83	11.25	16.88	16.65	16.38	14.92	11.62	14.22	13.38	11.13	14.40	17.04	12.88	16.56	15.19
5	8	5	5	10	7	6	7	9	7																																																																																												
8	7	7	6	8	6	3	7	5	9																																																																																												
11	9	6	10	5	12	5	7	9	3																																																																																												
5	12	7	7	5	4	3	6	7	9																																																																																												
4	4	5	10	4	12	2	6	11	8																																																																																												
14.83	11.52	17.18	16.36	14.36	15.01	13.50	16.00	11.45	16.97																																																																																												
12.53	11.92	11.48	15.34	16.70	13.51	16.08	15.29	17.82	17.00																																																																																												
11.24	13.06	13.15	17.34	12.40	17.10	17.94	17.22	17.53	11.11																																																																																												
16.54	14.51	13.25	15.05	13.83	12.83	11.25	16.88	16.65	16.38																																																																																												
14.92	11.62	14.22	13.38	11.13	14.40	17.04	12.88	16.56	15.19																																																																																												